

Cada questão vale 2.0 pontos. Sua nota será a soma das CINCO melhores questões

1. Considerando  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$  e o produto de funções:  $(f, g) = \sum_{i=0}^3 f(x_i)g(x_i)$ . Encontre os três primeiros polinômios mônicos ortogonais ( $p_0$ ,  $p_1$  e  $p_2$ ) com relação a este produto.

**Resposta:** Fazendo  $p_0 = 1$ , da equação  $\langle p_0, p_1 \rangle = 0$  temos  $p_1(x) = x - 3/2$  e resolvendo  $\langle p_0, p_2 \rangle = 0$  e  $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$  temos  $p_2(x) = x^2 - 3x + 1$

2. Considere a tabela: Se  $f_1(x) = x^2 - 1$  e  $f_2(x) = 4 - x$ , qual destas duas

x	0	1	2	3
y	1	0	2	1

funções se ajusta melhor à tabela pelo critério dos mínimos quadrados? Qual é o polinômio de grau menor ou igual a dois que melhor se ajusta a tabela?

**Resposta:** O resíduo quadrático para a função  $f_1$  é 54 e para a função  $f_2$  é 18. Assim  $f_2$  é uma melhor alternativa. Resíduo quadrático =  $\sum (f(x_i) - y_i)^2$ . Para a segunda parte o melhor é usar os polinômios do exercício anterior já que eles são ortogonais.  $f(x) = ap_0(x) + bp_1(x) + cp_2(x)$  então  $a = \langle y, p_0 \rangle / \langle p_0, p_0 \rangle = 1$ ,  $b = \langle y, p_1 \rangle / \langle p_1, p_1 \rangle = 1/5$  e  $c = \langle y, p_2 \rangle / \langle p_2, p_2 \rangle = 0$ . Assim  $f(x) = 0.2x + 0.7$

3. Dada a tabela: Fazer a tabela de diferenças simples e achar o polinômio

x	0	1	2	3
y	-1	2	9	20

interpolador na forma de Newton.

<b>Resposta:</b>	$\Delta^1$	3	7	11
	$\Delta^2$	4	4	
	$\Delta^3$		0	

$$p(x) = -1 + 3.(x) + 4/2(x)(x - 1) = 2x^2 + x - 1.$$

4. Considerando  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$ . Sendo  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$  e  $L_3(x)$  os polinômios de Lagrange com relação a estes pontos, mostre que eles são linearmente independentes.

**Resposta:**  $\sum_{k=0}^3 \alpha_k L_k(x) = 0 \implies \sum_{k=0}^3 \alpha_k L_k(j) = \alpha_j = 0$  portanto, por definição de independência linear, o conjunto dos polinômios de Lagrange são LI.

5. Calcule a integral  $\int_1^3 1/(5x-3)dx$  usando o método dos trapézios com duas repetições e faça uma avaliação do erro cometido. **Resposta:**  $T_2(f, 1, 3) = h/2(f(1) + f(3) + 2f(2)) = 73/168$  com  $h = (3 - 1)/2 = 1$ .

Erro:  $E_2 = -2.h^3.f^{(2)}(\xi)/12$  como  $f^{(2)}(x) = 50/(5x - 3)^3$  podemos avaliar  $|E| \leq 50/48$ . Tem avaliações melhores mas esta está correta

6. Seja  $f(x)$  uma função real de período  $2\pi$  que no intervalo  $[-\pi, \pi]$  é definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ache o desenvolvimento trigonométrico de  $f$  até o harmônico de segunda ordem e ache a amplitude do harmônico de segunda ordem. **Resposta:**  $f(x) = 1 + 4/\pi(\cos(x) + \sin(x) + \sin(2x))$  e a amplitude  $A_2 = 4/\pi$