Um Minicurso em Teoria dos Jogos

Pedro Aladar Tonelli

Sumário

CAPíTULO 1

Introdução

A *Teoria dos Jogos* reúne uma coleção de técnicas e métodos matemáticos para modelos de situações de conflitos. Estas situações são as que decisões a tomadas por uma parte (ou jogador) alteram os resultados de todas as outras partes envolvidas. Desta forma, as decisões tomadas por um indivíduo, ou jogador, depende do conjunto das atitudes escolhidas pelos outros jogadores, de forma que não se trata de um problema de otimização. Claro que os jogos de xadrez ou poquer enquadram-se nesses esquemas, mas nem sempre o objetivo da teoria é apontar um vencedor ou a melhor estratégia. Acertaríamos mais em dizer que a teoria se preocupa em dar uma classificação das situações de jogo e encontrar situações especiais. Assim a competição econômica, competição política, disputa por recursos biológicos, evolução genética encontram na teoria dos jogos um intrumento de análise.

Sem dúvidas, que a teoria econômica forneceu o material básico para o seu desenvolvimento. Históricamente os primeiros resultados aparecem em trabalhos de Walras no final do século XIX e Borel no começo do século passado. Porém a teoria só ganhou este nome e teve um grande destaque a partir dos trabalhos do matemático John Von Neumann e do economista Oskar Morgenstern na década de 1940. Até 1960 a teoria teve um grande avanço com matemáticos com Nash e Aumann trabalhando na área.

1. Jogos não cooperativos, conceitos principais e exemplos

Tradicionalmente a teoria divide os tipos de jogos conforme o modelo matemático que se vai usar. Em primeiro lugar há uma divisão entre jogos cooperativos e não cooperativos. Nos jogos cooperativos admite-se que os jogadores ajustem entre eles uma escolha de estratégia. Não abordamos os jogos cooperativos aqui. Os jogos não cooperativos cada jogador escolhe sua estratégia sozinho. Os jogos cooperativos têm ainda uma forma extensiva e uma forma estratégica (ou normal). Na forma extensiva há uma evolução dinâmica do jogo em que a cada instante um jogador escolhe uma atitude (faz sua jogada). Também não abordaremos esta forma aqui. A outra forma, ou seja, a forma estratégica do jogo é a que estudaremos neste minicurso.

Em primeiro lugar vamos considerar um conjunto finito de n jogadores que denotamos por $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Para cada jogador teremos um conjunto de estratégias, digamos que Σ_i é o conjunto de estratégias do jogador p_i. Assumiremos que para cada jogador este conjunto de estratégias é finito e mais tarde o chamaremos de conjunto de estratégias puras. Um jogo na forma estratégica é determinado por uma função

$$\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$$

que chamaremos função de pagamento pois para cada escolha de estratégias puras $(u_1, \ldots, u_n) \in \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ as componentes da função representam os pagamentos de cada jogador. Assim $\Pi_i(u_1, \ldots, u_n)$ é o pagamento que recebe o i-ésimo jogador uma vez que todos os jogadores se decidiram por suas estratégias.

Como não poderia deixar de ser o primeiro exemplo é o clássico jogo dos prisioneiros.

Dois prisioneiros são mantidos em escritórios separados e o promotor do caso oferece a cada um o seguinte: caso ele testemunhe contra o comparsa e este não testemunhar contra ele, sua pena será de 1 ano de prisão cabendo a seu colega cumprir 10 anos. Caso o comparsa também testemunhe contra ele sua pena será de 5 anos. Se, todavia, ambos se recusarem a testemunhar um contra o outro, ambos passarão dois anos na cadeia.

Este é um jogo com dois jogadores: cada um dos prisioneiros. Cada jogador (ou prisioneiro) possui duas estratégias: testemunha (T) contra o outro ou não (N). O pagamento será o número de anos na prisão (pagamento negativo). A função de pagamento está expressa na forma de uma tabela (veja a tabela (1))

	N	T
N	$(-2, -2)$	$(-10, -1)$
T	$(-1, -10)$	$(-5, -5)$

TABELA 1. Jogo dos prisioneiros

Note que no caso de haver consulta entre os jogadores talvez eles escolhessem a estratégia (N, N), mas como o jogo é não cooperativo eles não podem ter certeza da estratégia já que há um prêmio por delação.

Note que se um escolhe a estratégia N isto pode resultar em dez anos de cadeia.

2. Conceito de solução: Equilíbrio de Nash

vamos considerar um jogo com n jogadores $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e uma função de pagamento $\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$ com o conjunto das estratégias Σ_i. Um ponto $\sigma = (u_1, \ldots, u_n)) \in \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ vamos chamar de um perfil de estratégias do jogo. O objetivo da teoria dos jogos seria achar o "melhor" perfil de estratégia do jogo e o valor do pagamento do jogo neste perfil. O grande problema é: melhor em que sentido? Este não é um conceito fácil de definir, mas vamos trabalhar com o conceito de equilíbrio de Nash. Neste caso, encontramos um perfil de estratégias com que conseguimos convencer cada jogador separadamente de que não é bom ele mudar de estratégia.

Para fazer a definição formal de equilíbrio consideremos um perfil qualquer $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Para cada jogador i vamos definir quais seriam a melhor estratégia deste jogador em presença deste perfil. Isto dará o conjunto de melhor resposta.

$$
\begin{aligned}
M_i(u) = \{v_i \in \Sigma_i : \Pi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) = \\
\max_{v \in \Sigma_i} \Pi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n)\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Note que $M_i(u) \in \Sigma_i$, mas não necessáriamente teremos que $u_i \in M_i(u)$. Uma vez definido o conjunto de melhor resposta ao perfil u para cada jogador. Podemos definir o conjunto das melhores respostas

$$
M(u) = M_1(u) \times \cdots M_n(u) \subset \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \tag{2}
$$

Se denotarmos o conjunto das estratégias $\mathbf{\Sigma} = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$. A definição acima nos dá uma função a valores em conjuntos $M : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}$. Como vimos acima, não é necessário que ocorra $u \in M(u)$, quando isto acontecer diremos que u é um ponto de equilíbrio do jogo, ou equilíbrio de Nash. Na teoria das multifunções um tal ponto é chamado ponto fixo de M. Assim achar os equilíbrios de um jogo significa encontrar os pontos fixos da multifunção M.

Vamos interpretar o ponto de equilíbrio de um jogo. Suponha que temos um perfil u tal que $u \in M(u)$. Do ponto de vista do jogador p_i isto também significa que a estratégia $u_i \in M_i(u) \subset \Sigma_i$, ou seja, u_i é a melhor resposta do jogador para o perfil u. Assim se ele muda de estratégia e os demais jogadores permanecem com a estratégia u_j, ele não pode melhorar o valor de sua função de pagamento Π_i. Assim para um perfil de equilíbrio, se um jogador mudar sozinho de estratégia ele corre o risco de rebaixar o seu ganho individual Π_i. Pode existir um perfil em que todos os jogadores ganham mais que num perfil de equilíbrio, mas aí cada jogador precisaria do auxílio dos outros.

Vejamos o que acontece no caso do jogo dos prisioneiros. Neste caso o perfil $u = (T, T)$ (os dois prisioneiros testemunham contra o outro) é um perfil de equilíbrio. Vejamos: com este perfil o "pagamento" do prisioneiro 1 é 5 anos de cadeia. Caso ele mude de estratégia e o segundo prisioneiro mantenha a dele o novo perfil seria (N, T) e neste caso o primeiro prisioneiro pegaria 10 anos de cadeia o que é pior. A mesma coisa vale para o segundo prisioneiro. Claro que o perfil (N, N) daria um pagamento melhor para os dois do que o perfil de equilíbrio. Mas neste caso, cada jogador pode melhorar ainda mais seu pagamento caso ele desvie da estratégia do perfil e o outro mantenha.

Encontrar os equilíbrios de Nash é uma parte substancial da teoria dos jogos não cooperativos. Em muitos casos teoremas de pontos fixos nos fornecem métodos para encontrar ou mostrar a existência de pontos fixos, em outros casos precisamos de algorítmos específicos para achar os equilíbrios de Nash. Um método que ilustraremos mais tarde chamaremos de método dos perfís racionais. Diremos que um perfil $u \in \mathbf{\Sigma}$ satisfaz a propriedade da racionalidade individual para o jogador i quando

$$\Pi_i(u) = \max_{v \in \Sigma_i} \Pi_i(u_1, \ldots, v, \ldots, u_n) \tag{3}$$

Definimos o conjunto de perfis racionais de i como sendo:

$$R_i = \{u \in \mathbf{\Sigma} : u \text{ tem a prop. de racionalidade individual } \} \subset \mathbf{\Sigma} \tag{4}$$

O conjunto $N = \cap_{i=1}^n R_i$ é o conjunto de todos os perfís de equilíbrio do jogo. Um problema que podemos encontrar que este conjunto pode ser grande. E aí teremos um segundo problema que é selecionar um ponto de equilíbrio de N com algum critério.

Diremos que um jogo é de soma zero quando $\sum_i \Pi_i(u) = 0$ para todo $u \in \mathbf{\Sigma}$, caso contrário diremos que o jogo é sem soma zero. Nos próximos capítulos veremos algumas técnicas para definir solução e achar equilíbrios quando o jogo tem apenas dois jogadores. O caso de jogos de soma zero faremos no próximo capítulo e o caso sem soma zero faremos no outro capítulo.

CAPíTULO 2

Jogos de soma zero

Neste capítulo vamos considerar os jogos com dois jogadores e soma zero. Para facilitar a notação vamos chamar de Luiza a primeira jogadora e de Carlos o segundo jogador. Luiza (L) será o jogador 1 e Carlos (C) o jogador 2. Os conjuntos de estratégias puras de Luiza e Carlos serão respectivamente

$$\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ e } \Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$$

Como o jogo é de soma zero a função de pagamento terá a forma

$$\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), -\Pi_1(e_i, f_j)) \tag{5}$$

ou seja $\Pi_2(e_i, f_j) = -\Pi_1(e_i, f_j)$. Denotando $a_{ij} = \Pi_1(e_i, f_j)$ chamaremos a matriz $n \times m$ dada por $A = (a_{ij})$ de matriz de pagamento do jogo. Note que na matriz estão dadas apenas os pagamentos de Luiza. As estratégias de Luiza são as linhas da matriz, diremos então que L é a jogadora das linhas. Cada coluna representa uma estratégia para Carlos. Carlos será o jogador das colunas.

Se, por exemplo, Luiza e Carlos estão jogando Pedra, Papel e Tesoura, eles tem o mesmo conjunto de estratégias $\Sigma = \{R, P, T\}$ (Pedra=R) a matriz deste jogo poderia ser:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Veremos como, nestes casos, achar os equilíbrios.

1. Elementos de Sela, valor do jogo

Suponha que o par de estratégias (e_i, f_j) seja um par de equilíbrio para o jogo de soma zero entre Luiza e Carlos. Neste caso temos que Luiza não ganha nada se ela escolher outra estratégia e_k e carlos mantiver a estratégia f_j. Como o pagamento de Luiza para o perfil (e_i, f_j)

é a_{ij} devemos ter que

$$a_{ij} \geq a_{kj} \forall k \in \{1, \ldots, n\} \tag{7}$$

ou seja $a_{ij} = \max a_{kj}$, ou a_{ij} é o maior valor na coluna j.

Repetiondo o raciocínio para Carlos, este não deve ganhar nada se ele escolher uma outra estratégia f_l e Luiza mantiver e_i. Como o pagamento de Carlos para o perfil (e_i, f_j) é $-a_{ij}$ devemos ter

$$-a_{ij} \geq -a_{il} \forall l \in \{1, \ldots, m\} \tag{8}$$

ou seja $a_{ij} = \min a_{il}$ ou a_{ij} é o menor valor na linha i da matriz de pagamento A.

Dada uma matriz $A \in M_{n\times m}$ um elemento a_{ij} é chamado elemento de sela da matriz A quando satisfaz as duas relações simultaneamente:

$$a_{ij} = \max_k a_{kj} \text{ para } k \in \{1, \ldots, n\} \tag{9}$$

$$a_{ij} = \min_l a_{il} \text{ para } l \in \{1, \ldots, m\} \tag{10}$$

Vejamos um exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{11}$$

tem o elemento a_{22} como elemento de sela. Neste caso ele é único, mas uma matriz pode ter vários elementos de sela e pode não ter nenhum. A matriz de pagamento do jogo de Pedra, Papel ou Tesoura, não tem elemento de sela, o que significa que este jogo não tem um perfil de equilíbrio com estratégias puras.

A busca de um elemento de sela numa matriz é simples. Primeiro percorremos as colunas e, em cada uma delas marcamos os maiores elementos. Depois marcamos os menores elementos de cada linha. Os elementos que receberem duas marcas serão de sela.

No caso de haver muitos elementos de sela temos os seguinte resultado.

Proposição 1. *Se a_{ij} e a_{pq} forem diferentes elementos de sela de uma matriz A, então a_{pj} e a_{iq} também são elementos de sela e $a_{ij} = a_{pq}$*

Este resultado é interessante pois afirma que no caso de existirem muitos elementos de sela (que correspondem a perfis de equilíbrio), todos eles dão o mesmo valor de pagamento para Luiza.

Bem, da definição segue:

$$a_{ij} \leq a_{iq} \leq a_{pq} \leq a_{pj} \leq a_{ij}$$

e esta sequência de desigualdades prova o teorema.

Se a matriz de pagamento de um jogo A tem elementos de sela a_{ij}, chamaremos este valor de *valor do Jogo* . É o quanto Luiza ganha no caso da escolha de um equilíbrio de Nash.

2. Estratégias mistas, estratégias ótimas

É muito comum que a matriz de um jogo, como vimos no parágrafo anterior, não possua um elemento de sela. E neste caso também não existirão perfís de equilíbrio de estratégias puras. Neste caso podemos pensar que o jogo vá se repetir muitas vezes, e poderemos escolher uma estratégia diferente em cada jogo. Podemos determinar antes com que proporção usaremos cada uma das estratégias puras, ou com que probabilidade a escolheremos. A distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras chamaremos de estratégias mistas.

Consideremos, como na seção anterior, um jogo entre Luiza e Carlos, onde Luiza tem o conjunto de estratégias puras $\Sigma_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ e Carlos dispõe das escolhas $\Sigma_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$ e, como o jogo é de soma zero, a função de pagamento é dada por uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}$. Definiremos a extensão mista deste jogo mudando o conjunto das estratégias puras para o conjunto das estratégias mistas.

O conjunto das estratégias mistas de Luiza será

$$M_1 = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$$

o conjunto das estratégias mistas de Carlos

$$M_2 = \{(q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$$

A interpretação destas estratégias mistas é de que p_i é a probabilidade de Luiza escolher a estratégia pura e_i. E assim q_j é a probabilidade de Carlos escolher f_j. Como as estratégias mistas são vetores vamos denotá-los por $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ e por $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$.

Vejamos como fica a definição de pagamento dos jogadores no caso de estratégias mistas. Como o jogo é de soma zero basta definir o pagamento para Luiza. Se Luiza escolhe uma estratégia mista $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ e Carlos uma estratégia mista $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, então a probabilidade de que o perfil de estratégia pura (e_i, f_j) seja sorteado é $p_i q_j$ e com isto o ganho de Luiza seria a_{ij}. O valor esperado do ganho de Luiza é então:

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$$

O pagamento de Carlos será neste caso: $F(\mathbf{p},\mathbf{q}) = -E(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Este novo esquema de jogo chamaremos de extensão mista do jogo dado pela matriz A. Note que este jogo contém as estratégias puras do jogo original que são obtidas escolhendo-se as estratégias mistas com algum $p_i = 1$.

Vamos procurar as estratégias de equilíbrio neste novo contexto. A generalização dos elementos de sela agora serão as estratégias maxmin.

Primeiro faremos uma análise do ponto de vista da Luiza. Suponha que Luiza escolha uma estratégia mista $\mathbf{p}$ e algum espião passe a informação para Carlos. Então Carlos irá escolher a estratégia $\mathbf{q}$ que deixará $E(\mathbf{p},\mathbf{q})$ menor possível. Assim Luiza sabe que qualquer que seja a estratégia que ela adotar ela irá receber como pagamento $\min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Como este valor ainda depende de $\mathbf{p}$ o qual Luiza pode escolher, então escolhendo bem a estratégia $\mathbf{p}$ Luiza tem certeza que ganha:

$$v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p},\mathbf{q}) \tag{12}$$

Este número será chamado valor de linha da matriz A e representa o quanto que Luiza garante que pode ganhar.

Podemos fazer um raciocínio simétrico para o jogador Carlos. Se Carlos escolhe $\mathbf{q}$ e um espião revela a escolha a Luiza, de maneira que Luiza tem a possibidade de escolher $\mathbf{p}$ para ganhar o valor maior possível $\max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Mas como Carlos ainda escolhe $\mathbf{q}$, ele garante que seu pagamento não é pior que:

$$v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p},\mathbf{q}) \tag{13}$$

Este número será chamado valor de coluna da matriz A. Diremos que uma estratégia mista $\mathbf{r}$ para Luiza é uma estratégia ótima para Luiza se

$$v_L(A) = \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{r},\mathbf{q}) \tag{14}$$

Da mesma forma uma estratégia ótima para Carlos é uma estratégia mista $\mathbf{s}$ tal que

$$v_C(A) = \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p},\mathbf{s}) \tag{15}$$

No caso geral, o problema da existência das estratégias ótima é resolvida usando teoremas de programação linear e em particular temos:

Teorema 1. *Dada uma matriz A temos que existem estratégias mistas ótimas para o jogador das linhas e das colunas e $v_C(A) = v_L(A)$.*

Bem, vejamos finalmente o que as estratégias ótimas têm a ver com os equilíbrios de um jogo com duas pessoas e soma zero.

Suponha que **r** seja uma estratégia ótima para Luiza e **s** uma estratégia ótima para Carlos. Então usando as definições de estrtégia ótima temos

$$v_L(A) \leq E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \leq v_C(A)$$

e por causa do teorema minmax temos, de fato:

$$v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$$

Supondo que Luiza mude sua estratégia e Carlos continue com sua estratégia ótima teremos que

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$$

ou seja Luiza não ganha se desviar da estratégia ótima sozinha.

Da mesma forma se Carlos desviar de sua estratégia ótima e Luiza insistir nela teremos

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_L(A) \leq E(\mathbf{r}, \mathbf{q})$$

ou seja um par de estratégias ótimas formam um perfil de equilíbrio. Podem existir mais de uma estratégia ótima para cada jogador mas para cada par de estratégias ótimas o prêmio de cada jogador é $v_L(a)$ que chamaremos de valor do jogo.

A forma de encontrar as estratégias ótimas é via o método simplexo de programação linear. Agora devido a uma simples observação podemos sempre resolver os jogos cujas matrizes de pagamentos são 2×2.

Proposição 2. *Definindo:*

$$E(i, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$$

e

$$E(\mathbf{p}, j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i$$

então:

$$v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{i} E(i, \mathbf{q}) \tag{16}$$

$$v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{j} E(\mathbf{p}, j) \tag{17}$$

Como dissemos usaremos esta proposição na próxima seção.

3. Jogos com dois jogadores e par de estratégias mistas

Vamos ver como podemos resolver os jogos dados por matrizes $2x2$. Neste caso o conjunto das estratégias mistas de Luiza é

$$M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$$

e de Carlos

$$M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$$

Veremos através de um exemplo como calcular o valor do jogo e as estratégias ótimas (que serão os equilíbrios neste caso).

Vamos supor que a matriz de jogo seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Vamos primeiro raciocinar como Luiza. Para cada escolha $\mathbf{p} = (x, 1-x)$ de Luiza, a melhor resposta de Carlos é ou a estratégia pura que corresponde a primeira coluna ou a estratégia pura que corresponde a segunda coluna, depende de x.

Neste caso temos que

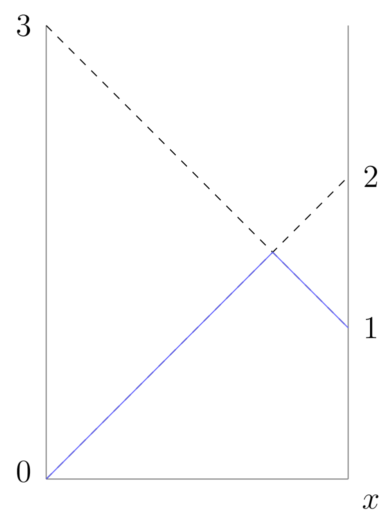
$$\min_j E(\mathbf{p}, j) = \min\{E(x,1), E(x,2)\}$$

onde

$$E(x,1) = 1.x + 3.(1-x) = -2x + 3 \tag{19}$$

$$E(x,2) = 2x \tag{20}$$

A função que é o mínimo entre estas duas funções está ilustrada no gráfico.



É fácil ver que o máximo desta função ocorre na intercecção das retas $E(x,1)$ e $E(x,2)$ então neste caso temos

$$v_L(A) = \max_p \min_j E(\mathbf{p}, j) = \max_{x\in[0,1]} \min\{E(x,1), E(x,2)\} = 3/2$$

e a estratégia ótima de Luiza é $(3/4, 1/4)$

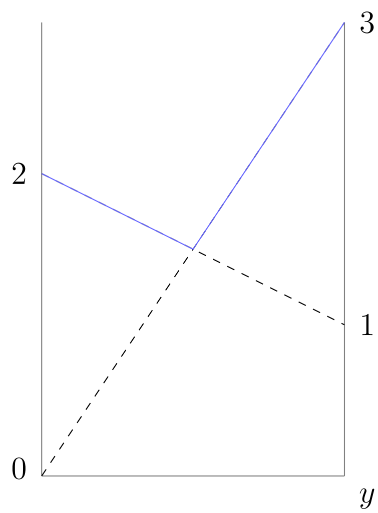
Procedemos da mesma forma para achar a estratégia ótima de Carlos. Para cada estratégia mista $\mathbf{q} = (y, 1-y)$ de Carlos teremos as respostas com estratégias puras de Luiza corresondentes a primeira linha ou segunda linha. Se Luiza escolha a primeira linha o pagamento de Carlos será

$$E(1,y) = 1.y + 2.(1-y) = -y + 2 \tag{21}$$

E se Luiza escolhe a segunda linha o pagamento de Carlos será:

$$E(2,y) = 3y \tag{22}$$

Luiza escolherá de forma a maximizar seu ganho, portanto a função de escolha de Luiza será $\max\{E(1,y), E(2,y)\}$ que podemos também ver num gráfico.



O valor de coluna da matriz será

$$V_C(A) = \min_y \max\{E(1,y), E(2,y)\} \tag{23}$$

O que neste caso também dá $V_C(A) = 3/2$ e a estratégia ótima de Carlos é $(1/2, 1/2)$.

Os casos ficam mais complicados quando os jogadores têm mais de uma duas estratégias. Mas existem casos em que podemos reduzir a matriz de jogo.

4. Dominância e caso com mais de duas estratégia

Suponhamos que Luiza possua as estratégias puras $e_i, e_k \in \Sigma_1$ mas que satisfaçam a seguinte relação: Para qualquer estratégia pura f_j de Carlos temos que:

$$\Pi_1(e_i, f_j) \geq \Pi_1(e_k, f_j)$$

Ou seja, entre a estratégia e_i e e_k Luiza deve sempre preferir a primeira pois esta lhe paga mais. Dizemos que a estratégia e_i domina a estratégia e_k, ou e_k é dominada por e_i.

Na matriz de pagamento A esta relação se traduz na condição:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\}$$

neste caso dizemos que a linha i domina a linha k, ou a linha k é dominada por i.

Como seria a relação de dominância para Carlos. Neste caso uma estratégia pura f_j domina outra estratégia pura f_l de Carlos se para toda estratégia pura e_i de Luiza temos a relação:

$$\Pi_1(e_i, f_j) \leq \Pi_1(e_i, f_l)$$

Isto é, qualquer que seja a estratégia de Luiza, Carlos "perde" menos escolhendo a estratégia f_j ao invés de f_l. Esta relação, traduzida para a matriz de pagamento A fica

$$a_{ij} \leq a_{il} \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}$$

e dizemos que a coluna j domina a coluna l, ou esta última é dominada por j.

O ponto é que, na busca por suas estratégias mistas ótimas os jogadores podem desprezar suas estratégias dominadas já que qualquer ponderação nestas estratégias seriam melhor aplicadas se fossem somadas às estratégias que a dominam. Assim para achar as estratégias mistas ótimas e o valor do jogo dado por uma matriz A podemos reduzir esta matriz retirando as linhas e colunas dominadas. Com esta técnica podemos tentar chegar ao caso estudado na seção anterior.

Vejamos um exemplo. Se a matriz de jogo for dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

neste caso vemos que a terceira linha da matriz é dominada pela primeira linha. Podemos reduzir a matriz A e garantir que na estratégia de equilíbrio de Luiza (p_1, p_2, p_3) devemos ter $p_3 = 0$. Depois desta redução a matriz resultante fica assim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

agora vemos que a terceira coluna é dominada pela segunda e concluimos que a estratégia ótima de Carlos será um vetor da forma $(q_1, q_2, 0)$. A matriz após esta segunda redução é a mesma que resolvemos na seção anterior. E daí tiramos o valor do jogo e as demais ponderações para a estratégia ótima.

No próximo exemplo conseguimos reduzir a matriz um pouco mas não até ela se tornar 2×2.

Vamos achar a solução do jogo de soma zero dado pela matriz de pagamento

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Em primeiro lugar podemos reduzir a matriz já que a terceira linha é dominada pela segunda. A ponderação da terceira estratégia de Luiza será zero e a matriz reduzida será:

$$A_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz não tem mais nem linhas nem colunas dominadas, então não pode ser reduzida, mas conseguimos calcular a estratégia ótima de Luiza já que só precisamos ponderar entre a primeira e segunda estratégias.

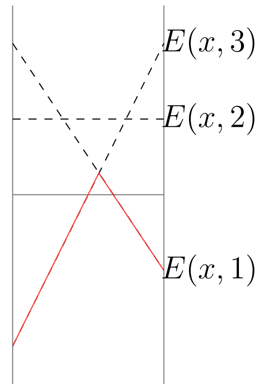
Para calcular a estratégia ótima $(x, 1 - x, 0)$ de Luiza fazemos:

$$E(x, 1) = 2 - 3x \tag{24}$$

$$E(x, 2) = 1 \tag{25}$$

$$E(x, 3) = 4x - 2 \tag{26}$$

O gráfico abaixo ilustra estes pagamentos dos quais só nos interessa o mínimo.



O valor de linha da matriz é $2/7 = 0.285$ (que será o valor do jogo) e a estratégia ótima de Luiza é $(4/7, 3/7, 0)$, que foram obtidos pela intersecção das retas $E(x,1)$ e $E(x,3)$. A estratégia ótima (y_1, y_2, y_3) do jogador Carlos deve ter $y_2 = 0$, pois vemos pelo gráfico que qualquer ponderação para a segunda estratégia eleva os ganhos de Luiza se ela escolhe a estratégia ótima. Então a estratégia de Carlos será da forma $(y, 0, 1-y)$. Usando $E(1,y) = -3y + 2$ e $E(2,y) = 4y - 2$ teremos a estratégia ótima do Carlos como $(4/7, 0, 3/7)$.

Esta técnica ilusta o caso geral quando a matriz de pagamento de um jogo é $2 \times m$ ou $n \times 2$. Realmente não é difícil generalizar. Como dissemos antes o caso geral de uma matriz $n \times m$ quando esta não tem elementos de sela e não puder ser reduzida deve ser resolvido usando algorítmos de programação linear.

CAPíTULO 3

Jogos sem soma zero

Continuaremos, neste capítulo, a estudar os jogos com dois jogadores mas agora não há uma relação entre os pagamentos dos dois jogadores. Neste caso se $\Sigma_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ forem, como antes, os conjuntos de estratégias puras de Luiza e Carlos a função de pagamento será

$$\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$$

Como não há relação entre Π_1 e Π_2 a função de pagamento ficará definida por duas matrizes $n \times m$; a matriz de pagamento de Luiza (ou jogador 1) $A = (a_{ij})$ e a matriz de pagamento de Carlos $B = (b_{ij})$. Os conceitos de estratégias mistas e extensão mistas são os mesmos que no capítulop anterior. A função de pagamento para as estratégias mistas fica assim: Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q} \tag{27}$$

e o pagamento de Carlos será

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q} \tag{28}$$

Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento. No entanto, Luiza pode estar interessada em calcular sua estratégia ótima maxmin, e para isso utilizará a matriz A como se fora um jogo de soma zero. Carlos, por sua vez, também pode ter interesse em calcular sua estratégia ótima maxmin usando sua matriz de pagamento B, pois assim ele calcula o valor do jogo (como se fosse um jogo de soma zero) que é o menor valor possível que ele ganha ante qualquer estratégia de Luiza. Mas deve-se lembrar que a matriz B desta vez é o ganho de fato para Carlos, apesar dele escolher as colunas. Então para saber o valor do jogo para Carlos e achar sua estratégia ótima maxmin usamos as técnicas do capítulo anterior para a matriz B^t.

Um fato importante é que desta vez o par de estratégias ótimas maxmin não é um perfil de equilíbrio, então usaremos outras estratégias para achar o perfíl de equilíbrio.

1. Exemplos com matrizes 2×2

Nesta seção vamos estudar o caso em que cada um dos jogadores tem apenas duas estratégias puras e assim as matrizes A e B são 2×2. Este foi o caso do jogo dos prisioneiros. Para que um par de estratégias puras (e_k, f_l) seja um perfil de equilíbrio de Nash devemos ter

$$a_{kl} \geq a_{il} \forall i \text{ e } b_{kl} \geq b_{kj} \forall j$$

Então para descobrirmos se existe equíbrios de estratégias puras, marcamos os maiores elementos em cada coluna de A e os maiores elementos em cada linha de B, se existir uma posição kl em que a_{kl} e b_{kl} estiverem marcados então (e_k, f_l) será um equilíbrio. Claro que pode não existir.

Mais interessante é encontrar equilíbrios na extensão mista. Neste caso os conjuntos de estratégias serão

$$M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\} \text{ e } M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$$

As funções de pagamentos dependerão só de $x, y \in [0,1]^2$, ou seja:

(29)
$$E(x,y) = (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$$

(30)
$$F(x,y) = (b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$$

Neste caso temos dois conjuntos de perfís racionais, um para Luiza e outro para Carlos. Lembrando que os perfís de estratégias agora são associados a pares $(x, y) \in [0,1]^2$ teremos:

$$R_1 = \{(x,y) \text{ tal que } E(x,y) = \sup_{\bar{x} \in [0,1]} E(\bar{x}, y)\} \tag{31}$$

$$R_2 = \{(x,y) \text{ tal que } F(x,y) = \sup_{\bar{y} \in [0,1]} F(x, \bar{y})\} \tag{32}$$

Os pontos de equilíbrio de Nash se encontram verificando como é o conjunto $R_1 \cap R_2$. Veremos este Cálculo para dois exemplos.

No primeiro jogo Luiza e Carlos estão dirigindo seus carros por uma avenida em sentido contrário quando chegam simultaneamente a um cruzamento. Tanto Luiza quanto Carlos desejam fazer a conversão à esquerda, de modo que para um prosseguir o outro deve esperar. Neste jogo o objetivo é fazer a conversão o mais rápido possível. Os dois jogadores têm o mesmo conjunto de estratégias puras: ou esperam o outro fazer a conversão (E) ou prosseguem sem esperar (P). Vamos escrever as funções de pagamentos para estas estratégias. Primeiro para Luiza e depois para Carlos. Se Luiza escolhe esperar Carlos passar e depois faz a conversão então ele terá um atraso igual ao tempo que Carlos leva para concluir a manobra. Digamos que esse tempo seja t_2. Definimos então o pagamento de Luiza para o perfil (E, P) como sendo $-t_2$. Se, no entanto, Carlos resolver esperar também haverá um lapso de tempo ϵ em que os dois ficam indecisos até que alguém resolva prosseguir e o outro esperar. Digamos que os dois tenham a mesma disposição de prosseguir ou esperar, então se Carlos espera Luiza terá só um atraso de ϵ se Luiza espera terá um atraso de $\epsilon + t_2$ como estes eventos ocorrem com a mesma probabilidade o pagamento de Luiza no caso do perfil (E, E) é $-t_2/2 - \epsilon$. Agora Luiza decide prosseguir. Se Carlos, neste caso, opta por esperar então Luiza não sofrerá nenhum atraso e seu pagamento será 0. Mas se Carlos decidir prosseguir, eles logo perceberão que não será possível concluir a virada, se entreolharão, se xingarão até que resolva ceder e esperar. Supondo que o tempo que ocorre tudo isso é δ, e os dois tenha a mesma motivação então a probabilidade de que Luiza espera é $1/2$ e a probabilidade que Luiza prossiga é $1/2$ também e neste caso o atraso médio de Luiza será $t_2/2 + \delta$. Assim a matriz de pagamento de Luiza será:

$$A = \begin{pmatrix} -t_2/2 - \epsilon & -t_2 \\ 0 & -t_2/2 - \delta \end{pmatrix}$$

Da mesma forma contruimos a matriz de pagamento de Carlos. Vamos apenas levar em consideração que o tempo que Luiza leva para concluir a conversão é t_1. Fazendo o mesmo raciocínio anterior temos:

$$B = \begin{pmatrix} -t_1/2 - \epsilon & 0 \\ -t_1 & -t_1/2 - \delta \end{pmatrix}$$

Vemos que este jogo não tem soma zero. Vamos encontrar os equilíbrios com estratégias mistas.

Em primeiro lugar escrevemos a fórmula do pagamento para cada jogador:

$$E(x, y) = (-(\epsilon + \delta)y + (\delta - t_2/2))x + (t_2/2 + \delta)y - t_2/2 - \delta \tag{33}$$

$$F(x, y) = (-(\epsilon + \delta)x + (\delta - t_1/2))y + (t_1/2 + \delta)x - t_1/2 - \delta \tag{34}$$

Vemos que a fórmula de $E(x, y)$, para cada y fixo, é a equação de uma reta (como função de x). Para encontrar o valor de x em $[0, 1]$ que maximize esta função precisamos saber se o coeficiente linear desta reta é positivo ou negativo. Se for positivo, o valor máximo será atingido quando $x = 1$, e se for negativo o máximo será quando $x = 0$. O coeficiente angular neste caso depende do y (além, é claro, dos outros parâmetros). No caso dado temos

$$a(y) = -(\epsilon+\delta)y + (\delta - t_2/2) \tag{35}$$

e assim concluímos que $a(y) \leq 0$ quando

$$y \geq \frac{t_2 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)} \tag{36}$$

e $a(y) \geq 0$ se

$$y \leq \frac{t_2 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)} \tag{37}$$

Quando o número $0 < \frac{t_2-2\delta}{2(\epsilon+\delta)} < 1$, então o conjunto dos perfís racionais do jogador 1 é

(38)

$$R_1 = \{(1,y) : y \leq \frac{t_2 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)}\} \cup \{(0,y) : y \geq \frac{t_2 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)}\} \cup \{(x, \frac{t_2 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)}) : x \in [0,1]\}$$

Um cálculo absolutamente análogo fazemos para a descrição de R_2. Neste caso queremos maximizar $F(x,y)$ em função de y. Por isso escrevemos $F(x,y)$ da forma que fica claro que esta também é a equação de uma reta. E repitindo o raciocínio anterior teremos que se

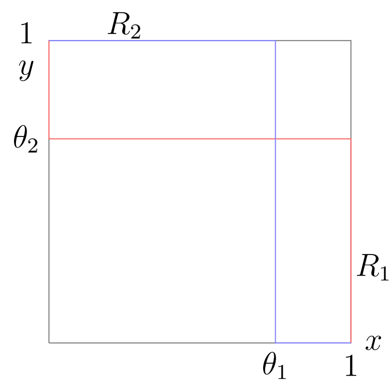
$$0 < \frac{t_1 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)} < 1$$

o conjunto dos perfís de equilíbrio será dado por

(39)

$$R_2 = \{(x,1) : x \leq \frac{t_1 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)}\} \cup \{(x,0) : x \geq \frac{t_1 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)}\} \cup \{(\frac{t_1 - 2\delta}{2(\epsilon+\delta)}, y) : y \in [0,1]\}$$

A intersecção de R_1 e R_2 está demonstrada abaixo:



Neste gráfico temos

$$\theta_1 = \frac{t_1 - 2\delta}{2(\epsilon + \delta)} \tag{40}$$

$$\theta_2 = \frac{t_2 - 2\delta}{2(\epsilon + \delta)} \tag{41}$$

Vamos descrever o próximo jogo que usaremos também na última seção. Este jogo chama-se Hawk-Dove e a situação é a seguinte: dois elementos de uma mesma espécie (digamos que sejam leões) competem pela posse de território. Se dois leões se encontram numa disputa cada um deles pode agir de duas maneiras distintas. Ou ele tem um comportamento agressivo (Hawk) e depois de alguns rugidos parte para a briga, ou ele apenas ruge ameaçadoramente mas foge se vier um ataque (Dove). Digamos que o leão Jubinha encontra-se com o Sansão e iniciam a competição. Se Jubinha agir como Hawk e Sansão como Dove, Jubinha ficará com o território e ganhará ρ pontos. Se Sansão reagir, ou seja, agir com Hawk também, aí haverá luta com chances iguais de ganho para cada um dos lados. O lado ganhador receberá ρ e o perdedor perderá C. O valor esperado de ganho de Jubinha é $\rho/2 - C/2$. Quando Jubinha agir como dove, não recebe nem perde nada se Sansão for Hawk (ele foge) e ganhará metade das disputas por rugidos se Sansão for dove. Assim a matriz de pagamento de Jubinha para as estratégias pura será

$$A = \begin{pmatrix} 1/2(\rho - C) & \rho \\ 0 & 1/2\rho \end{pmatrix} \tag{42}$$

A matriz de pagamento de Sansão será:

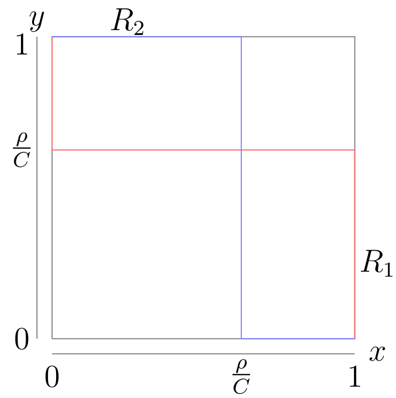
$$B = \begin{pmatrix} 1/2(\rho - C) & 0 \\ \rho & 1/2\rho \end{pmatrix} \tag{43}$$

Escrevendo as funções de pagamentos usando estratégias mistas, para cada um dos competidores temos:

$$E(x, y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2} \tag{44}$$

$$F(x, y) = (-\frac{C}{2}x + \frac{\rho}{2})y - \frac{\rho}{2}x + \frac{\rho}{2} \tag{45}$$

Procedendo de forma absolutamente análoga ao exemplo anterior podemos identificar os pontos de equilíbrios no gráfico



2. Equilíbrios evolucionariamente estáveis

Os dois últimos exemplos nos mostram que é possível que existam mais de um equílibrio de Nash num jogo, que dão pagamentos diferentes aos seus jogadores. Neste caso devemos elaborar critérios para a seleção dos equilíbrios. Um destes critérios foi proposto por Maynard-Smith e foi baseado num argumento de teoria de populações em biologia. Um jogo, cujas matrizes de pagamentos dos jogadores são simétricas, isto é $B = A^t$, chamaremos de jogo populacional. Este é o caso do modelo Hawk-dove acima. Neste caso, a interpretação é que os jogadores são membros de uma população que se enfrentam muitas vezes e aleatóriamente durante toda a vida da espécie. Desta forma não faz sentido diferenciar entre jogador 1 e jogador 2 já que toda população joga indiferentemente de jogar com as linha ou as colunas. Só nos interessaremos pelo pagamento de um jogador. Lembramos que no jogo da seção anterior temos:

$$E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2} \tag{46}$$

A idéia é saber se existe uma estratégia mista x^* boa para toda a população.

Diremos que uma estratégia x^* é *não invadível* se satisfaz as condições:

$$E(x^*, x^*) \geq E(y, x^*) \text{ para todo } y \in [0,1] \tag{47}$$

$$\text{e se } E(x^*, x^*) = E(y, x^*) \text{ então } E(x^*, y) > E(y, y) \tag{48}$$

A idéia desta definição é a seguinte. Se a maioria da população usa a estratégia x^* e um invasor da espécie usa a estratégia y então o ganho do invasor contra um elemento que usa a estratégia da maioria x^* não será maior que o ganho de alguém com a estratégia comum x^*. Ainda que o invasor logre igualar o ganho contra x^*, contra outro invasor ele sairia perdendo.

Note que se x^* é uma estratégia não invadível então o perfíl (x^*, x^*) deve ser um equilíbrio de Nash. Chamaremos este equilíbrio de evolucionariamente estáveis. No jogo Hawk-Dove o par $(\rho/C, \rho/C)$ é um equilíbrio evolucionariamente estável.

Num jogo populacional como acima, a importância do equilíbrio evolucionariamente estável está no fato de que este seria atingido de forma mais ou menos natural ao longo do tempo. Para justificar isso, suponha que as estratégias mistas num jogo populacional com matriz de pagamento A de dimensão n, representem a porcentagem da população que optaram por uma estratégia pura x_i. Esta população interage reproduzindo milhares de vezes o nosso jogo populacional (competição por território, por exemplo). Para cada estratégia e_i podemos estudar qual é a evolução temporal da porcentagem x_i desta caracteristica. O comum em biologia é estudar a variação relativa, ou seja a quantidade $\dot{x}_i/x_i$. Se este número for positivo a proporção x_i crescerá com o tempo, se for negativo diminuirá. Para crescer é necessário que aumentar a opção pela estratégia e_i seja mais vantajosa do que permanecer com x_i. Uma forma de medir isso é fazer a diferença $E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}$ é a estratégia mista da população para todas as estratégias puras. Este racíocinio nos leva à chamada equação do replicador:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x})) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x} \tag{49}$$

que é um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$. A relação deste sistema com os equilíbrios evolucionariamente estáveis é que estes são exatamente os pontos de estabilidade assintótica do sistema.

Vamos apenas ilustrar este fato com o exemplo do jogo Hawk-Dove. Neste caso, pelo fato de termos apenas duas estratégias o nosso sistema de equações do replicador se reduz a uma só equação.

Lembramos que

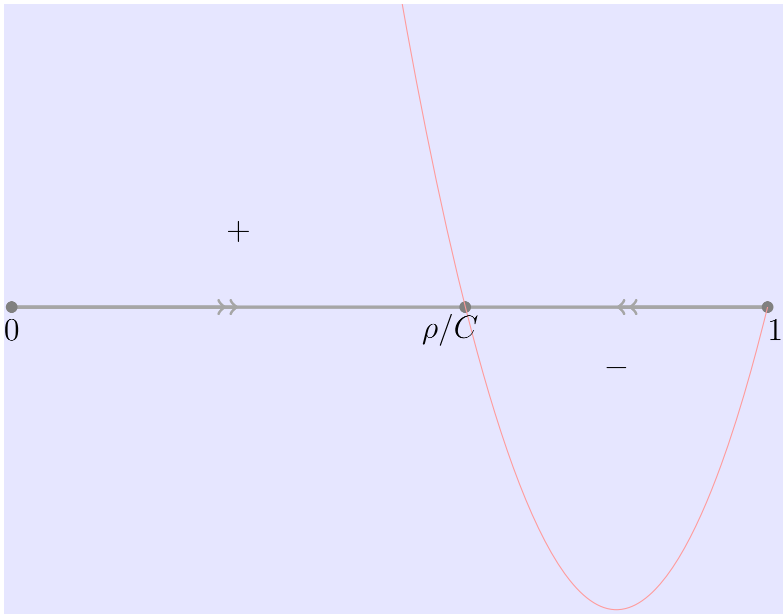
$$E(x, y) = -\frac{C}{2}xy + \frac{\rho}{2}x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2} \tag{50}$$

A equação do replicador é:

$$\dot{x} = x(E(1, x) - E(x, x)) \text{ ou} \tag{51}$$

$$\dot{x} = \frac{x}{2}(Cx^2 - (\rho + C)x + \rho) = F(x) \tag{52}$$

Para determinarmos os pontos de equilíbrio desta equação diferencial ordinária, temos de encontrar os pontos que satisfazem $F(x) = 0$.



Encontramos os pontos $0, \rho/C, 1$, e o gráfico acima mostra onde $F(x)$ é negativa e onde $F(x)$ é positiva. Quando $F(x)$ é positiva $\dot{x}$ mostra a velocidade de crescimento de x, ou seja x vai aumentando enquanto for menor que ρ/C e diminuindo se x for maior que ρ/C. Este ponto, ρ/C, é um ponto de equilíbrio estável do sistema, e portanto um equilíbrio de Nash evolucionarimente estável.

3. bibliografia

Referências Bibliográficas

[Mor] Peter Morris **Introduction to Game Theory** - Springer Verlag, 1994.

[Osb] Martin J. Osborne e Ariel Rubinstein **A Course in Game Theory** - MIT Press, 1994.

[Mest] Michael Mesterton-Gibbons **An Introduction to Game-Theoretic Modelling** second ed. AMS, 2001.

[Sta] Saul Stahl **A Gentle Introduction to Game Theory** AMS, 1999.

[May] J Maynard Smith **Evolution and the Theory of Games** CUP, 1974.

[Neu] J.von Neumann e O. Morgenstern **Theory of Games and Economic Behavior** J. Willey Sons, 1944.

[Har] J. Harsanyi e R. Selten **A General Theory of Equilibrium Selection in Games** MIT Press, 1988.