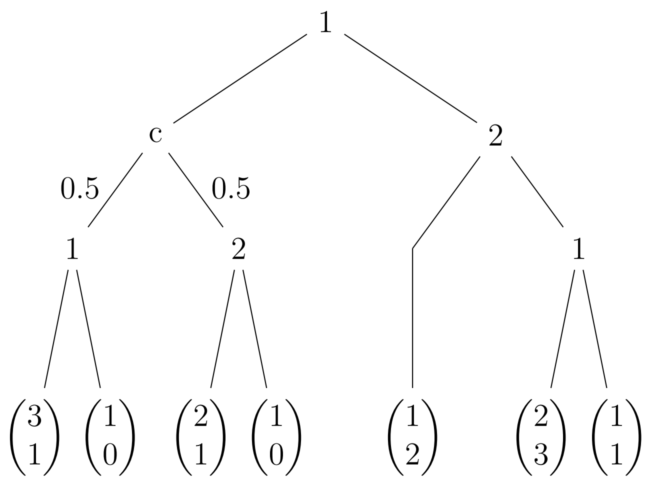
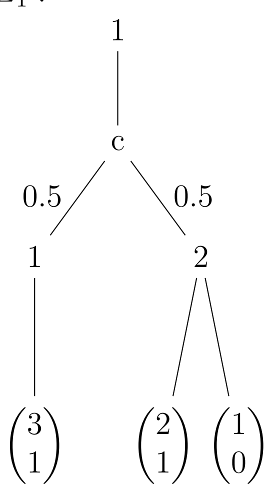
Primeira prova de MAE515

1 Na árvore de jogo abaixo, determinar o perfil de estratégias que constitui um equilíbrio perfeito por subjogo. Qual o pagamento dos jogadores 1 e 2 para este perfil?

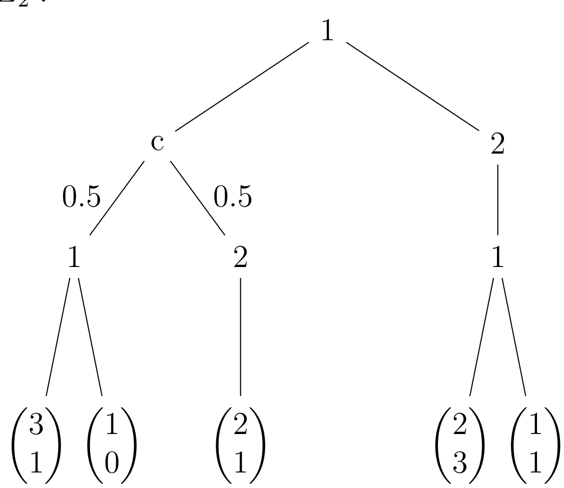


Resposta: O equilíbrio perfeito por subjogos são as estratégias E_1 e E_2 dos jogadores 1 e 2 respectivamente dada pelas seguintes árvores de escolha:

E_1 :



E_2 :



O pagamento dos jogadores usando este perfil de estratégias é $\Pi(E_1, E_2) = (2.5, 1)$.

2

A tabela de um jogo na forma estratégica é apresentada ao lado. São tres jogadores, cada um com duas estratégias. Encontre os equilíbrios de Nash para este jogo.

Perfil	Pagamento
111	$(2, 1, 1)$
112	$(3, 2, 1)$
121	$(2, 1, 1)$
122	$(1, 2, 3)$
211	$(3, 1, 1)$
212	$(3, 2, 1)$
221	$(3, 2, 2)$
222	$(2, 2, 1)$

Resposta:

Perfil	Pagamento
111	$(2, 1, 1)$-0*
112	$(3, 2, 1)$x0*
121	$(2, 1, 1)$-0-
122	$(1, 2, 3)$-0*
211	$(3, 1, 1)$x-*
212	$(3, 2, 1)$x0*
221	$(3, 2, 2)$x0*
222	$(2, 2, 1)$x0-

Os equilíbrios são os perfís de estratégias 112, 212 e 221.

---

3 A matriz de jogo de um jogo com dois jogadores e soma zero é

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ache os pontos de sela e mostre que se o jogador 1 escolhe uma estratégia mista $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ com $p_1 > 0$ então o jogador 2 tem uma estratégia pura j talque o pagamento do jogador 1 fique menor que 1.

Resposta:

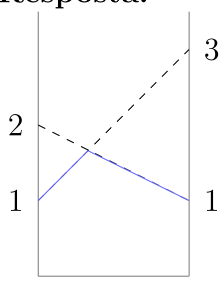
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

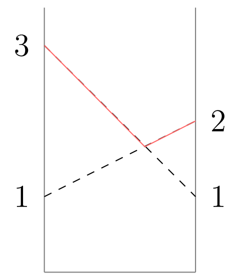
Se o jogador 2 escolhe jogar a coluna 4 então o pagamento do jogador 1 será $-2p_1 + p_2 + p_4$. Como $p_2 + p_4 \leq 1$ e $-2p_1 < 0$ este pagamento será estritamente menor que 1.

---

4 Achar a solução do jogo de soma zero dado pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Resposta:





O valor do jogo é $5/3 = 1.66$ as estratégias ótimas são $(1/3, 2/3)$ para o jogador 1 e $(2/3, 1/3)$ para o jogador 2.

---

5 Achar a solução do jogo de soma zero dado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Resposta: Em primeiro lugar podemos reduzir a matriz já que a terceira linha é dominada pela segunda.

$$A_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

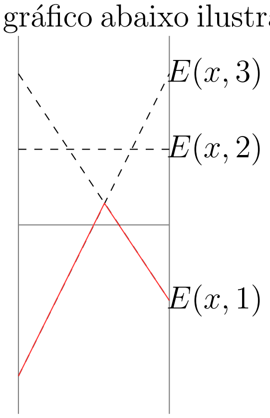
Para calcular a estratégia ótima do jogador 1 fazemos:

$$E(x, 1) = 2 - 3x \qquad (1)$$

$$E(x, 2) = 1 \qquad (2)$$

$$E(x, 3) = 4x - 2 \qquad (3)$$

O gráfico abaixo ilustra estes pagamentos dos quais só nos interessa o mínimo.



O valor do jogo é $2/7 = 0.285$ e a estratégia ótima do jogador 1 é $(4/7, 3/7, 0)$. A estratégia ótima (y_1, y_2, y_3) do jogador 2 deve ter $y_2 = 0$. Fazendo as contas analogamente ao problema anterior teremos a estratégia ótima do segundo jogador como $(4/7, 0, 3/7)$.