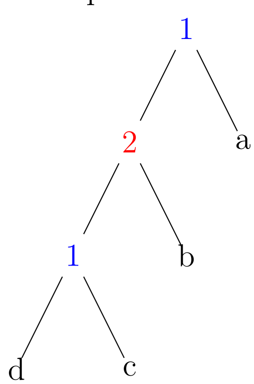
Notas de aula de MAE 515

Pedro Aladar Tonelli

3 de março de 2006

1 Resumo da terceira aula:

Veremos a definição de **árvore de escolha**, **estratégia** e **equilibrios**. Vimos através de um exemplo que o conceito de função de escolha nem sempre é uma boa idéia para se definir estratégia. Por isso vamos aprimorar a definição evitando que ocorram estratégias como no exemplo.



Exemplo: Identifique as funções de escolhas dos jogadores 1 e 2 na árvore de jogo representada ao lado. Depois identifique as subárvores de escolha de cada um dos jogadores. Ache uma subávore de escolha que que corresponde a mais de uma função de escolha.

2 Árvore de escolha

Seja (N, T, S, Π) uma árvore de jogo e $E_i : V_i \to V$ uma função de escolha do jogador $i \in N$. Dizemos que um caminho P da raiz até um ponto terminal da árvore T é **compatível** com a escolha E_i se para todo vértice v do caminho P que pertença ao jogador i; temos que $(v, E_i(v))$ é uma aresta do caminho P.

Numa árvore de jogo (N, T, S, Π) uma subárvore T^i de T é chamada de **subárvore de escolha** do jogador i quando existir uma função de escolha E_i tal que T^i seja a reunião de todos caminhos compatíveis com E_i.

Algumas observações: Uma subárvore de escolha nem sempre determina univocamente a função de escolha. Podem existir mais de uam função de escolha que gerem aquela árvore de escolha. Nem toda subárvore é uma árvore de escolha de algum jogador i.

O seguinte teorema caracteriza as subárvores de escolha.

Teorema 1. *Uma subárvore T' de T é uma subárvore de escolha do jogador i na árvore de jogo (N, T, S, Π) se, e somente se:*

i) Todo vértice $v \in V'$ que pertença a i ($v \in V' \cap V_i$) possui um único filho em T'.

ii) Se $v \in V'$ é um vértice que não pertence a i, então todos os filhos de v em T são também filhos de v em T'.

3 Equilíbrios

Pelo teorema anterior a escolha de uma subárvore de escolha determina uma estratégia para um jogador. Se cada cada um escolher uma teremos uma seqüência $(T^1, \ldots, T^n)$ que também chamaremos de perfil. Existe um único caminho da raiz até um ponto terminal que seja caminho de todas estas subárvores. Assim a escolha do perfil $(T^1, \ldots, T^n)$ de árvores de escolhas determina um único ponto terminal v_f, que seria o histórico final do jogo quando os jogadores optam pelas estratégias $(T^1, \ldots, T^n)$. O vetor $\Pi(v_f)$ é o valor do pagamento dos jogadores para este perfil. Como anteriormente temos uma função

$$\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$$

também chamada de função de pagamento (é só uma reinterpretação da função anterior) onde o domínio agora são os perfis de subárvores de escolhas. Na notação acima Σ_1 é o conjunto de todas as subárvores de escolha do jogador 1 e assim por diante.

Dizemos que um perfil $(T^1, \ldots, T^n)$ é um **equilíbrio de Nash** do jogo (N, T, S, Π) se para qualquer jogador $i \in N$ temos que:

$$\Pi_i(T^1, \ldots, T^n) \geq \Pi_i(T^1, \ldots, S^i, \ldots, T^n) \text{ para todo } S^i \in \Sigma_i$$

Isto significa que se um jogador i decidir sozinho mudar de estratégia ele não pode ganhar mais.