Notas de aula de MAE 515

Pedro Aladar Tonelli

11 de abril de 2006

1 Resumo da décima segunda aula:

Nesta aula falamos sobre **jogos simétricos**. Vamos, em primeiro lugar, relembrar de que tipo de jogos estamos falando. Estamos estudando os jogos com dois jogadores e soma zero. Cada jogador tem um conjunto finito de estratégias puras. Digamos que o jogador 1 tem m estratégias e o jogador 2 tem n estratégias. Este jogo é caracterizado por uma matriz $A = (a_{ij})$ de dimensão $m \times n$, onde o número real a_{ij} é o pagamento do jogador 1 caso este escolha a estratégia i e o jogador 2 escolha a estratégia j. Neste caso, como o jogo é de soma zero, o pagamento do jogador 2 seria $-a_{ij}$. Achar a solução deste tipo de jogo envolve encontrar os chamados valor de linha e valor de coluna do jogo (que serão sempre iguais por causa de um teorema ainda não feito) e encontrar as estratégias ótimas maxmin de cada jogador. Ou seja, achar os números:

$$v_r(A) = \max_p \min_j E(p, j) \tag{1}$$

$$v_c(A) = \min_q \max_i E(i, q) \tag{2}$$

onde $p = (p_1, \ldots, p_m)$ e $q = (q_1, \ldots, q_n)$ são estratégias mistas e $E(p, j) = \sum p_i a_{ij}$. e também as estratégias mistas r e s tais que:

$$v_r(A) = \min_j E(r, j) \tag{3}$$

$$v_c(A) = \max_i E(i, s) \tag{4}$$

2 Os jogos simétricos

Diremos que um jogo é simétrico quando os dois jogadores possuem exatamente as mesmas estratégias e o resultado do uso destas estratégia é igual para os dois. Assim, se o resultado do jogador 1 usando a estratégia i com o jogador 2 usando j é a_{ij}, então o pagamento do jogador 2 quando este emprega a estratégia i e o jogador 1 usa j deve ser o mesmo a_{ij}. Como este é um jogo de soma zero, neste caso o jogador 1 deve receber $-a_{ij}$ o que nos dá a condição $a_{ij} = -a_{ji}$. Assim a matriz de um jogo simétrico é uma matriz antisimétrica.

Como as estratégias puras dos jogadores são as mesmas então ambos dispõem do mesmo conjunto de estratégias mistas. Fixada uma estratégia mista p temos:

$$E(p, j) = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} = -\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ji} = -E(i, p) \tag{5}$$

Desta forma para o cálculo do valor de linha e valor de coluna do jogo temos:

$$\begin{align} v_r(A) &= \max_p \min_j E(p, j) \tag{6} \\ &= \max_p \min_j -E(j, p) \tag{7} \\ &= \max_p \{-\max_j E(j, p)\} \tag{8} \\ &= -\min_p \max_j E(j, p) = -v_c(A) \tag{9} \end{align}$$

como já sabemos que $v_r(A) \leq v_c(A)$ concluímos que num jogo simétrico teremos sempre $v_r(A) \leq 0$ e $0 \leq v_c(A)$. Mais tarde mostraremos que os dois números devem ser iguais o que acarreta que o valor de um jogo simétrico é sempre 0.

Uma observação importante é que se a estratégia mista r é uma estratégia ótima para o jogador 1 então ela é também uma estratégia ótima para o jogador 2. Veja que se r é estratégia ótima do jogador 1 então temos

$$\begin{align} 0 = \min_j E(r, j) &= -\max_j E(j, r) \tag{10} \\ \text{donde } \max_j E(j, r) &= 0 \tag{11} \end{align}$$

e portanto esta estratégia mista r também é ótima para o jogador 2.

3 Técnicas para calcular estratégias ótimas

Já sabemos que o valor de um jogo simétrico é zero e os dois jogadores possuem a mesma estratégia ótima. Então queremos determinar uma estratégia mista $p = (p_1, \ldots, p_n)$ que satisfaz as seguintes condições:

$$\min_j E(p, j) = 0 \tag{12}$$

$$p_i \geq 0 \tag{13}$$

$$\sum_i p_i = 1 \tag{14}$$

A equação 12 também acarreta que para todo j temos

$$\sum_i a_{ij} p_i \geq 0 \tag{15}$$

e que pelo menos para um equação temos a igualdade a zero.

Observe o seguinte: Se na coluna j todos os elementos da matriz A satisfazem $a_{ij} \leq 0$ então o elemento $a_{jj} = 0$ será um ponto de sela da matriz e teremos como estratégia ótima uma estratégia pura $p_j = 1$. Se na coluna j todos os elementos da matriz A satisfazem $a_{ij} \geq 0$ então temos duas possibilidades. Ou $\sum p_i a_{ij} > 0$ e neste caso deveremos ter necessariamente $p_j = 0$, ou todos os p_i para os quais $a_i j > 0$ devem ser nulos (lembro que $p_i \geq 0$).

Baseados nestas observações uma técnica para procurar soluções de jogos simétricos sem pontos de sela seria tentar resolver um sistema linear homogêneo.

$$\sum_i a_{ij} p_i = 0 \tag{16}$$

Ou, caso se verifique que uma das equações acima é impossível, trocá-la pela equação

$$\sum_i p_i = 1 \tag{17}$$

Bem, alguns exemplos foram dados em classe vou deixar só um exercício.

Mostre que se a matriz de jogo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

não tem pontos de sela então uma estratégia ótima é dada por

$$p = \left(\frac{|c|}{|a| + |b| + |c|}, \frac{|b|}{|a| + |b| + |c|}, \frac{|a|}{|a| + |b| + |c|} \right) \tag{19}$$