Notas de aula de MAE 515

Pedro Aladar Tonelli

27 de fevereiro de 2006

1 Resumo da primeira aula:

Neste curso *Teoria dos jogos* significa uma coleção de métodos matemáticos para analisar modelos de situações de conflitos diversas.

A teoria matemática dos jogos adquiriu grande impulso a partir da década de 1940 quando da publicação dos trabalhos de von Newmann e Morgenstern desenvolveu-se ainda mais nas décadas de 1950 e 1960 com contribuições de Nash, Aumann e Shapley.

Classicamente podemos formular o modelo matemático de um jogo em várias formas: *Na forma extensiva* e na *forma normal ou estratégica* estarão os modelos de *jogos não cooperativos* e *jogos cooperativos*. Começaremos com jogos na forma extensiva (porque talvez seja mais natural).

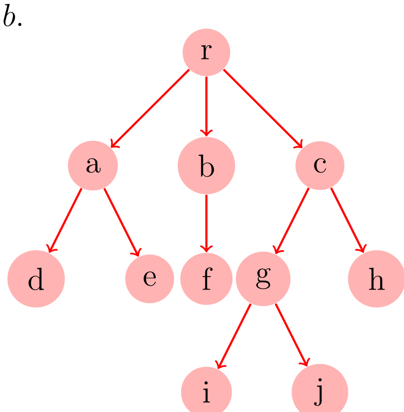
2 Árvores:

Os jogos serão descritos por tipos especiais de grafos. Vejamos as definições formais.

Em primeiro lugar damos a definição de um **grafo orientado**. A um conjunto finito de *vértices* V juntamente com uma relação $A \subset V \times V$ chamaremos de um grafo orientado G. Uma notação: $G = (V, A)$. O conjunto A é chamado de conjunto das *arestas*. Uma forma comum de apresentação gráfica de grafos orientados é representar os vértices por pontos e as arestas por segmentos orientados (flechas) entre os vértices relacionados. Para os jogos na forma extensiva usaremos, de fato, uma classe de grafos orientados com uma estrutura mais apurada chamada de **árvore**.

Antes da definição de árvores fixemos mais alguma nomenclatura. Seja $G = (A, V)$ um grafo orientado, se $(a, b) \in A$ então dizemos que b é um filho de a e que a é pai de b.

Dados dois vértices a, b do grafo G um **caminho** de a até b é uma seqüência de vértices $\{v_0, \cdots, v_n\}$ talque $v_0 = a$, $v_n = b$ e $(v_i, v_{i+1}) \in A$. O comprimento de um caminho é o número de arestas que compõem o caminho. Dizemos que um vértice b é um **descendente** de um vértice a quando existe um caminho de a até b. Neste caso dizemos também que a é um **ancestral** de b.

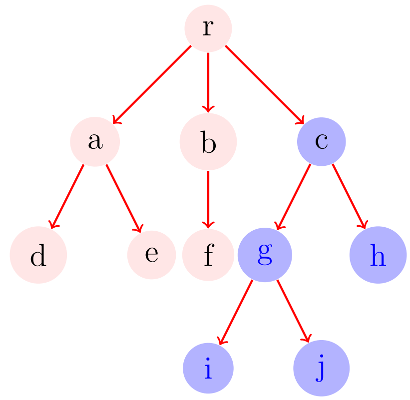


Uma **árvore** é um grafo orientado que possui um vértice especial r que não possui pai, este vértice é chamado raiz. Além disso, para todo vértice existe um único caminho da raiz a este vértice.

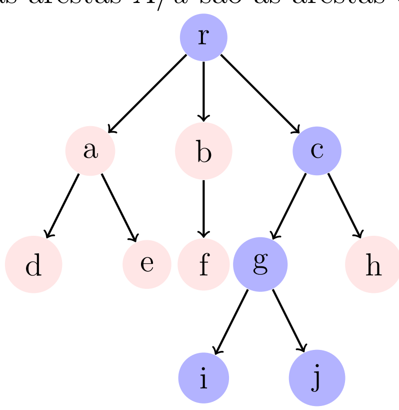
Note que numa árvore existe um único vértice raiz e que todo vértice tem um único pai. Outros resultados que podemos mostrar usando só a definição de uma árvore: Se $T = (V, A)$ é uma árvore e se existe um caminho entre os vértices a e b então este caminho é único. Um vértice sem filhos é chamado de um vértice terminal do grafo T. Este conjunto será muito usado na seqüência, por isso denotaremos este conjunto por $\mathrm{TERM}(V)$. Todo vértice de uma árvore tem um descendente em $\mathrm{TERM}(V)$. Desta forma os caminhos mais longos de um grafo são os caminhos da raiz r até um vértice de $\mathrm{TERM}(V)$. O comprimento do mais longo destes caminhos é chamado de profundidade da árvore T.

Os conceitos de **corte**, **quociente** e **subárvores** são definidos a seguir:

Seja $T = (V, A)$ uma árvore e u um vértice da árvore. Um **corte** em u é uma árvore $T_u = (V_u, A_u)$ onde V_u são os descendentes de u com u incluido e A_u são as arestas de T tal que os dois vértices estejam em V_u.
O corte T_c está representado em azul ao lado.



Dada uma árvore $T = (V, A)$ e fixado um vértice u desta árvore, definimos o **quociente** desta árvore por u como sendo uma outra árvore $T/u = (V/u, A/u)$ onde V/u são todos os vértices de T menos os descendentes de u. E as arestas A/u são as arestas de T compostos com os vértices de T/u.



Uma **subárvore** de uma árvore $T = (V, A)$ é uma outra árvore $T' = (V', A')$ que satizfaz: (a) $V' \subset V$, (b)$A' \subset A$, (c) $\text{TERM}(T') \subset \text{TERM}(T)$ e finalmente (d) que a raiz de T é a raiz de T'.

Uma conseqüência desta definição é que as subárvores de uma árvore são determinadas pelo conjunto dos pontos terminais $\text{TERM}(V)$ da árvore.