JOGOS COOPERATIVOS

PEDRO A. TONELLI

Sumário

1. Jogos Cooperativos com Dois Jogadores, Jogos de Barganha

Jogos cooperativos com dois jogadores são conhecidos como jogos de barganha. Suponha que dois jogadores, P_1 e P_2, disponham de seu conjunto finito de estratégias Σ_1 e Σ_2 respectivamente e que, além do mais, conhecemos a forma normal do jogo com a função de pagamento dada por $\Pi : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}^2$. Na forma cooperativa os jogadores decidem por uma distribuição de probabilidades, σ, no conjunto $\Sigma_1 \times \Sigma_2$. O pagamento esperado para os jogadores é

$$\Pi(\sigma) = \sum_{ij} \sigma_{ij} (\Pi_1(i,j), \Pi_2(i,j)) \tag{1}$$

O conjunto $\mathbf{\Pi}_{coop}$ de todos os pagamentos esperados possíveis é a envoltória convexa do pares $\{(\Pi_1(i,j), \Pi_2(i,j)) : i \in \Sigma_1 \text{ e } j \in \Sigma_2\}$. Chamaremos este conjunto de região de pagamento cooperativo.
De uma forma geral um jogo cooperativo com dois jogadores é caracterizado por um conjunto convexo do plano. Note que neste caso não há cooperação para a distribuição dos lucros, só há cooperação na escolha de estratégias. Este tipo de jogo chamamos de NTU (non transferable utilities).

1.1. **Ótimos de Pareto.** O problema do jogo cooperativo é determinar um ponto da região de pagamento que satisfaça (ou que seja justo para) os dois jogadores. A primeira coisa a fazer então é eliminar os pontos que são ruins para os dois jogadores. Dizemos que um ponto $(u_1, v_1) \in \mathbf{\Pi}_{coop}$ domina outro ponto $(u_0, v_0) \in \mathbf{\Pi}_{coop}$ quando $u_1 > u_0$ e $v_1 \geq v_0$ ou quando $v_1 > v_0$ e $u_1 \geq u_0$. Um ponto $(u, v) \in \mathbf{\Pi}_{coop}$ que não é dominado por nenhum outro ponto de $\mathbf{\Pi}_{coop}$ é chamado de um ponto ótimo de Pareto.
exercício: Como o conjunto $\mathbf{\Pi}_{coop}$ é convexo limitado o conjunto dos pontos ótimos de Pareto não é vazio.

1.2. **Região de Barganha.** Na prática, além da região de pagamento cooperativo, os jogadores dispõem de um pagamento garantido (u^*, v^*) de forma que eles só aceitariam jogar em cooperação caso os pagamentos atribuídos a eles não forem dominados por este pagamento garantido. Por exemplo, no caso de um jogo não cooperativo entre dois jogadores cada um pode garantir o ganho de (u_{max}, v_{max}) jogando sem cooperação. Onde (u_{max}, v_{max}) são os valores maxmin do jogo. Neste caso o incentivo a se jogar cooperativamente é que o pagamento escolhido de $\mathbf{\Pi}_{coop}$ seja pelo menos tão bom quanto este. Este é o princípio da racionalidade individual.
O conjunto dos pontos (u, v) de $\mathbf{\Pi}_{coop}$ que são, ao mesmo tempo, ótimos de Pareto e satisfazem o príncipio da racionalidade individual (ou seja $u \geq u^*$ e $v \geq v^*$ é chamado de conjunto de barganha do jogo.
O problema deste jogo de barganha é escolher um ponto da região de barganha que dependa do conjunto convexo $\mathbf{\Pi}_{coop}$ e do ponto dado a priori (u^*, v^*) e que possua boas propriedades quando houver variação destes parâmetros. Existem várias formas de cumprir este programa mas a primeira foi definida por Nash e chamaremos de função de arbitragem de Nash.

2. Função de Arbitragem de Nash

Explicamos na aula passada, o que era a região de barganha de um jogo cooperativo de dois jogadores. É o conjunto dos pontos da região de pagamento cooperativo que são ótimos de Pareto e dominam os pares de valores maxmin (v_1, v_2) dos jogadores 1 e 2 respectivamente.

A função de arbitragem de Nash pretende escolher de forma justa um ponto desta região de barganha. Definimos a função da seguinte forma: seja Π um subconjunto convexo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e um ponto $(u_0, v_0) \in \Pi$.
Defimos agora $\mathcal{O} = \{(u, v) \in \Pi : (u, v) > (u_0, v_0)\}$. Se $\mathcal{O}$ não for vazio vimos que a função $g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0)$ tem um único ponto de máximo no conjunto $\mathcal{O}$ e denotamos por $\Psi((u_0, v_0), \Pi) = (u^*, v^*)$ este ponto e dizemos que é o par de arbitragem de Nash associado ao conjunto Π e ao ponto (u_0, v_0). Caso o conjunto $\mathcal{O}$ seja vazio tomemos:
(a) O conjunto $\mathcal{O}_v = \{v : (u_0, v) \in \Pi \text{ e } v \geq v_0\} \neq \emptyset$
(b) O conjunto $\mathcal{O}_u = \{u : (u, v_)) \in \Pi \text{ e } u \geq u_0\} \neq \emptyset$
definimos $u^* = \sup \mathcal{O}_u$ e $v^* = \sup \mathcal{O}_v$ e neste caso novamente o par de arbiragem de Nash é definido por $\Psi((u_0, v_0), \Pi) = (u^*, v^*)$.
Exercício: Mostre que neste último caso ou $u^* = u_0$ ou $v^* = v_0$.

3. Propriedades do Par de Arbitragem de Nash

(1) (*Racionalidade Individual*) Em qualquer caso é fácil ver que $u^* \geq u_0$ e $v^* \geq v_0$. Ou seja, para nenhum jogador é vantajoso jogar sozinho sua estratégia maxmin.
(2) (*Otimalidade de Pareto*) O par de arbitragem é ótimo de Pareto, pois se para algum ponto $(u, v) \in \Pi$ tivessemos $(u, v) > (u^*, v^*)$ então $g(u, v) > g(u^*, v^*)$ se $(u, v) \in \mathcal{O}$ ou $u > u^* = \sup \mathcal{O}_u$ ou $v > v^* = \sup \mathcal{O}_v$, contradizendo a definição de (u^*, v^*).
(3) (*Factibilidade*) É claro que $(u^*, v^*) \in \Pi$, ou seja é um pagamento possível.
(4) (*Independência de alternativas irrelevantes*): Se Π' é um subconjunto convexo do conjunto anterior Π tal que $(u_0, v_0) \in \Pi'$ e $\Psi((u_0, v_0), \Pi) = (u^*, v^*) \in \Pi'$ então a arbitragem não é alterada, ou seja, $\Psi((u_0, v_0), \Pi') = (u^*, v^*)$. Claro que $\Psi((u_0, v_0), \Pi') \leq (u^*, v^*)$, mas como (u^*, v^*) também está em Π' temos a igualdade.
(5) (*Invariança por transformações lineares*): Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ definimos a transformação afim $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + a \\ y &= \beta v + b \end{aligned}$$

Se $\Pi^x = X(\Pi)$ e $(x_0, y_0) = X(u_0, v_0)$ então $(x^*, y^*) = X((u^*, v^*))$.
(6) (*Simetria*): Se o conjunto Π for simétrico então: $\Psi((u_0, u_0), \Pi) = (u^*, u^*)$

De fato estas seis propriedades caracterizam os axiomas de barganha de Nash e pode-se demonstrar que a função de arbitragem definida acima é a única que satisfaz todas essas propriedades simultaneamente.

4. Exemplo

Agora vamos calcular alguns pares de arbitragens de Nash: Calcular o par de arbitragem de Nash de um jogo dado pela bimatriz:

$$A = \begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}$$

Primeiro vamos calcular os valores maxmin, a matriz de pagamento do primeiro jogador é

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

A segunda coluna pode ser descartada por ser dominada pelas outras. Adotando as convenções da sala de aula temos: $E(p,1) = -4p + 5$, e $E(p,3) = 4p + 1$ e calculando $v_1 = \max_p \min\{E(p,1), E(p,3)\}$ temos $v_1 = 3$.
A transposta da matriz de pagamento do jogador 2 é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta matriz a última linha domina as outras duas e a segunda coluna domina a outra coluna assim o valor do jogo é $v_2 = 1$. Vamos portanto calcular o par de arbitragem com $(u_0, v_0) = (3, 1)$.
A região de pagamento cooperativa está esboçado na figura 1 Note que o conjunto

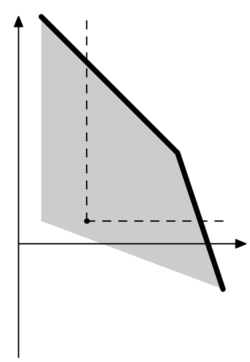

Figura 1. Região de pagamento do problema

$\mathcal{O}$ é não vazio e portanto devemos encontrar o ponto de máximo da função $g(u,v) = (u-3)(v-1)$ em $\mathcal{O}$. Note que basta procurar este máximo na região de barganha, ou seja, na região marcada mais forte na figura 1. Esta região é constituída por duas retas.
A primeira reta tem equação $v = -u+11$ e segunda reta tem equação $v = -3u+25$. Para achar o máximo de g sobre a primeira reta consideremos $f(u) = (u-3)(-u+11-1) = -u^2 + 13u - 30$ que tem seu ponto de máximo em $u = 6.5$ e o máximo de g na reta está no ponto $(6.5, 4.5)$. Note que este é um ponto do conjunto de barganha. Mas falta ainda considerar o máximo de g sobre a outra reta. Do mesmo modo consideramos $h(u) = (u-3)(-3u+25-1) = -3u^2+33u-72$. Esta função atinge o máximo em $u = 5.5$, ou seja g tem um máximo sobre a segunda reta em $(5,5,8,5)$. Este ponto não pertence a Π, então deverá ser descartado (veja a figura 2) e substituído pelo ponto da segunda reta mais próximo a ele e que esteja também em Π. No nosso caso, este ponto será o $(7,4)$. Avaliando g nos dois candidatos achamos que o ponto de máximo em $\mathcal{O}$ e portanto o par de barganha de Nash é o ponto $(6.5, 4.5)$.

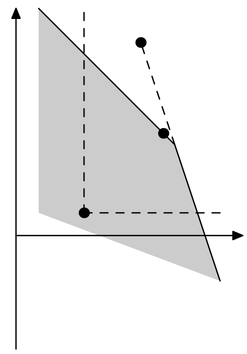

Figura 2. O par de barganha de Nash do problema.

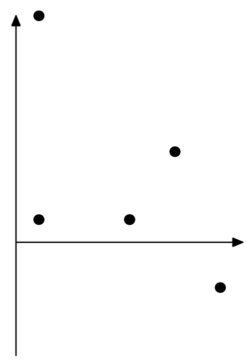

Figura 3. A região de barganha é a envoltória convexa dos pontos acima.

Para terminar observemos que neste caso utilizamos sempre o ponto dos valores maxmin para determinar a racionalidade dos jogadores. Isto não é necessário. Em geral determinamos um ponto de desacordo dentro do conjunto $\mathbf{\Pi}_{coop}$.
A arbitragem de Nash não é a única possível. Ela é a única que satisfaz todos os axiomas de barganha de Nash. Como um exemplo de outro ponto de arbitragem falaremos sobre a arbitragem de Kalai-Smorodinsky.
Se $\Pi_{coop} \subset \mathbb{R}^2$ e $D \in \Pi_{coop}$ são, respecivamente a região de pagamento cooperativo e o ponto de desacordo de um jogo de barganha, com $\mathrm{Bar}(\Pi_{coop}, D)$ denotando o conjunto de arganha. Seja $u_l = \max\{x : (x, y) \in \mathrm{Bar}(\Pi_{coop}, D)$ para algum $y\}$ e $u_c = \max\{y : (x, y) \in \mathrm{Bar}(\Pi_{coop}, D)$ para algum $x\}$. O ponto (u_l, u_c) é chamado de utopia. A intersecção do segmento entre D e (u_l, u_c) com o conjunto de barganha é o ponto de arbitragem de Kalai-Smorodinsky.
Para o exemplo apresentado o ponto de Kalai-Smorodinsky está representado na figura 4

5. Jogos Cooperativos com N Jogadores

Nesta aula o objetivo é introduzir os conceitos básicos dos jogos cooperativos com N jogadores. Os conceitos de coalizão e função característica devem ser assimilados.

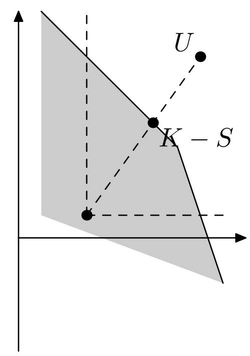

FIGURA 4. Pontos de Utopia, U e de Kalai-Smorodinsky, $K - S$

5.1. **Coalizão.** Designamos por $P = \{p_1, \ldots, p_N\}$ o conjunto com N jogadores e denotaremos por $\mathcal{P}(P)$ o conjunto das partes de P, ou seja, todos os subconjuntos do conjunto P. Cada subconjunto de P será chamada de uma coalizão (os jogadores desta coalizão jogam associados). Em particular temos a coalizão vazia, a coalizão total e para cada coalizão $A \subset P$ temos a coalizão complementar A^c, dos jogadores que não estão na coalizão A. O problema da teoria dos jogos cooperativos é verificar se é vantajosa ou não uma coalizão para os jogadores daquela coalizão. É claro que para um conjunto de N jogadores podemos formar 2^N coalizões, incluindo aí a coalizão vazia.

5.2. **Função Característica.** Para sabermos se uma coalizão A é vantajosa devemos saber avaliá-la e compará-la com as demais coalizões. Isto é feito através de uma função que a cada subconjunto de P associa um número real, que pode ser interpretado como o valor daquela coalizão. Esta função chama-se função característica do jogo, e através de suas propriedades é que estudaremos os jogos cooperativos. Note que a função característica não determina o quanto cada jogador da coalizão ganha. Apenas diz o quanto o grupo ganha.
Formalmente a função característica é uma função $\nu : \mathcal{P}(P) \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(\emptyset) = 0$. Assim podemos dar a definição formal de um jogo cooperativo com N jogadores: é um par $< P, \nu >$ onde P é um conjunto finito de jogadores e ν é uma função característica.

5.3. **Exemplo: O jogo das luvas.** Num salão com N pessoas temos algumas pessoas só com a luva direita e outras pessoas só com a luva esquerda. Vamos avaliar uma coalizão pela quantidade de pares de luvas na coalizão. Seja D o conjunto das pessoas com as luvas direitas e E o conjunto das pessoas com as luvas esquerdas. Se $A \subset P$, então podemos escrever $\nu(A) = \min\{|A \cap D|, |A \cap E|\}$ onde $|A|$ denota o número de elementos de A.

6. Jogos Superaditivos

Um jogo cooperativo $< P, \nu >$ é dito superaditivo quando a função caraterística satisfaz a seguinte propriedade:
(SA) Se A e B são duas coalizões disjuntas então

$$\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$$

É claro que usando indução finita também temos que para toda coalizão A $\nu(A) \geq \sum_{p\in A} \nu(\{p\})$ no caso do jogo superaditivo. A interpretação disso é que ninguém ganha nada quebrando a coalizão e não se juntando a mais ninguém.
Exercício: Mostre que o jogo do exemplo 4 é superaditivo.

7. Forma Característica de um Jogo na Forma Normal

A partir de um jogo não cooperativo na forma normal vamos definir um jogo cooperativo. Seja $P = \{p_1, \ldots, p_N\}$ o conjunto de jogadores. Cada jogador possui o conjunto de estratégias (finito) $\Sigma(p_i)$, e temos a função de pagamento $\Pi : \Sigma(p_1) \times \cdots \times \Sigma(p_N) \to \mathbb{R}^N$. Formada uma coalizão $A = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\}$, os jogadores de A poderão escolher sua estratégia conjuntamente de $\Sigma(p_{i_1}) \times \cdots \times \Sigma(p_{i_k})$. Para avaliar esta coalizão construimos um jogo de dois jogadores onde a coalizão A (diferente da vazia e da total) joga contra a coalizão complementar A^c. Os jogadores de $A^c = \{p_{j_1}, \ldots, p_{j_{N-k}}\}$ escolhem as estratégias conjuntamente de $\Sigma(p_{j_1}) \times \cdots \times \Sigma(p_{j_{N-k}})$. Escolhidas as estratégias conjuntas e_A e e_{A^c} das coalizões A e A^c determinamos uma N-upla de estratégias do jogo original e definimos o pagamento de A para este par de estratégias como

$$K(e_A, e_{A^c}) = (\sum_{l=1}^{k} \Pi_{i_l}(e_1, \ldots, e_N), \sum_{l=1}^{N-k} \Pi_{j_l}(e_1, \ldots, e_N)).$$

Isto determina um jogo com dois jogadores com um bimatriz determinada pela fórmula anterior. O valor maxmin do primeiro jogador será, por definição, o valor da função carateristica na coalizão A, e o valor maxmin para o segundo jogador será a função caracteristica para A^c. Este jogo cooperativo chamaremos de jogo cooperativo associado à forma normal de um jogo não cooperativo[1].

7.1. **Exemplo.** Vejamos um exemplo: A forma normal de um jogo com três jogadores é dada pela tabela abaixo.

Triplas de estratégias	Vetores de pagamentos
$(1,1,1)$	$(-2,1,2)$
$(1,1,2)$	$(1,1,-1)$
$(1,2,1)$	$(0,-1,2)$
$(1,2,2)$	$(-1,2,0)$
$(2,1,1)$	$(1,-1,1)$
$(2,1,2)$	$(0,0,1)$
$(2,2,1)$	$(1,0,0)$
$(2,2,2)$	$(1,2,-2)$

Tabela 1. Um jogo na forma normal.

Como temos três jogadores, podemos formar oito coalizões. Vamos determinar a função caraterística do jogo cooperativo associado. Por definição $\nu(\emptyset) = 0$. Para avaliar as coalizões escolhemos as estratégias conjuntas que maximizem a

[1] Claro que da forma extensiva de um jogo também obtemos uma forma cooperativa associada passando a forma extensiva para a normal.

soma dos pagamentos dos componentes. Assim $\nu(\{p_1, p_2, p_3\}) = 1$ (Para tripla de estratégias $\sum \Pi_i = 1$). Para calcular $\nu(\{p_1\})$ usamos o procedimento do parágrafo 7. Neste caso $A = \{p_1\}$ e $A^c = \{p_2, p_3\}$. A coalizão A tem à sua disposição as estratégias $\Sigma_A = \{1, 2\}$ enquanto a coalizão A^c possui as estratégias $\Sigma_{A^c} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. A bimatriz calculamos assim: se A escolhe a estratégia 1 e A^c escolhe a estratégia $(1,1)$, no jogo original fica determinado a tripla $(1,1,1)$ cujo pagamento é $(-2,1,2)$, neste caso a coalizão A ganha -2 e a coalizão A^c ganha 3. Obtemos a bimatriz dada na Tabela 2:

	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
1	$(-2,3)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,2)$
2	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,0)$

Tabela 2. bimatriz para a coalizão A

Vamos agora calcular o valor maxmin do jogo de dois jogadores obtido. Para tanto consideremos as matrizes abaixo e calculamos seus valores de linha (que são iguais aos valores de coluna):

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

temos $\nu(\{p_1\}) = 1/4$ e $\nu(\{p_2, p_3\}) = 3/4$. Devemos fazer da mesma forma para as outras coalizões obtendo $\nu(\{p_2\}) = -1/3$, $\nu(\{p_3\}) = 0$, $\nu(\{p_1, p_2\}) = 1$ e $\nu(\{p_1, p_3\}) = 4/3$. Neste caso podemos computar diretamente que o jogo cooperativo obtido é superaditivo. Mas de uma forma geral temos

Teorema 1. *Se $< P, \nu >$ é a forma cooperativa associada de um jogo dada na forma normal então $< P, \nu >$ é superaditivo.*

prova: Sejam A e B duas coalizões disjuntas, então $\nu(A)$ e $\nu(B)$ é o quanto as coalizões garantem que ganham contra qualquer estratégias das coalizões complementares. Assim existe uma N-upla de estratégias tal que que garantem sempre um ganho de $\nu(A)$ para A e $\nu(B)$ para B. Como as coalizões são disjuntas elas podem continuar com estas estratégias e assim $\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$. QED
Uma conseqüência imediata deste Teorema é o seguinte:

Corolário 1. *Se $A_1, \ldots, A_k$ é uma seqüência disjunta de coalizões então $\nu(\bigcup_i A_i) \geq \sum_i \nu(A_i)$*

e ainda

Corolário 2. *Se A é uma coalizão qualquer então $\nu(A) \geq \sum_{p \in A} \nu(\{p\})$*

7.2. **Jogo Inessencial.** Um jogo cooperativo $< P, \nu >$ é chamado de inessencial quando a seguinte condição estiver satisfeita: para qualquer coalizão $A \subset P$ temos que $\nu(A) = \sum_{p \in A} \nu(\{p\})$.
Um jogo de soma zero com duas pessoas dá origem a um jogo cooperativo inessencial já que neste caso $\nu(\{p_1, p_2\}) = 0$ pois a soma dos pagamentos é zero para qualquer estratégia e $\nu(\{p_1\}) = -\nu(\{p_2\})$.

8. Imputação e Núcleo do Jogo Cooperativo

Nesta seção o objetivo é estudar o conjunto de imputação e o núcleo de um jogo cooperativo.

8.1. **Imputação.** A idéia da imputação é oferecer um pagamento a cada um dos jogadores p_i de forma que eles mantenham sempre a grande coalizão.
Seja $< P, \nu >$ um jogo cooperativo com N jogadores e superaditivo. Um vetor $x \in \mathbb{R}^N$ será interpretado como vetor de pagamento, onde cada ordenada x_i representa o pagamento para o jogador p_i. Vamos usar neste texto a seguinte notação, se $A \subset P$ é uma coalizão da forma $A = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\}$ e se $x \in \mathbb{R}^N$ é um vetor denotamos por $x(A) = \sum_{s=1}^{k} x_{i_s}$. Em particular $x(\emptyset) = 0, x(p_i) = x_i$ e $x(P) = \sum x_i$.
Um vetor $x \in \mathbb{R}^N$ será chamado de vetor de imputação se ele tiver duas propriedades:
(a) Propriedade da racionalidade individual: $x(p_i) = x_i \geq \nu(\{p_i\})$.
(b) Propriedade de eficiência: $x(P) = \sum_{i=1}^{N} x_i = \nu(P)$.
Para que exista um vetor de imputação é necessário e suficiente que $\nu(P) \geq \sum \nu(\{p_i\})$. De fato, neste caso tomamos $\varepsilon = \nu(P) - \sum \nu(\{p_i\}) \geq 0$ e definimos $x_i = \nu(\{p_i\}) + \varepsilon/N$ e verificamos facilmente que $x = (x_1, \ldots, x_N)$ é um vetor de imputação. Em nosso caso esta condição é garantida pela propriedade de superaditividade exigida no começo. Note também que se $\nu(P) = \sum \nu(\{p_i\})$ então o único vetor de imputação será o vetor $(x_1, \ldots, x_N)$ tal que $x_i = \nu(\{p_i\})$.
Denotaremos por $I(\nu)$ o conjunto de imputação do jogo $< P, \nu >$.
3. Exercício: Mostre que $I(\nu)$ é convexo.

8.2. **Dominância.** Vamos falar da relação de dominância entre os elementos de $I(\nu)$. Sejam x e y dois elementos de $I(\nu)$, dizemos que x domina y via a coalizão A se ocorrem duas coisas:
(a) $x(p_i) > y(p_i)$ para todo $p_i \in A$.
(b) $x(A) \leq \nu(A)$.
A interpretação desta definição é a seguinte os jogadores de A jogando em coalizão podem recusar o pagamento y pois jogando em coalizão eles podem ter x. A condição (a) diz simplesmente que o pagamento para cada jogador da coalizão A ofertado pela imputação x é maior do que o ofertado pela imputação y. A condição (b) diz $\nu(A)$ cobre os recursos necessários para o pagamento dos jogadores de A pela imputação x. Notação $x \succ_A y$.
Dada uma coalizão A denotamos o conjunto das imputações dominadas via A por:

$$D(A) = \{y \in I(\nu) : \exists x \text{ tal que } x \succ_A y\} \tag{2}$$

.

8.3. **Núcleo.** Dizemos que uma imputação x está no núcleo de ν se ela não é dominida por nenhuma outra imputação através de nenhuma coalizão diferente da vazia. Ou seja:

$$N(\nu) = I(\nu) \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{P}(P) \setminus \emptyset} D(A) \tag{3}$$

O próximo teorema nos dá uma caracterização mais simples do núcleo no caso de um jogo ser superaditivo.

Teorema 2. *Se* $< P, \nu >$ *é um jogo superaditivo então* $x \in N(\nu)$ *se e somente se* $x(A) \geq \nu(A)$ *para toda coalizão* A.

Prova: Primeiro vamos mostrar que se $x(A) \geq \nu(A)$ para toda coalizão A então $x \in N(\nu)$. Suponha, por absurdo, que não. Então existe uma coalizão A talque $x \in D(A)$. Isto acarreta que existe uma imputação w que domina x via A. Agora como $w(p_i) > x(p_i)$ para $p_i \in A$ temos que $\nu(A) \geq w(A) > x(A)$ contradizendo a hipótese. Terminamos a primeira parte.
Mostraremos agora que se $x \in N(\nu)$ então $x(A) \geq \nu(A)$ para toda coalizão A. Novamente supomos, por absurdo, que exista uma coalizão A tal que $x(A) < \nu(A)$. Definimos então o número positivo $\delta = \nu(A) - x(A)$. Denotemos por $|A|$ a cardinalidade de A e construimos o vetor $(y_1, \ldots, y_N)$ da seguinte maneira:
(a) se $p_i \in A$ então

$$y_i = y(p_i) = x_i + \frac{\delta}{|A|} \tag{4}$$

(b) se $p_i \in A^c$ então

$$y_i = y(p_i) = \nu(\{p_i\}) + \frac{1}{|A^c|}\left(\nu(P) - \nu(A) - \sum_{p_k \in A^c} \nu(\{p_k\})\right) \tag{5}$$

Note que devido à superaditividade o vetor y é uma imputação. De fato, $\nu(P) \geq \nu(A) + \nu(A^c)$ que implica $\nu(P) - \nu(A) \geq \nu(A^c) \geq \sum_{p_k \in A^c} \nu(\{p_k\})$. Ou seja $y_i \geq \nu(p_i)$ para todo $p_i \in P$ e a racionalidade individual está garantida.
Para ver que a eficiência também se cumpre temos que $y(P) = y(A) + y(A^c)$ e

$$y(A) = x(A) + \delta = \nu(A) \tag{6}$$

e

$$y(A^c) = \sum_{p_k \in A^c} y(p_k) = \nu(P) - \nu(A) \tag{7}$$

Vemos também que y domina x via A o que contraria a hipótese de x estar em $N(\nu)$. QED
Uma conseqüência deste resultado é que o núcleo também é um conjunto convexo. Mas o núcleo pode ser vazio.

9. Exemplo: Votação

Numa cidade hipotética uma lei é aprovada quando for aprovada na câmara de vereadores e sancionada pelo prefeito, ou então, caso ela seja aprovada pela câmara, vetada pelo prefeito, mas a câmara derruba o veto do prefeito. A câmara é constituida por sete vereadores, um deles é o presidente e só vota em caso de desempate. O veto do prefeito só pode ser derrubado por seis vereadores. Os jogadores serão o prefeito e os sete vereadores. Uma coalizão é vitoriosa se tem os jogadores necessários para aprovar uma lei. A função caraterística é definida

assim: $\nu(A) = 1$ quando A for uma coalizão vitoriosa e $\nu(A) = 0$, caso contrário. O conjunto $I(\nu)$, das imputações são os vetores $x \in \mathbb{R}^8$, tal que $x_i \geq 0$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 1$. Convencionamos que x_1 é o pagamento do prefeito e x_2 do presidente da câmara.
O núcleo deste jogo é vazio. De fato, suponha que $(x_1, \ldots, x_8)$ esteja no núcleo. Como qualquer coalizão de seis vereadores da Câmara é vencedora, para a imputação $(x_1, \ldots, x_8)$ não ser dominada devemos ter:

$$x_2 + \cdots + x_8 \geq 1 \tag{8}$$

e a mesma desigualdade vale quando eliminamos da equação acima um elemento. Como $x_i \geq 0$ as desigualdades devem ser igualdades e portanto cada $x_i = 0$ que é uma contradição.

10. Equivalência de Jogos

Suponhamos que temos dois jogos com os mesmos jogadores mas com funções características diferentes $< P, \nu >$ e $< P, \mu >$. Diremos que estes dois jogos cooperativos são estratégicamente equivalentes se existe um número $k > 0$ e um vetor $(c_1, \ldots, c_N)$ tal que para toda coalizão $A \in \mathcal{P}(P)$ temos

$$\nu(A) = k\mu(A) + c(A) \tag{9}$$

denotamos este equivalencia por $\nu \sim_s \mu$. Note que se vale a fórmula 9 então também temos:

$$\mu(A) = 1/k\nu(A) - 1/kc(A) \tag{10}$$

de forma que esta é uma relação simétrica (e também reflexiva e transitiva).

Teorema 3. *Se dois jogos,$< P, \nu >$ e $< P, \mu >$ são equivalentes então são ambos essenciais ou ambos inessenciais.*

De fato, se $< P, \nu >$ é inessencial então

$$\nu P = \sum_{i=1}^{N} \nu(\{p_i\})$$

da equivalência segue que

$$\nu(P) = k\mu(P) + c$$

e também que

$$\nu(\{p_i\}) = k\mu(\{p_i\}) + c_i$$

daí segue

$$\sum_{i=1}^{N} \nu(\{p_i\}) = k \sum_{i=1}^{N} \mu(\{p_i\}) + c$$

fazendo as substituições temos que

$$\mu P = \sum_{i=1}^{N} \mu(\{p_i\})$$

O seguinte teorema também é fácil mostrar:

Teorema 4. *Se dois jogos,* $< P, \nu >$ *e* $< P, \mu >$ *são equivalentes então:*

- $x \in I(\nu)$ *se e somente se* $kx + c \in I(\mu)$.
- $x \succ_A y$ *em* $< P, \nu >$ *então* $kx + c \succ_A ky + c$.
- $N(\mu) = kN(\nu) + c$.

Teorema 5. *Se* $< P, \nu >$ *é um jogo essencial então ele é estrategicamente equivalente a um jogo* $< P, \mu >$ *que satisfaz* $\mu(p_i) = 0$ *e* $\mu(P) = 1$. *(forma* $(1, 0)$*-reduzida).*

Prova: Basta tomar

$$k = \frac{1}{\nu(P) - \sum_{i=1}^{N} \nu(p_i)}$$

e

$$c_i = -k\nu(p_i)$$

e definir

$$\mu(A) = k\nu(A) + c(A)$$

com esta função característica os jogos $< P, \nu >$ e $< P, \mu >$ são equivalentes por definição e é fácil verificar as outras propriedades.

11. Conjuntos Estáveis

Os conjuntos estáveis foi o primeiro conceito de solução de um jogo cooperativo dado por von Neumann e Morgenstern, embora a justificativa para que esses conjuntos sejam chamados de solução não dependem apenas da matemática.
Seja $< P, \nu >$ um jogo na forma característica e superaditivo com N jogadores. Um subconjunto X do conjunto de imputação $I(\nu)$ é dito internamente estável se nenhuma imputação de X domina outra imputação de X por nenhuma coalizão. Dado um subconjunto $X \subset I(\nu)$ o conjunto dominado por X é

$$D(X) = \{y \in I(\nu) : \exists x \in X \text{ e } A \subset P \text{ com } x \succ_A y\} \tag{11}$$

Com esta notação está claro que X é internamente estável quando $X \cap D(X) = \emptyset$. O subconjunto $X \in I(\nu)$ é dito externamente estável se toda imputação de fora de X é dominada por alguma imputação de X via alguma coalizão. Ou, de outra forma, quando $I(\nu) = X \cup D(X)$. X é estável quando for internamente e externamente estável. Ou seja X é estável quando X e $D(X)$ formarem uma partição de $I(\nu)$.

11.1. Propriedades dos Conjuntos Estáveis.

Pode não existir conjuntos estáveis, embora um exemplo disso vou foi descoberto em 1967.
Num jogo podem existir muitos conjuntos estáveis. Veremos um exemplo mais adiante.
Se x é uma imputação de um conjunto estável, ela pode ser dominada por uma imputação de fora do conjunto estável ($D(X)$). Note que por sua vez esta imputação deverá ser dominada por alguma imputação de X, via alguma coalizão. Não há contradição pois a relação de dominância usando diferentes coalizões não é transitiva.
Na proposta original de von Neumann, um tal conjunto X poderia servir de solução no sentido que do ponto de vista interno qualquer imputação de X seria satisfatória

para a grande coalizão (procurando imputações só dentro de X). Por outro lado a escolha de uma imputação de $D(X)$ estaria obstruida por alguma consideração não matemática, uma vez que escolhido um elemento de X ele poderia ser dominado por algum elemento de $D(X)$.

12. Exemplo:

Consideremos um jogo com três jogadores $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ com a função característica definida:

$$\nu(P) = 1 \tag{12}$$

$$\nu(\{p_i\}) = 0 \tag{13}$$

$$\nu(\{p_i, p_j\}) = 1 \tag{14}$$

$$\nu(\emptyset) = 0 \tag{15}$$

O conjunto de imputação deste jogo é o conjunto

$$I(\nu) = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \geq 0 \text{ e } x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

Primeiro veremos que o conjunto:

$$X = \{(0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2, 0)\} \tag{16}$$

é um conjunto estável. Para verificar a estabilidade interna, suponha que $(0, 1/2, 1/2)$ domine $(1/2, 0, 1/2)$. A única coalizão através da qual isto poderia acontecer é $\{p_2\}$ já que apenas a segunda componente do primeiro vetor é maior que a segunda componente do segundo vetor. Mas $\nu(\{p_2\}) = 0$ o que evita a condição de factibilidade. Assim o conjunto X é internamente estável.
Para verificar a estabilidade externa, suponha que (x_1, x_2, x_3) seja um vetor de imputação fora de X. Então é fácil ver que pelo menos duas coordenadas devem ser menores do que $1/2$. Digamos que estas coordenadas sejam x_1 e x_2. Agora verifica-se que o vetor $(1/2, 1/2, 0)$ domina o vetor (x_1, x_2, x_3) via a coalizão $\{p_1, p_2\}$.
Note que a imputação $(2/3, 1/3, 0)$ está fora de X mas domina $(1/2, 0, 1/2)$ via a coalizão $\{p_1, p_2\}$, mas é dominada por $(0, 1/2, 1/2)$ via a coalizão $\{p_2, p_3\}$.
Se $c \in [0, 1/2)$ então o subconjunto

$$Z_c = \{(c, y, z); y, z \geq 0 \text{ e } y + z = 1 - c\}$$

também é um conjunto estável (veja a figura 5). Verifique como exercício.

13. Números de Shapley

Um outro conceito de solução para o jogo cooperativo é o vetor de Shapley (valor de Shapley). Consideremos novamente um jogo superaditivo $< P, \nu >$ com N jogadores. Dada uma coalizão qualquer $A \subset P$, vamos definir a contribuição marginal de um jogador p_i a esta coalizão como:

$$\delta(p_i, A) = \nu(A) - \nu(A \setminus \{p_i\}) \tag{17}$$

Note que se p_i não está na coalizão A este valor é zero. Se p_i integra a coalizão A este valor representa o quanto p_i contribui com a coalizão.
Para definir os números de Shapley vamos considerar que para a fomação da grande coalizão os jogadores vão entrando na coalizão numa certa ordem. Digamos que

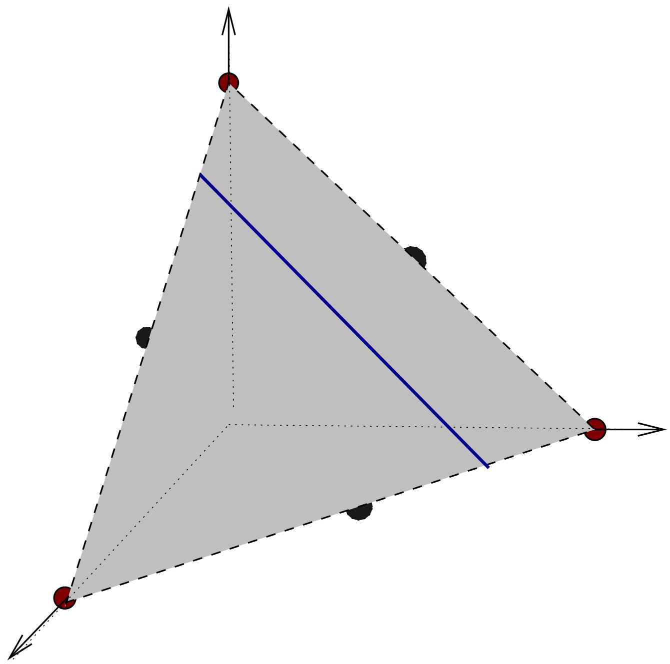

Figura 5. Z_c é a linha cortando o conjunto de imputação.

nesta determinada ordem o jogador p_i seja o k-ésimo a aderir à coalizão. Ele então contribui para forma a coalizão $A = \{p_{j_1}, \dots, p_{j_k}\}$ e podemos dizer que sua contribuição marginal para a formação da grande coalizão nesta ordem escolhida é $\delta(p_i, A)$. Esta ordem pode ser escolhida de $N!$ formas diferentes, assim que é justo considerarmos a média das contribuições de p_i em todas as possíveis configurações de permutação do do conjunto P.
Note agora que dentre as várias permutações de P nas quais p_i aparece na k-ésima posição a coalizão A é a mesma em $(k-1)!$ casos e também não importa a ordem dos $\{p_{j_{k+1}}, \dots, p_{j_N}$. Assim a contribuição $\delta(p_i, A)$ se repete $(k-1)!(N-k)!$ vezes nas $N!$ repetições. Veja que nestes casos $k = |A|$ (número de elementos de A).
Definimos o número de Shapley para o jogador p_i como

$$\phi_i = \sum_{A \in \mathcal{P}(P), A \neq \emptyset} \frac{(|A|-1)!(N-|A|)!}{N!} \delta(p_i, A) \tag{18}$$

O vetor $\Phi(\nu) = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ será chamado vetor de Shapley.
Outras formas de definir o número de Shapley. Defina $P_i = P \setminus \{p_i\}$ então:

$$\phi_i = \sum_{A \subset P_i} \frac{|A|!(N-1-|A|)!}{N!} (\nu(A \cup \{p_i\}) - \nu(A) \tag{19}$$

Um bijeção $\sigma : N \to N$ é chamada uma permutação de N. Existem $N!$ permutações do conjunto N. Dada uma permutação $\sigma : N \to N$ ela define uma ordem de formação da grande coalizao da seguinte forma $p_{\sigma(1)} p_{\sigma(2)} \cdots p_{\sigma(N)}$. O jogador p_i está em algum lugar desta fila. De fato ele está no lugar $\sigma^{-1}(i)$. Antes dele estão os jogadores p_k tais que $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(i)$. O conjunto dos jogadores que estão na fila antes de p_i pela permutação σ denotaremos por $P_\sigma(i)$. De uma outra forma podemos escrever:

$$P_\sigma(i) = \{p_k : \sigma{-}1(k) < \sigma{-}1(i)\} \tag{20}$$

Então novamente:

$$\phi_i = \frac{1}{N!}\sum_\sigma \nu(P_\sigma(i) \cup \{p_i\}) - \nu(P_\sigma(i)) \tag{21}$$

Denotando por $m_i^\sigma(\nu) = \nu(P_\sigma(i) \cup \{p_i\}) - \nu(P_\sigma(i))$ e o vetor $m^\sigma(\nu) = (m_1^\sigma(\nu), \ldots, m_N^\sigma(\nu))$ temos a fórmula

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{N!}\sum_\sigma m^\sigma(\nu) \tag{22}$$

13.1. **Exemplo:** Consideremos o jogo com três pessoas $< P, \nu >$ dado por $\nu(\{p_i\}) = 0$, $\nu(\{p_1, p_2\}) = 4$, $\nu(\{p_1, p_3\}) = 7$, $\nu(\{p_2, p_3\}) = 15$ e $\nu(\{p_1, p_2, p_3\}) = 20$. Podemos fazer a tabela 3 O vetor de Shapley é $\Phi(\nu) = 1/6(21, 45, 54)$. Note que este

σ	$m_1^\sigma(\nu)$	$m_2^\sigma(\nu)$	$m_3^\sigma(\nu)$
$p_1p_2p_3$	0	4	16
$p_1p_3p_2$	0	13	7
$p_2p_1p_3$	4	0	16
$p_2p_3p_1$	5	0	15
$p_3p_1p_2$	7	13	0
$p_3p_2p_1$	5	15	0

Tabela 3. Tabela de contribuições marginais

vetor é uma imputação.

14. Vetor de Shapley como Imputação

Teorema 6. *Se $< P, \nu >$ é superaditivo então o vetor de Shapley é um vetor de imputação.*

Para mostrar este teorema precisamos provar que $\Phi(\nu)$ é racional e eficiente. Vamos primeiro mostrar a racionalidade individual ou seja que $\phi_i \geq \nu(\{p_i\})$. Primeiro observamos que por causa da superaditividade temos que para toda coalizão A contendo p_i temos

$$\nu(A) \geq \nu(A \setminus \{p_i\}) + \nu(\{p_i\}) \tag{23}$$

daí segue, em particular, que

$$\nu(P_\sigma(i) \cup \{p_i\}) - \nu(P_\sigma(i)) \geq \nu(\{p_i\}) \tag{24}$$

E usando a equação 21 temos imediatamente:

$$\phi_i = \frac{1}{N!}\sum_\sigma \nu(P_\sigma(i) \cup \{p_i\}) - \nu(P_\sigma(i)) \geq \frac{1}{N!}\sum_\sigma \nu(\{p_i\}) = \nu(\{p_i\}) \tag{25}$$

A prova da eficiência não depende da superaditividade. Temos que:

$$\sum \phi_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{A \in \mathcal{P}(P), A \neq \emptyset} \frac{(|A|-1)!(N-|A|)!}{N!}(\nu(A) - \nu(A \setminus \{p_i\})) \tag{26}$$

fixada uma coalizão A que não seja a grande coalizão vejamos quais os fatores que multiplicam $\nu(A)$ na soma acima: Aparecem os fatores $\frac{(|A|-1)!(N-|A|)!}{N!}(\nu(A) - \nu(A \setminus \{p_i\})$ para cada $p_i \in A$ ou seja temos os fatores:

$$|A|\frac{(|A|-1)!(N-|A|)!}{N!}\nu(A)$$

e temos também os fatores: $\frac{(|A|)!(N-|A|-1)!}{N!}(\nu(A \cup \{p_j\}) - \nu(A)$ para cada p_j fora de A, ou seja temos os fatores negativos:

$$-(N-|A|)\frac{(|A|)!(N-|A|-1)!}{N!}\nu(A)$$

Claramente a soma destes dois fatores é zero portanto a soma original se restringe a

$$\sum \phi_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-1)!}{N!}\nu(P) = \nu(P) \tag{27}$$

O que mostra a afirmação.
Observação: $\Phi(\nu)$ não está necessariamente no núcleo e não é necessariamente uma imputação se o jogo não for superaditivo.