Correção da Prova

Pedro A. Tonelli

15 de abril de 2004

Enunciado da questão 1

A seguinte matriz A representa a matriz de um jogo de soma zero entre dois jogadores. Qual a melhor estratégia para o jogador das linhas P_1 sabendo que o jogador P_2 usa a estratégia mista $\vec{q} = (1/2, 1/2, 0)$? Existe alguma estratégia pura do jogador P_2 que possa ser descartada? Justifique.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Resposta da questão 1

$$E(\vec{p}, \vec{q}) = \vec{p}^t \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = -p/2 + 1/2 \qquad (2)$$

A melhor estratégia para P_1 é $\vec{p} = (1, 0)$.
Os valores da segunda coluna são sempre menores que os da terceira. Assim P_2 pode descartar a escolha da terceira coluna.

Enunciado da questão 2

No jogo da figura 1 identificar os pares de estratégias de equilíbrio e escrever o jogo na forma estratégica (ou normal).

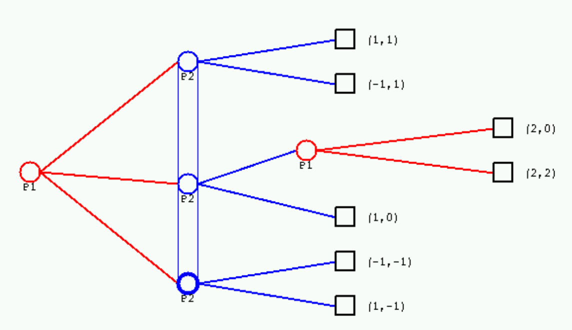

Figura: Jogo para o exercício 2

Resposta da questão 2

O jogador P_1 tem quatro estratégias $\{d, md, me, e\}$ e o jogador P_2 só duas:$\{d, e\}$. Os pares (me, e), (md, e), (me, d) e (d, d) são pontos de equilíbrio.

	e	d
e	$(1, 1)$	$(-1, 1)$
me	$(2, 0)$	$(1, 0)$
md	$(2, 2)$	$(1, 0)$
d	$(-1, -1)$	$(1, -1)$

Tabela: Forma normal

Enunciado da questão 3

Ainda no jogo da figura 1. Quantas sub-árvores de escolha tem o jogador P_2? Descreva uma sub-árvore de escolha do jogador P_2 que não seja uma estratégia admissível.

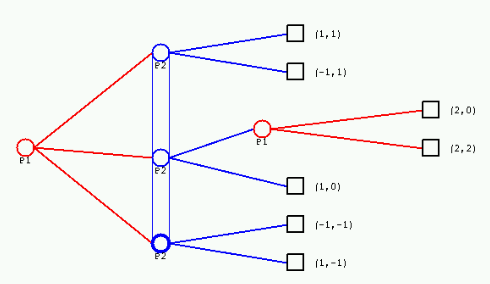

Figura: Jogo para o exercício 2

Resposta da questão 3

Para o jogador P_2 existem oito sub-árvores de escolha, das quais somente duas são estratégias! Qualquer sub-árvore de escolha de P_2 que em vértices diferentes de P_2 toma direções diferentes não é uma estratégia.

Enunciado da questão 4

Encontre os pontos de sela da seguinte matriz A indicando os valores de $u_l(A)$ e $u_c(A)$, em seguida modifique o valor de a_{23}, para que a matriz fique sem ponto de sela e calcule novamente $u_l(A)$ e $u_c(A)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Resposta da questão 4

a_{22} é o único ponto de sela da matriz e $u_l(A) = u_c(A) = 0$.
Se $a_{23} = -1$ então não há ponto de sela e neste caso: $u_l(A) = -1$ e $u_c(A) = 0$

$$\begin{array}{|rrrrr|c|r|} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & | & -1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & | & \end{array} \tag{4}$$

Enunciado da questão 5

Num jogo com três jogadores. Cada jogador dispõe de duas estratégias: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \{a, b\}$. A função de pagamento é indicada na tabela seguinte. A tripla de estratégias (b, b, b) é um equilíbrio do jogo? Justifique. Identifique todas as triplas de estratégias de equilíbrio deste jogo.

Tabela da função de pagamento para a questão 5

Triplas de estratégias	vetor de pagamento
(a, a, a)	$(1, -1, 1)$
(a, a, b)	$(0, 0, 0)$
(a, b, a)	$(-1, 2, 0)$
(a, b, b)	$(0, 1, -1)$
(b, a, a)	$(1, 1, -2)$
(b, a, b)	$(-2, 1, 0)$
(b, b, a)	$(1, 0, 1)$
(b, b, b)	$(0, 0, 1)$

Tabela: Função de pagamento para a questão 5.

Resposta da questão 5

Não há estratégias de equilíbrio neste jogo. (b, b, b) não é equilíbrio pois com (b, a, b) o jogador P_2 melhora o seu ganho.

Enunciado da questão 6

Seja A uma matriz 3x3. É possível que esta matriz tenha apenas três pontos de sela? Dê um exemplo.

Resposta da questão 6

O seguinte é um exemplo de uma matriz 3x3 com exatamente 3 pontos de sela: a_{11}, a_{21}, a_{31}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{5}$$