Função de arbitragem de Nash

1. Explicamos na aula passada, o que era a região de barganha de um jogo cooperativo de dois jogadores. É o conjunto dos pontos da região de pagamento cooperativo que são ótimos de Pareto e dominam os pares de valores maxmin (v_1, v_2) dos jogadores 1 e 2 respectivamente.
A função de arbitragem de Nash pretende escolher de forma justa um ponto desta região de barganha. Definimos a função da seguinte forma: seja Π um subconjunto convexo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e um ponto $(u_0, v_0) \in \Pi$.
Defimos agora $\mathcal{O} = \{(u, v) \in \Pi : (u, v) > (u_0, v_0)\}$. Se $\mathcal{O}$ não for vazio vimos que a função $g(u, v) = (u - u_0)(v - v_0)$ tem um único ponto de máximo no conjunto $\mathcal{O}$ e denotamos por $\Psi((u_0, v_0), \Pi) = (u^*, v^*)$ este ponto e dizemos que é o par de arbitragem de Nash associado ao conjunto Π e ao ponto (u_0, v_0). Caso o conjunto $\mathcal{O}$ seja vazio tomemos:
(a) O conjunto $\mathcal{O}_v = \{v : (u_0, v) \in \Pi \text{ e } v \geq v_0\} \neq \emptyset$
(b) O conjunto $\mathcal{O}_u = \{u : (u, v_)) \in \Pi \text{ e } u \geq u_0\} \neq \emptyset$
definimos $u^* = \sup \mathcal{O}_u$ e $v^* = \sup \mathcal{O}_v$ e neste caso novamente o par de arbiragem de Nash é definido por $\Psi((u_0, v_0), \Pi) = (u^*, v^*)$.
Exercício: Mostre que neste último caso ou $u^* = u_0$ ou $v^* = v_0$.
2. As propriedades básicas da função de arbitragem de Nash:

1. (*Racionalidade Individual*) Em qualquer caso é fácil ver que $u^* \geq u_0$ e $v^* \geq v_0$. Ou seja, para nenhum jogador é vantajoso jogar sozinho sua estratégia maxmin.

2. (*Otimalidade de Pareto*) O par de arbitragem é ótimo de Pareto, pois se para algum ponto $(u, v) \in \Pi$ tivessemos $(u, v) > (u^*, v^*)$ então $g(u, v) > g(u^*, v^*)$ se $(u, v) \in \mathcal{O}$ ou $u > u^* = \sup \mathcal{O}_u$ ou $v > v^* = \sup \mathcal{O}_v$, contradizendo a definição de (u^*, v^*).

3. (*Factibilidade*) É claro que $(u^*, v^*) \in \Pi$, ou seja é um pagamento possível.

4. (*Independência de alternativas irrelevantes*): Se Π' é um subconjunto convexo do conjunto anterior Π tal que $(u_0, v_0) \in \Pi'$ e $\Psi((u_0, v_0), \Pi) = (u^*, v^*) \in \Pi'$ então a arbitragem não é alterada, ou seja, $\Psi((u_0, v_0), \Pi') = (u^*, v^*)$. Claro que $\Psi((u_0, v_0), \Pi') \leq (u^*, v^*)$, mas como (u^*, v^*) também está em Π' temos a igualdade.

5. (*Invariança por transformações lineares*): Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ definimos a transformação afim $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + a \\ y &= \beta v + b \end{aligned}$$

   Se $\Pi^x = X(\Pi)$ e $(x_0, y_0) = X(u_0, v_0)$ então $(x^*, y^*) = X((u^*, v^*))$.

6. (*Simetria*): Se o conjunto Π for simétrico então: $\Psi((u_0, u_0), \Pi) = (u^*, u^*)$

De fato estas seis propriedades caracterizam os axiomas de barganha de Nash e pode-se demonstrar que a função de arbitragem definida acima é a única que satisfaz todas essas propriedades simultaneamente.
3. Agora vamos calcular alguns pares de arbitragens de Nash: Calcular o par de arbitragem de Nash de um jogo dado pela bimatriz:

$$A = \begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}$$

Primeiro vamos calcular os valores maxmin, a matriz de pagamento do primeiro jogador é

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

A segunda coluna pode ser descartada por ser dominada pelas outras. Adotando as convenções da sala de aula temos: $E(p,1) = -4p+5$, e $E(p,3) = 4p+1$ e calculando $v_1 = \max_p \min\{E(p,1), E(p,3)\}$ temos $v_1 = 3$.
A transposta da matriz de pagamento do jogador 2 é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta matriz a última linha domina as outras duas e a segunda coluna domina a outra coluna assim o valor do jogo é $v_2 = 1$. Vamos portanto calcular o par de arbitragem com $(u_0, v_0) = (3, 1)$.
A região de pagamento cooperativa está esboçado na figura 1 Note que o conjunto $\mathcal{O}$

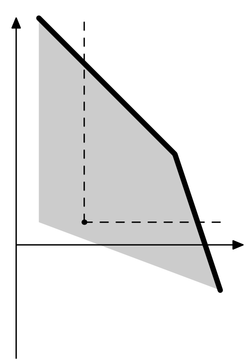

Figura 1: Região de pagamento do problema

é não vazio e portanto devemos encontrar o ponto de máximo da função $g(u,v) = (u-3)(v-1)$ em $\mathcal{O}$. Note que basta procurar este máximo na região de barganha, ou seja, na região marcada mais forte na figura 1. Esta região é constituída por duas retas.

A primeira reta tem equação $v = -u+11$ e segunda reta tem equação $v = -3u+25$. Para achar o máximo de g sobre a primeira reta consideremos $f(u) = (u-3)(-u+11-1) = -u^2 + 13u - 30$ que tem seu ponto de máximo em $u = 6.5$ e o máximo de g na reta está no ponto $(6.5, 4.5)$. Note que este é um ponto do conjunto de barganha. Mas falta ainda considerar o máximo de g sobre a outra reta. Do mesmo modo consideramos $h(u) = (u-3)(-3u+25-1) = -3u^2 + 33u - 72$. Esta função atinge o máximo em $u = 5.5$, ou seja g tem um máximo sobre a segunda reta em $(5,5,8,5)$. Este ponto não

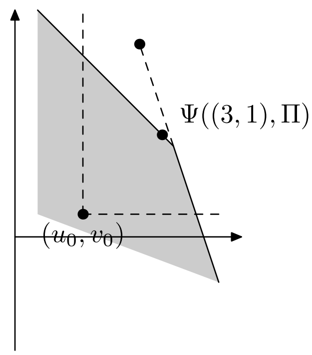

Figura 2: O par de barganha de Nash do problema.

pertence a Π, então deverá ser descartado (veja a figura 2) e substituído pelo ponto da segunda reta mais próximo a ele e que esteja também em Π. No nosso caso, este ponto será o $(7,4)$. Avaliando g nos dois candidatos achamos que o ponto de máximo em $\mathcal{O}$ e portanto o par de barganha de Nash é o ponto $(6.5, 4.5)$.

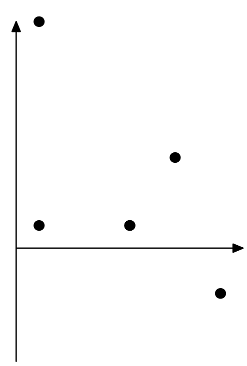

Figura 3: A região de barganha é a envoltória convexa dos pontos acima.