Grupos enumeravelmente compactos

Artur H. Tomita

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

tomita@ime.usp.br

25 de agosto de 2009

Nesta apresentação, todo espaço topológico é completamente regular e Hausdorff e todo grupo é abeliano.

- Um grupo $(G, +)$ munido com uma topologia τ é um grupo topológico se a soma $+ : G \times G \longrightarrow G$ e a inversa $- : G \longrightarrow G$ são contínuas, onde $G \times G$ está munido com a topologia produto.
- Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se para toda cobertura enumerável formada por conjuntos abertos do espaço X existe uma subcobertura finita que cobre X.
- Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência em X possui ponto de acumulação.
- Dado um ultrafiltro livre $p \in \omega^*$ e um espaço topológico X, dizemos que $x \in X$ é o p-limite de $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ se para toda vizinhança U de x o conjunto $\{n \in \omega : x_n \in U\}$ é um elemento de p.
- Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência em X possui p-limite para algum $p \in \omega^*$.

Estudos Preliminares

- Um espaço topológico X é pseudocompacto se toda função contínua de X na reta real $\mathbb{R}$ com a topologia usual é limitada.
- Todo espaço enumeravelmente compacto X é pseudocompacto. A recíproca é verdadeira para espaços normais.
- Um grupo topológico G é pseudocompacto se, e somente se, G é um subgrupo G_δ-denso de um grupo compacto.
- Um espaço topológico X é p-compacto se toda sequência em X tem p-limite.
- Um espaço X é ω-limitado se todo subconjunto enumerável de X possui fecho compacto.
- Todo espaço compacto é ω-limitado. Todo espaço ω-limitado é p-compacto para cada $p \in \omega^*$.

Axioma de Martin

Definição do Axioma de Martin (Axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis)

Se P é uma ordem parcial c.c.c. (enumerável) e se $\mathcal{D}$ é uma coleção de cardinalidade menor que $\mathfrak{c}$ de conjuntos densos em P, então existe um filtro G em P que intersecta todo elemento de $\mathcal{D}$.

- Um conjunto $D \subseteq P$ é denso se, e somente se, para todo $p \in P$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.
- Um conjunto $G \subseteq P$ é filtro se, e somente se, para todo $p \in G$ e $q \in P$, $p \leq q \implies q \in G$ e se para todo $p, q \in G$, existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$.

Ultrafiltros seletivos

Definição de Ultrafiltro Seletivo

Um ultrafiltro livre p é seletivo se para toda partição $\{A_n : n \in \omega\}$ de ω, existe $n \in \omega$ tal que $A_n \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $A_m \cap B$ tem no máximo um elemento, para cada $m \in \omega$.

- Blass mostrou que o Axioma de Martin implica a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos incomparáveis.
- Kunen mostrou que adicionando pelo menos $\aleph_2$ reais randômicos num modelo de CH, não existem ultrafiltros seletivos.
- Baumgartner mostrou que adicionando pelo menos $\aleph_2$ reais de Sacks lado a lado num modelo de CH, o Axioma de Martin falha totalmente. Neste modelo, existem ultrafiltros seletivos.

Sequências convergentes

- Todo grupo compacto possui sequências não triviais convergentes, pois todo grupo compacto é imagem contínua de um cubo generalizado de Cantor [Kuszminov, Doklady Akad. Nauk., 1959].
- Sirota [Mat. Sbornik, 1969] mostrou que para cada cardinal infinito $\kappa = \kappa^\omega$, existe um grupo pseudocompacto de cardinalidade e peso κ, respondendo negativamente a uma pergunta de Arhangel'skii.

Sequências convergentes

- Todo grupo compacto possui sequências não triviais convergentes, pois todo grupo compacto é imagem contínua de um cubo generalizado de Cantor [Kuszminov, Doklady Akad. Nauk., 1959].
- Sirota [Mat. Sbornik, 1969] mostrou que para cada cardinal infinito $\kappa = \kappa^{\omega}$, existe um grupo pseudocompacto de cardinalidade e peso κ, respondendo negativamente a uma pergunta de Arhangel'skii.
- Hajnál e Juhász [Gen. Topology Appl., 1976] mostraram que sob a Hipótese do Contínuo existe um grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Sequências convergentes

- Todo grupo compacto possui sequências não triviais convergentes, pois todo grupo compacto é imagem contínua de um cubo generalizado de Cantor [Kuszminov, Doklady Akad. Nauk., 1959].
- Sirota [Mat. Sbornik, 1969] mostrou que para cada cardinal infinito $\kappa = \kappa^\omega$, existe um grupo pseudocompacto de cardinalidade e peso κ, respondendo negativamente a uma pergunta de Arhangel'skii.
- Hajnál e Juhász [Gen. Topology Appl., 1976] mostraram que sob a Hipótese do Contínuo existe um grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de cardinalidade $\mathfrak{c}$.
- E. van Douwen [Trans. Amer. Math. Soc., 1980], Koszmider, Tomita e Watson [Topology Proc., 2000] e Garcia-Ferreira, Tomita e Watson [Proc. Amer. Math. Soc., 2005] melhoraram este resultado para o Axioma de Martin, $MA_{enumeravel}$ e existência de um ultrafiltro seletivo respectivamente.

HFD e propriedade (P)

Um subconjunto X de $2^{\mathfrak{c}}$ é HFD (Hereditariamente Finalmente Denso) se para todo subconjunto enumerável infinito A de X, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\pi_{]\alpha,\mathfrak{c}[}(A)$ é denso em $2^{]\alpha,\mathfrak{c}[}$.

Um subconjunto X de $2^{\mathfrak{c}}$ possui a propriedade (P) se $\pi_{[0,\alpha[}(X) = 2^{\alpha}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

HFD e propriedade (P)

Um subconjunto X de $2^{\mathfrak{c}}$ é HFD (Hereditariamente Finalmente Denso) se para todo subconjunto enumerável infinito A de X, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\pi_{]\alpha,\mathfrak{c}[}(A)$ é denso em $2^{]\alpha,\mathfrak{c}[}$.

Um subconjunto X de $2^{\mathfrak{c}}$ possui a propriedade (P) se $\pi_{[0,\alpha[}(X) = 2^{\alpha}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

- Hajnál e Juhász construíram um grupo *HFD* com propriedade (P) usando CH. Em particular tais grupos são enumeravelmente compactos, sem sequências convergentes, hereditariamente separáveis e hereditariamente normais.
- O exemplo de van Douwen também é um *HFD* construído sob MA, porém a compacidade enumerável é garantida de forma mais direta, ao invés da propriedade (P) definem-se somente os pedaços iniciais que se fizerem necessários para que uma sequência tenha ponto de acumulação.

Teorema de Comfort e Ross

- Compacidade, a propriedade de ser ω-limitado e p-compacidade para um ultrafiltro $p \in \omega^*$ são propriedades preservadas por produtos.
- Compacidade enumerável e pseudocompacidade não são preservados por produtos. Os primeiros exemplos foram obtidos por Novák [Fund. Math., 1953] e Terasaka [Osaka Math., 1952]. Tais exemplos são construídos a partir de um subespaço de $\beta\omega$. O fato do fecho de um subconjunto infinito de $\beta\omega$ ter cardinalidade maior ou igual a $\mathfrak{c}$ é crucial.

Teorema de Comfort e Ross

- Compacidade, a propriedade de ser ω-limitado e p-compacidade para um ultrafiltro $p \in \omega^*$ são propriedades preservadas por produtos.
- Compacidade enumerável e pseudocompacidade não são preservados por produtos. Os primeiros exemplos foram obtidos por Novák [Fund. Math., 1953] e Terasaka [Osaka Math., 1952]. Tais exemplos são construídos a partir de um subespaço de $\beta\omega$. O fato do fecho de um subconjunto infinito de $\beta\omega$ ter cardinalidade maior ou igual a $\mathfrak{c}$ é crucial.

Comfort e Ross [Pacific J. Math., 1966]

Teorema: O produto de grupos pseudocompactos é pseudocompacto.

Teorema de Comfort e Ross

- Compacidade, a propriedade de ser ω-limitado e p-compacidade para um ultrafiltro $p \in \omega^*$ são propriedades preservadas por produtos.
- Compacidade enumerável e pseudocompacidade não são preservados por produtos. Os primeiros exemplos foram obtidos por Novák [Fund. Math., 1953] e Terasaka [Osaka Math., 1952]. Tais exemplos são construídos a partir de um subespaço de $\beta\omega$. O fato do fecho de um subconjunto infinito de $\beta\omega$ ter cardinalidade maior ou igual a $\mathfrak{c}$ é crucial.

Comfort e Ross [Pacific J. Math., 1966]

Teorema: O produto de grupos pseudocompactos é pseudocompacto.

Questão (Comfort): O produto de grupos enumeravelmente compactos é enumeravelmente compacto?

Um exemplo de van Douwen

A resposta à pergunta de Comfort é consistentemente não.

E. van Douwen [Trans. Amer. Math. Soc., 1980]

Existem dois grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto sob o Axioma de Martin.

O exemplo de van Douwen é dividido em duas partes:

Um exemplo de van Douwen

A resposta à pergunta de Comfort é consistentemente não.

E. van Douwen [Trans. Amer. Math. Soc., 1980]

Existem dois grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto sob o Axioma de Martin.

O exemplo de van Douwen é dividido em duas partes:

- (Axioma de Martin) Existe um subgrupo de $2^{\mathfrak{c}}$ de cardinalidade $\mathfrak{c}$ enumeravelmente compacto sem sequências convergentes.

Um exemplo de van Douwen

A resposta à pergunta de Comfort é consistentemente não.

E. van Douwen [Trans. Amer. Math. Soc., 1980]

Existem dois grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto sob o Axioma de Martin.

O exemplo de van Douwen é dividido em duas partes:

- (Axioma de Martin) Existe um subgrupo de $2^{\mathfrak{c}}$ de cardinalidade $\mathfrak{c}$ enumeravelmente compacto sem sequências convergentes.
- (ZFC) Um subgrupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de $2^{\mathfrak{c}}$ contém dois subgrupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

Sobre um teorema de van Douwen

[van Douwen, Trans. Amer. Math. Soc.,1980]

(ZFC) Um subgrupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de $2^{\mathfrak{c}}$ contém dois subgrupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

A demonstração é parecida com a construção de dois subespaços enumeravelmente compactos de $\beta\omega$ cujo produto não é enumeravelmente compacto, fazendo uso do truque da diagonal pequena.

Num espaço enumeravelmente compacto sem sequências convergentes, o fecho de todo subconjunto enumerável infinito é pelo menos $\mathfrak{c}$.

Comece com um subgrupo enumerável infinito E qualquer. Faça por indução de comprimento $\mathfrak{c}$ duas extensões desse grupo que tenham cardinalidade menor que $\mathfrak{c}$. A cada estágio, incluimos um ponto de acumulação a um subconjunto enumerável pré-fixado de forma que a extensão dos grupos continue tendo como intersecção E.

Sobre um teorema de van Douwen (cont.)

Ao final da construção, teremos dois grupos enumeravelmente compactos H_0 e H_1 tais que $H_0 \cap H_1 = E$. A diagonal $D = \{(x, x) : x \in 2^{\mathfrak{c}}\}$ é fechada em $2^{\mathfrak{c}} \times 2^{\mathfrak{c}}$. Logo, se $H_0 \times H_1$ for enumeravelmente compacta, então $D \cap (H_0 \times H_1) = \{(x, x) : x \in E\}$ é enumeravelmente compacto, contradição, pois todo grupo enumeravelmente compacto infinito tem cardinalidade maior ou igual a $\mathfrak{c}$.

Sobre um teorema de van Douwen (cont.)

Ao final da construção, teremos dois grupos enumeravelmente compactos H_0 e H_1 tais que $H_0 \cap H_1 = E$. A diagonal $D = \{(x,x) : x \in 2^{\mathfrak{c}}\}$ é fechada em $2^{\mathfrak{c}} \times 2^{\mathfrak{c}}$. Logo, se $H_0 \times H_1$ for enumeravelmente compacta, então $D \cap (H_0 \times H_1) = \{(x,x) : x \in E\}$ é enumeravelmente compacto, contradição, pois todo grupo enumeravelmente compacto infinito tem cardinalidade maior ou igual a $\mathfrak{c}$.

- Para obter um exemplo cujo quadrado não é enumeravelmente compacto, não se pode fazer como no caso de espaços topológicos, já que a soma topológica não gera um grupo.

Um exemplo de Hart e van Mill

Hart e van Mill [Trans. Amer. Math. Soc., 1991]

Existe um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto sob o Axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis.

Um exemplo de Hart e van Mill

Hart e van Mill [Trans. Amer. Math. Soc., 1991]

Existe um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto sob o Axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis.

- O exemplo contém um subgrupo ω-limitado formado a partir de modificações de uma família ω-independente. As modificações são feitas para "corrigir" a parte inicial do ponto que será ponto de acumulação. O exemplo possui sequências não triviais convergentes. $MA_{enumeravel}$ é utilizado para construir um grupo enumerável que é HFD.

Um exemplo de Hart e van Mill

Hart e van Mill [Trans. Amer. Math. Soc., 1991]

Existe um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto sob o Axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis.

- O exemplo contém um subgrupo ω-limitado formado a partir de modificações de uma família ω-independente. As modificações são feitas para "corrigir" a parte inicial do ponto que será ponto de acumulação. O exemplo possui sequências não triviais convergentes. $MA_{enumeravel}$ é utilizado para construir um grupo enumerável que é HFD.
- Primeiro é feito o truque da diagonal pequena para encontrar dois grupos enumeravelmente compactos. Para obter o exemplo acima, eles modificam a construção para obter um grupo que contenha dois subgrupos fechados cujo produto não é enumeravelmente compacto.

Variações do exemplo de Hart e van Mill

Tomita [Topology Appl., 1999]

Sob $MA_{enumeravel}$, existe um grupo topológico cujo quadrado é enumeravelmente compacto, mas o cubo não é.

Tomita [CMUC, 1996]

Sob $MA_{enumeravel}$, para cada natural positivo n existe um grupo topológico G tal que G^n é enumeravelmente compacto mas G^{2^n} não é.

Variações do exemplo de Hart e van Mill

Tomita [Topology Appl., 1999]

Sob $MA_{enumeravel}$, existe um grupo topológico cujo quadrado é enumeravelmente compacto, mas o cubo não é.

Tomita [CMUC, 1996]

Sob $MA_{enumeravel}$, para cada natural positivo n existe um grupo topológico G tal que G^n é enumeravelmente compacto mas G^{2^n} não é.

- Estas construções utilizam uma modificação do exemplo de Hart e van Mill, mas o grupo ω-limitado é $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} 2^\alpha$.
- Ao invés da pequena diagonal, é construido uma sequência no produto sem ponto de acumulação.

Sem sequências convergentes com $MA_{enumeravel}$

Koszmider, Tomita e Watson [Topology Proc., 2000]

Sob $MA_{enumeravel}$, existe um grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

Sem sequências convergentes com $MA_{enumeravel}$

Koszmider, Tomita e Watson [Topology Proc., 2000]

Sob $MA_{enumeravel}$, existe um grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

- A cada estágio da construção, $MA_{enumeravel}$ é utilizado para definir as coordenadas de um grupo enumerável, mas que muda a cada estágio de acordo com o elemento não nulo que o grupo deve conter e que deve ter valor não nulo neste estágio. Isto é necessário para garantir uma imersão algébrica ao final da construção.
- Para preservar os pontos de acumulação e para podermos trabalhar com um grupo enumerável a cada estágio, enumeramos as sequências de forma que seu "suporte" fique abaixo do seu indice. Os pontos de acumulação que preservaremos serão relacionados ao índice da sequência.
- Não há necessariamente subconjuntos HFD e a propriedade (P) não precisa estar satisfeita.

Questão 482

Garcia Ferreira [Comfort, Open Problems in Topology, 1990]: Assuma o Axioma de Martin. Existe um grupo p-compacto e um grupo q-compacto cujo produto não é enumeravelmente compacto?

- Garcia Ferreira [Topology Appl., 1993] mostrou que num modelo de Shelah em que todos os ultrafiltros são Rudin Keisler compatíveis, o produto de um grupo p-compacto e um grupo q-compacto é r-compacto para algum ultrafiltro r.

Questão 482

Garcia Ferreira [Comfort, Open Problems in Topology, 1990]: Assuma o Axioma de Martin. Existe um grupo p-compacto e um grupo q-compacto cujo produto não é enumeravelmente compacto?

- Garcia Ferreira [Topology Appl., 1993] mostrou que num modelo de Shelah em que todos os ultrafiltros são Rudin Keisler compatíveis, o produto de um grupo p-compacto e um grupo q-compacto é r-compacto para algum ultrafiltro r.

Tomita e Watson [Topology Appl., 2004] mostraram que para quaisquer dois ultrafiltros seletivos incomparáveis p e q, existe um grupo p-compacto e um grupo q-compacto cujo produto não é enumeravelmente compacto.

- É utilizado o fato de que $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^{\omega}/p$ é um espaço vetorial sobre o corpo 2.

Seja $G = ([\kappa]^{<\omega})^\omega$ um grupo topológico com a diferença simétrica Δ e p um ultrafiltro.

- Diremos que duas funções f, g em G^ω são p-equivalentes se $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in p$. Dado $f \in G^\omega$, $[f]_p$ denotará a classe de p-equivalência de f.
- Se G está munido com uma topologia de grupo e f, g são duas funções em G^ω tais que $x = p - \lim\{f(n) : n \in \omega\}$ e $y = p - \lim\{g(n) : n \in \omega\}$, então $x + y = p - \lim\{f(n) + g(n) : n \in \omega\}$.
- Se G está munido com uma topologia de grupo e f, g são duas sequências em G p-equivalentes tais que $x = p - \lim\{f(n) : n \in \omega\}$, então $x = p - \lim\{g(n) : n \in \omega\}$.

Lema [Tomita e Watson, Topology Appl.,2004]: Se $\mathcal{F} \subseteq G^\omega$ é tal que $\{[f]_p : f \in \mathcal{F}\}$ é uma base de $(G^\omega)/p$ e G está munido com uma topologia de grupo em que cada $f \in \mathcal{F}$ possui p-limite, então G é p-compacta.

Construindo homomorfismos num subgrupo enumerável com ultrafiltros seletivos.

[Tomita e Watson, Topology Appl.,2004]

Proposição: Sejam p_0 e p_1 ultrafiltros seletivos incomparáveis e F um subconjunto finito de $\mathfrak{c}$, um subconjunto enumerável E contendo F e $\{g_\xi : \xi \in E\}$ uma família de funções de ω em $[E]^{<\omega}$. Se S_0 e S_1 são subconjuntos de E tais que $\{[g_\xi]_{p_j} : \xi \in S_j\} \cup \{[\{\mu\}]_{p_j}; \mu \in E\}$ é linearmente independente em $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p_j$ para cada $j \in 2$, então existe uma sequência crescente $\{b_i : i \in \omega\} \subseteq \omega$, uma função r de ω em 2 e uma sequência $\{E_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E tais que

a) $F \subseteq E_0$;

b) $E = \bigcup_{i \in \omega} E_i$;

c) $E_{i+1} \supseteq \bigcup \{g_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup E_i$, para cada $i \in \omega$;

d) $\{g_\xi(b_i) : \xi \in E_i \cap S_{r(i)}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_i\}$ é linearmente independente para cada $i \in \omega$ e

e) $\{b_k : k \in r^{-1}(j)\} \in p_j$ para cada $j \in 2$.

Tomita e Watson [Topology Appl.,2004]

Teorema: Sejam p_0 e p_1 ultrafiltros seletivos incomparáveis e F_0 e F_1 subconjuntos finitos de $\mathfrak{c}$, um subconjunto enumerável E contendo $F_0 \cup F_1 \cup \omega$ e $\{g_\xi : \xi \in E\}$ uma família de funções de ω em $[E]^{<\omega}$. Se S_0 e S_1 são subconjuntos de E tais que $\{[g_\xi]_{p_j} : \xi \in S_j\} \cup \{[\{\mu\}]_{p_j}; \mu \in E\}$ é linearmente independente em $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p_j$ para cada $j \in 2$, então existem homomorfismos $\phi_j : [E]^{<\omega} \longrightarrow 2$ para cada $j < 2$ tais que
i) $\phi_j(F_j) \neq 0$ se $F_j \neq \emptyset$ e $j < 2$;
ii) $\{n \in \omega : \phi_j(g_\xi(n)) = \phi_j(\{\xi\})\} \in p_j$ para cada $j < 2$ e $\xi \in S_j$;
iii) $\{n \in \omega : (\phi_0(\{n\}), \phi_1(\{n\})) = (\phi_0(F_0), \phi_1(F_1))\}$ é finito.

Com a escolha de uma base conveniente $\{[g_\xi]_{\xi \in I_0}\} \cup \{[\{\mu\}] : \mu \in \mathfrak{c}\}$ de $(([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p_j$ podemos aplicar o lema acima com $I_j \supseteq S_j$ e estender os homormorfismos para satisfazer
iv) $\{n \in \omega : \phi_j(g_\xi(n)) = \phi_j(\{\xi\})\} \in p_j$ para cada $j < 2$ e $\xi \in T_j$.

Construindo topologias p-compactas (cont.)

Por i), a diagonal de todas as ϕ_j's gerará uma imersão em $2^{\mathfrak{c}}$ para cada $j < 2$. O grupo $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ será equipado com as topologias induzidas pelas imersões, que denotaremos por G_0 e G_1. Pela condição iv), os representantes de uma base tem p_j-limite, logo serão p_j-compactos. A condição iii) garante que o ponto (F_0, F_1) não é ponto de acumulação da sequência $\{(\{n\}, \{n\}) : n \in \omega\}$ em $G_0 \times G_1$, logo $G_0 \times G_1$ não será enumeravelmente compacto.

Construindo topologias p-compactas (cont.)

Por i), a diagonal de todas as ϕ_j's gerará uma imersão em $2^{\mathfrak{c}}$ para cada $j < 2$. O grupo $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ será equipado com as topologias induzidas pelas imersões, que denotaremos por G_0 e G_1. Pela condição iv), os representantes de uma base tem p_j-limite, logo serão p_j-compactos. A condição iii) garante que o ponto (F_0, F_1) não é ponto de acumulação da sequência $\{(\{n\}, \{n\}) : n \in \omega\}$ em $G_0 \times G_1$, logo $G_0 \times G_1$ não será enumeravelmente compacto.

Lema técnico sobre ultafiltros seletivos

Sejam p_0 e p_1 ultrafiltros seletivos incomparáveis e sejam $\{a^j_k : k \in \omega\} \in p_j$ sequências crescentes tais que $k < a^j_k$ para cada $j < 2$ e $k \in \omega$. Então existem subconjuntos I_0 e I_1 de ω disjuntos tais que
i) $\{a^j_k : k \in I_j\} \in p_j$ para cada $j < 2$;
ii) $\{[k, a^j_k] : j < 2 \wedge k \in I_j\}$ são intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Um grupo p-compacto sem sequências convergentes

[Garcia-Ferreira, Tomita e Watson, Proc. Amer, Math. Soc.,2005]

Exemplo: Seja p um ultrafiltro seletivo. Existe um grupo p-compacto sem sequências convergentes que é subgrupo de $2^{\mathfrak{c}}$. Em particular, se existe um ultrafiltro seletivo então existem dois grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

Um grupo p-compacto sem sequências convergentes

[Garcia-Ferreira, Tomita e Watson, Proc. Amer, Math. Soc.,2005]

Exemplo: Seja p um ultrafiltro seletivo. Existe um grupo p-compacto sem sequências convergentes que é subgrupo de $2^{\mathfrak{c}}$. Em particular, se existe um ultrafiltro seletivo então existem dois grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

- Para fazer com que a sequência não possua sequências não triviais convergentes escolhemos uma família $\mathcal{F} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^{\omega}$ tal que toda sequência injetora possua pelo menos duas subsequências em $\mathcal{F}$ e tal que $\{[f]_p : f \in \mathcal{F}\} \cup \{[\{\mu\}]_p : \mu \in \mathfrak{c}\}$ seja uma base de $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^{\omega}/p$. Usando de técnicas similares ao artigo de Tomita e Watson, obtem-se um grupo p-compacto sem sequências não triviais convergentes.

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados

Tomita [Topology Appl., 2005, vol. 153]

Teorema: Se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto então existe um outro grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados

Tomita [Topology Appl., 2005, vol. 153]

Teorema: Se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto então existe um outro grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

- No resultado de van Douwen, ele extraia dois subgrupos de um grupo de ordem 2.

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados

Tomita [Topology Appl., 2005, vol. 153]

Teorema: Se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto então existe um outro grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

- No resultado de van Douwen, ele extraia dois subgrupos de um grupo de ordem 2.
- No resultado acima, mostra-se que se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto sem sequências convergentes, então existe um outro grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes cujo suporte seja $(\mathbb{Z}_p)^{(\mathfrak{c})}$ ou $(\mathbb{Z})^{(\mathfrak{c})}$.

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados

Tomita [Topology Appl., 2005, vol. 153]

Teorema: Se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto então existe um outro grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

- No resultado de van Douwen, ele extraia dois subgrupos de um grupo de ordem 2.
- No resultado acima, mostra-se que se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto sem sequências convergentes, então existe um outro grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes cujo suporte seja $(\mathbb{Z}_p)^{(\mathfrak{c})}$ ou $(\mathbb{Z})^{(\mathfrak{c})}$.
- Para estes grupos, extrai-se um subgrupo em que designam-se pontos de acumulação para cada sequência de forma que o índice do ponto de acumulação do suporte de qualquer elemento da sequência. Isto fará com que a organização dos pontos de acumulação se pareça com o do grupo se construído em Koszmider, Tomita e Watson.

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados (cont.)

- Refina-se a topologia para ter propriedades parecidas com a da compactificação de Stone-Čech de ω para um par de sequências enumerável pré-fixada, mas preservando os pontos de acumulação designados.

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados (cont.)

- Refina-se a topologia para ter propriedades parecidas com a da compactificação de Stone-Čech de ω para um par de sequências enumerável pré-fixada, mas preservando os pontos de acumulação designados.
- Finalmente tomar um subgrupo que preserve a compacidade enumerável mas eliminando os pontos de acumulação da sequência de pares pré-fixada . Para isto, a sequência de pares pré-fixada não pode ter nenhum p-limite, assim toda vez que um ultrafiltro é p-limite de uma das sequências do par, temos que fazer com que a outra sequência não tenha p-limite.

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados (cont.)

Como consequência do teorema acima e do exemplo de Garcia-Ferreira, Tomita e Watson [Proc. Amer. Math. Soc.,2005] segue:

Recentemente, Szeptycki e Tomita [Topology Appl.,2009] mostraram que existe um HFD com propriedade (P) num modelo de reais randômicos. Utilizando o teorema acima:

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados (cont.)

Como consequência do teorema acima e do exemplo de Garcia-Ferreira, Tomita e Watson [Proc. Amer. Math. Soc.,2005] segue:

Tomita [Topology Appl.,2005, v. 153]

Corolário: Se existe um ultrafiltro seletivo, então existe um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

Recentemente, Szeptycki e Tomita [Topology Appl.,2009] mostraram que existe um *HFD* com propriedade (P) num modelo de reais randômicos. Utilizando o teorema acima:

Uma versão do teorema de van Douwen para quadrados (cont.)

Como consequência do teorema acima e do exemplo de Garcia-Ferreira, Tomita e Watson [Proc. Amer. Math. Soc.,2005] segue:

Tomita [Topology Appl.,2005, v. 153]

Corolário: Se existe um ultrafiltro seletivo, então existe um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

Recentemente, Szeptycki e Tomita [Topology Appl.,2009] mostraram que existe um *HFD* com propriedade (P) num modelo de reais randômicos. Utilizando o teorema acima:

Szeptycki e Tomita [Topology Appl.,2009]

A existência de um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto não implica a existência de ultrafiltros seletivos.

Questão 477 [Comfort, Open Problems in Topology, 1990]

Questão 477: Para quais cardinais $\kappa \leq 2^{\mathfrak{c}}$ existe um grupo topológico G tal que G^{α} é enumeravelmente compacto para $\alpha < \kappa$, mas G^{κ} não é enumeravelmente compacto?

- Ginsburg e Saks [Pacific J. Math., 1975] mostraram que se X é um espaço topológico tal que $X^{2^{\mathfrak{c}}}$ é enumeravelmente compacto então toda potência de X é enumeravelmente compacta.

Questão 477 [Comfort, Open Problems in Topology, 1990]

Questão 477: Para quais cardinais $\kappa \leq 2^{\mathfrak{c}}$ existe um grupo topológico G tal que G^{α} é enumeravelmente compacto para $\alpha < \kappa$, mas G^{κ} não é enumeravelmente compacto?

- Ginsburg e Saks [Pacific J. Math., 1975] mostraram que se X é um espaço topológico tal que $X^{2^{\mathfrak{c}}}$ é enumeravelmente compacto então toda potência de X é enumeravelmente compacta.
- Os exemplos de Hart e van Mill e Tomita citados anteriormente mostram que 2 e 3 são cardinais para os quais existe um grupo topológico como na pergunta de Comfort. Em outro artigo citado anteriormente, Tomita mostrou que para cada positivo n, existe $k \in [n, 2^n[$ e um grupo topológico G tal que G^k enumeravelmente compacto, mas G^{k+1} não é. Todos os exemplos são sob $MA_{enumeravel}$.
- Os exemplos de Tomita utilizam a álgebra de conjuntos gerada por um conjunto finito.

Questão 477 - potências finitas

Tomita [Topology Appl., 2005, vol. 146]

Sob $MA_{enumeravel}$, para todo cardinal finito existe um grupo como na pergunta de Comfort.

Aqui é utilizado uma modificação da idéia de ultraprodutos, para garantir que uma sequência de n-uplas têm ponto de acumulação. Para cada sequência de n-uplas fixamos uma k-upla "independente" que gera todas as outras junto com as sequências constantes. A não compacidade enumerável da $n+1$-ésima potência é obtida usando independencia linear de um conjunto com $n+1$ elementos comparado a um de $k \leq n$ elementos.

Tomita [Fund. Math.,2005]

Se existem $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos, para todo cardinal finito existe um grupo como na pergunta de Comfort.

Usa-se uma versão de teoremas em Tomita e Watson [Topology Appl.,2004] para infinitos ultrafiltros seletivos ao invés de 2 ultrafiltros.

Questão 477- potências infinitas - algumas considerações

- Em potências finitas, o número de candidatos a ponto de acumulação do produto grande era $\mathfrak{c}$ e eram eliminados um a um pelas coordenadas definidas por homomorfismos. Para isto, dado uma $N+1$-upla $(F_0, \ldots, F_{N+1})$ constrói-se um homomorfismo $\Phi : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \longrightarrow 2$ que preserva os pontos de acumulação designados e $\{k \in \omega : \Phi(\{k(N+1)+j\}) = \Phi(F_j) \forall j < N+1\}$.
- Para potências infinitas, não ficou claro se poderia-se garantir com algo similar que um ponto da potência não seja ponto de acumulação.
- No caso em que $\kappa = 2^{\mathfrak{c}}$, por exemplo, o número de candidatos a ponto de acumulação de uma sequência no produto grande é pelo menos $2^{2^{\mathfrak{c}}}$, sendo que o número de ultrafiltro livres é somente $2^{\mathfrak{c}}$.
- Com isto, ao invés de evitar que um ponto do produto grande seja ponto de acumulação, o problema se tornou evitar que a sequência pré-fixada tenha p-limite para cada coordenada.

Questão 477- potências infinitas - algumas considerações

- O problema é que ao incluir um novo ponto para assegurar pontos de acumulação às sequências de potências pequenas, podería-se incluir p-limites indesejados à sequência.
- A solução foi primeiro construir um grupo e extrair o exemplo como subgrupo. Assim, sabemos quais ultrafiltros p têm p-limite para a sequência pré-fixada, e então remover um ponto necessário para uma das coordenadas ter p-limite. Como iremos eliminar pontos, queremos que cada sequência em produtos pequenos tenham uma grande quantidade de pontos de acumulação que sejam "independentes" uma das outras.
- Para garantir que podemos incluir uma pequena quantidade de pontos ao grupo sem dar um p-limite à sequência pré-fixada, refina-se a topologia de modo que os p-limites de sequências "linearmente independentes módulo p" sejam pontos distintos. Tal fato para ultrafiltros seletivos seguia da construção do grupo, mas era necessário que isso valha para todo ultrafiltro livre.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução

Tomita [Fund. Math., 2005]

Se existem $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos incomparáveis e $2^{<2^{\mathfrak{c}}} = 2^{\mathfrak{c}}$, então para todo cardinal infinito κ existe um grupo topológico G como na pergunta de Comfort.

- A extração do subgrupo que será o exemplo é diferente para $\kappa \in [\omega, 2^{\mathfrak{c}}[$ e $\kappa = 2^{\mathfrak{c}}$ devido a cardinalidade de ω^*.
- A construção do grupo grande e do refinamento da topologia é a mesma em ambos os casos. Nesta parte, são utilizados ultrafiltros seletivos, $2^{\mathfrak{c}}$ para cada sequência num produto pequeno. $2^{<2^{\mathfrak{c}}} = 2^{\mathfrak{c}}$ é usada para garantir que o número de sequências num produto pequeno seja $2^{\mathfrak{c}}$.

Lema 1

Seja $\{p_\xi : \omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ uma coleção de ultrafiltros seletivos incomparáveis. Seja $\mathcal{F} = \{g_{\xi,\beta} : \omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}} \wedge \beta \leq \gamma < \alpha\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras em $([2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega})^\omega$, com $\alpha \leq 2^{\mathfrak{c}}$, tais que $\bigcup_{n\in\omega}^{\beta\leq\gamma} g_{\xi,\beta}(n) \subseteq \xi \times \alpha$, para todo ordinal infinito $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$. Considere ainda a família $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ de subconjuntos de α tal que dado $\xi \in 2^{\mathfrak{c}} \setminus \omega$, $\{[g_{\xi,\beta}]_{p_\xi} : \beta \in A_\xi\} \cup \{[\overrightarrow{\mu}]_{p_\xi} : \mu \in 2^{\mathfrak{c}}\}$ é linearmente independente. Então, dado $F \in [2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega}$, existe um homomorfismo $\phi : [2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega} \longmapsto \{0,1\}$ tal que:

- $\phi(F) = 1$, se $F \in [2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega} \setminus \emptyset$
- $\{n \in \omega : \phi(g_{\xi,\beta}(n)) = \phi(\{\xi\} \times \{\beta\})\} \in p_\xi, \forall \beta \in A_\xi \subseteq \alpha$, com $\omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}}$

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

Se $A \subseteq \omega \times \alpha$, então existe um homomorfismo $\psi_A : [2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega} \longmapsto \{0, 1\}$ tal que:

- $\{(n, \gamma) \in \omega \times \alpha : \psi_A(\{n\} \times \{\gamma\}) = 1\} = A$;
- $\{n \in \omega : \psi_A(g_{\xi,\beta}(n)) = \psi_A(\{\xi\} \times \{\beta\})\} \in p_\xi, \forall \beta \in A_\xi \subseteq \alpha$, $\omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}}$.

- Para cada $\eta \in 2^{\mathfrak{c}}$, $\beta \in \alpha$, faça $x_{\eta,\beta} = \{\phi_F(\{\eta\} \times \{\beta\}) : F \in [2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega} \setminus \emptyset\} \cup$ $\cup \{\psi_A(\{\eta\} \times \{\beta\}) : A \subseteq \omega \times \alpha\}$, com $\phi_F : [2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega} \longmapsto \{0, 1\}$ homomorfismo definido no lema anterior tal que $\phi_F(F) = 1$.
- Considere $\{x_{\xi,\beta} : \xi < 2^{\mathfrak{c}}, \beta \in \alpha\}$ enumeração do conjunto formado pelos elementos definidos acima.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

Lema 2

Sejam $\{p_\xi : \omega \leq \xi < 2^\mathfrak{c}\}$, $\alpha \leq 2^\mathfrak{c}$, $\{g_{\xi,\beta} : \omega \leq \xi < 2^\mathfrak{c}$ e $\beta \leq \gamma < \alpha\}$ e $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^\mathfrak{c}\}$ como no lema 1. Então, existe uma família $\{x_{\xi,\beta} : \xi < 2^\mathfrak{c}, \beta \in \alpha\} \subseteq 2^{2^c}$ satisfazendo:

- (I) $x_{\xi,\beta}$ é o p_ξ-limite de $\{x_{g_{\xi,\beta}(n)} : n \in \omega\}$ para todo $\xi \in [\omega, 2^\mathfrak{c})$, com $\beta \in A_\xi$
- (I-a)Se $\lambda \notin A_\xi$, a sequência $\{x_{g_{\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega\}$ possui p$_\xi$-limite em $\langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta,\theta) \in \bigcup_{n\in\omega}^{\beta\leq\gamma} g_{\xi,\beta}(n) \cup \{\xi\} \times A_\xi\}\rangle$
- (II) para todo $A \subseteq \omega \times \alpha$, existe $(\eta,\beta) \in 2^\mathfrak{c} \times \alpha$ tal que $\{(n,\gamma) \in \omega \times \alpha : x_{n,\gamma}(\eta,\beta) = 1\} = A$
- (III) se $p, q \in \omega^*$, $p \neq q$, então para todo $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2 \in \alpha$, com $\beta_i \neq \gamma_i$ $\forall i < 2$, temos $p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\gamma_1} : n \in \omega\} \neq q - \lim\{x_{n,\beta_2} + x_{n,\gamma_2} : n \in \omega\}$ e $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \neq p - \lim\{x_{n,\gamma} : n \in \omega\}$, se $\beta \neq \gamma$.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < 2^\mathfrak{c}$, mas $H^{2^\mathfrak{c}}$ não é.

Lema

Seja $\mathcal{F} = \{g_{\xi,\beta} : \omega \leq \xi < 2^\mathfrak{c} \wedge \beta < \gamma < 2^\mathfrak{c}\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras em $([2^\mathfrak{c} \times 2^\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ tais que:

- $\bigcup_{n\in\omega}^{\beta<\gamma} g_{\xi,\beta}(n) \subseteq \xi \times 2^\mathfrak{c}$, para todo ordinal infinito $\xi < 2^\mathfrak{c}$, com $\gamma < 2^\mathfrak{c}$;
- cada g_ξ em $(([2^\mathfrak{c} \times 2^\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega)$ aparece $2^\mathfrak{c}$ vezes na enumeração: (aqui denotamos g_ξ por $\{g_{\xi,\beta} : \beta \leq \gamma\}$);
- existe uma família $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^\mathfrak{c}\}$ de subconjuntos de $2^\mathfrak{c}$, com $|A_\xi| \leq \gamma < 2^\mathfrak{c}$, tal que dado $\xi \in 2^\mathfrak{c} \setminus \omega$, $\{[g_{\xi,\beta}]_{p_\xi} : \beta \in A_\xi\} \cup \{[\overrightarrow{\mu}]_{p_\xi} : \mu \in 2^\mathfrak{c}\}$ é linearmente independente.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

Lema

Sejam $\{x_{\xi,\beta} : \xi < 2^{\mathfrak{c}}, \beta \in 2^{\mathfrak{c}}\}$ família que satisfaz as condições (I)-(III) no Lema 2 para a família $\mathcal{F}$. Seja $\omega^* = \{q_\eta : \eta < 2^{\mathfrak{c}}\}$ enumeração de todos os ultrafiltros livres. Então, existem famílias $\{\mu_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$, $\{\beta_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$, $\{I_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ e $\{S_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ que satisfazem as seguintes condições:

- $I_\xi = \omega \times \omega \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \xi\} \cup \{\{n\} \times \{\beta_\eta\} : n \in \omega \wedge \eta < \xi\}$, $\forall \xi < 2^{\mathfrak{c}}$ e $\mu_\eta, \beta_\eta \in [\omega, 2^{\mathfrak{c}})$ para cada $\eta < \xi$;
- se $\eta < \xi < 2^{\mathfrak{c}}$ então $S_\eta \subseteq S_\xi$, com $S_\xi \subseteq 2^{\mathfrak{c}} \times 2^{\mathfrak{c}}$, $\forall \xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- $I_\xi \cap S_\xi = \emptyset$ para cada $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- $g_{\mu_\xi} = g_{\delta_\xi}$, onde δ_ξ é o menor ordinal δ em $[\omega, 2^{\mathfrak{c}})$ para o qual $\bigcup_{n\in\omega}^{\beta<\gamma} supp(g_{\delta,\beta}(n)) \subseteq I_\xi$ e $g_\delta \neq g_{\mu_\eta}$, $\forall \eta < \xi$;

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

- S_ξ tem cardinalidade menor ou igual a $|\xi| + |\omega|$ para cada $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$.

Exemplo

Seja $I = \bigcup_{\xi < 2^{\mathfrak{c}}} I_\xi$ e $H = \langle \{x_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in I\} \rangle$. Então H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < 2^{\mathfrak{c}}$, mas $H^{2^{\mathfrak{c}}}$ não é enumeravelmente compacto.

- Seja $\gamma < 2^{\mathfrak{c}}$ e considere $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$ sequência 1-1 em H^γ
- $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$ pode ser vista como $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

- para todo $\lambda \leq \gamma$, se $\lambda \in A_{\mu_\xi}$, temos pelo item (I) do Lema 2 que $x_{\mu_\xi,\lambda}$ é o p_{μ_ξ}- limite de $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega\}$
- Se $\lambda \notin A_{\mu_\xi}$, temos do item (I-a) do Lema 2 que a sequência $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega\}$ possui p_{μ_ξ}-limite em $\langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta,\theta) \in \bigcup_{n\in\omega}^{\beta\in\gamma} g_{\mu_\xi,\beta}(n)\} \cup \{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi}\}\rangle \subseteq \langle\{x_{\xi,\beta} : (\xi,\beta) \in I_{\xi+1}\}\rangle$
- Como $\langle\{x_{\xi,\beta} : (\xi,\beta) \in I_{\xi+1}\}\rangle \subseteq H$, temos que H^γ é enumeravelmente compacto.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

$H^{2^{\mathfrak{c}}}$ *não é enumeravelmente compacto*

- A sequência
  $\{(x_{n,\beta_\xi})_{\xi\in 2^{\mathfrak{c}}} : n \in \omega\}$ não possui q-limite em $H^{2^{\mathfrak{c}}}$ para todo $q \in \omega^*$
- dado $q \in \omega^*$ temos que $q = q_\eta$ para algum $\eta \in 2^{\mathfrak{c}}$
- a sequência $\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\}$ não possui $q_\eta-$limite ou
  $q_\eta - \lim\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\} \notin \langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta,\theta) \in 2^{\mathfrak{c}} \times 2^{\mathfrak{c}} \setminus S_\eta\}\rangle$
- temos que
  $I \cap S_\eta = \emptyset$ de forma que $H \subseteq \langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta,\theta) \in 2^{\mathfrak{c}} \times 2^{\mathfrak{c}} \setminus S_\eta\}\rangle$
- a sequência $\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\}$ não possui $q_\eta-$limite em H
- Logo, $\{(x_{n,\beta_\xi})_{\xi\in 2^{\mathfrak{c}}} : n \in \omega\}$ não possui ponto de acumulação.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < \alpha$, mas H^α não é $(\omega \leq \alpha < 2^{\mathfrak{c}})$.

Seja $\mathcal{F} = \{g_{\xi,\beta} : \omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}} \wedge \beta < \gamma < \alpha\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras em $([2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega})^\omega$, com $\alpha < 2^{\mathfrak{c}}$, tal que

- $\bigcup_{n\in\omega}^{\beta<\gamma} g_{\xi,\beta}(n) \subseteq \xi \times \alpha$, para todo ordinal infinito $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$,
- cada g_ξ em $(([2^{\mathfrak{c}} \times \alpha]^{<\omega})^\omega)^\alpha$ aparece $2^{\mathfrak{c}}$ vezes na enumeração (Aqui denotamos g_ξ por $\{g_{\xi,\beta} : \beta < \gamma\}$);
- existe uma família $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ de subconjuntos de α, com $|A_\xi| \leq \gamma < \alpha$, tal que dado $\xi \in 2^{\mathfrak{c}} \setminus \omega$, $\{[g_{\xi,\beta}]_{p_\xi} : \beta \in A_\xi\} \cup \{[\overrightarrow{\mu}]_{p_\xi} : \mu \in 2^{\mathfrak{c}}\}$ é linearmente independente.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

Lema

Sejam $\{x_{\xi,\beta} : \xi < 2^{\mathfrak{c}}, \beta \in \alpha\}$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ famílias que satisfazem as condições (I)-(III) no lema 2 para a família $\mathcal{F}$. Então existem famílias $\{\mu_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$, $\{I_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$, $\{S_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ e $\{P_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ que satisfazem as seguintes condições:

- $I_\xi = \omega \times \alpha \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \xi\}$, $\forall \xi < 2^{\mathfrak{c}}$ e $\mu_\eta < 2^{\mathfrak{c}}$ para cada $\eta < \xi$;
- $S_\xi \subseteq 2^{\mathfrak{c}} \times \alpha$, $\forall \xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- $(I_\xi \cup \{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi}) \cap S_\xi = \emptyset$ para cada $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- $g_{\mu_\xi} = g_{\delta_\xi}$, onde δ_ξ é o menor ordinal δ em $[\omega, 2^{\mathfrak{c}})$ para o qual $\bigcup_{\beta<\gamma}^{n\in\omega} supp(g_{\delta,\beta}(n)) \subseteq I_\xi$ e $g_\delta \neq g_{\mu_\eta}$, $\forall \eta < \xi$;

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

- $P_\xi = \{p : p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \in \langle x_{\eta,\mu} : (\eta,\mu) \in 2^{\mathfrak{c}} \times \alpha\rangle, \forall \beta < \alpha$ e $\exists \beta_1, \beta_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, tais que $p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\beta_2} : n \in \omega\} \in H_\xi\}$, $\forall \xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- se $p \in P_\xi$ então existe $\beta < \alpha$ tal que $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \notin$ $\notin \langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta,\theta) \in 2^{\mathfrak{c}} \times \alpha \setminus S_\xi\}\rangle$;
- P_ξ tem cardinalidade menor ou igual que $|\alpha| + |\xi|$ para cada $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- S_ξ tem cardinalidade menor ou igual que $|\alpha| + |\xi|$ para cada $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- S_ξ tem cardinalidade menor ou igual que $|\alpha| + |\xi|$ para cada $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$;
- se $\eta < \xi < 2^{\mathfrak{c}}$, então $P_\eta \subseteq P_\xi$ e se ξ é ordinal limite, então $P_\xi = \bigcup\limits_{\eta<\xi} P_\eta$;
- se $\eta < \xi < 2^{\mathfrak{c}}$, então $S_\eta \subseteq S_\xi$ e se ξ é ordinal limite, então $S_\xi = \bigcup\limits_{\eta<\xi} S_\eta$.

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

Exemplo

Seja $I = \bigcup_{\xi < 2^{\mathfrak{c}}} I_\xi$ e seja $H = \langle \{x_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in I\} \rangle$. Então H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < \alpha$, mas H^α não é enumeravelmente compacto. H^γ é enumeravelmente compacto

- seja $\gamma < \alpha$ e considere $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$ sequência 1-1 em H^γ
- existe $\mu_\xi < 2^{\mathfrak{c}}$ tal que $g_{\mu_\xi} = g_\theta$ e a sequência $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$ pode ser vista como $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$
- para todo $\lambda \leq \gamma$, se $\lambda \in A_{\mu_\xi}$, temos pelo item (I) do lema 2 que $x_{\mu_\xi,\lambda}$ é o p_{μ_ξ}- limite de $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega\}$

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução.

- Se $\lambda \notin A_{\mu_\xi}$, temos do item (I-a) do lema 2 que a sequência $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega\}$ possui p_{μ_ξ}-limite em $\langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta,\theta) \in \bigcup_{\beta<\gamma}^{n\in\omega} g_{\mu_\xi,\beta}(n) \cup \{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi}\}\rangle \subseteq \langle\{x_{\xi,\beta} : (\xi,\beta) \in I_{\xi+1}\}\rangle$
- $\langle\{x_{\xi,\beta} : (\xi,\beta) \in I_{\xi+1}\}\rangle \subseteq H$ para todo $\lambda \in \gamma + 1$
- H^γ é enumeravelmente compacto.

H^α não é enumeravelmente compacto

- Suponha por contradição que a sequência $\{(x_{n,\beta})_{\beta\in\alpha} : n \in \omega\}$ possui ponto de acumulação em H^α
- $\forall \beta < \alpha, \{x_{n,\beta} : n \in \omega\}$ possui ponto de acumulação em $H = \bigcup_{\eta<2^{\mathfrak{c}}} H_\eta$
- existe $\xi < 2^{\mathfrak{c}}$ tal que todos os pontos de acumulação estão em H_ξ

Questão 477 - potências infinitas - esboço da solução

- Seja $p \in \omega^*$ tal que $(x_\beta)_{\beta\in\alpha} = p - \lim\{(x_{n,\beta})_{\beta\in\alpha} : n \in \omega\} \in (H_\xi)^\alpha \subseteq H^\alpha$
- vemos que $p \in P_\xi$ e daí existe $\beta < \alpha$ tal que $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \notin \langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in 2^{\mathfrak{c}} \times \alpha \setminus S_\xi\}\rangle$
- existe $\beta < \alpha$ tal que $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \notin \langle\{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in 2^{\mathfrak{c}} \times \alpha \setminus S_\xi\}\rangle$
- $H = \langle\{x_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in I\}\rangle$ e $I \cap S_\xi = \emptyset$ e $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \notin H$, o que é contradição

Grupos cuja cardinalidade tem cofinalidade enumerável

E. van Douwen [Proc. Amer. Math. Soc., 1980]

Sob a Hipótese Generalizada do Contínuo, todo grupo pseudocompacto tem cardinalidade de cofinalidade não enumerável.

- Ele também mostrou que usando uma aritmética adequada, é consistente que existem grupos pseudocompactos cuja cardinalidade tem cofinalidade enumerável.

E. van Douwen [Proc. Amer. Math. Soc., 1980]

Questão: Se G é um grupo enumeravelmente compacto então $|G|^\omega = |G|$? Pelo menos a cofinalidade de $|G|$ é não enumerável?

Tomita [Proc. Amer. Math. Soc., 2003]

Exemplo: É consistente via forcing, que existe um grupo enumeravelmente compacto de cardinalidade $\aleph_\omega$.

Grupos cuja cardinalidade tem cofinalidade enumerável

- O exemplo em Tomita [Proc. Amer. Math. Soc., 2003] modificou o exemplo em Tomita [Topology Appl., 1999], que é uma variação de Hart e van Mill [Trans. Amer. Math. Soc., 1991].
- O grupo enumerável é substituido por um grupo de cardinalidade $\aleph_\omega > \mathfrak{c}$ ou seja, o exemplo é a soma do grupo ω-limitado e um grupo de cardinalidade $\aleph_\omega$. Todas as sequências no grupo de cardinalidade $\aleph_\omega$ tem um ponto de acumulação no grupo $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} 2^\alpha \times \{0\}^{[\alpha,\mathfrak{c}[}$.
- O forcing utilizado é parecido ao utilizado em Koszmider, Tomita e Watson [Topology Proc., 2000].
- O peso do exemplo é $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

Tomita [Topology Appl., 2005, v. 150]

Existe um grupo p-compacto de cardinalidade $\aleph_\omega$ cujo peso é $2^\mathfrak{c} > \aleph_\omega$.

Peso de grupos enumeravelmente compactos sem sequências convergentes

- Malykhin e Sapiro [Math. Notes, 1985] provaram que sob a Hipótese Generalizada do Contínuo (GCH), todo grupo totalmente limitado (em particular, pseudocompacto) sem sequências não triviais convergentes tem cardinalidade de cofinalidade não enumerável. Eles obtiveram via forcing um modelo onde existe um grupo pseudocompacto sem sequências convergentes de peso $\aleph_1 < \mathfrak{c}$.

Peso de grupos enumeravelmente compactos sem sequências convergentes

- Malykhin e Sapiro [Math. Notes, 1985] provaram que sob a Hipótese Generalizada do Contínuo (GCH), todo grupo totalmente limitado (em particular, pseudocompacto) sem sequências não triviais convergentes tem cardinalidade de cofinalidade não enumerável. Eles obtiveram via forcing um modelo onde existe um grupo pseudocompacto sem sequências convergentes de peso $\aleph_1 < \mathfrak{c}$.

Tomita [Proc. Amer. Math. Soc., 2003] mostrou que é consistente que existe um grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de peso $\aleph_\omega$.

Peso de grupos enumeravelmente compactos sem sequências convergentes

- Malykhin e Sapiro [Math. Notes, 1985] provaram que sob a Hipótese Generalizada do Contínuo (GCH), todo grupo totalmente limitado (em particular, pseudocompacto) sem sequências não triviais convergentes tem cardinalidade de cofinalidade não enumerável. Eles obtiveram via forcing um modelo onde existe um grupo pseudocompacto sem sequências convergentes de peso $\aleph_1 < \mathfrak{c}$.

Tomita [Proc. Amer. Math. Soc., 2003] mostrou que é consistente que existe um grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de peso $\aleph_\omega$.

Castro Pereira e Tomita [Topology Appl., 2009] mostraram que é consistente que para cada cardinal κ existe um grupo enumeravelmente compacto sem sequências convergentes cujo peso é maior que κ e tem cofinalidade enumerável.

Grupos abelianos livres enumeravelmente compactos

- Tkachenko [Izvestia, 1990] provou que sob CH existe um grupo abeliano livre enumeravelmente compacto de cardinalidade $\mathfrak{c}$.
- Tomita [CMUC, 1998], Koszmider, Tomita e Watson [Topology Proc., 2000] e Madariaga Garcia e Tomita [Topolog Appl., 2007] obtiveram tais exemplos sob MA, $MA_{enumeravel}$ e existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos respectivamente.

Grupos abelianos livres enumeravelmente compactos

- Tkachenko [Izvestia, 1990] provou que sob CH existe um grupo abeliano livre enumeravelmente compacto de cardinalidade $\mathfrak{c}$.
- Tomita [CMUC, 1998], Koszmider, Tomita e Watson [Topology Proc., 2000] e Madariaga Garcia e Tomita [Topolog Appl., 2007] obtiveram tais exemplos sob MA, $MA_{enumeravel}$ e existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos respectivamente.
- Koszmider, Tomita e Watson [op. cit.] obtiveram uma topologia de grupo enumeravelmente compacta para $\mathbb{Z}^{(2^{\mathfrak{c}})}$ usando forcing. Madariaga Garcia e Tomita [op. cit.] obtiveram tal exemplo assumindo a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos incomparáveis.
- Castro Pereira e Tomita [Appl. Gen. Topology, 2004] construiram um grupo abeliano livre sem sequências convergentes de cardinalidade $\aleph_\omega$ num modelo de forcing.

Madariaga-Garcia e Tomita [Topology Appl., 2007]

Proposição: Seja $J \in \mathbb{Z}^{(2^{\mathfrak{c}})}$ não nula. Seja E um conjunto enumerável, $\{p_\xi : \xi \in E\}$ ultrafiltros seletivos incomparáveis e $\{g_\xi : \xi \in E\}$ uma família de funções de ω em $\mathbb{Z}^{(2^{\mathfrak{c}}}$ cujos suportes estão em E. Então existe uma função $i : \omega \longrightarrow E$, uma sequência de reais positivos $\{r_k : k \in \omega\}$, uma sequência crescente $\{b_k : k \in \omega\} \subseteq \omega$ e uma sequência $\{E_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E tais que

a) $supp(J) \subseteq E_0$;
b) $E = \bigcup_{k \in \omega} E_k$;
c) $E_{k+1} \supseteq \bigcup\{supp(g_\xi(b_k)) : \xi \in E_k\} \cup E_i$, para cada $k \in \omega$;
d) $i(k) \in E_k$ para cada $k \in \omega$;
e) $\{b_k : k \in i^{-1}(\xi)\} \in p_\xi$ para cada $\xi \in E$;
f) $|f_{i(k)}(b_k)|r_k > 2$ para cada $k \in \omega$ com $f_{i(k)}$ do tipo I;
g) $suppf_{i(k)}(b_k) \setminus E_k \neq \emptyset$ para cada $k \in \omega$ com $f_{i(k)}$ do tipo II;
h) $r_0 = \frac{1}{||J||}$ e $r_{k+1} = \frac{r_k}{2||f_{i(k)}(b_k)||}$ para cada $k \in \omega$.

O Problema de Wallace

Wallace perguntou na década de 50 se todo semigrupo topológico cancelativo enumeravelmente compacto é um grupo topológico. Diversos resultados foram provados com condições extras, mas o problema permaneceu aberto por quatro décadas.

- Robbie e Svetlichnyi [Proc. Amer. Math. Soc., 1996] provaram sob CH que existe um contraexemplo à pergunta de Wallace.
- A construção deles utiliza a existência de um exemplo de como o de Tkachenko [Izvestia, 1990].

O Problema de Wallace

Wallace perguntou na década de 50 se todo semigrupo topológico cancelativo enumeravelmente compacto é um grupo topológico. Diversos resultados foram provados com condições extras, mas o problema permaneceu aberto por quatro décadas.

- Robbie e Svetlichnyi [Proc. Amer. Math. Soc., 1996] provaram sob CH que existe um contraexemplo à pergunta de Wallace.
- A construção deles utiliza a existência de um exemplo de como o de Tkachenko [Izvestia, 1990].
- Tomita [Canad. Math. Bull., 1996] provou que sob $MA_{enumeravel}$ existe um contraexemplo à pergunta de Wallace usando o semigrupo gerado por um ponto e o subgrupo $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathbb{T}^\alpha \times \{0\}^{[\alpha,\mathfrak{c}[}$.

O Problema de Wallace

Wallace perguntou na década de 50 se todo semigrupo topológico cancelativo enumeravelmente compacto é um grupo topológico. Diversos resultados foram provados com condições extras, mas o problema permaneceu aberto por quatro décadas.

- Robbie e Svetlichnyi [Proc. Amer. Math. Soc., 1996] provaram sob CH que existe um contraexemplo à pergunta de Wallace.
- A construção deles utiliza a existência de um exemplo de como o de Tkachenko [Izvestia, 1990].
- Tomita [Canad. Math. Bull., 1996] provou que sob $MA_{enumeravel}$ existe um contraexemplo à pergunta de Wallace usando o semigrupo gerado por um ponto e o subgrupo $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathbb{T}^{\alpha} \times \{0\}^{[\alpha,\mathfrak{c}[}$.
- Madariaga Garcia e Tomita [Topology Appl., 2007] mostraram que a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos incomparáveis implica a existência de um contraexemplo à pergunta de Wallace.

Grupos abelianos que admitem topologia enumeravelmente compacta

- Halmos [Bull. Amer. Math. Soc., 1944] construiu uma topologia de grupo compacta em $\mathbb{R}$ e perguntou quais grupos admitem topologias de grupo compactas.
- Harrison [Ann. Math., 1959] e Hulanicki [Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys., 1958] classificaram todos os grupos que admitem uma topologia de grupo compacta.
- Dikranjan e Shakhmatov [Mem. Amer. Math. Soc., 1993] fazem um survey sobre os grupos abelianos que admitem uma topologia de grupo pseudocompacta. Eles explicitamente perguntam sobre a classificação algébrica dos grupos enumeravelmente compactos.
- Tkachenko e Yashenko [Topology Appl., 2002] usaram o Axioma de Martin para construir topologias de grupo enumeravelmente compacto para todos os grupos abelianos quase-livres de torção de cardinalidade $\mathfrak{c}$, ou seja, para cada inteiro positivo n, o número de elementos de ordem n é finito.

Classificação algébrica de grupos abelianos que admitem uma topologia enumeravelmente compacta.

- Dikranjan e Tkachenko [Forum Math., 2003], usando o Axioma de Martin, classificaram todos os grupos abelianos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia enumeravelmente compacta. A construção está dividada nos grupos de torção e nos grupos de não-torção.

Classificação algébrica de grupos abelianos que admitem uma topologia enumeravelmente compacta.

- Dikranjan e Tkachenko [Forum Math., 2003], usando o Axioma de Martin, classificaram todos os grupos abelianos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia enumeravelmente compacta. A construção está dividada nos grupos de torção e nos grupos de não-torção.
- Dikranjan e Shakhmatov [Topology Appl., 2005], num modelo de forcing satisfazendo CH, classificaram todos os grupos abelianos de cardinalidade no máximo $2^{\mathfrak{c}}$ que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta.

Classificação algébrica de grupos abelianos que admitem uma topologia enumeravelmente compacta.

- Dikranjan e Tkachenko [Forum Math., 2003], usando o Axioma de Martin, classificaram todos os grupos abelianos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia enumeravelmente compacta. A construção está dividada nos grupos de torção e nos grupos de não-torção.
- Dikranjan e Shakhmatov [Topology Appl., 2005], num modelo de forcing satisfazendo CH, classificaram todos os grupos abelianos de cardinalidade no máximo $2^{\mathfrak{c}}$ que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta.
- Castro-Pereira e Tomita [Topology Appl., 2009], usando aritmética cardinal e a existência de um ultrafiltro seletivo, classificaram todos os grupos abelianos de torção que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta.

Grupos pseudocompactos que admitem sequências convergentes

Dikranjan e Shakhmatov [Topology Appl., 2005]

Questão: todo grupo abeliano que admite uma topologia de grupo pseudocompacta (enumeravelmente compacta) admite uma outra que em adição possui uma sequência não trivial convergente?

Galindo, Garcia-Ferreira e Tomita [Math. Japonica, 2009]

Todo grupo abeliano que admite uma topologia de grupo pseudocompacta também admitem uma outra com sequências não triviais convergentes.

Ainda está em aberto se todo grupo que admite uma topologia enumeravelmente compacta admite uma outra que contém uma sequência convergente.