NOTAS DE AULA DO

PICME

Programa de Iniciação Científica e Mestrado em Combinatória

http://www.ime.usp.br/~tcco/picme

Anotado por: Henrique Stagni

1º semestre de 2016

Conteúdo

1 Paradoxo de Banach-Tarski

◇ ◇ ◇ *Aula 1 (01 de Março) — Yoshiharu Kohayakawa* ◇ ◇ ◇

Uma *isometria* entre dois conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma função $\varphi : X \to Y$ bijetora que preserva distâncias, isto é, tal que $d(x_1, x_2) = d(\phi(x_1), \phi(x_2))$ para todo $x, y \in X$. Dizemos que X e Y são *congruentes* se existe uma tal função e denotamos esse fato por $X \cong Y$.

Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que X e Y são *equidecomponíveis* se se existem conjuntos $X_1, \dots, X_k \subseteq X$, dois a dois disjuntos e conjuntos $Y_1, \dots, Y_k \subseteq Y$ dois a dois disjuntos tais que

1. $X = \dot\bigcup_{i=1}^k X_i$, $Y = \dot\bigcup_{i=1}^k Y_i$
2. $X_i \cong Y_i$ para todo $1 \le i \le k$.

Denotamos o fato de que X e Y é equidecomponível por $X \equiv Y$ e também escrevemos $X \equiv_k Y$ para denotar que X e Y são equidecomponíveis em no máximo k partes.

Note que $\equiv$ é uma relação de equivalência. De fato, não é difícil mostrar que se $X \equiv_k Y$ e $Y \equiv_m Z$, então $X \equiv_{km} Z$.

Exercício 1.1. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ polígonos. Então $X \equiv^g Y$ se, e somente se, $X \equiv Y$.

Teorema 1.2 (Banach-Tarski)**.** *Suponha que $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ são bolas disjuntas de mesmo raio em $\mathbb{R}^3$. Então $B_1 \cup B_2 \equiv_{10} B_1$.*

Pendente

◇ ◇ ◇ *Aula 2 (08 de Março) — Yoshiharu Kohayakawa* ◇ ◇ ◇

1.1 Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder-Banach

O resultado demonstrado nesta aula permitirá resolver o seguinte exercício.

Exercício 1.3. Seja $A = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \le \frac{1}{2}\}$ um disco de diâmetro unitário no plano e $B = [0,1] \times [0,1]$ um quadrado de lado unitário. Prove que existem partições $A = A_1 \cup A_2$ e $B = A_2 \cup B_2$ (i.e., com $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ e $B_1 \cap B_2 = \varnothing$) tais que $A_1 \cong B_1$ e $A_2 \cong B_2$.

Teorema 1.4 (Cantor-Bernstein-Schröder-Banach)**.** *Se A e B são conjuntos tais que $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $A \sim B$.*

Provaremos a seguinte versão mais forte desse Teorema.

Teorema 1.5 (Cantor-Bernstein-Schröder-Banach)**.** *Suponha que $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são funções injetoras. Então existem partições $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ tais que $f(A_1) = B_1$ e $g(B_2) = A_1$.*

Demonstração. Dado $x \in A$, consideramos a seguinte sequência

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))), \dots \qquad (*)$$

Pomos $A_1 = \{x \in A : (*) \text{ tem número finito e ímpar de elementos}\}$. Por exemplo, se $x \notin \mathfrak{I}(g)$, então (*) tem um único elemento e $x \in A_1$. Pomos $A_2 = A \setminus A_1$ e $B_1 = f(A_1)$. Pomos também $B_2 = g^{-1}(A_2) = \{b \in B : g(b) \in A_2\}$.

Afirmamos agora que valem os seguinte fatos.

- $B = B_1 \cup B_2$.

  Demonstração. Fixe $y \in B$ e considere $x = g(y)$. Se $x \in A_2$, então $y \in B_2$. Suponha então que $x \in A_1$. Pela definição de A_1, existe $x' = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(x))$. Novamente pela definição de A_1 devemos ter $x' \in A_1$. Mas então $y = f(x')$ com $x' \in A_1$ e, portanto, $y \in f(A_1) = B_1$. □

- $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

  Demonstração. Suponha que exista $y \in B_1 \cap B_2$. Então existe $x' \in A_1$ tal que $f(x') = y$ e existe $x \in A_2$ tal que $g(y) = x$. Considere agora a sequência (*) para o elemento x. Vemos que $x \in A_1$, contradição. □

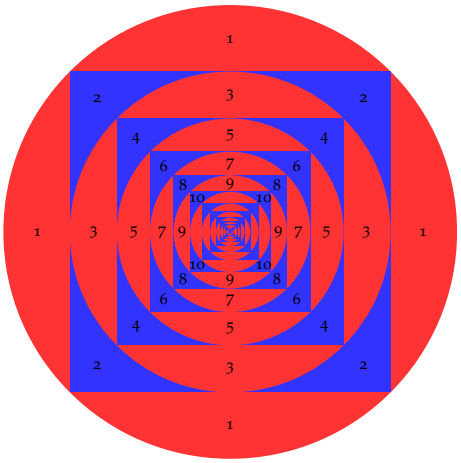
- $g(B_2) = A_2$.

  Demonstração. Fixe $x \in A_2$. Por definição de A_1, existe y tal que $g(y) = x$. Claramente, como $B_2 = g^{-1}(A_2)$ e $x \in A_2$ temos que $y \in B_2$. Segue que $g(B_2) = A_2$. □

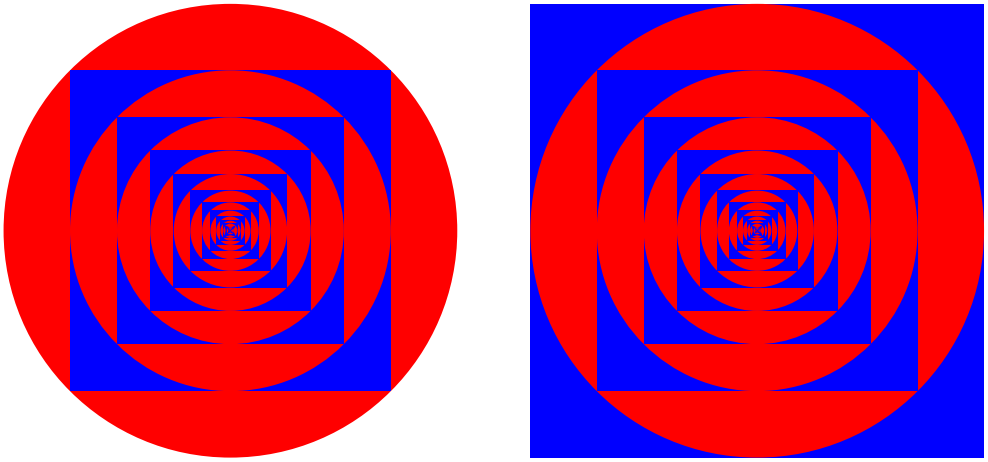
Segue dos três fatos acima que A_1, A_2, B_1, B_2 são conjuntos como no enunciado do Teorema. □

Solução Exercício 1.3. Sejam A e B, respectivamente, o disco e o quadrado do enunciado. Defina $f : A \to B$ como a função identidade e $g : B \to A$, $(x, y) \mapsto (\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}})$. Como $A \cong f(A)$ e $B \cong g(B)$, ao aplicar o Teorema 1.5 obtemos partições $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ como desejado.

Na figura do disco A abaixo, a cor vermelha corresponde ao conjunto A_1 e a azul ao conjunto A_2. Os números indicam o tamanho da sequência * para os pontos daquela região do conjunto A.



A figura abaixo mostra ambos os conjuntos A e B e suas respectivas partições.



□

2 Polígonos equidecomponíveis geometricamente

◇ ◇ ◇ *Aula 3 (08 de Março) — Victor Luiz Martins de Sousa* ◇ ◇ ◇

Dizemos que dois polígonos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ são *equidecomponíveis no sentido geométrico* se

1. Existem polígonos $A_1, \ldots, A_n$, com interiores dois-a-dois disjuntos, satisfazendo $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
2. Existem polígonos $B_1, \ldots, B_n$, com interiores dois-a-dois disjuntos, satisfazendo $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.
3. Para todo $1 \leq i \leq n$, temos $A_i \cong B_i$, isto é, existe uma isometria entre A_i e B_i.

Escrevemos $A \overset{g}{\equiv} B$ para denotar que A e B são equidecomponíveis (no sentido geométrico).

2.1 Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien

Sejam A e B dois polígonos. Uma condição trivialmente necessária para que $A \overset{g}{\equiv} B$ é que A e B tenham a mesma área. Provaremos nesta seção o resultado a seguir, que mostra que esta condição é também suficiente.

Teorema 2.1 (Wallace-Bolyai-Gerwien)**.** *Se A e B são polígonos de mesma área, então $A \overset{g}{\equiv} B$.*

Lema 2.2. *Se $A \overset{g}{\equiv} B$ e $B \overset{g}{\equiv} C$, então $A \overset{g}{\equiv} C$.*

Demonstração. A idéia da prova consiste em sobrepor a decomposição de B que mostra que A e B são equidecomponíveis com a decomposição de B que mostra que B e C são equidecomponíveis.

Como $A \overset{g}{\equiv} B$, então existem decomposições (i.e. partições em polígonos com interiores dois-a-dois disjuntos) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ e isometrias $f_i : A_i \to B_i$ (para todo $1 \leq i \leq n$). Como $B \overset{g}{\equiv} C$, também existem decomposições $B = \bigcup_{j=1}^{m} B'_j$ e $C = \bigcup_{j=1}^{m}$ e isometrias $g_j : B_j \to C_j$ (para todo $1 \leq j \leq m$).

Como $\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (B_i \cap B'_j)$ é uma decomposição de B, podemos definir decomposições $A = \bigcup A_{i,j}$ e $B = \bigcup B_{i,j}$ onde

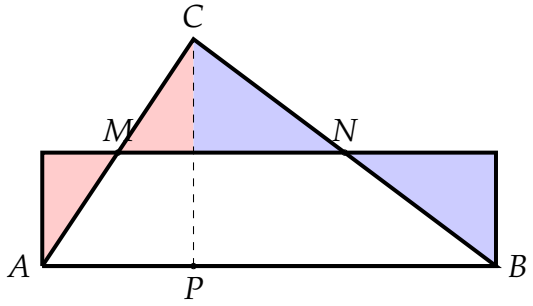
$$A_{i,j} = f^{-1}(B_i \cap B'_j) \quad \text{e} \quad C_{i,j} = g(B_i \cap B'_j).$$

Ademais a função $h_{i,j} = (f_i \circ g_j)$ atesta que $A_{i,j}$ é isométrico a $C_{i,j}$ para todo $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Por fim, notamos que podemos supor que todos os A_i e B_i são polígonos *convexos*. Daí segue que $A_{i,j}$ e $B_{i,j}$ também são polígonos. □

Lema 2.3. *Para todo triângulo T, existe um retângulo R tal que $T \overset{g}{\equiv} R$.*

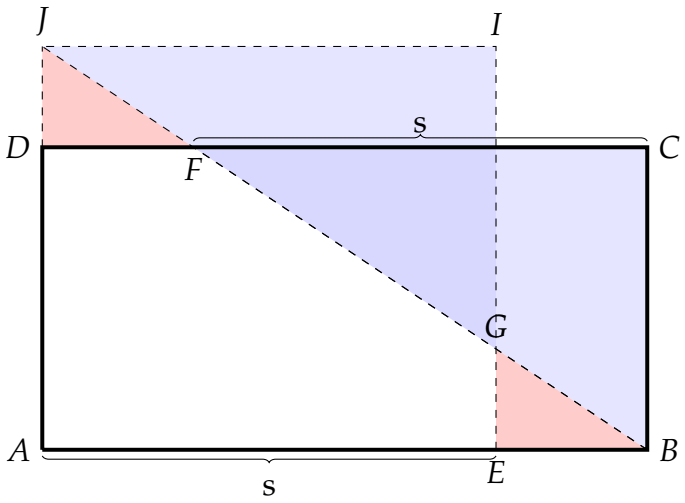
Demonstração. Seja $T = ABC$ e suponha sem perda de generalidade que $C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ são ângulos agudos. Sejam M, N os pontos médios dos segmentos CA, BC, respectivamente e seja P a projeção do ponto C sobre o segmento AB. A figura abaixo mostra que ABC é equidecomponível a um retângulo.



□

Lema 2.4. *Se $ABCD$ é um retângulo e S é um segmento de reta, então $ABCD \overset{g}{\equiv} A'B'C'D'$, onde $A'B'$ tem o mesmo comprimento que S.*

Demonstração. Seja $s = |S|$ o comprimento do segmento S. Podemos supor sem perda de generalidade que $s < |AB| < 2s$.



Como $\triangle_{JDF} \cong \triangle_{EBG}$ e $\triangle_{JIG} \cong \triangle_{FCB}$, temos $ABCD \overset{g}{\equiv} AEIJ$. □

Prova do Teorema 2.1. Seja S um segmento de comprimento s arbitrário. Fixe uma triangulação $A = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$. Pelos Lemas 2.2 e 2.3, cada triangulo T_i é equidecomponível a um retângulo de base s e, portanto, A é equidecomponível a um retângulo R_A de base s.

Analogamente, B também é equidecomponível a um retângulo R_B de base s. Mas como A e B têm a mesma área devemos ter $R_A \cong R_B$. Segue que $A \overset{g}{\equiv} B$ (Lema 2.2). □

Exercício 2.5. Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ polígonos. Então $X \equiv^g Y$ se, e somente se, $X \equiv Y$.

3 Paradoxo de Banach-Tarski (cont)

◇ ◇ ◇ *Aula 4 (15 de Março) — Yoshiharu Kohayakawa* ◇ ◇ ◇

3.1 Medidas Invariantes

Uma *medida* é uma função $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$, com $\mathcal{C} \subseteq X$, que satisfaz as seguinte propriedades:

1. *não-negatividade:* $m(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{C}$.
2. *aditividade*: $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, para todo $A, B \in \mathcal{C}$ com $A \cap B = \varnothing$.

Aqui, consideraremos sempre o caso em que $X = \mathbb{R}^n$ para algum $n > 0$.

Uma medida m é *invariante por movimento rígido* se $m(A) = m(\alpha(A))$ para toda função $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva distância e para todo $A \in X$ tal que $\alpha(A) \in X$. Uma medida m é *normalizada* se $\alpha(Q_n) = 1$, onde $Q_n = [0,1]^n \subset X$ e $Q_n \in \mathcal{C}$.

Fato 3.1. Seja $X = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}$ o conjunto das regiões poligonais. Então a função $m : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ tal que $m(A) =$ área de A é uma medida normalizada e invariante por movimento rígido.

A medida de Borel-Lebesgue é uma medida $m : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ sobre um conjunto $\mathcal{C}$ que estende o conjunto de regiões poligonais, composto pelos chamados "conjuntos borelianos". A medida m assim obtida é *σ-aditiva* isto é para qualquer sequência

$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{C}$ de conjuntos dois-a-dois disjuntos vale que

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Uma pergunta natural é se não existe uma medida σ-aditiva, normalizada e invariante por movimento rígido com $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ (ou, mais genericamente com $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$). O seguinte resultado responde negativamente tal pergunta.

Teorema 3.2 (Vitali). *Seja $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ uma medida definida sobre todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Se m é invariante por translações e $m(Q_n) = 1$, então m não pode ser σ-aditiva.*

Para provar o resultado acima, precisaremos do seguinte Lema.

Lema 3.3. *Existe um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Q_n contém uma infinidade de cópias transladadas de A, duas-a-duas disjuntas.*
2. *$\mathbb{R}^n$ pode ser coberto com uma quantidade enumerável de cópias transladadas de A.*

Demonstração. Faremos o caso $n = 1$. Se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $x - y \in \mathcal{Q}$, dizemos que $x \sim y$. Não é difícil verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}$. Para cada classe de equivalência de $\sim$ escolha[1] um representante no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$. Definimos A como sendo o conjunto desses representantes.

Para mostrar a propriedade (1) tomamos

$$A_i = A + \frac{1}{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Esses conjuntos A_i são dois-a-dois disjuntos pois se $x, y \in \mathcal{Q}$ e $x \neq y$, então $(A + x) \cap (A + y) = \varnothing$. De fato, se $z \in A + x$ e $z \in A + y$, então temos, respectivamente, $z - x \in A$ e $z - y \in A$. Entretanto $(z - x) - (z - y) = y - x \in \mathcal{Q}$ e portanto $z - y$ e $z - x$ pertencem à *mesma* classe de equivalência. Segue da definição de A que $z - y = z - x$, isto é, $y = x$.

Para mostrar a propriedade (2), basta notar que $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{r \in \mathcal{Q}} A + r$. De fato, fixe $x \in \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in A$, o representante da classe x em A, isto é, o elemento tal que $x \sim x_0$. Logo devemos ter $x \in A + r$, com $r = x - x_0 \in \mathcal{Q}$. □

Prova do Teorema 3.2. Suponha que exista uma medida $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ como no enunciado. Note que toda medida m é *monótona*, isto é, se $X \subseteq Y$, então $m(X) \leq m(Y)$ (pois $m(Y) = m(X) + m(Y \setminus X)$). Tome A como no Lema anterior e sejam $A_1, A_2, \cdots \subseteq Q_n$ conjuntos transladados de A, dois-a-dois disjuntos e seja $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq Q_n$. Temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = m(B) \leq m(Q_n) = 1,$$

da onde segue que $m(A) = 0$.

Por outro lado, sejam $A_1, A_2, \cdots \subset Q_n$ conjuntos transladados de A, dois-a-dois disjuntos tais que $\mathbb{R} \subseteq \bigcup i = 1^{\infty} A_i$. Então

$$1 = m(Q_n) \leq m(\mathbb{R}^n) \leq m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = 0,$$

[1] note que esse passo faz uso do Axioma de Escolha

um absurdo. □

Pergunta: Existe medida $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ invariante por translação e normalizada no $\mathbb{R}^n$? Note que o Teorema 3.2 mostra que não podemos exigir σ-aditividade.

Banach mostrou que existe uma tal medida para os casos $n = 1$ e $n = 2$. Por outro lado, Hausdorff provou que tal medida não existe se $n \geq 3$. Seja $S = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

Teorema 3.4 (Paradoxo de Hausdorff)**.** *Existem decomposições $S = A_1 \cup A_2 \cup C_1$ e $S = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup C_2$ tais que os conjuntos A_i são todos congruentes e C_1 e C_2 são enumeráveis.*

O resultado acima atesta que não existe medida $m : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ invariante por translação tal que $m(S) = 1$. De fato, como C_1 e C_2 são enumeráveis, uma tal medida m deve satisfazer $m(C_1) = m(C_2) = 0$. Portanto, as decomposições do Paradoxo de Hausdorff implicam, respectivamente, que $m(A_1) = \frac{1}{2}$ e $m(A_1) = \frac{1}{3}$, absurdo.

Vamos provar o resultado a seguir que, apesar de ser mais fraco que o Paradoxo de Hausdorff, é suficiente para mostrar que não existe medida $m : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ invariante por translação tal que $m(S) = 1$.

Teorema 3.5. *Existe $A \subseteq S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

1. *Existe uma infinidade de conjuntos $D_1, D_2, \cdots \subset S$, todos congruentes a A e dois-a-dois disjuntos.*
2. *Existem conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, todos congruentes a A, tais que $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.*

◇ ◇ ◇ *Aula 5 (29 de Março) — Yoshiharu Kohayakawa* ◇ ◇ ◇

3.2 Rotações em R_3

Seja $SO(3)$ o conjunto das rotações sobre a origem em $\mathbb{R}^3$. É um fato de que $SO(3)$ é um *grupo*. Para verificar esse fato, note que uma rotação pode ser representada por uma matriz ortogonal R que preserva a orientação dos eixos, isto é, que satisfaz a propriedade especial[2] $\det(R) = 1$.

Fixados dois elementos $\phi, \psi \in SO(3)$, consideramos sequências (finitas) da forma:

$$\phi^{a_1}\psi^{a_2}\phi^{a_3}\cdots \in SO(3), \tag{1}$$

com $a_2, a_3, \cdots \neq 0$.

Lema 3.6. *Suponha que ϕ e ψ são rotações em torno dos eixos x e y (respectivamente) por um ângulo α tal que $\cos\alpha$ é transcendental. Então ϕ e ψ geram um* grupo de dois geradores, *isto é, ϕ^0 é a única expressão da forma 1 que é igual à identidade.*

3.3 Prova da Versão Fraca do Paradoxo de Hausdorff (Teorema 3.5)

No que se segue, fixamos um par ϕ, ψ como no Lema acima. Seja G o grupo formado po elementos da forma 1.

[2] A notação *SO* vem de *special orthogonal group*

Dados $x, y \in S$, dizemos que $x \sim y$ se existe $g \in G$ tal que $y = g(x)$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são denominadas *órbitas*. Defina

$$C = \{x \in S : \text{existe } \chi \in G,\ \chi \neq e, \text{ tal que } \chi(x) = x\}$$

o conjunto dos pontos em S que são pontos fixos de algum elemento de G diferente da identidade. Note que se $x \sim y$ e $x \in C$, então $y \in C$. De fato, se existem $\chi, g \in G$, $\chi \neq e$ tal que $\chi(x) = x$ e $y = g(x)$, então $y = (g\chi g^{-1})(y)$ e $(g\chi g^{-1}) \neq e$. Logo C é uma união de órbitas.

Fixe um conjunto $H \subset S$ composto por um representante de cada órbita em $S \setminus C$. Seja U o conjunto de elementos da forma 1 com $a_1 \neq 0$. Definimos

$$A = \{\chi(x) : x \in H, \chi \in U\}.$$

Vamos provar as asserções do Teorema.

1. Tomamos $D_i = \psi^{(n)}(A)$ para $n = 1, 2, \ldots$.

   Afirmação 3.7. *Se $n \neq m$, então $\psi^{(n)}(A) \cap \psi^{(m)}(A) = \varnothing$*

   Demonstração. Suponha que existe $y \in \psi^{(n)}(A) \cap \psi^{(m)}(A)$. Então devem existir $\chi_1, \chi_2 \in U$ e $x_1, x_2 \in H$ tais que $y = \psi^n(\chi_1(x_1))$ e $y = \psi^m(\chi_2(x_2))$. Então temos $\chi_1(x_1) = \psi^{(m-n)}(\chi_2(x_2))$, o que implica $x_1 = (\chi_1^{-1}\psi^{(m-n)}\chi_2)(x_2)$. Mas como H possui um única representante de cada órbita, devemos ter $\chi_1^{-1}\psi^{(m-n)}\chi_2 = e$, isto é, $\chi_2 = \psi^{(n-m)}\chi_1^{-1}$. Segue da definição de U que $n - m = 0$, ou seja, $n = m$. □

2. Mostraremos que existe $\rho \in SO(3)$ tal que $S = A \cup \phi(A) \cup \rho^{-1}(A) \cup \rho^{-1}(\phi(A))$.

   Afirmação 3.8. $S \setminus C \subseteq A \cup \phi(A)$.

   Demonstração. Seja $y \in S \setminus C$ e seja $x \in H$ tal que $y \sim x$. Logo existe $\chi \in G$ tal que $y = \chi(x)$. Se $\phi \in U$, então $y \in A$. Por outro lado, se $\chi = \psi^{a_2}\phi^{a_3}\cdots$, então $\phi^{-1}\chi \in U$ e, portanto, $(\phi^{-1}\chi)(x) \in A$. Mas como $y = \phi(\phi^{-1}(\chi(x)))$, segue que $y \in \phi(A)$. □

   Como C é enumerável, existe $\rho \in SO(3)$ tal que $C \cap \rho(C) = \varnothing$. De fato, existe apenas um número enumerável de rotações que *não* satisfazem tal igualdade, a saber no máximo duas para cada par de elementos em C. Usando a afirmação acima, concluímos que

   $$\rho(C) \subseteq S \setminus C \subseteq A \cup \phi(A)$$

   e, portanto, que

   $$C = \rho^{-1}(A) \cup \rho^{-1}(\phi(A)).$$

◇ ◇ ◇ *Aula 6 (05 de Abril) — Yoshiharu Kohayakawa* ◇ ◇ ◇

3.4 Prova do Paradoxo de Banach-Tarski

Nesta seção provaremos o Paradoxo de Banach-Tarski (Teorema 1.2)

Lema 3.9. *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que existam $V \subseteq X$ e $U \subseteq Y$ tais que $X \equiv_k U$ e $V \equiv_m Y$. Então $X \equiv_{k+m} Y$.*

Demonstração. Como $X \equiv_k U$, existem conjuntos $X_1, \dots, X_k$ e $U_1, \dots, U_k$ tais que $X = \biguplus_{i=1}^{k} X_i$, $U = \biguplus_{i=1}^{k} U_i$ e para todo $1 \leq i \leq k$ temos $X_i \cong U_i$, isto é, existem isometrias $\phi_i : X_i \to U_i$.

Como $Y \equiv_k V$, existem conjuntos $Y_1, \dots, Y_m$ e $Y_1, \dots, Y_m$ tais que $Y = \biguplus_{j=1}^{m} Y_j$, $Y = \biguplus_{j=1}^{m} Y_j$ e para todo $1 \leq j \leq m$ temos $Y_j \cong V_j$, isto é, existem isometrias $\psi_j : Y_j \to V_j$.

Defina funções $f : X \to U$ e $g : Y \to V$ pondo $f(x) = \phi_i(x)$ para todo $x \in X_i$ e $g(y) = \psi_j(y)$ para todo $y \in Y_j$. Note que f e g são funções injetoras. Pelo Teorema 1.5, existem $A_1, A_2 \subseteq X$ e $B_1, B_2 \subseteq Y$ tais que $X = A_1 \uplus A_2$ e $Y = B_1 \uplus B_2$ e e satisfazendo $f(A_1) = B_1$ e $g(B_2) = A_2$. Então podemos escrever

$$X = A_1 \uplus A_2 = A_1 \uplus g(B_2) = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} (X_i \cap A_1) \uplus \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} \psi_j(Y_j \cap B_2).$$

De maneira análoga podemos escrever

$$Y = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} \phi_i(X_i \cap A_1) \uplus \dot{\bigcup_{j=1}^{m}} Y_j \cap B_2.$$

Essas duas decomposições de X e Y atestam que $X \equiv_{k+m} Y$. □

Prova do Teorema 1.2 (Paradoxo de Banach-Tarski). Dado $x \in S$, definimos $r_X = (0, x] = \{\lambda x : 0 < \lambda \leq 1\}$ como o segmento de 0 a x. Dado $C \subseteq S$, também definimos

$$C^* = \bigcup_{x \in C} r_X.$$

Sejam $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset S$ e $D_1, D_2, \cdots \subset S$ como no Teorema 3.5. Definimos os seguintes conjuntos disjuntos: $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2 \setminus A_1$, $C_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ e $C_4 = A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Temos $S = C_1 \uplus \cdots \uplus C_4$. Assim, supondo sem perda de generalidade que S é a casca esférica de B_1, temos a decomposição

$$B_1 \setminus \{0\} = \dot{\bigcup_{i=1}^{4}} C_i^*.$$

Seja $\gamma : B_1 \to B_2$ uma isometria. Então podemos decompor $B_1 \cup B_2$ em 9 partes como a seguir:

$$B_1 \cup B_2 = (C_1^* \cup \{0\}) \uplus \dot{\bigcup_{i=2}^{4}} C_i^* \uplus \dot{\bigcup_{i=1}^{4}} \gamma(C_i^*) \uplus \{\gamma(0)\}.$$

Note que $C_1^* \cup \{0\} \cong D_1^* \cup \{0\}$. Ademais, C_i^* é congruente a uma parte de D_i^* $(2 \leq i \leq 4)$ Finalmente, $\gamma(C_i)$ é congruente a uma parte de D_{i+4}^* $(1 \leq i \leq 4)$ e $\{\gamma(0)\}$ é congruente a qualquer subconjunto unitário em D_9. Consequentemente existe $V \subseteq B_1$ tal que $B_1 \cup B_2 \equiv_9 V$. Temos $B_1 \equiv_1 B_1 \subset B_1 \cup B_2$. Segue do Lema 3.9 que $B_1 \equiv_{10} B_1 \cup B_2$. □

É possível generalizar o Teorema 1.2 para dimensões maiores e para bolas com raios distintos.

Teorema 3.10. *Seja $n \geq 3$ e $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ tais que $X \supset B_1$ e $Y \supset B_2$, onde B_1 e B_2 são bolas de raio positivo. Então $X \equiv Y$.* □

4 Teorema de Dehn

◇ ◇ ◇ *Aula 7 (12 de Abril) — Marcelo Soares Campos* ◇ ◇ ◇

Dizemos que dois poliedros $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ são equidecomponíveis (no sentido geométrico) se podemos escrever $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, para poliedros $A_1, \ldots, A_n$ de interiores dois-a-dois disjuntos, e $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$, para poliedros $B_1, \ldots, B_n$ de interiores dois-a-dois disjuntos, de tal forma que $A_i \cong B_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Neste caso escrevemos $A \overset{g}{\equiv} B$.

Defina uma transformação linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é visto como espaço vetorial sobre $\mathcal{Q}$, tal que $f(\pi) = 0$ e $f(\arccos(\frac{1}{3})) = 1$. Para que a função f esteja bem definida, precisamos do lema a seguir, que mostra que π e $\arccos(\frac{1}{3})$ são elementos linearmente independentes nesse espaço vetorial.

Lema 4.1. $\frac{\arccos(\frac{1}{3})}{\pi}$ *é irracional.*

Demonstração. Suponha que $\arccos(\frac{1}{3}) = \frac{m}{n}\pi$, com $m, n \in \mathbb{Z}$. Aplicando a função cos em ambos os lados obtemos

$$\cos(n \arccos(\frac{1}{3}) = \pm 1.$$

Usando a identidade

$$\cos(nx) = n \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \frac{(n+k+1)!}{(n-k)!(2k)!}(1 - cos(x))^k,$$

temos

$$\cos(n \arccos(\frac{1}{3})) = n \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \frac{(n+k+1)!}{(n-k)!(2k)!}(1 - \frac{1}{3})^k.$$

Multiplicando ambos os lados por 3^n:

$$\pm 3^n = 3^n \cos(n \arccos(\frac{1}{3})) = n \sum_{k=0}^{n} (-2)^k (n+k+1) \binom{n+k}{2k} 2^k 3^{n-k}.$$

Note que as parcelas $1 \leq k \leq n-1$ do somatório acima são divisíveis por 3. Logo para que valha a igualdade acima, a última parcela ($k = n$) também deve ser divisível por 3, o que implica 3 dividir uma potência de 2, um absurdo. □

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os poliedros em $\mathbb{R}^3$. Para todo poliedro $P \in \mathcal{P}$ definimos $E(P)$ como o conjunto das arestas de P. Dada uma aresta e de um poliedro, denotamos por α_e o seu *ângulo diedral*, isto é, o ângulo entre as duas faces que definem e. Também denotamos o comprimento de uma aresta e por $|e|$.

Definimos o *invariante de Dehn* como a seguinte função:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P} &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \sum_{e \in E(P)} |e| f(\alpha_e). \end{aligned}$$

Lema 4.2. *Sejam P_1 e P_2 poliedros com interiores disjuntos tais queu $P = P_1 \cup P_2$ é também um poliedro. Então*

$$\phi(P) = \phi(P_1) + \phi(P_2).$$

Demonstração. Considere o plano h que corta P e dá origem aos poliedros P_1 e P_2. Só precisamos analisar os casos de arestas $e_1 \in P_1$ e $e_2 \in P_2$ cuja interseção com h é não-nula (as demais correspondem a arestas em P de mesmo tamanho e mesmo ângulo diedral). Tais arestas podem ser geradas de três maneiras:

1. *O plano h corta o interior de uma face de P, gerando novas arestas $e_1 \in P_1$ e $e_2 \in P_2$ (cujos interiores estão contidos no interior de uma face de P).* [FIGURA]

   Temos $|e_1| = |e_2|$ $\alpha_{e_1} + \alpha_{e_2} = \pi$. Logo

   $$|e_1|f(\alpha_{e_1}) + |e_2|f(\alpha_{e_2}) = |e_1|(f(\alpha_{e_1}) + f(\alpha_{e_2})) = |e_1|f(\alpha_{e_1} + \alpha_{e_2}) = 0.$$

2. *O plano h intersecta uma aresta $e \in P$ em exatamente um ponto, gerando novas arestas $e_1 \in P_1$ e $e_2 \in P_2$ de tamanhos diferentes mas com o mesmo ângulo diedral* [FIGURA]

   Temos $|e_1| + |e_2| = |e|$ e $\alpha_{e_1} = \alpha_{e_2} = \alpha_e$. Logo

   $$|e_1|f(\alpha_{e_1}) + |e_2|f(\alpha_{e_2}) = (|e_1| + |e_2|)f(\alpha_e) = |e|f(\alpha_e).$$

3. *O plano h é tal que $h \cap e = e$ para uma aresta $e \in P$, gerando arestas $e_1 \in P_1$ e $e_2 \in P_2$ de mesmo tamanho mas com ângulos diedrais distintos.* [FIGURA]

   Temos $|e_1| = |e_2| = |e|$ e $\alpha_{e_1} + \alpha_{e_2} = \alpha_e$. Logo

   $$|e_1|f(\alpha_{e_1}) + |e_2|f(\alpha_{e_2}) = |e|f(\alpha_{e_1} + \alpha_{e_2}) = |e|f(\alpha_e).$$

□

Teorema 4.3 (Teorema de Dehn)**.** *Seja C um cubo e T um tetraedro, ambos de volumes unitários. Então C e T não são equidecomponíveis.*

Demonstração. Primeiro note que

$$\phi(C) = \sum_{e \in E(C)} |e|f(\pi/2) = 0,$$

pois $f(\pi/2) = f(\pi)/2 = 0$ e

$$\phi(T) = \sum_{e \in E(T)} |e|f(\arccos \frac{1}{3}) \neq 0,$$

uma vez que $\arccos \frac{1}{3} = 1$. Logo $\phi(C) \neq \phi(T)$.

Suponha que existam poliedros $A_1, \ldots, A_n$ com interiores dois-a-dois disjuntos e $B_1, \ldots, B_n$ com interiores dois-a-dois disjuntos tais que $A_i \cong B_i$ $(1 \leq i \leq n)$ e $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

e $T = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Então

$$\begin{aligned}
\phi(C) &= \phi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi(A_i) && \text{(Lemma 4.2 + indução)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi(B_i) && \text{(pois } A_i \cong B_i\text{)} \\
&= \phi\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) && \text{(Lemma 4.2 + indução)} \\
&= \phi(T),
\end{aligned}$$

contradizendo o fato de que $\phi(C) \neq \phi(T)$. □

5 Ladrilhamento de Retângulos

◇ ◇ ◇ *Aula 8 (12 de Abril) — Bruno Cavalar* ◇ ◇ ◇

Teorema 5.1. *Seja x um número irracional positivo e $R \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo de lados 1 e x. Então é impossível ladrilhar R com um número finito de quadrados.*

Demonstração. Consideramos $\mathbb{R}$ como um espaço vetorial V sobre $\mathcal{Q}$. Temos portanto que 1 e x são linearmente independentes em V.

Considere uma transformação linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ e $f(x) = -1$. Se S é um retângulo de lados a e b, definimos $v(S) = f(a)f(b)$. Disto segue que $v(R) = -1$ e que se Q é um quadrado, então $v(Q) \geq 0$.

Suponha que existe um ladrilhamento de R em um número finito de quadrados $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\ell$. Estenda os segmentos de reta que definem cada um dos quadrados Q_i de forma a obter um ladrilhamento de R em retângulos $R_{1,1}, \ldots, R_{n,m}$ tais que $R_{i,j}$ tem base a_i e altura b_j ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$). [FIGURA]

Temos

$$\begin{aligned}
v(R) &= f(1)f(x) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) f\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \sum_{j=1}^{m} f(b_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(a_i)f(b_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(R_{i,j}).
\end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento, todo quadrado Q_k tem sua valuação igual à soma das valuações dos retângulos $R_{i,j}$ contidos em Q_k, isto é, $v(Q_k) = \sum_{R_{i,j} \subseteq Q_k} v(R_{i,j})$ (para todo $1 \leq k \leq \ell$).

Mas como cada retângulo $R_{i,j}$ está contido em exatamente um quadrado Q_k, segue que

$$-1 = v(R) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(R_{i,j}) = \sum_{k=1}^{\ell} v(Q_k) \geq 0,$$

uma contradição. □

6 Valuações não-arquimedianas

◇ ◇ ◇ *Aula 9 (26 de Abril) — Bruno Cavalar* ◇ ◇ ◇

Seja K um corpo (geralmente tomaremos $K = \mathcal{Q}$). Uma *valuação* é uma função $v : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que admite as seguintes propriedades:

i) $v(0) = 0$;

ii) $v(xy) = v(x)v(y)$ para todo $x, y \in K$;

iii) $v(x) + v(y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$ para todo $x, y \in K$.

Note que para toda valuação $v : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ devemos ter $v(1) = 1$ (pois $v(1) = v(1)v(1)$), $v(-1) = 1$ (pois $v(1) = v(-1)v(-1)$) e, portanto, $v(-a) = v(a)$. Além disso, para todo $0 \neq a \in K$, temos $v(a)v(a^{-1}) = v(aa^{-1}) = v(1) = 1$ e, portanto, $v(a) = 1/v(a^{-1}$.

Proposição 6.1. *Toda valuação $v : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaz a seguinte propriedade:*

iv) Se $v(x) \neq v(y)$, então $v(x + y) = \max\{v(x), v(y)\}$.

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que $v(y) > v(x)$. Temos

$$v(y) = v(x + y - x) \leq \max\{v(x + y), v(x)\}.$$

Se $\max\{v(x + y), v(x)\} = v(x)$, teríamos $v(y) \leq v(x)$ um absurdo. Logo $\max\{v(x + y), v(x)\} = v(x + y)$ e, portanto

$$v(y) \leq v(x + y) \leq v(y),$$

da onde segue que $v(y) = v(x + y)$. □

Proposição 6.2. *Sejam $a, b_1, \ldots, b_n \in K$ tais que $v(a) > v(b_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Então $v(a \pm b_1 \pm \cdots \pm b_n) = v(a)$*

Demonstração. Segue da Proposição 6.2, por indução em n. □

Seja p um número primo. Note que qualquer racional $0 \neq r \in \mathcal{Q}$ pode ser escrito da forma

$$r = p^k \frac{a}{b},$$

com $a, b, k \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ e $\text{mdc}(a, p) = \text{mdc}(b, p) = 1$.

Definimos a *norma p-ádica* $|\cdot|_p : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ da seguinte forma:

1. Se $0 \neq r = p^k \frac{a}{b}$, então $|r|_p = p^{-k}$.

2. Se $r = 0$, então $|r|_p = 0$.

Proposição 6.3. *A norma p-ádica $|\cdot|_p : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma valuação arquimediana.*

Demonstração. Basta provar o item *iii*) da definição de valuação arquimediana. Seja $r = p^k \frac{a}{b}$ e $s = p^l \frac{c}{d}$ e suponha que $k \geq l$. Note que $|r|_p = p^{-k} \geq p^{-l} = |s|_p$. Temos

$$|r+s|_p = |p^k \frac{a}{b} + p^l \frac{c}{d}|_p = |p^l (p^{k-l} \frac{a}{b} + \frac{c}{d}|_p = \left| p^l \frac{p^{k-l}ad + bc}{bd} \right|_p .$$

Como $\text{mdc}(bd, p) = 1$, então $\left| \frac{p^{k-l}ad+bc}{bd} \right|_p \leq 1$. Logo $|r+s|_p \leq p^{-l} = |s|_p = \max\{|r|_p, |s|_p\}$. □

Para o caso $p = 2$, temos $|\frac{1}{2}|_2 = 2 > 1$. É um fato que a valuação $|\cdot|_2 : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pode ser estendida para o conjunto dos números reais, de forma a obter uma valuação $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfazendo $v(\frac{1}{2}) > 1$. Consideraremos essa tal valuação no restante na próxima seção. Posteriormente, mostraremos uma outra forma de se obter uma valuação dos reais que satisfaz $v(\frac{1}{2}) > 1$ (ver Teorema 6.8).

6.1 Teorema de Mosky

O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado.

Teorema 6.4. *Toda dissecção do quadrado $S = [0,1]^2$ em triângulos tem um número ímpar de triângulos.*

A seguir consideramos uma valuação $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfazendo $v(\frac{1}{2}) > 1$ (ver fim da seção anterior) e definimos a seguinte coloração do plano:

$$c : \mathbb{R}^2 \to \{\text{azul, verde, vermelho}\}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \text{azul} & \text{, se } v(x) \geq v(y) \text{ e } v(x) \geq v(1); \\ \text{verde} & \text{,se } v(y) > v(x) \text{ e } v(y) \geq 1; \\ \text{vermelho} & \text{,se } v(1) > v(y) \text{ e } v(1) > v(x). \end{cases}$$

Lema 6.5. *Sejam $p_b = (x_b, y_b)$, $p_g = (x_g, y_g)$ e $p_r = (x_r, y_r)$ pontos azul, verde e vermelho respectivamente. Então*

$$\det \begin{pmatrix} x_b & y_b & 1 \\ x_g & y_g & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{pmatrix}$$

tem valuação maior ou igual a 1.

Demonstração. Seja $z = x_b y_g 1$. Temos

$$v(z) = v(x_b)v(y_g)v(1) \geq 1.$$

Qualquer outra parcela do determinante pode ser ser escrita da forma $z' = \pm ABC$, com $A \in \{x_b, y_b, 1\}$, $B \in \{x_g, y_g, 1\}$ e $C \in \{x_r, y_r, 1\}$. Segue que $v(A) \leq x_b$, $v(B) \leq y_g$ e $v(C) \leq 1$. Note também que alguma dessas igualdade deve ser estrita, caso contrário as entradas na matriz correspondentes a A, B, C estariam, todas, acima da diagonal. Logo

$v(z') = v(A)v(B)v(C) < v(z)$. Segue da Proposição 6.2 que a valuação do determinante é maior ou igual a $v(z)$. □

Chamaremos de *triângulo arcoíris* um triângulo cujos vértices têm cores duas-a-duas distintas.

Lema 6.6. *Toda reta no plano contém pontos de no máximo duas cores e a área de um triângulo arcoíris não pode ser $\frac{1}{n}$, com n ímpar.*

Demonstração. Quaisquer pontos (x_b, y_b), (x_g, y_g) e (x_r, y_r) colineares são tais que o determinante do Lema 6.5 é nulo e portanto não podem ter cores duas-a-duas distintas.

Sejam (x_b, y_b), (x_g, y_g) e (x_r, y_r) vértices (com cores azul, verde e vermelho, respectivamente) de um triângulo de área a e d o determinante do Lema 6.5. Temos

$$v(a) = v(\frac{1}{2}d) = v(\frac{1}{2})v(d) > v(d) \geq 1.$$

Por outro lado, mostramos que $v(\frac{1}{n}) = 1$ se n é ímpar. □

Teorema 6.7. *Toda dissecção do quadrado $S = [0,1]^2$ tem um número ímpar de triângulos arcoíris.*

Demonstração. Considere os segmentos formados pela dissecção na borda do quadrado. Afirmamos que há um número *ímpar* de segmentos azul-vermelho (isto é, cujas extremedidades são coloridas, respectivamente, com as cores azul e vermelho). De fato, como o ponto $(0,1)$ é da cor verde, então as retas $\overline{(0,0)(0,1)}$ e $\overline{(0,1)(1,1)}$ não podem ter segmentos azul-vermelho, caso contrário teriam pontos das três cores. Além disso, a reta $\overline{(1,0)(1,1)}$ não pode conter pontos vermelhos (pois $v(x) = v(1) = 1$). Logo os únicos segmentos azul-vermelho na borda de S são os da reta $\overline{(0,0)(1,0)}$. Como o ponto $(0,0)$ tem cor vermelha e o ponto $(1,0)$, deve haver um número ímpar de segmentos azul-vermelho nessa reta, caso contrária ela teria pontos das três cores.

Agora, note que todo triângulo arcoíris tem um número *ímpar* de segmentos azul-vermelho. De fato, tais segmentos só podem aparecer no lado do triângulo cujos vértices têm cores azul e vermelho, respectivamente. Novamente, deve haver um número ímpar de segmentos nesse lado do triângulo, caso contrário ele conteria pontos das três cores.

Note também que todo triângulo que não é arcoirís tem um número *par* de segmentos azul-vermelho. De fato, se um triângulo não é arcoíris, então ele deve ter um número par (ou zero ou dois) de lados cujos vértices têm cores azul e vermelho, respectivamente. Novamente, cada um desses lados têm um número ímpar de segmentos azul-vermelho, totalizando um número par de tais segmentos em todo o triângulo.

Por fim, consideramos um grafo G definido a seguir. Cada vértice de G está associado a um triângulo da dissecção de S e há um vértice extra x associado à região externa a S. Dois vértices de G são adjacentes se há um segmento azul-vermelho na fronteira de suas respectivas regiões. Note que pelo o que foi discutido anteriormente, o vértice x deve ter grau ímpar e os demais vértices de G de grau ímpar devem ser exatamente aqueles associados a triângulos arcoíris. O resultado segue do fato que todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar. □

◇ ◇ ◇ *Aula 10 (03 de Maio) — Bruno Cavalar* ◇ ◇ ◇

6.2 Valuações em grupos abelianos

Uma tripla $(G, \cdot, \leq)$ é um *grupo abeliano ordenado* se

1. $(G, \cdot)$ é um grupo.
2. $(G, \leq)$ é uma *ordem total*, isto é, valem as seguintes propriedades:
   (a) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $y = x$ $(x, y \in G)$;
   (b) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ $(x, y, z \in G)$;
   (c) para todo $x, y \in G$, ou $x \leq y$ ou $y \leq x$.
3. se $x, y \in G$ são tais que $x \leq y$, então $xz \leq yz$ para todo $z \in G$.

Um exemplo de grupo abeliano ordenado é a tripla $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot, \leq)$. Diremos apenas que G é um grupo abeliano ordenado, quando não há possibilidade de confusão quanto a operação $\cdot$ e a ordenação $\leq$ que definem a tripla $(G, \cdot, \leq)$.

Dado um grupo abeliano ordenado G consideraremos o conjunto $G \cup \{0\}$, com $0 \in G$, e estendemos a operação $\cdot$ e a relação $\leq$ da seguinte forma:

1. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in G$;
2. $0 \leq a$, para todo $a \in G$.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma *valoração não-arquimediana* em um grupo abeliano ordenado G é uma função $v : \mathbb{K} \to G \cup \{0\}$ satisfazendo

1. $v(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
2. $v(xy) = v(x)v(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$;
3. $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Queremos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 6.8. *Existe uma valuação arquimediana $v : \mathbb{R} \to G \cup \{0\}$ tal que $v(\frac{1}{2}) > 1$.*

Dada uma valuação $v : \mathbb{K} \to G \cup \{0\}$, definimos $R_v = \{x \in \mathbb{K} : v(x) \leq 1\}$ como o *anel de valuação* de v. Note que R_v é, de fato, um anel.

Lema 6.9. *Um subanel próprio R de $\mathbb{K}$ é um anel de valuação para algum v (em algum gripo ordenado G) se, e somente se, $\mathbb{K} = R \cup R^{-1}$ ($R^{-1} = \{x^{-1} : x \in U(R)\}$).*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Basta notar que se $x \notin R$, então $v(x) > 1$. Logo $v(x^{-1}) < 1$, isto é, $x^{-1} \in R$ e, portanto, $x = (x^{-1})^{-1} \in R^{-1}$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathbb{K} = R \cup R^{-1}$. Vamos definir um grupo ordenado G e uma valuação v de forma que $R = R_v$. Seja U o grupo das unidades de R, isto é, o conjunto dos elementos que têm inverso em R. Note que U é um subgrupo de $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Defina $G := {}^{K^*}/_{U}$. Dados dois elementos $xU, yU \in G$ fazemos $xU \leq yU$ se, e somente se, $xy^{-1} \in R$. Vamos mostrar que $\leq$ é de fato uma ordem em G:

1. Se $xU \leq yU$ e $yU \leq xU$, então $xy^{-1} \in R$ e $yx^{-1} \in R$. Logo $(xy^{-1})^{-1} \in R$, o que implica $xy^{-1} \in U$. Segue da definição de grupo quociente que $xU = yU$.
2. Se $xU \leq yU$ e $yU \leq zU$, então $xy^{-1} \in R$ e $yz^{-1} \in R$. Logo $xy^{-1}yz^{-1} = xz^{-1} \in R$, isto é, $xU \leq zU$.
3. Se não vale $xU \leq yU$, então $xy^{-1} \notin R$, da onde segue que $(xy^{-1})^{-1} \in R$ e, portanto, $yx^{-1} \in R$, ou seja, $yU \leq xU$.
4. Se $xU \leq yU$, então $xy^{-1} \in R$. Logo $(xz)(yz)^{-1} = xzz^{-1}y^{-1} \in R$, isto é, $xz \leq yz$.

Definimos $v : \mathbb{K} \to G \cup \{0\}$ fazendo $v(x) = xU$ para todo $x \in K \setminus \{0\}$ e $v(0) = 0$. Temos que provar que v é de fato uma valuação. A primeira propriedade segue imediatamente da definição. Também temos $v(xy) = (xy)U = (xU)(yU) = v(x)v(y)$, o que implica a segunda propriedade. Para a terceira propriedade, note primeiro que $1 \in R$. De fato, se $1 \notin R$, então teríamos $1 \in R^{-1}$ e portanto $1 = 1^{-1} \in R$. Agora, suponha que xU e yU sejam tais que $xU \leq yU$, isto é, $xy^{-1} \in R$. Então como

$$(x+y)y^{-1} = \underbrace{xy^{-1}}_{\in R} + \underbrace{1}_{\in R} \in R,$$

temos $v(x+y) = (x+y)U \leq yU = v(y) = \max\{v(x), v(y)\}$.

Resta mostrar que R é o anel de valuação de v. Note que

$$x \in R \Leftrightarrow x \cdot 1 \in R \Leftrightarrow xU \leq U \Leftrightarrow v(x) \leq 1.$$

Portanto, de fato temos $R = \{x \in K : v(x) \leq 1\}$.

□

Lema 6.10. *Se $B \subseteq \mathbb{R}$ é um subanel maximal (com respeito a inclusão) satisfazendo $\frac{1}{2} \notin B$, então B é um anel de valuação.*

Demonstração. Suponha por absurdo que B satisfaça as hipóteses do enunciado mas não seja um anel de valuação. Pelo Lemma 6.9 deve existir $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (B \cup B^{-1})$. Considere o conjunto $B[\alpha]$ dos polinômios em α com coeficientes em B. Temos $B \subset B[\alpha]$ e, portanto, $\frac{1}{2} \in B[\alpha]$, caso contrário B não seria maximal. Logo, como $1 \in 2B[\alpha]$, devem existir $u_0, \ldots, u_m \in B$ tais que

$$1 = 2u_0 + 2u_1\alpha + \cdots + 2u_m\alpha^m. \tag{2}$$

Analogamente, também temos $1 \in 2B[\alpha^{-1}]$ e portanto existem $v_0, \ldots, v_n \in B$ tais que

$$1 = 2v_0 + 2v_1\alpha^{-1} + \cdots + 2v_n\alpha^{-n}. \tag{3}$$

Suponha sem perda de generalidade que m e n são minimais nas equações (2) e (3) e que $m \geq n$. Multiplicando a equação (3) por α^m, obtemos

$$(1 - 2v_0)\alpha^m = 2v_1\alpha^{m-1} + \cdots + 2v_n\alpha\alpha^{m-n}. \tag{4}$$

Multiplicando a equação (2) por $(1 - 2v_0)$ obtemos

$$1 = 2(u_0(1 - 2v_0) + v_0) + 2u_1(1 - 2v_0)\alpha + \cdots + 2u_m(1 - 2v_0)\alpha^m \tag{5}$$

Substituindo o termo $(1-2v_0)\alpha^m$ pelo lado direito da equação (4), obtemos uma equação que contradiz a minimalidade de m. □

Lema 6.11 (Lema de Zorn). *Seja $(\varnothing \neq P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que toda cadeia $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ de P admita um limite superior, isto é, um elemeneto $U \in P$ tal que $A_i \leq U$ para todo $i \geq 1$. Então P tem um elemento maximal.* □

Demonstração do Teorema 6.8. O conjunto P dos subaneis de $\mathbb{R}$ que não contém $\frac{1}{2}$ é parcialmente ordenado (por inclusão). Note que $P \neq \varnothing$ pois $\mathbb{Z} \in P$.

Além disso, P satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn. De fato, se $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ é uma cadeia, então $B := \bigcup_{i\geq 1} B_i$ contém $\frac{1}{2}$ e é um subanel de R (uma vez que se $x \in B_i$ e $y \in B_j$, então $x \in B_j$ e, portanto, $x + y \in B_j \subseteq B$ e $xy \in B_j \subseteq B$).

Portanto existe subanel $B \subseteq \mathbb{R}$ maximal com $\frac{1}{2} \notin B$. O resultado segue do Lemma 6.10. □

◇ ◇ ◇ *Aula 11 (10 de Maio) — Arnaldo Mandel* ◇ ◇ ◇

6.3 Valuações e Grupos Livres

6.3.1 Quatérnios

Seja R um *domínio de integridade*, isto é, um anel comunitativo em que o produto de quaisquer elementos não-nulos é não-nulo. Suponha que $\operatorname{car} R \neq 2$ e seja Q o corpo de frações de R. Por exemplo, poderíamos tomar $R = \mathbb{Z}$ e $Q = \mathcal{Q}$.

Dados $0 \neq a, b \in R$ definimos o conjunto dos quatérnios

$$T = \left(\begin{matrix} a, b \\ R \end{matrix}\right)$$

como um espaço vetorial de dimensão quatro sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma operação associativa e distributiva e multiplicação definida como a seguir. Escrevemos os elementos de T na forma

$$\alpha + \beta i + \gamma j \delta k,$$

onde os elementos $1, i, j, k$ formam uma base de T e satisfazem as seguintes identidades:

$$i^2 = a, j^2 = b \text{ e}$$
$$ij = k = -ji.$$

Temos, por exemplo,

$$\begin{aligned} jk = j(-ji) = -j^2 i = -bi, \\ k^2 = ij(-ji) = -ij^2 i = -bi^2 = -ab, \\ kj = ijj = bi = -jk, \\ ik = i(ij) = (i^2)j = ja = j(i^2) = (ji)i = -ki. \end{aligned}$$

Os *quatérnios de Hamilton* são $\mathcal{H} = \left(\begin{matrix} -1, -1 \\ \mathbb{R} \end{matrix}\right)$.

Definimos também o conjunto dos *quaternios puros* como

$$P = \{\beta i + \gamma j + \delta k : \beta, \gamma, \delta \in R\}.$$

Proposição 6.12. *Se $q \in P$, então $q^2 \in R$.*

Demonstração. Seja $q = \beta i + \gamma j + \delta k$. Temos

$$\begin{aligned} q^2 &= (\beta i + \gamma j + \delta k)^2 \\ &= \beta^2 a + \gamma^2 b - \delta^2 ab + \cancelto{0}{(\beta i \gamma j + \gamma j \beta i)} + \cancelto{0}{(\beta i \delta k + \delta j \beta i)} + \cancelto{0}{(\gamma j \delta k + \delta k \gamma j)} \\ &= \beta^a + \gamma^2 b - \delta^2 ab \in R. \end{aligned}$$

□

Proposição 6.13. *Seja $q = (\alpha + p)$. Então $q^2 \in R$ se, e somente se, $p = 0$ ou $\alpha = 0$.*

Demonstração. Temos $q^2 = (\alpha + p)^2 = (\alpha^2 + p^2) + 2\alpha p$. Pela proposição anterior, temos que $q^2 \in R$ se e somente se $2\alpha p = 0$. O resultado segue da premissa de R ser um domínio de integridade. □

Considere um elemento $q = \alpha + p \in T$, com $\alpha \in R$ e $p \in P$. Definimos a *norma* de q como

$$N(q) = (\alpha + p)(\alpha - p) = \alpha^2 - p^2 = \alpha^2 - \beta^2 a - \gamma^2 b + \delta^2 ab.$$

Proposição 6.14. *Seja $q \in T$. Se $N(q)$ é inversível, então q é inversível.*

Demonstração. Seja $q = \alpha + p$, com $\alpha \in R$ e $p \in P$. Se $N(q)$ é inversível, então temos $q^{-1} = (\alpha - p)N(q)^{-1}$. □

Corolário 6.15. *$\mathcal{H}$ é um anel de divisão.*

Demonstração. Em $\mathcal{H}$, $N(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$. Logo se $q \neq 0$, então $N(q) > 0$ e, portanto, q é inversível. □

O *centro* de um anel A é definido como $Z(A) = \{q \in A : qx = xq \text{ para todo } x \in A\}$, isto é, como o conjunto dos elementos que comutam com qualquer $x \in A$.

Exercício 6.16. $Z(T) = R$

Seja $\mathcal{U}(T)$ o conjunto dos elementos inversíveis de T. Denote por $\operatorname{aut} T$ o conjunto de automorfismos de T. Definimos a funcão

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{U}(T) &\to \operatorname{aut} T \\ w &\mapsto (x \mapsto w^{-1} x w). \end{aligned}$$

Note que temos $\rho(wu) = \rho(w)\rho(u)$ e $\rho(w^{-1}) = \rho(w)^{-1}$. Além disso, segue da definição de centro que $\operatorname{Ker} \rho = Z(\mathcal{U}(T)) = \mathcal{U}(R)$.

Exercício 6.17. Para todo $w \in \mathcal{U}(T)$, a função $\rho(w)$ é invariante em P, isto é, $\rho(w)(P) \subseteq P$.

Como podemos identificar P com $\mathbb{R}^3$, segue que para $T = \mathcal{H}$, ρ induz elementos de $GL(3)$, isto é, que $\rho(w)$ é uma transformação linear em $P \simeq \mathbb{R}^3$ para todo $w \in T$. Mais do que isso, temos que ρ induz elementos em $SO(3)$. De fato, note que

$$\|\rho(w)(x)\|^2 = N(\rho(w)(x)) = -(\rho(w)(x))^2 = \rho(w)(-x^2) = \rho(w)(N(x)) = N(x) = \|x\|^2.$$

6.3.2 Grupos livres

Em um grupo, dizemos que um par (u, v) é *livre* se $\langle u, v\rangle$ é livre gerado por u e v. Dizemos que (u, v) é *livre módulo centro* se $\overline{u}, \overline{v}$ é livre em $G/Z(G)$.

Dizemos que (g, h) é semilivre módulo centro se

1. $g^n \notin Z(G)$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
2. $h \notin Z(G)$, $h^2 \in Z(G)$; e
3. não existem inteiros não-nulos $n_1, \ldots, n_k$ tais que

$$g^{n_1} h g^{n_2} h \cdots g^{n_k} h \in Z(G).$$

Proposição 6.18. *Se (g, h) é semilivre módulo centro, então (g, hgh) é livre.* □

Lema 6.19 (Lema do Ping Pong)**.** *Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X. Sejam $g, h \in G$, com $h^2 \in Z$. Suponha que existam $X_1, X_2 \subseteq X$ tais que*

1. *$X_1, X_2 \neq \varnothing$;*
2. *$X_1 \cap X_2 = \varnothing$;*
3. *$Z(G) \cdot X_1 \subseteq X_1$ e $Z(G) \cdot X_2 \subseteq X_2$.*

Se $h(X_1) \subseteq X_2$ e $g^n(X_2) \subseteq X_1$ para todo inteiro $n \emptyset$, então (g, h) é semilivre módulo centro.

Demonstração. Suponha por absurdo que existam inteiros $n_1, \ldots, n_k$ não-nulos tais que

$$w := g^{n_1} h g^{n_2} h \cdots h g^{n_k} h \in Z(G).$$

Seja x um elemento arbitrário em X_2. Como $w \in Z(G)$, temos por hipótese que $w \cdot x \in X_2$. Por outro lado, como $w = gwg^{-1}$, segue das hipóteses $h(X_1) \subseteq X_2$ e $g^n(X_2) \subseteq X_1$ que $w \cdot x \in X_1$, um absurdo. □

Teorema 6.20. *Seja R um domínio de integridade com* $\operatorname{car} R \neq 2$ *e corpo de frações Q. Sejam $0 \neq a, b, \alpha, \beta \in R$. Suponha que exista uma valuação não-arquimediana ν em $R[i] (\simeq R[\sqrt{a}])$ tal que $\nu(a) = \nu)b) = \nu(\beta) = 1$ e $\nu(1 + \alpha i) \neq \nu(1 - \alpha i)$. Então $(1 + \alpha i, 1 + \beta j)$ é semilivre em $\left(\frac{a,b}{Q}\right)$.*

Demonstração. Seja $F = R + Ri$ e $T = \left(\frac{a,b}{Q}\right)$. Temos $T = F + Fj$, pois $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)j = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$. Seja $G = U(T)$ um grupo agindo sobre $X = T$ com $g \cdot x = xg$. Tome

$$X_1 = \{x + yj : \nu(x) = \nu(y)\} \quad \text{e} \quad X_2 = \{x + yj : \nu(x) \neq \nu(y)\}.$$

Considere $x + yj \in X_1$. Temos

$$(x + yj)(1 + \alpha i)^n = x(1 + \alpha i)^n + y(1 - \alpha i)^n j.$$

Como $v(x(1+\alpha i)^n) = v(x)v(1+\alpha i)^n$ e $v(y(1-\alpha i)^n) = v(y)v(1-\alpha i)^n$, segue que $(x+yj)(1+\alpha i)^n \in X_2$. Para podermos aplicar o Lema do Ping Pong, falta mostrar que $(x+yj)(i+\beta j) \in X_1$. De fato, temos

$$(x+yj)(i+\beta j) = (ix+b\beta y) + (\beta x - iy)j$$

Como $v(ix) = v(x) \neq v(y) = v(\beta y)$, segue que $v(ix+b\beta y) = \max\{v(x), v(y)\}$. Analogamente, também temos $v(\beta x - iy) = \max\{v(x), v(y)\}$, o que implica $(x+yj)(i+\beta j) \in X_1$. □

7 Happy Ending Theorem

◇ ◇ ◇ *Aula 12 (17 de Maio) — Marcelo Tadeu Sales* ◇ ◇ ◇

Seja $ES(n)$ o número mínimo de pontos no plano em posição geral (isto é, três-a-três não colineares) tal que é garantida a existência de um subconjunto de n pontos que formam um n-ágono convexo.

Erdős e Szekeres provaram (1935) que

$$ES(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1 \approx \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

e conjecturaram que $ES(n) = 2^{n-2}+1$. Em 1961, Erdős e Szekeres (1961) construiram exemplos que mostram que

$$ES(n) \geq 2^{n-2}+1.$$

Veremos aqui uma prova recente que mostra que $ES(n) \leq 2^{n+o(n)}$

Teorema 7.1 (Andrew Suk, 2016)**.**

$$ES(n) \geq 2^{n+2n^{4/5}}.$$

7.1 Preliminares

Sejam $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_k = (x_k, y_k)$ pontos no plano e suponha que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ (note que para qualquer conjunto de pontos em posição geral sempre podemos fixar um sistema de coordenadas tal que suas abscissas sejam todas distintas). Dizemos que $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ formam um *k-cap* se a linha poligonal $p_1p_2\ldots p_k$ for côncava, isto é, se $\mathrm{tg}(p_1,p_2) > \mathrm{tg}(p_2,p_3) > \cdots > \mathrm{tg}(p_{k-1},p_k)$ onde $\mathrm{tg}(p_i,p_j) = \frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}$.

De maneira análoga, dizemos que $\{p_1, p_2\ldots, p_k\}$ formam um *k-cup* se a linha poligonal $p_1p_2\ldots p_k$ for convexa, isto é, se $\mathrm{tg}(p_1,p_2) < \mathrm{tg}(p_2,p_3) < \cdots < \mathrm{tg}(p_{k-1},p_k)$.

Teorema 7.2 (Caps e Cups)**.** *Seja $f(k,l)$ o número mínimo de pontos do plano em posição geral tal que é garantido a existência ou de um k-cup ou de um l-cap. Então*

$$f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Demonstração. Vamos provar apenas a desigualdade $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$, por indução em $k+l$. Se $k = 2$, então quaisquer dois pontos determinam um k-cap. Logo $f(k,2) =$

$2 \leq \binom{l-2}{0} + 1$. Da mesma forma, temos $f(2,l) = 2 \leq \binom{k-2}{0} + 1$.

Para o passo da indução, vamos mostrar que

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$$

Seja $n = f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ e sejam $p_1, \ldots, p_n$ pontos ordenados pela abscissa. Coloque $m = f(k-1,l)$ e considere os seguintes conjuntos de m pontos

$$\begin{aligned} U_1 &= \{p_1, \ldots, p_{m-1}, p_m\} \\ U_2 &= \{p_1, \ldots, p_{m-1}, p_{m+1}\} \\ U_3 &= \{p_1, \ldots, p_{m-1}, p_{m+2}\} \\ &\vdots \\ U_{f(k,l-1)} &= \{p_1, \ldots, p_{m-1}, p_n\} \end{aligned}$$

Se algum deles contiver um l-cap, não há nada a fazer. Suponha então que cada U_i contém um conjuto de pontos $U_i = \{u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^{k-1}\}$ (ordenados pela abscissa) que formam um $(l-1)$-cup. Seja $Y = \{u_1^{k-1}, \ldots, u_{f(k,l-1)}^{k-1}\}$ o conjunto formado pelos últimos pontos de cada um desses $(k-1)$-cups. Se Y contiver um k-cup não há nada a fazer. Suponha que Y contém um $(l-1)$-cap Λ. Sejam u_r^{k-1} e u_s^{k-1} o primeiro e o segundo ponto de Λ com menor abscissa, respectivamente.

Se $\operatorname{tg}(u_r^{k-1}, u_s^{k-1}) > \operatorname{tg}(u_r^{k-2}, u_r^{k-1})$, então $U_r \cup u_s^{k-1}$ forma um k-cup. Caso contrário $\Lambda \cup u_r^{k-2}$ forma um l-cup. Segue, usando a hipótese de indução, que

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(l,k-1) + 1 \leq \binom{k+l-5}{k-3} + \binom{k+l-5}{k-2} + 1 \leq \binom{k+l-4}{k-2},$$

como desejado. □

Seja $H = ([n], \binom{[n]}{3})$ o hipergrafo 3-uniforme completo cujo conjunto de vértices é $[n]$. Dizemos que uma 2-coloração $c : \binom{[n]}{3} \to \{0,1\}$ das arestas de H é *transitiva* se para todo $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \in [n]$ vale que

$$\text{se } c(\{i_1,i_2,i_3\}) = c(\{i_2,i_3,i_4\}), \text{ então } \{i_1, \ldots, i_4\} \text{ é monocromático,}$$

isto é, todas as triplas em $\{i_1, \ldots, i_4\}$ têm a mesma cor.

Teorema 7.3. *Seja $g(k,l)$ o número mínimo de vértices em um hipergrafo 3-uniforme completo com uma 2-coloração transitiva de forma a garantir a existência de um k-clique da cor 0 ou um l-clique da for 1. Então $g(k,l) = f(k,l)$.*

Demonstração. Para mostrar que $f(k,l) \leq g(k,l)$ considere um conjunto de $n = g(k,l)$ pontos no plano e construa um hipergrafo completo onde cada tripla é colorida com a cor 0 ou 1 se formar um cup ou um cap, respectivamente. Agora basta notar que essa coloração é transitiva.

Mostraremos, então, que $g(k,l) \leq f(k,l)$. Novamente, mostramos por indução que $g(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$. A afirmação é vacuamente verdadeira para $k = 2$ ou $l - 2$. Para o passo de indução, mostraremos que $g(k,l) \leq g(k-1,l) + g(k,l-1) - 1$. Ponha $m = g(k-1,l)$ e considere os conjuntos $X_i = \{1, 2 \ldots, m-1, m+i-1\}$, para $i = 1, \ldots, g(k,l-$

1). Suponha que nenhum deles contenha um l clique da cor 1. Então cada X_i deve conter um subconjunto $U_i = \{u_i^1, \ldots, u_i^{k-1}\}$ que forma um clique da cor 0. Seja $Y = \{u_i^{k-1}\}_{i=1}^{g(k,l-1)}$ Se Y não contiver um k-clique da cor 0, então Y deve conter um conjunto Λ que forma um $(l-1)$-clique da cor 0. Sejam $u_r^{k-1} < u_s^{k-1}$ os dois menores elementos de Λ.

Suponha que $c(u_r^{k-2}, u_r^{k-1}, u_s^{k-1}) = 0$. Fixe $i < j < k-2$. Como $c(u_r^j, u_r^{k-2}, u_r^{k-1}) = 0$, devemos ter $c(u_r^j, u_r^{k-1}, u_s^{k-1}) = 0$, por transitividade. Como $c(u_r^i, u_r^j, u_r^{k-1}) = 0$, também segue da transitividade que $c(u_r^i, u_r^j, u_s^{k-1}) = 0$. Logo $U_r \cup u_s^{k-1}$ é um clique da cor 0. Por outro lado, se $c(u_r^{k-2}, u_r^{k-1}, u_s^{k-1}) = 1$ podemos usar a transitividade de maneira análoga para mostrar que $\Lambda \cup u_r^{k-1}$ é um clique da cor 1. □

Dado um n-ágono $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ no plano definimos o *suporte* de X como a coleção de regiões $\mathcal{C} = \{T_1, \ldots, T_n\}$, onde T_i é a região externa ao n-ágono definida pelas retas (x_{i-1}, x_i) e (x_{i+1}, x_{i+2}).

figura: num pentágono regular as regiões são triângulos. Num triângulo, são regiões ilimitadas

Dado um conjunto X de pontos no plano, dizemos que X é um $\overset{cap}{cup}$ quando os pontos de X formam ou um cup ou um cap. Se $|X| = k$, dizemos que X é um k-$\overset{cap}{cup}$.

A seguir mostraremos que todo conjunto suficientemente grande de pontos do plano contém um k-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ tal que todas as regiões de seu suporte contêm uma fração significativa do conjunto original de pontos.

Lema 7.4. *Sejam $k \geq 3$ e P um conjunto finito de pontos no plano em posição geral tal que $|P| \geq 4^k$. Então existe um conjunto $X \subseteq P$ tal que X é um k-$\overset{cap}{cup}$ e as regiões $T_1, \ldots, T_k$ do suporte de X satisfazem*

$$|T_i \cap P| \geq \frac{|P|}{2^{40k}}.$$

Demonstração. Vamos estimar o número y de $4k$-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$s em P. Para isso contamos o número de pares da forma (Z, S), onde Z é um $4k$-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ e S é um conjunto de 4^{4^k} pontos de P que contém Z. Por um lado, o número de tais pares é igual a

$$\binom{n-4k}{4^{4k}-4k} y,$$

uma vez existem exatamente $\binom{n-4k}{4^{4k}}$ conjuntos de 4^{4k} pontos que contêm um dado k-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ Z. Por outro lado, como qualquer conjunto de $f(4k, 4k)$ pontos contém um $4k$-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ e

$$f(4k, 4k) \leq \binom{8k-4}{4k-2} + 1 \leq 2^{8k} = 4^{4k},$$

o número de pares da forma (Z, S) é, no mínimo, $\binom{n}{4^{4k}}$. Concluímos que

$$y \leq \frac{\binom{n}{4^{4k}}}{\binom{n-4k}{4^{4k}-4k}} = \frac{\binom{n}{4k}}{\binom{4^{4k}}{4k}}.$$

Dizemos que um conjunto W de $2k$-pontos *intercala* com um $4k$-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ $Z = \{x_1, x_2, \ldots, x_{4k}\}$ se $W = \{x_1, x_3, \ldots, x_{4k-1}$ ou se $W = \{x_2, x_4, \ldots, x_{4k}\}$. Vamos contar o número de pares

(W, Z), onde Z é um $4k$-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ e W é um conjunto de $2k$-pontos que intercala Z. Temos

$$\sum_W t_W = \#(W, Z) \geq 2y \geq 2\frac{\binom{n}{4k}}{\binom{4^{4k}}{4k}},$$

onde t_W é o número de $4k$-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ que W intercala. Logo deve existir W satisfazendo

$$\begin{aligned} t_W &\geq \frac{2\binom{n}{4k}}{\binom{4^{4k}}{4k}\binom{n}{2k}} \\ &\geq \frac{2n(n-1)\cdots(n-4k+1)(2k)!}{\binom{4^{4k}}{4k}n(n-1)\cdots(n-2k+1)(4k)!} > \frac{2(2k)!(n-4k)^{2k}}{\binom{4^{4k}}{4k}(4k)!} \\ &> \frac{(n-4k)^{2k}}{(4^4k)^{4k}} > \frac{n^{2k}}{2^{2k}2^{32k^2}} > \frac{n^{2k}}{2^{33k^2}}. \end{aligned}$$

Suponha sem perda de generalidade que W é um cap. Sejam $T_1, \ldots, T_{2k}$ as regiões do suporte de W e defina $b_i = |T_i \cap P|$ para todo $i = 1 \ldots 2k$. Temos

$$\frac{n^{2k}}{2^{33k^2}} \leq \prod_{i=1}^{2k} b_i.$$

Sejam $i_1, \ldots i_{2k}$ índices tais que $b_{i_1} < b_{i_2} < \cdots < b_{i_{2k}}$. Defina $\alpha = b_{i_k}$. Como

$$\prod_{i=1}^{2k} b_i = (b_{i_1} \ldots b_{i_k})(b_{i_{k+1}} \ldots b_{i_{2k}}) \leq \alpha^k n^k,$$

obtemos

$$\alpha n > \frac{n^2}{2^{33k}}, \text{ isto é, } \alpha > \frac{n}{2^{33k}} > \frac{n}{2^{40k}}.$$

Concluímos que cada uma das regiões $T_{i_{k+1}}, \ldots, T_{i_{2k}}$, que estão no suporte de W, contém pelo menos $n/(2^{40k})$ pontos de P. Para concluir a demonstração, basta considerar o k-cap $X = \{w_{i_{k+1}}, \ldots, w_{i_{2k}}\}$, uma vez que cada região desse k-cap contém alguma das regiões $T_{i_{k+1}}, \ldots, T_{i_{2k}}$. □

Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e finito. Dizemos que uma sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ de elementos de P é uma *cadeia* se $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Dizemos que um conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \in P$ é uma *anticadeia* se para todo $a_i \not\leq a_j$ todo $1 \leq i, j \leq k$.

Dada uma anticadeia A e uma partição $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_l\}$ de P em cadeias, então devemos ter $|A| \leq |\mathcal{C}|$, uma vez que cada C_i pode conter no máximo um elemento de A. Segue, em particular, que o tamanho de uma anticadeia em P de tamanho máximo é menor ou igual ao tamanho de uma partição em cadeias de P de tamanho mínimo. Usaremos o resultado a seguir, que afirma que, nesse caso, vale a igualdade.

Teorema 7.5 (Teorema de Dilworth)**.** *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e finito. O número máximo de elementos em uma anticadeia de P é igual ao número mínimo de cadeias em uma partição de P em cadeias.* □

Corolário 7.6. *Sejam $a, b > 0$ tais que $|P| = ab$. Então P contém ou uma anticadeia de tamanho pelo menos a, ou uma cadeia de tamanho pelo menos b.*

Demonstração. Suponha que o número máximo de elementos em uma anticadeia seja $s < a$. Pelo Teorema de Dilworth, existe uma partição de P em s cadeias. Logo, alguma delas deve conter pelo menos $|P|/s > b$ elementos. □

7.2 Demonstração do Teorema 7.1

Considere um conjunto P de pontos em posição geral no plano de cardinalidade $|P| = N = 2^{n+2n^{4/5}}$. Aplicamos o Lema 7.4 com $k = t+3$, onde $t = \sqrt{n}$ para obter um conjunto $(t+3)$-$\overset{\text{cap}}{\text{cup}}$ X com suporte $\{T_1, \ldots, T_{t+3}\}$ satisfazendo

$$|T_i \cap P| \geq \frac{N}{2^{40(t+3)}} \geq \frac{N}{2^{50t}}.$$

A seguir, assumiremos que X é um $(t+3)$-cap. O prova para o caso em que X é um $(t+3)$-cup será análoga.

Para todo $1 \leq i \leq (t+3)$, seja $P_i = T_i \cap P$. Definimos uma ordem parcial em P_i da seguinte forma: dados dois pontos $p \neq q \in P_i$, fazemos

$$p < q \text{ se, e somente se, } q \in \text{conv}(p, x_{i-1}, x_{i+2}),$$

isto é, $p < q$ se q pertence ao triângulo cujos vértices são p, x_{i-1} e x_{i+2}. Note que p e q são comparáveis se, e somente se, a reta (p,q) intersecta a reta $r_i = (x_{i-1}, x_{i+2})$.

Seja $\alpha = n^{-\frac{1}{5}}$. Dizemos que uma região P_i é

- do *tipo A* se P_i contém uma anticadeia de tamanho pelo menos $|P_i|^\alpha$; ou
- do *tipo B* se P_i contém uma cadeia de tamanho pelo menos $|P_i|^{1-\alpha}$.

Pelo Corolário 7.6 toda região é ou do tipo A ou do tipo B. Note que existem ou $\sqrt{t}$ regiões do tipo A ou $\sqrt{t}$ regiões consectutivas do tipo B (de fato, considere $\sqrt{t}$ conjuntos disjuntos de $\sqrt{t}$ regiões consectutivas: se nenhum deles for composto apenas de regiões do tipo B, devemos ter pelo menos uma região do tipo A para cada um desses conjuntos). Analisaremos esses dois casos separadamente.

- *Caso 1: Existem pelo menos $\sqrt{t}$ regiões do tipo A.* Como há pelo menos $\sqrt{t}$ regiões do tipo A, podemos escolher um conjunto de $s = \frac{1}{2}\sqrt{t} = \frac{1}{2}n^{1/4}$ regiões $P_{i_1}, \ldots, P_{i_s}$ duas-a-duas não consecutivas do tipo A. Note que P_{i_r} contém uma anticadeia A_{i_k} de tamanho

$$\begin{aligned} |A_{i_r}| \geq |P_{i_r}|^\alpha \geq \left(\frac{N}{2^{50t}}\right)^{n^{-1/5}} &= 2^{n^{4/5}+2n^{3/5}-50n^{3/10}} \\ &\geq 2^{2n^{3/4}+2n^{3/4}\lg n} \geq (2n)^{2n^{3/4}} \geq (n+2n^{\frac{3}{4}}-4)^{2n^{3/4}} \\ &\geq \binom{n+2n^{\frac{3}{4}}-4}{2n^{\frac{3}{4}}-2} + 1 = f(n, 2n^{\frac{3}{4}}). \end{aligned}$$

  Logo, em cada P_{i_r} deve haver ou um n-cup ou um $2n^{\frac{3}{4}}$-cap formado por pontos em uma anticadeia. Se algum P_{i_r} contiver contiver um n-cup, não há nada a ser feito. Suponha então que cada P_{i_r} contém um $2n^{\frac{3}{4}}$-cap compostos por pontos em uma anticadeia. Afirmamos que $\bigcup_{r=1}^{s} P_{i_r}$ é um n-cap. De fato,

- *Caso 2: Existe pelo menos $\sqrt{t}$ regiões consectutivas do tipo B.* Suponha sem perda de generalidade que $P_1, \ldots, P_{\sqrt{t}}$ são regiões consectutivas do tipo B. Para cada inteiro $1 \leq i \leq \sqrt{t}$, fixamos uma cadeia de pontos Q_i de tamanho pelo menos $|P_i|^{1-\alpha}$. Dizemos que um conjunto de pontos $A \subseteq Q_i$ é *convexo à direita*, se $A \cup \{x_i\}$ forma um polígono convexo; ou *convexo à esqueda*, se $A \cup \{x_{i+1}\}$ forma um polígono convexo.

  Afirmação 7.7. *Para todo $1 \leq i \leq \sqrt{t}$, a cadeia Q_i contém ou um $(n - (i-1)n^{\frac{3}{4}})$-conjunto de pontos convexo à direita ou um $(in^{\frac{3}{4}})$-conjunto de pontos convexo à esquerda.*

  Demonstração. Associe cada tripla $\{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\} \subseteq Q_i$ à cor 0, se ela for uma tripla à esquerda ou à cor 1, se for uma tripla à direita. Note que toda tripla é associada a alguma cor e que a coloração assim definida é transitiva. Segue do Teorema 7.3, que se $|Q_i| \geq g(k,l)$, então Q_i ou contém um k-conjunto de pontos convexo à direita ou um l-conjunto convexo à esquerda. Como para quaisquer inteiros $k, l > 0$ temos

  $$g(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1 \leq 2^{k+l-4} + 1 \leq 2^{k+l},$$

  é suficiente mostrar que $|Q_i| \geq 2^{n+n^{3/4}}$. Mas como P_i é uma região do tipo B temos

  $$\begin{aligned}
  |Q_i| &= |P_i|^{1-\alpha} \\
  &\geq \frac{N}{2^{50t}}^{1-n^{\frac{1}{5}}} \\
  &= (2^{n+2n^{4/5}-50n^{1/2}})^{1-n^{-1/5}} = \\
  &= 2^{n+2n^{4/5}-50n^{1/2}-n^{4/5}-2n^{3/5}+50n^{3/10}} \\
  &= 2^{n+n^{4/5}+o(n^{4/5})} \\
  &\geq 2^{n+n^{3/4}},
  \end{aligned}$$

  como desejado. □

  Afirmação 7.8. *Seja E um conjunto de pontos convexo à esquerda em uma região P_i do tipo B e e D um conjunto de pontos convexo à direita em uma região P_{i+1} do tipo B. Então $E \cup D$ forma um polígono convexo.*

  Demonstração. Seja $U = E \cup D$. Para mostrar que U forma um polígono convexo, basta mostrar que quaisquer quatro pontos formam uma quadrilátero convexo (de fato, se U não for convexo, então deve haver algum ponto no interior de um triângulo de uma triângulação do casco convexo de U).

  Sejam $p_1, p_2, p_3, p_4 \in U$. Suponha que $p_1, p_2 \in E$ e $p_3, p_4 \in D$. Como p_1 e p_2 estão em uma cadeia, a reta (p_1, p_2) não pode cruzar a região P_{i+1}. Analogamente (p_3, p_4) não cruza a região P_i. Logo p_1, p_2, p_3, p_4 formam um quadrilátero convexo. Agora suponha que $p_1, p_2, p_3 \in E$ e $p_4 \in D$. Como p_1, p_2, p_3 estão em uma cadeia, os pontos x_{i+1} e p_4 devem estar na mesma região definida pelas retas (p_1, p_2), (p_2, p_3), (p_1, p_3). Portanto, como p_1, p_2, p_3, x_{i+1} formam um quadrilátero

convexo, o mesmo deve ser verdade para os pontos p_1, p_2, p_3, p_4. Os demais casos seguem por simetria. □

Suponha que Q_1 não possua um n-conjunto convexo à direita e que $Q_{\sqrt{t}}$ não possui um $\sqrt{t}p = n$-conjunto de pontos convexo à esquerda (nesses casos não há nada a provar). Segue da Afirmação 7.7 que existe i tal que Q_i possui um ip-conjunto convexo à esquerda e Q_{i+1} possui um $n - ip$ conjunto convexo à direita. Esses dois conjuntos de pontos formam um n-ágono convexo.

8 Flag Algebra

◇ ◇ ◇ *Aula 13 (31 de Maio) — Fernando Mario de Oliveira Filho* ◇ ◇ ◇

8.1 Exemplo: Teorema de Mantel

Teorema 8.1 (Mantel 1910)**.** *Todo grafo livre de triângulos de tamanho n tem no máximo* $\lfloor n^2/4 \rfloor$ *arestas.*

Assintoticamente, o Teorema de Mantel afirma que todo grafo livre de triângulos tem densidade de arestas no máximo $\frac{1}{2}$. Nesta seção, veremos uma demonstração dessa versão assintótica do Teorema de Mantel que usa técnicas que estão por trás da teoria de Flag Algebras para grafos.

Seja $p(F;G)$ a probabilidade de um conjunto $U \subseteq V(G)$, de cardinalidade $|U| = |F|$, escolhido uniformemente ao acaso ser tal que $G[U] \simeq F$, isto é, tal que o grafo induzido por U é isomorfo a F. Em outras palavras temos

$$p(F;G) = \binom{|G|}{|F|}^{-1} c(F;G),$$

onde $c(F;G)$ é o número de cópias homomórficas (não-rotuladas) de F em G. Temos, por exemplo, $c(\circ\!\!-\!\!\circ, \triangle) = \binom{3}{2} = 3$.

Seja $\mathcal{H}$ uma coleção de grafos proibidos. Dizemos que G é $\mathcal{H}$-livre se G não possui subgrafo induzido isomorfo a $\mathcal{H}$, isto é, se $p(F,G) = 0$ para todo $F \in \mathcal{H}$.

Fixe um grafo C. Definimos

$$\operatorname{ex}(C,\mathcal{H}) = \sup_{(G_k)_{k\geq 0}} \lim_{k\to\infty} p(C;G_k),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as sequências $(G_k)_{k\geq 0}$ crescentes (dizemos que uma sequências $(G_k)_{k\geq 0}$ é crescente se $(|G_k|)_{k\geq 0}$ é crescente) de grafos $\mathcal{H}$-livres. Nessa linguagem, podemos enunciar o Teorema de Mantel da seguinte forma.

Teorema 8.2 (Teorema de Mantel, versão assintótica)**.**

$$\operatorname{ex}(\circ\!\!-\!\!\circ, \{\triangle\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Fixe uma família $\mathcal{H}$ de grafos e seja $\mathcal{G}$ o conjunto de todos os grafos (a menos de isomorfismos) $\mathcal{H}$-livres. Dizemos que uma sequência $(G_k)_{k\geq 0}$ é *convergente* se para

todo $F \in \mathcal{G}$ existe $\lim_{k\to\infty} p(F; G_k)$.

Proposição 8.3. *Toda sequência crescente $(G_k)_{k\geq 0}$ possui uma subsequência convergente.*

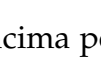
Demonstração. Como $p(F;G) \in [0,1]$, podemos identificar a função $\xi_k : F \mapsto p(F, G_k)$ com um ponto do espaço $[0,1]^{\mathcal{G}}$. Mas como $[0,1]$ é um espaço compacto, segue do Teorema de Tychonoff que $[0,1]^{\mathcal{G}}$ é compacto. Portanto, toda sequência $(\xi_k)_{k\geq 0}$ nesse espaço contém uma subsequência convergente. □

Dizemos que $\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ é um *funcional limite* se existe uma sequência convergente $(G_k)_{k\geq 0}$ tal que $\phi(F) = \lim_{k\to\infty} p(F; G_k)$ para todo $F \in \mathcal{G}$. Defina $\Phi = \{\phi : \phi \text{ é funcional limite}\}$. Note que podemos rescrever $\mathrm{ex}(C, \mathcal{H})$ como

$$\mathrm{ex}(C, \mathcal{H}) = \sup\{\phi(C) : \phi \in \Phi\}.$$

Logo, uma maneira de se obter uma cota superior para $\mathrm{ex}(C, \mathcal{H})$ consiste em computar $\sup\{\phi(C) : \phi \in \Phi'\}$ para algum $\Phi' \supseteq \Phi$.

Demonstração do Teorema 8.2 (Razborov, Bondy). Fixe $\mathcal{H} = \{$  $\}$. Seja G um grafo $\mathcal{H}$-livre. Toda aresta de G pertence a $|G| - 2$ subgrafos de G de três vértices. Portanto, temos

$$c($  $; G) + 2c($  $; G) = (|G| - 2)c($  $; G).$$

Dividindo a equação acima por $\binom{|G|}{3}$, obtemos

$$p($  $; G) + 2p($  $; G) = 3p($  $; G).$$

Logo, todo $\phi \in \Phi$ satisfaz

$$\phi($  $) + 2\phi($  $) = 3\phi($  $). \tag{6}$$

A seguir obteremos outra condição que deve ser satisfeita por qualquer $\phi \in \Phi$. Para isso, precisaremos estender a definição de $p(F;G)$ para grafos que possuem alguns vértices rotulados.

Seja F e G grafos contendo, respectivamente, vértices $v_1 \in V(F)$ e $w_1 \in V(G)$ com rótulo 1 (os demais vértices de F e G não são rotulados). Definimos $p(F;G)$ como a probabilidade de um conjunto $U \subseteq V(G) \setminus \{w_1\}$, de cardinalidade $|U| = |F| - 1$, escolhido uniformemente ao acaso, ser tal que $G[U \cup \{w_1\}] \simeq F$ (isto é, se há um isomorfismo de ϕ de grafos entre $G[U \cup \{w_1\}]$ e F satisfazendo $\phi(w_1) = v_1$).

Seja G é um grafo $\mathcal{H}$-livre e $v \in V(G)$. Definimos G^v como o grafo isomorfo a G com rótulo 1 em v. Por exemplo, se $G =$  e v é o vértice de grau dois de G, então $G^v =$  .

Usaremos tais definições para estimar $p($  $, G)$. Note que para todo $v \in V(G)$, cada par de vértices na vizinhança de v forma (junto com v) uma cópia de  em G. Logo, temos

$$p($  $; G) = \binom{|G|}{3}^{-1} \sum_{v\in G} \binom{d(v)}{2} = \binom{|G|}{3}^{-1} \sum_{v\in G} p($  $, G^v)\binom{|G|-1}{2} = \frac{3}{|G|} \sum_{v\in G} p($  $, G^v).$$

Agora afirmamos que se $|G| \to \infty$, então $p(\triangle, G^v) \to p(\bullet\!\!-\!\!\circ, G^v)^2$. De fato, basta notar que jjj$p(\triangle; G^v)$ é a probabilidade de dois vértices distintos (escolhidos ao acaso) serem vizinhos de v, enquanto $p(\bullet\!\!-\!\!\circ, G^v)^2$ é a probabilidade de dois vértices escolhidos de forma independente serem vizinhos de v.

Seja ϕ um funcional limite associado a uma sequência $(G_k)_{k\geq 0}$ de grafos. Temos

$$\phi(\wedge) = \lim_{k\to\infty} p(\wedge, G_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{|G_k|} \sum_{v\in G_k} p(\triangle; G^v) = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{|G_k|} \sum_{v\in G_k} p(\bullet\!\!-\!\!\circ; G_k^v)^2.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Swartz na última soma da equação acima, obtemos

$$\phi(\wedge) \geq \lim_{k\to} \frac{3}{|G_k|^2} \left(\sum_{v\in G_k} p(\bullet\!\!-\!\!\circ; G_k^v) \right)^2.$$

Note que $\sum_{v\in G} p(\bullet\!\!-\!\!\circ; G_k^v) = p(\circ\!\!-\!\!\circ; G_k)|G_k|$, uma vez que $p(\bullet\!\!-\!\!\circ; G_k^v)|G_k^v - 1| = \sum_{v\in G_k^v - 1} d(v) = 2p(\circ\!\!-\!\!\circ; G)\binom{|G_k|}{2}$. Substituindo essa igualdade na inequação anterior, obtemos $\phi(\wedge) \geq \lim_{k\to\infty} 3p(\circ\!\!-\!\!\circ; G_k)^2$, ou seja,

$$\phi(\wedge) \geq 3\phi(\circ\!\!-\!\!\circ)^2. \tag{7}$$

Como todo $\phi \in \Phi$ deve satisfazer as condições (6) e (7), o valor ótimo do seguinte programa semidefinido é um limitante superior para $\mathrm{ex}(\circ\!\!-\!\!\circ, \{\triangle\}) = \sup\{\phi(\circ\!\!-\!\!\circ) : \phi \in \Phi\}$:

$$\begin{array}{lrcll} \max & \phi(\circ\!\!-\!\!\circ) & & & \\ s.a. & \phi(\vee) + 2\phi(\triangle) & = & 3\phi(\circ\!\!-\!\!\circ); & (6) \\ & \phi(\triangle) & \geq & 3\phi(\circ\!\!-\!\!\circ)^2; & (7) \\ & & & \phi \in [0,1]^{\mathcal{G}} & \end{array}$$

Note que qualquer solução dual do programa semidefinido acima fornece cotas superiores para $\mathrm{ex}(\circ\!\!-\!\!\circ, \{\triangle\})$. Em particular, fazendo $2\cdot(7) - (6)$, obtemos a desigualdade

$$0 \leq \phi(\wedge) \leq 3\phi(\circ\!\!-\!\!\circ) - 6\phi(\circ\!\!-\!\!\circ)^2,$$

da onde segue que $2\phi(\circ\!\!-\!\!\circ)^2 \leq \phi(\circ\!\!-\!\!\circ)$, isto é, que $\phi(\circ\!\!-\!\!\circ) \leq \frac{1}{2}$, como desejado. □

◇ ◇ ◇ *Aula 14 (07 de Junho) — Fernando Mario de Oliveira Filho* ◇ ◇ ◇

8.2 Definições iniciais

Fixe uma família $\mathcal{H}$ de grafos proibidos e seja $\mathcal{G}$ o conjunto de grafos $\mathcal{H}$-livres.

Um *tipo* de tamanho k é um grafo em $\mathcal{G}$ com vértices em $[k]$. Dado um tipo σ de tamanho k e $F \in \mathcal{G}$, definimos uma *imersão* de σ em F como uma função injetora $\theta : [k] \to V(F)$ que define um isomorfismo entre os grafos σ e $F[\mathrm{Img}\,\theta]$.

Uma *σ-flag* é um par (F, θ) onde $F \in \mathcal{G}$ é um grafo e θ é uma imersão de σ em F. Por simplicidade, às vezes omitimos a imersão θ e dizemos apenas que F é uma σ-flag. Duas σ-flags (F_1, θ_1) e (F_2, θ_2) são *isomorfas* se existe um isomorfismo ξ entre F_1 e F_2 tal que $\xi(\theta_1(i)) = \xi(i)$ para todo $1 \leq i \leq |\sigma|$. No que se segue, faremos j

O conjunto de todas as σ-flags de tamanho n será denotado por $\mathcal{F}_n^\sigma$. Também definidmos $\mathcal{F}^\sigma = \bigcup_{n\geq|\sigma|}\mathcal{F}_n^\sigma$ como o conjunto de todas as σ-flags.

Dadas σ-flags $F_1,\dots,F_t$ e um inteiro n, dizemos que $F_1,\dots,F_t$ *cabem* em n se

$$n-|\sigma| \geq \sum_{i=1}^{t}(|F_i|-|\sigma|).$$

Também dizemos que $F_1,\dots,F_t$ *cabem* em uma σ-flag G se $F_1,\dots,F_t$ cabem em $|G|$.

Sejam $F_1,\dots,F_t,G\in\mathcal{F}^\delta$ tais que $F_1,\dots,F_t$ cabem em G, definimos

$$p(F_1,\dots,F_t;G) = \mathbb{P}(F_i \simeq G[U_i\cup \operatorname{Img}\theta]),$$

onde θ é a imersão de σ e onde $U_1,\dots,U_t\subseteq V(G)\setminus\operatorname{Img}\theta$ são conjuntos dois-a-dois disjuntos, de cardinalidade $|U_i| = |F_i|-|\sigma|$, escolhidos uniformemente ao acaso.

Teorema 8.4 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $F_1,\dots,F_t,G\in\mathcal{F}^\sigma$ tais que $F_1,\dots,F_t$ cabem em G. Seja n um inteiro tal que para todo $1\leq s\leq t$, vale que $F_1,\dots,F_s$ cabem em n e que $F_{s+1},\dots,F_t,H$ cabem em G, onde H é uma σ-flag de tamanho n. Então*

$$p(F_1,\dots,F_t;G) = \sum_{F'\in\mathcal{F}_n^\sigma} p(F_1,\dots,F_s;F')p(F',F_{s+1},\dots,F_t;G). \qquad \square$$

O próximo resultado mostra que $p(F_1,F_2;G)$ está arbitrariamente próximo de $p(F_1;G)p(F_2;G)$ para σ-flags G de tamanho suficientemente grande.

Teorema 8.5. *Para todo $F_1,F_2\in\mathcal{F}^\sigma$, existe $f(n) = O(\frac{1}{n})$ tal que se F_1,F_2 cabem em G então*

$$|p(F_1,F_2;G) - p(F_1;G)p(F_2;G)| \leq f(|G|). \qquad \square$$

8.3 Flag Álgebra

Uma sequência de σ-flags $(A_k)_{k\geq0}$ é *convergente* se para todo $F\in\mathcal{F}^\sigma$ existe $\lim_{k\to\infty}p(F;A_k)$.

Seja

$$\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma = \{f:\mathcal{F}^\sigma\to\mathbb{R} : |\sup f|<\infty\}.$$

o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das funções de $\mathcal{F}^\sigma\to\mathbb{R}$ com suporte finito. Representaremos um elemento $f\in\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ como uma soma formal (finita) da forma $\sum_{F\in\mathcal{F}^\sigma}f(F)F$.

Um *funcional linear* é qualquer função linear $\phi:\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma\to\mathbb{R}$. Um funcional linear ϕ é um *funcional limite* se para toda sequência convergente de σ-flags $(A_k)_{k\geq0}$, temos

$$\phi(F) = \lim_{k\to\infty}p(F;A_k),$$

para todo $F\in\mathcal{F}^\sigma$. Note que como $\mathcal{F}^\sigma$ é uma base de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ (como espaço linear sobre $\mathbb{R}$), um funcional linear é completamente determinado pela sequência convergente $(A_k)_{k\geq0}$.

Como consequência da Regra da Cadeia, certos elementos de $\mathcal{F}^\sigma$ devem ter a mesma imagem em $\mathbb{R}$ para qualquer funcional limite ϕ. Mais especificamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 8.6. *Sejam $F \in \mathcal{F}^\sigma$ uma flag e $\phi : \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma \to \mathbb{R}$ um funcional limite. Para todo $n \geq |F|$ temos:*

$$\phi(F) = \phi\left(\sum_{F' \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(F; F')F'\right).$$

Demonstração. Seja $(A_k)_{k\geq 0}$ uma sequência convergente que determina o funcional limite ϕ. Temos

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_{F' \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(F; F')F'\right) &= \sum_{F' \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(F; F')\phi(F') \\
&= \sum_{F' \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(F; F') \lim_{k\to\infty} p(F'; A_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{F' \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(F; F')p(F'; A_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} p(F; A_k) \\
&= \phi(F).
\end{aligned}$$

□

A seguir, iremos considerar o espaço vetorial $\mathcal{A}^\sigma$ obtido (a partir de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$) ao identificarmos quaisquer elementos que, por consequência da Proposição 8.6, devem ter a mesma imagem para *qualquer* funcional limite.

Mais formalmente, definimos o espaço linear

$$\mathcal{K}^\sigma = \left\langle \{F - \sum_{F' \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(F; F')F' : F \in \mathcal{F}^\sigma, n \geq |F|\} \right\rangle.$$

Note que para todo funcional linear ϕ, a Proposição 8.6 implica $\mathcal{K}^\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\phi$. Agora consideramos o espaço $\mathcal{A}^\sigma := \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma/\mathcal{K}^\sigma$, obtido fazendo o quociente de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ por $\mathcal{K}^\sigma$. Dado $F \in \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ denotaremos o elemento $(F + \mathcal{K}^\sigma) \in \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma/\mathcal{K}^\sigma$ apenas por F, de forma a simplificar a notação.

Seja $\phi : \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma \to \mathbb{R}$ um funcional limite. Como $K^\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\phi$, então ϕ é [pode ser estendido a] um funcional limite em A^σ.

Definiremos, a seguir, uma operação bilinear de multiplicação $\cdot : \mathcal{A}^\sigma \times \mathcal{A}^\sigma \to \mathcal{A}^\sigma$ de forma a obter uma álgebra $(\mathcal{A}^\sigma, \cdot)$. Dadas duas flags $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^\sigma$, definimos

$$F_1 \cdot F_2 = \sum_{F \in \mathcal{F}^\sigma_n} p(F_1, F_2; F)F \in \mathcal{A}^\sigma.$$

onde n é um inteiro arbitrário tal que F_1 e F_2 cabem em n. Não é difícil mostrar que esse produto está bem definido em $\mathcal{A}^\sigma$, isto é, independe da escolha de n. De fato,

dados inteiros $n > m$ tais que F_1 e F_2 cabem em, ambos, n e m, temos

$$\begin{aligned}\sum_{H\in\mathcal{F}_m^\sigma} p(F_1,F_2;H)H &= \sum_{H\in\mathcal{F}_m^\sigma} p(F_1,F_2;H)\left(\sum_{F\in\mathcal{F}_n^\sigma} p(H;F)F\right)\\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}_n^\sigma} F\sum_{H\in\mathcal{F}_m^\sigma} p(F_1,F_2;H)p(H;F)\\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}_n^\sigma} p(F_1,F_2;F)F.\end{aligned}$$

Uma vez definida a operação $\cdot$ para flags, podemos estendê-la bilinearmente para uma operação $\cdot : \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma \times \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma \to \mathcal{A}^\sigma$. O resultado a seguir mostra que a extensão natural de $\cdot$ para uma operação em $\mathcal{A}^\sigma \times \mathcal{A}^\sigma \to \mathcal{A}^\sigma$ também está bem definida.

Proposição 8.7. *Seja $f \in \mathcal{K}^\sigma$ e $g \in \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$. Então $f \cdot g = 0 \in \mathcal{A}^\sigma$.*

Demonstração. Vamos considerar o caso particular em que existem $F, G \in \mathcal{F}^\sigma$ e inteiro m tais que $f = F - \sum_{F'\in\mathcal{F}_m^\sigma} p(F;F')F'$ e $g = G$. Temos

$$\begin{aligned}f\cdot g &= F\cdot G - \sum_{F'\in\mathcal{F}_m^\sigma} p(F;F')(F'\cdot G)\\ &= F\cdot G - \sum_{F'\in\mathcal{F}_m^\sigma} p(F;F')\sum_{H\in\mathcal{F}_n^\sigma} p(F',G;H)H\\ &= F\cdot G - \sum_{H\in\mathcal{F}_m^\sigma} p(F,G;H)H = 0.\end{aligned}$$

O caso geral segue por linearidade. □

Logo $\cdot$ é um produto comutativo em $\mathcal{A}^\sigma$. A *álgebra* $(\mathcal{A}^\sigma, \cdot)$ será denotada apenas por $\mathcal{A}^\sigma$.

Proposição 8.8. *O elemento neutro de $\mathcal{A}^\sigma$ é $\sigma \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Basta provar que para toda flag $F \in \mathcal{F}_n^\sigma$ temos $F \cdot \sigma = F$. De fato,

$$F\cdot\sigma = \sum_{H\in\mathcal{F}_{n+1}^\sigma} p(F,\sigma;H)H = \sum_{H\in\mathcal{F}_{n+1}^\sigma} p(F;H)H = F.$$

□

Seja $\mathrm{Hom}(A^\sigma, \mathbb{R})$ o conjunto de homomorfismos $\phi : A^\sigma \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{Hom}^+(A^\sigma, \mathbb{R})$ o conjunto de homomorfismos $\phi : A^\sigma \to \mathbb{R}$ tais que $\phi(F) \geq 0$ para todo $F \in \mathcal{F}^\sigma$.

Proposição 8.9. *Se $\phi : A^\sigma \to \mathbb{R}$ é um funcional limite, então $\phi \in \mathrm{Hom}^+(A^\sigma, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Seja $(A_k)_{k\geq 0}$ uma sequência convergente tal que $\phi(F) = \lim_{k\to\infty} p(F; A_k) \geq 0$ para todo $F \in \mathcal{F}^\sigma$. Basta mostrar que ϕ é homomorfismo.

- $\phi(\sigma) = \lim_{k\to\infty} p(\sigma, A_k) = 1$.

- Para todo $F, G \in \mathcal{F}^\sigma$,

$$\begin{aligned}
\phi(F \cdot G) &= \phi\left(\sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F, G; H) H\right) \\
&= \sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F, G; H) \phi(H) \\
&= \sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F, G; H) \lim_{k \to \infty} p(H; A_k) \\
&= \lim_{k \to \infty} \sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F, G; H) p(H; A_k) \\
&= \lim_{k \to \infty} p(F, G; A_k) \\
&= \lim_{k \to \infty} p(F; A_k) p(G; A_k) + O(1/k) \\
&= \lim_{k \to \infty} p(F; A_k) \lim_{k \to \infty} p(G; A_k) \\
&= \phi(F)\phi(G).
\end{aligned}$$

□

O Teorema a seguir mostra que vale a recíproca da Proposição 8.9.

Teorema 8.10. *Uma função $\phi : \mathcal{A}^\sigma \to \mathbb{R}$ é um funcional limite se, e somente se, $\phi \in \mathrm{Hom}^+(A^\sigma, \mathbb{R})$.* □

◇ ◇ ◇ *Aula 15 (14 de Junho) — Fernando Mario de Oliveira Filho* ◇ ◇ ◇

Seja $(A^\sigma)^* = \{\phi : A^\sigma \to \mathbb{R} : \phi \text{ é linear }\}$ o espaço dual a A^σ. Dados $f \in A^\sigma$ e $\phi \in (A^\sigma)^*$ definimos o produto inteiro $(f, \phi) = \phi(f)$.

Definimos o *cone semântico* de A^σ como

$$\mathscr{S}^\sigma = \{f \in A^\sigma : (\phi, f) \geq 0 \text{ para todo } \phi \in \mathrm{Hom}^+(A^\sigma, \mathbb{R})\}.$$

Note que pelo Teorema 8.10 $\mathscr{S}$ codifica todas as relações assintóticamente válidas para grafos livres de $\mathcal{H}$. Por exemplo, ao tomarmos $\mathcal{H} = \{$  $\}$, devemos ter $\frac{1}{2}\varnothing -$  $\in \mathscr{S}^\varnothing$, onde $\varnothing$ é o tipo vazio. Defina

$$(\mathscr{S}^\sigma)^* = \{\phi \in (A^\sigma)^* : (\phi, f) \geq 0 \text{ para todo } f \in \mathcal{F}^\sigma\}.$$

Como todo $\phi \in \mathrm{Hom}^+(A^\varnothing, \mathbb{R})$ pertence a $(\mathscr{S}^\varnothing)^*$ e satisfaz $(\phi, \varnothing) = 1$, devemos ter

$$\mathrm{ex}(C, \mathcal{H}) = \max\{(\phi, C) : \phi \in \mathrm{Hom}^+(A^\varnothing, \mathbb{R})\} \leq \max\{(\phi, C) : (\mathscr{S}^\varnothing)^* \text{ e } (\phi, \varnothing) = 1\},$$

Ao considerar o problema dual do problema de maximação do lado direito concluímos que

$$\max\{(\phi, C) : (\mathscr{S}^\varnothing)^* \text{ e } (\phi, \varnothing) = 1\} \leq \min\{\lambda : \lambda\varnothing - C \in \mathscr{S}^\varnothing \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}\},$$

De fato, sejam ϕ e λ tais que (ϕ, C) é uma solução do problema de maximação e λ, uma solução do problema de minimização. Como $\lambda\varnothing - C \in \mathscr{S}^\varnothing$, segue da definição de $(\mathscr{S}^\varnothing)^*$ que $(\phi, \lambda\varnothing, C) \geq 0$, isto é, que $\lambda = \lambda(\phi, \varnothing) \geq (\phi, C)$.

Logo, todo conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{S}^\varnothing$ fornece a seguinte cota superior para $\mathrm{ex}(C, \mathcal{H})$:

$$\mathrm{ex}(C, \mathcal{H}) \leq \min\{\lambda : \lambda\varnothing - C \in \mathcal{C}\}.$$

8.4 Método semidefinido

Um método para obtermos um conjunto (não-trivial) $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{S}^\varnothing$ consiste em considerar elementos $f \in \mathcal{A}^\varnothing$ que podem ser expressos como soma de quadrados, isto é, elementos da forma $f = g_1^2 + \cdots + g_t^2$. De fato, $\phi(f) = \sum_{i=1}^t \phi(g_1)^2 \geq 0$ para para qualquer $\phi \in (\mathcal{A}^\varnothing)^* \supseteq \mathrm{Hom}^+(\mathcal{A}^\varnothing)$. Infelizmente, conjuntos $\mathcal{C}$ assim obtidos não fornecem, em geral, uma boa cota superior para $\mathrm{ex}(C, \mathcal{H})$. Ao invés disso, fixaremos um tipo σ e introduziremos um operador $[\![\cdot]\!]_\sigma$ que projeta elementos de $\mathcal{A}^\sigma$ em elementos de $\mathcal{A}^\varnothing$ com a propriedade que $[\![\mathscr{S}^\sigma]\!]_\sigma \subseteq \mathscr{S}^\varnothing$. Dessa forma, poderemos considerar conjuntos $\mathcal{C} = [\![\mathcal{C}^\sigma]\!]_\sigma \subseteq \mathscr{S}^\varnothing$, onde $\mathcal{C}^\sigma \subseteq \mathscr{S}^\sigma$ é o conjuntos das somas de quadrados em $\mathcal{A}^\sigma$.

Defina $[\![.]\!]_\sigma : \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma \to \mathbb{R}\mathcal{F}^\varnothing$ como o operador linear que satisfaz, para toda flag $F \in \mathcal{F}^\sigma$,

$$[\![F]\!]_\sigma = q_\sigma(F) A{\downarrow}F,$$

onde $\downarrow F \in \mathcal{F}^\varnothing$ é a flag obtida a partir de F desconsiderando o tipo σ e $q_\sigma(F)$ é a probabilidade de uma injeção $\theta : [k] \to V(F)$ escolhida uniformemente ao acaso ser tal que $(\downarrow F, \theta) \simeq F$.

Proposição 8.11. $[\![\mathcal{K}^\sigma]\!]_\sigma \subseteq \mathcal{K}^\varnothing$

Demonstração. Seja $F - \sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F;H)H \in \mathcal{K}^\sigma$. Temos

$$\begin{aligned}
\left[\!\!\left[F - \sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F;H)H \right]\!\!\right]_\sigma &= q_\sigma(F){\downarrow}F - \sum_{H \in \mathcal{F}^{\sigma_n}} p(F;H) q_\sigma(H){\downarrow}H \\
&= q_\sigma(F){\downarrow}F - \sum_{H^\varnothing \in \mathcal{F}_n^\varnothing} \left(\sum_{\substack{H \in \mathcal{F}_n^\sigma: \\ \downarrow H = H^\varnothing}} p(F;H) q_\sigma(H) \right) H^\varnothing \\
&= q_\sigma(F){\downarrow}F - q_\sigma(F) \sum_{H^\varnothing \in \mathcal{F}_n^\varnothing} p(\downarrow F; H^\varnothing) H^\varnothing \in \mathcal{K}^\varnothing.
\end{aligned}$$

□

Segue da proposição acima que $[\![\cdot]\!]_\sigma$ está bem definido como um operador linear $[\![\cdot]\!]_\sigma : \mathcal{A}^\sigma \to \mathcal{A}$.

Teorema 8.12. $[\![\mathscr{S}^\sigma]\!]_\sigma \subseteq \mathscr{S}^\varnothing$ □

A seguir veremos como elementos que são somas de quadrados podem ser codificados como matrizes positivas semidefinidas (p.s.d.) $Q \in \mathcal{F}_n^\sigma \times \mathcal{F}^{\sigma_n} \to \mathbb{R}$. Seja $0 \neq g \in \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$. Definimos o *grau* de g como $\deg g = \max\{|F| : g(F) \neq 0\}$. Para elementos $f \in \mathcal{A}^\sigma$ definimos o grau de f como o menor grau dentre todos os elementos

equivalentes a f, isto é, $\deg f = \min\{\deg g : f = g + K^\sigma, g \in \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma\}$. Defina também

$$\begin{aligned} v_{\sigma,n} : \mathcal{F}^\sigma &\to \mathcal{A}^\sigma \\ F &\mapsto F. \end{aligned}$$

Teorema 8.13. *Sejam $f \in \mathcal{A}^\sigma$ e $n \geq |\sigma|$. Para algum $t \geq 1$ existem existem elementos $g_1, \ldots, g_t \in \mathcal{A}^\sigma$, todos de grau no máximo n, tais que $f = g_1^2 + \cdots g_t^2$* se, e somente se *existe uma matriz p.s.d. $Q : \mathcal{F}_n^\sigma \times \mathcal{F}_n^\sigma \to \mathbb{R}$ tal que $f = v_{\sigma,n} Q v_{\sigma,n}$.*

Demonstração. Suponha que $f = g_1^2 + \cdots + g_t^2$ com $\deg g_i \leq n$. Usando a regra da cadeia, podemos expressar cada g_i como $g_i = \sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma} \alpha_{i,F'} F'$. Seja $c_i = (\alpha_{i,F'})_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma}$ o vetor de coeficientes tal que $g_i = c_i^t v_{\sigma,n}$. Temos

$$f = \sum_{i=1}^t g_i^2 = \sum_{i=1}^t (c_i^t v_{\sigma,n})^2 = \sum_{i=1}^t (v_{\sigma,n}^t c_i)(c_i^t v_{\sigma,n}) = \sum_{i=1}^t v_{\sigma,n} Q v_{\sigma,n},$$

onde $Q = \sum_{i=1}^t (c_i c_i^t)$ e, portanto, p.s.d.

Por outro lado, suponha que Q é uma matriz p.s.d. de posto t tal que $f = v_{\sigma_n}^t Q v_{\sigma,n}$. Então $Q = \sum_{i=1}^t c_i c_i^t$ para certos vetores de coeficientes c_i. Defina $g_i = c_i^t v_{\sigma,n}$. De modo análogo ao feito anteriormente, devemos ter $f = \sum_{i=1}^t g_i^2$. □

Fixe um tipo σ um inteiro $n \geq |\sigma|$ e seja $v = v_{\sigma,n}$. Considere o conjunto

$$\mathcal{C} := \{r + [\![v^t Q v]\!]_\sigma : Q \in \mathcal{F}_n^\sigma \times \mathcal{F}_n^\sigma \to \mathbb{R} \text{ p.s.d. e } r \in \mathscr{S}_n^\sigma\}.$$

Como o conjunto $\{v^t Q v : Q \in \mathcal{F}_n^\sigma \times \mathcal{F}_n^\sigma \to \mathbb{R} \text{ p.s.d.}\}$ é composto por elementos que são somas de quadrados (Teorema 8.13) e, portanto, pertencentes a $\mathscr{S}^\sigma$, segue do Teorema 8.12 que $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{S}^\varnothing$. Logo, podemos obter um limitante superior para $\mathrm{ex}(C, \mathcal{H})$ resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min\ & \lambda \\ \text{s.a. } & \lambda\varnothing - C = r + [\![v^t Q v]\!]_\sigma \\ & r \in \mathscr{S}^\varnothing \\ & Q \in \mathcal{F}_n^\sigma \times \mathcal{F}_n^\sigma \to \mathbb{R} \text{ p.s.d.} \end{aligned}$$

Dadas matrizes A, B definimos o produto inteiro $\langle A, B \rangle = A^t B$. Em particular, para todo vetor v vale que $v^t Q v = \langle v v^t, Q \rangle$. Logo, podemos reescrever $[\![v^t Q v]\!]_\sigma$ como

$$[\![v^t Q v]\!]_\sigma = [\![\langle v v^t, Q \rangle]\!]_\sigma = \langle [\![v v^t]\!], Q \rangle.$$

Fixe $N \geq n$ e seja (λ, Q, r) uma solução do problema de otimização acima. Toda flag $G \in \mathcal{F}_N^\varnothing$ deve satisfazer

$$p(\lambda\varnothing - C) = p(r; G) + \langle p([\![v v^t]\!]_\sigma; G), Q \rangle,$$

onde $p([\![v v^t]\!]_\sigma; G)$ é a matriz $(p([\![v v^t]\!](F, F'); G))_{F,F' \in \mathcal{F}_N^\varnothing}$. Como $p(r; G) \geq 0$, o seguinte

programa semidefinido fornece uma cota superior para $\mathrm{ex}(C;\mathcal{H})$.

$$\begin{aligned} &\min \lambda \\ &\text{s.a. } \lambda - p(C;G) \geq \left\langle p(\llbracket vv^t \rrbracket_\sigma; G), Q \right\rangle \quad \forall G \in \mathcal{F}_N^\sigma \\ &\qquad Q \in \mathcal{F}_n^\sigma \times \mathcal{F}_n^\sigma \to \mathbb{R} \text{ p.s.d.} \end{aligned} \tag{8}$$

Note que fixados σ, n, N, podemos obter computacionalmente cada matriz $p(\llbracket vv^t \rrbracket_\sigma; G)$ (para todo $G \in \mathcal{F}_N^\varnothing$) e então computar o valor do programa acima. Desta forma, obtemos cotas superiores para $\mathrm{ex}(C, \mathcal{H})$ de uma forma completamente mecânica.

8.5 Exemplo método semidefinido: Teorema de Mantel

Seja $\mathcal{H} =$  e $C =$  . Usaremos o programa 8 com $n = 2, N = 3$ e $\sigma =$  para obtener uma cota superior para $\mathrm{ex}($$, \{$  $\})$.

Temos $v = v_{\sigma,n} = \{$  , $\}$ e

$$\llbracket vv^t \rrbracket_\sigma = \left\llbracket \left(\quad \right) \right\rrbracket_\sigma = \left\llbracket \left(\quad \right) \right\rrbracket_\sigma = \left(\quad \right).$$

Agora podemos calcular as matrizes $p(\llbracket vv^t \rrbracket_\sigma; G)$ para todo $G \in \mathcal{F}_3^\varnothing = \{$  ,  ,  $\}$:

$$p(\llbracket vv^t \rrbracket_\sigma; \text{△}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p(\llbracket vv^t \rrbracket_\sigma; \text{△}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$p(\llbracket vv^t \rrbracket_\sigma; \text{△}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Também temos $p($$;$  $) = 0$, $p($$;$  $) = \frac{1}{3}$ e $p($$;$  $) = \frac{2}{3}$. Logo, o programa 8 neste caso particular é:

$$\begin{aligned} &\min \lambda \\ &\text{s.a. } \lambda \geq \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q \right\rangle \\ &\qquad \lambda - \frac{1}{3} \geq \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, Q \right\rangle \\ &\qquad \lambda - \frac{2}{3} \geq \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, Q \right\rangle \\ &\qquad Q \in \mathcal{F}_2^\sigma \times \mathcal{F}_2^\sigma \to \mathbb{R} \text{ p.s.d.} \end{aligned}$$

Uma solução ótima para esse problema é $\lambda = \frac{1}{2}, Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Neste caso, obtemos

uma solução que fornece a melhor cota possível para $\mathrm{ex}(\circ\!-\!\circ, \triangle) = \frac{1}{2}$.

9 Teorema de Erdős, Ginzburg e Ziv

◇ ◇ ◇ *Aula 16 (21 de Junho) — Yoshiharu Kohayakawa* ◇ ◇ ◇

Teorema 9.1 (Erdős, Ginzburg e Ziv 1964)**.** *Toda sequência de* $2n-1$ *inteiros contém uma subsequência de* n *elementos cuja soma é divisível por* n*.*

Veremos a seguir que o Teorema 9.1 segue da versão abaixo que se restringe ao caso em que n é primo.

Lema 9.2. *Seja* p *um inteiro primo. Toda sequência de* $2p-1$ *inteiros contém uma subsequência de* p *elementos cuja soma é divisível por* p*.*

Demonstração do Teorema 9.1. Usamos indução em n. Se $n = 1$, então o resultado é trivial. Suponha que $n > 1$ e que o teorema vale para inteiros menores que n. Seja $a_1, \dots, a_{2n-1}$ uma sequência dada e seja p um primo que divide n. Assumimos que $p < n$, caso contrário o resultado segue do Lema 9.2. Seja $m = n/p$.

A seguir, afirmamos que é possível encontrar conjuntos $I_1, \dots, I_{2m-1} \subseteq [2n-1]$ dois-a-dois disjuntos e todos de cardinalidade p tais que

$$b_j := \sum_{i \in I_j} a_i \equiv 0 \pmod{p}$$

para todo $j = 1, \dots, 2m-1$. De fato, suponha já definidos $I_1, \dots, I_l$, com $l < 2m-1$. Temos

$$\left| [2n-1] \setminus \bigcup_{j \le l} I_j \right| = 2n - 1 - lp \ge 2n - 1 - (2m-2)p = 2p - 1.$$

Logo, pelo Lema 9.2 existe $I_{l+1} \subseteq [2n-1] \setminus \bigcup_{j \le l} I_j$ tal que $b_{l+1} = \sum_{i \in I_{l+1}} \equiv 0 \pmod{p}$, como requirido.

Considere agora a sequência $(c_j)_{1 \le j \le 2m-1}$, onde $c_j := b_j/p$. Por hipótese de indução (em m) existe conjunto $J \subseteq [2m-1]$ de cardinalidade $|J| = m$ tal que $\sum_{j \in J} c_j \equiv 0 \pmod{m}$. Mas então basta considerar o conjunto $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Note que $|I| = |J|p = mp = n$. Ademais, temos

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i = p \sum_{j \in J} \frac{1}{p} \sum_{i \in I_j} a_i = p \sum_{j \in J} c_j \equiv 0 \pmod{n},$$

uma vez que $\sum_{j \in J} c_j \equiv 0 \pmod{m}$. □

A seguir veremos três provas para o Lema 9.2.

9.1 Primeira prova do Lema 9.2

Seja dada uma sequência $a_1, \dots, a_{2p-1}$. No que se segue supomos que

$$0 \le a_1 \le \cdots \le a_{2p-1} < p,$$

e trabalhamos sobre $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Se tivermos $a_i = a_{i+p-1}$, para algum $1 \le i \le p$, então a subsequência $a_i, \dots, a_{i+p-1}$ é tal que

$$a_i + \cdots + a_{i+p-1} = pa_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Assim, supomos $a_i \neq a_{i+p-1}$ para todo $1 \le i \le p$. Para todo $i = 1, 2, \dots, p-1$, defina $A_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}$ e

$$B_i = A_1 + \cdots + A_i,$$

onde definimos $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ (soma de Minkowski).

Afirmamos que $|B_i| \ge i + 1$ para todo $i = 1, 2 \dots, p-1$. De fato, como $|B_{i+1}| \ge |B_i|$ para todo i, se a afirmação não for válida deve existir algum $k < p-1$ tal que $|B_k| = |B_{k+1}|$. Por simplicidade, ponha $B = B_k$ e $A_{k+1} = \{c, d\}$. Como $|B_{k+1}| = |B|$ e $B_{k+1} = (B + c) \cup (B + d)$, devemos ter $B + c = B + d$. Seja $C = B + c$. Note que C é invariante por somar $e := d - c$. Em geral temos

$$C = C + e = C + 2e = \dots C + (p-1)e.$$

Mas como $e \neq 0$, segue que $C = \mathbb{Z}_p$.

Agora, como $|B_i| \ge i + 1$, então $B_{p-1} = \mathbb{Z}_p$. Em particular, $-a_{2p-1} \in B_{p-1}$. Logo existem índices $k_i \in \{i, i + p - 1\}$ (para $i = 1, 2 \dots, p-1$) tais que

$$-a_{2p-1} \equiv a_{k_1} + \cdots + a_{k_{p-1}} \pmod{p},$$

isto é,

$$a_{k_1} + \cdots + a_{k_{p-1}} + a_{2p-1} = 0 \pmod{p},$$

como desejado. □

9.2 Segunda prova do Lema 9.2

Seja

$$S = \sum_{\substack{I \subseteq [2p-1] \\ |I| = p}} \left(\sum_{i \in I} a_i \right)^{p-1}.$$

Podemos expressar S como uma soma de monômios (considerando que cada a_i é uma indeterminada) da forma

$$c_{\boldsymbol{k}} \prod_{i \in [2p-1]} a_i^{k_i}$$

onde $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_{2p-1})$ é tal que $\sum_{i=1}^{2p-1} k_i = p - 1$ e $1 \le |\boldsymbol{k}| \le p - 1$, onde $|\boldsymbol{k}| := \#\{i : k_i \neq 0\}$ denota o número de entradas não-nulas de $\boldsymbol{k}$.

Fixe $\boldsymbol{k}$ e seja $\ell = |\boldsymbol{k}|$. Observe que os conjuntos I que contribuem para $c_{\boldsymbol{k}}$ são aqueles que satisfazem $I \supseteq \operatorname{supp}(\boldsymbol{k})$, onde $\operatorname{supp} \boldsymbol{k} = \{i : k_i > 0\}$ denota o conjunto das entradas não-nulas de $\boldsymbol{k}$. É fácil ver que o número de tais conjuntos I satisfaz

$$\#\{I : I \supseteq \operatorname{supp} \boldsymbol{k}\} = \binom{2p - 1 - \ell}{p - \ell}$$

e que tais conjuntos I contribuem, todos, com a mesma quantidade para cada $c_{\boldsymbol{k}}$. Logo

todo c_k é múltiplo de $\binom{2p-1-\ell}{p-\ell}$. Mas como

$$\binom{2p-1-\ell}{p-\ell} = \frac{(2p-1)(2p-2)\cdots p}{(p-l)\cdots 1},$$

segue que $p|c_k$ e, portanto, que $S \equiv 0 \pmod{p}$.

Por outro lado, suponha por absurdo que a conclusão do Lema 9.2 seja falsa. Então para todo $I \subseteq [2p-1]$ com $|I| = p$ temos $\sum_{i\in I} a_i \not\equiv 0 \pmod{p}$. Logo, pelo Pequeno Teorema de Fermat devemos ter

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

o que implica

$$S = \sum_{\substack{I\subseteq[2p-1]\\|I|=p}} 1 = \binom{2p-1}{p} \equiv \binom{1}{1}\binom{p-1}{0} \equiv 1 \pmod{p},$$

contradizendo o fato que $S = 0$. □

Nesta prova, faremos uso do seguinte resultado.

Lema 9.3 (Chevalley, Warning)**.** *Seja p um inteiro primo e considere o seguinte sistema de n equações sobre $\mathbb{Z}_p$, no qual $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são polinômios de m variáveis de grau $r_1, \ldots r_j$, respectivamente.*

$$\begin{aligned} P_1(X_1, \ldots, X_m) &= 0\\ P_2(X_1, \ldots, X_m) &= 0\\ &\vdots\\ P_n(X_1, \ldots, X_m) &= 0. \end{aligned}$$

Se $m > \sum_{j=1}^{n} r_j$, então o número N de soluções desse sistema satisfaz $N \equiv 0 \pmod{p}$.

Demonstração do Teorema **??**. Sejam dados $a_1, \ldots, a_{2p-1}$. Queremos provar que existe $I \subseteq [2p-1]$, $|I| = p$, tal que $\sum_{i\in I} a_i \equiv 0 \pmod{p}$. Consideramos os seguintes dois polinômios:

$$\begin{aligned} P_1(X_1, \ldots, X_{2p-1}) &= \sum_{i=1}^{2p-1} X_i^{p-1}\\ P_2(X_1, \ldots, X_{2p-1} &= \sum_{i=1}^{2p-1} a_i X_i^{p-1} \end{aligned}$$

Cada um desses polinômios têm $2p-1$ variáveis e grau $p-1$, da onde segue que podemos aplicar o Lema 9.3 para concluir que o número N de soluções do sistema $P_1 = P_2 = 0$ em $(\mathbb{Z}_p)^{2p-1}$ satisfaz $N = 0 \pmod{p}$. Claramente $x_1 = \cdots = x_{2p-1} = 0$ é uma solução. Portanto o sistema admite uma uma segunda solução $(z_1, \ldots, z_{2p-1}) \in (\mathbb{Z}_p^{2p-1})$.

Seja $I = \{i : z_i \neq 0\} \neq 0$. Pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $z_i^{p-1} \equiv 1$

mod p se $i \in I$. Logo

$$0 \equiv P_1(z_1, \ldots, z_{2p-1}) = \sum_{i \in I} 1 = |I| \pmod{p},$$

da onde segue que $|I| = p$. Ademais, também temos

$$0 \equiv P_2(z_1, \ldots, z_{2p-1}) = \sum_{i \in I} a_i z_i^{p-1} = \sum_{i \in I} a_i,$$

como desejado. □

9.3 Prova do Lema de Chevalley-Warning

Lema 9.4. *Seja $p > 2$ um primo e*

$$S_r = 0^r + 1^r + \cdots + (p-1)^r = \sum_{k=0}^{p-1} k^r \quad r = 0, 1, \ldots, p-2.$$

Então

1. $$T_r := \binom{r+1}{1} S_r + \binom{r+1}{S}_{r+1} + \cdots + \binom{r+1}{r} S_1 = p^{r+1} - p \quad r = 0, 1, \ldots, p-2 \text{ e}$$

2. $$S_r \equiv 0 \ (mod\ p), \quad r = 0, 1, \ldots, p-2.$$

Demonstração. 1. Temos

$$\sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} S_{r+1-l} = \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} S_l = \sum_{l=0}^{r+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{r+1}{l} k^l = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r+1}{l} k^l = \sum_{k=0}^{p-1} (1+k)^{r+1}.$$

Assim

$$\binom{r+1}{0} S_{r+1} + T_r + \binom{r+1}{r+1} S_0 = S_{r+1} + p_{r+1},$$

o que implica $p^{r+1} = p$.

2. Usamos indução em r. Para $r = 0$, temos $S_0 = p \equiv 0 \pmod{p}$ e para $r = 1$ temos $\binom{2}{1} S_1 = p^2 - p \equiv 0 \pmod{p}$. Fixe $r > 1$ e suponha que a afirmação é válida para $r - 1$. Temos

$$T_r = \binom{r+1}{1} S_r + \underbrace{\binom{r+1}{2} S_{r-1} + \cdots + \binom{r+1}{r} S_1}_{\equiv 0 \pmod{p}} \equiv 0 \pmod{p}$$

e $\binom{r+1}{1} = r + 1 \leq p - 1$. Portanto $S_r \equiv 0 \pmod{p}$.

□

Demonstração do Lema 9.3. Primeiro note que

$$N \equiv \sum_{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{Z}_p^m} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - P_j(x_1,\ldots,x_m)^{p-1}\right) \pmod{p}, \tag{9}$$

uma vez que $P_j(x_1,\ldots,x_m)^{p-1}$ é congruente a 0 se $(x_1,\ldots,x_m)$ for raiz de P_j e congruente a 1 caso contrário.

Seja $\mu(X_1,\ldots,X_m)$ um monômio obtido após a expansão do produto

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 - P_j(X_1,\ldots,X_m)^{p-1}\right).$$

Temos $\mu_(X_1,\ldots,X_m) = \prod_{i=1}^{m} X_i^{k_i}$, para alguns inteiros $k_1,\ldots,k_m$. Observe que

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \le \sum_{j=1}^{n} r_j(p-1) < (p-1)m$$

e que, portanto, existe algum i tal que $k_i < p-1$. Assim, $\mu(X_1,\ldots,X_m) = X_i^{k_i} \prod_{j\neq i} X_j^{k_j}$, com $k_i < p-1$. A soma do lado direito da Equação 9 é constituída de parcelas da forma

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_m)} x_i^{k_i} \prod_{j\neq i} x_j^{k_j} = \underbrace{\left(\sum_{x_i\in Z_p} x_i^{k_i}\right)}_{\equiv 0 \text{(Lema)}} \left(\sum \prod x_j^{k_j}\right) \equiv 0 \pmod{p},$$

isto é, $N \equiv 0 \pmod{p}$. □

9.4 Generalizações do Teorema de Erdős, Ginzburg e Ziv

O Teorema de Erdős, Ginzburg e Ziv pode ser generalizado para elementos de duas dimensões da seguinte forma.

Conjectura 9.5 (Kemntiz). *Sejam $a_1,\ldots,a_{4n-3}$ elementos em $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n^2$. Então existe um conjunto $I \subseteq \{1,\ldots,4n-3\}$ de cardinalidade $|I| = n$ tal que*

$$\sum_{i\in I} a_i = 0 \qquad \text{em } \mathbb{Z}_n^2.$$

A conjectura de Kemntiz foi provada por Reiher, usando o Teorema de Chevalley-Warning.

Também é possível generalizar o Teorema de Erdős,Ginzburg e Ziv para uma dimensão d. Seja

$s_{n,d}$ = menor inteiro t tal que toda sequência $a_1,\ldots,a_t \in \mathbb{Z}_n^d$ contém n membros cuja soma é $0 \in \mathbb{Z}$

Não é difícil ver que devemos ter

$$2^d(n-1) < s(n,d) \le (n-1)n^d + 1.$$

De fato, para obter a cota inferior basta considerar uma sequência contendo $n-1$ cópias de cada um dos 2^d vértices do hipercubo de dimensão d. Para a cota superior, note que cada elemento de $\mathbb{Z}_n^d$ aparece, em média, $\frac{(n-1)n^d+1}{n^d} > n-1$ vezes em uma sequência de $(n-1)n^d+1$ elementos. Logo, algum elemento aparece (pelo menos) n vezes na sequência. Alon e Dudiner mostraram que é possível obter uma cota superior bem melhor para $s(n,d)$.

Teorema 9.6 (Alon, Dudiner)**.** *Para todo inteiro d existe uma constante c_d tal que $s(n,d) \leq c_d n$* □

O resultado acima é relevante apenas para o caso em que consideramos d fixo e $n \to \infty$. Também faz sentido pensar no caso em que n está fixo e $d \to \infty$. Por exemplo,