

# Notas das reuniões do PICME

## Primeiro semestre de 2014

Leonardo Nagami Coregiano

26 de julho de 2014

### Sumário

<b>1</b>	<b>Alguns Problemas Combinatórios</b>	<b>2</b>
1.1	Conjuntos Equiintersectantes . . . . .	2
1.2	Retas Equiangulares . . . . .	3
1.3	Pontos Equidistantes . . . . .	4
1.4	Partições Judiciosas . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Teoria Extremal dos Conjuntos</b>	<b>8</b>
2.1	Conjuntos $L$ -intersectantes . . . . .	8
2.2	Aplicações ao Número Cromático de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Coloração e Preenchimento de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>16</b>
3.1	Número Cromático Mensurável de $\mathbb{R}^n$ e Densidade Superior . . . . .	16
3.2	Análise Harmônica . . . . .	20
3.3	Análise Harmônica Aplicada à Densidade Superior . . . . .	25
3.4	Uma Nova Cota para Densidade Superior . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Lema de Sperner e Aplicações</b>	<b>33</b>
4.1	Combinações afins . . . . .	34
4.2	O Lema de Sperner . . . . .	36
4.3	Aplicações do Lema de Sperner . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Paridade em Grafos e Aplicações</b>	<b>42</b>
5.1	Problema da Mansão . . . . .	42
<b>A</b>	<b>Soluções dos exercícios resolvidos</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Notação</b>	<b>61</b>
	<b>Índice de palestrantes</b>	<b>62</b>
	<b>Índice de nomes</b>	<b>63</b>
	<b>Referências</b>	<b>64</b>

# 1 Alguns Problemas Combinatórios

18/03/2014 – Yoshiharu Kohayakawa

Os problemas das próximas três subseções são baseados em [6].

## 1.1 Conjuntos Equiintersectantes

O problema abaixo trata de conjuntos com intersecções dois-a-dois todas do mesmo tamanho.

**Problema 1.1.1.** Dado  $N \in \mathbb{N}$ , qual é o maior natural  $c(N)$  tal que existem conjuntos distintos não-vazios  $C_1, C_2, \dots, C_{c(N)} \subset [N]$  e um  $k > 0$  tais que  $|C_i \cap C_j| = k$  para todos  $i, j \in [c(N)]$  com  $i \neq j$ ?

Considerando a família  $\{\{1, k\} : k \in [N]\}$ , temos trivialmente a cota  $c(N) \geq N$ . A Desigualdade de Fisher prova que esse é o valor exato de  $c(N)$ .

**Teorema 1.1.2** (Desigualdade de Fisher). Se  $C_1, C_2, \dots, C_n \subset [N]$  são distintos e tais que  $|C_i \cap C_j| = t > 0$  para um  $t$  fixo, então  $n \leq N$ .

Antes de provar esse teorema, lembramos a definição de matrizes positivas semidefinidas e positivas definidas; e provamos um pequeno lema.

**Definição 1.1.3.** Uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dita *positiva semidefinida* (denotamos esse fato por  $A \succeq 0$ ) se, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos  $x^t A x \geq 0$ .

Ademais, se, para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , temos  $x^t A x > 0$ , então  $A$  é dita *positiva definida* (denotamos esse fato por  $A \succ 0$ ).

**Exercício resolvido 1.1.4.** Toda matriz positiva definida é diagonalizável.

**Lema 1.1.5.** Se  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz diagonal com todas as suas entradas da diagonal positivas e  $t \geq 0$ , então  $D + t\mathbb{J}_n \succ 0$  ( $\mathbb{J}_n$  é uma notação padrão para a matriz  $n \times n$  com todas as entradas 1).

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e observe que

$$\begin{aligned} x^t(D + t\mathbb{J}_n)x &= x^t D x + t x^t \mathbb{J}_n x = \sum_{i \in [n]} D_{ii} x_i^2 + t \sum_{i, j \in [n]} x_i x_j \\ &= \underbrace{\sum_{i \in [n]} \overbrace{D_{ii} x_i^2}^{>0}}_{>0} + t \underbrace{\left( \sum_{i \in [n]} x_i \right)^2}_{\geq 0} > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Demonstração do Teorema 1.1.2.* Considere os vetores característicos dos conjuntos (i.e., para um conjunto  $A \subset [N]$ , defina  $\chi_A \in \mathbb{R}^N$  como o vetor tal que  $\chi_A(i) = \mathbb{1}_{\{i \in A\}}$  para todo  $i \in [N]$ ).

Seja  $A \in \mathbb{R}^{N \times n}$  a matriz que possui cujas colunas são  $\chi_{C_1}, \chi_{C_2}, \dots, \chi_{C_n}$  e seja  $B = A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Observe que, para todos  $i, j \in [n]$ , temos

$$B_{ij} = |C_i \cap C_j| = \begin{cases} |C_i|, & \text{se } i = j; \\ t, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Caso 1. Algum dos conjuntos  $C_i$  possui cardinalidade  $t$ . Sem perda de generalidade, supomos  $|C_1| = t$ .

Então  $\{C_i \setminus C_1 : i \in [N] \setminus 1\}$  forma uma partição de  $[N] \setminus C_1$ , logo temos  $n - 1 \leq N - t$  e como  $t \geq 1$ , concluímos que  $n \leq N$ .

Caso 2. Todos os conjuntos  $C_i$  possuem cardinalidade maior que  $t$ .

Então, pelo Lema 1.1.5, sabemos que  $B$  é positiva definida. Ademais, pelo Exercício 1.1.4, temos que posto  $B = n$ .

Por outro lado, da definição de  $B$ , temos posto  $B \leq$  posto  $A \leq N$ . Concluímos então que  $n \leq N$ .  $\blacksquare$

Abaixo enunciamos duas generalizações do Problema 1.1.1.

**Problema 1.1.6.** Dados  $s, N \in \mathbb{N}$ , qual é o maior natural  $c(s, N)$  tal que existem conjuntos distintos não-vazios  $C_1, C_2, \dots, C_{c(N)} \subset [N]$  e um conjunto  $S \subset \mathbb{N}^*$  com  $|S| = s$  tais que  $|C_i \cap C_j| \in S$  para todos  $i, j \in [c(N)]$  com  $i \neq j$ ?

**Problema 1.1.7** (Conjuntos Quase-disjuntos). Uma família  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  é dita quase-disjunta se para todos  $A, B \in \mathcal{C}$  distintos temos que  $A \cap B$  é finito.

Quão grande pode ser uma família quase-disjunta?

## 1.2 Retas Equiangulares

O problema abaixo trata de retas duas-a-duas formando o mesmo ângulo.

**Problema 1.2.1.** Dado  $d \in \mathbb{N}$ , qual é o maior natural  $r(d)$  tal que existem retas  $r_1, r_2, \dots, r_{r(d)} \subset \mathbb{R}^d$ , todas passando pela origem e um  $\theta \in (0, \pi/2]$  tais que o ângulo agudo entre quaisquer duas dessas retas distintas é  $\theta$ ?

Trivialmente, tomando as retas definidas por uma base ortonormal, temos  $d$  retas equiangulares, logo  $r(d) \geq d$ .

Para  $d = 2$ , podemos tomar três retas passando pela origem de forma que  $\theta = \pi/3$  (Figura 1).

Para  $d = 3$ , podemos tomar as quatro retas que ligam a origem a vértices de um tetraedro regular centrado na origem (Figura 2).

No caso  $d = 3$ , podemos fazer algo ligeiramente melhor considerando as seis retas que ligam os pólos de um icosaedro regular centrado na origem (Figura 3).

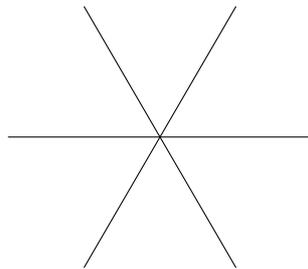


Figura 1: Construção das três retas equiangulares no plano.

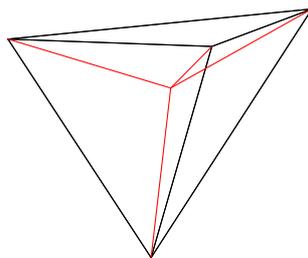


Figura 2: Construção das quatro retas equiangulares usando o tetraedro.

O teorema abaixo fornece uma cota superior para  $r(d)$ .

**Teorema 1.2.2.** Se  $\theta \in (0, \pi/2]$  e  $r_1, r_2, \dots, r_n \subset \mathbb{R}^d$  são retas passando pela origem tais que o ângulo agudo entre quaisquer duas dessas retas distintas é  $\theta$ , então  $n \leq \binom{d+1}{2}$ .

*Demonstração.* Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$  vetores unitários que definem as retas  $r_1, r_2, \dots, r_n$  respectivamente. Sabemos que

$$|\langle v_i, v_j \rangle| = \begin{cases} \cos \theta, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

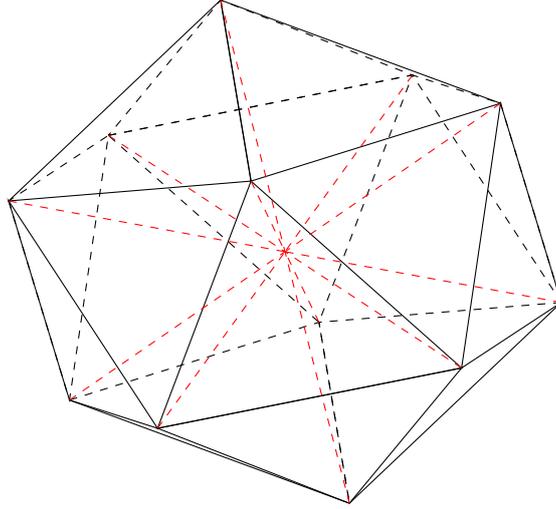


Figura 3: Construção das seis retas equiângulas usando o icosaedro.

Vamos mostrar que o conjunto  $S = \{v_i v_i^t : i \in [n]\}$  é linearmente independente em  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . Suponha que  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  é tal que  $\sum_{i \in [n]} a_i v_i v_i^t = 0$ , então, para todo  $j \in [n]$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= v_j^t \left( \sum_{i \in [n]} a_i v_i v_i^t \right) v_j = \sum_{i \in [n]} a_i v_j^t v_i v_i^t v_j \\ &= \sum_{i \in [n]} a_i (v_j^t v_i)^2 = a_j + \sum_{\substack{i \in [n]: \\ i \neq j}} a_i \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Mas isso corresponde ao sistema  $((1 - \cos^2 \theta)\mathbb{I}_n + \cos^2 \theta \mathbb{J}_n)a = 0$  e como  $\cos^2 \theta < 1$ , pelo Lema 1.1.5 e pelo Exercício 1.1.4, temos que a única solução é  $a = 0$ , pois a matriz do sistema é diagonalizável. Portanto  $S$  é linearmente independente.

Observe agora que  $S$  está no subespaço das matrizes simétricas  $d \times d$ , cuja dimensão é  $d + \binom{d}{2} = \binom{d+1}{2}$ , logo  $n \leq \binom{d+1}{2}$ . ■

**Corolário 1.2.3.** Temos  $r(2) = \binom{3}{2} = 3$  e  $r(3) = \binom{4}{2} = 6$ .

**Exercício 1.2.4.** Encontrar exemplos que certifiquem  $r(d) \geq 2014d$  ou  $r(d) \geq d \log d$ , para  $d$  suficientemente grande.

### 1.3 Pontos Equidistantes

O problema abaixo trata de pontos dois-a-dois equidistantes.

**Problema 1.3.1.** Dado um número natural  $d \in \mathbb{N}$ , qual é o maior natural  $p(d)$  tal que existem pontos distintos  $p_1, p_2, \dots, p_{p(d)} \subset \mathbb{R}^d$ , dois-a-dois equidistantes (na distancia euclideana)?

Considerando um hipertetraedro regular (i.e., em  $\mathbb{R}^2$ , um triângulo equilátero; em  $\mathbb{R}^3$  um tetraedro regular; etc.), conseguimos  $d + 1$  pontos equidistantes. Logo  $p(d) \geq d + 1$ .

O teorema abaixo prova que esse é o valor exato de  $p(d)$ .

**Teorema 1.3.2.** Se  $p_1, p_2, \dots, p_n \subset \mathbb{R}^d$  são pontos distintos dois-a-dois equidistantes (na distancia euclideana), então  $n \leq d + 1$ .

*Demonstração.* Para facilitar a demonstração, vamos considerar que os pontos são  $p_0, p_1, \dots, p_m$  e vamos provar que  $m + 1 \leq d + 1$ .

Sem perda de generalidade, supomos que  $p_0 = 0$  e que  $\|p_i\| = 1$  para todo  $i \in [m]$  (basta fazer uma translação e uma dilatação).

Considere a matriz de Gram  $G$  de  $p_1, p_2, \dots, p_m$  (i.e., a matriz tal que  $G_{ij} = \langle p_i, p_j \rangle$  para todos  $i, j \in [m]$ ) e observe que

$$G_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j; \end{cases}$$

onde o primeiro caso segue do fato que  $(p_0, p_i, p_j)$  forma um triângulo equilátero.

Isso significa que  $G = (1/2)\mathbb{I}_m + (1/2)\mathbb{J}_m$ , então, pelo Lema 1.1.5 e pelo Exercício 1.1.4, temos que  $\text{posto}(G) = m$ .

Por outro lado, temos que  $G = A^t A$ , onde  $A$  é a matriz cujas colunas são  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Logo temos  $\text{posto}(G) \leq \text{posto}(A) \leq d$  e, portanto, temos  $m + 1 \leq d + 1$ . ■

Abaixo enunciamos uma generalização do Problema 1.3.1.

**Problema 1.3.3.** Dado  $d \in \mathbb{N}$  e uma métrica  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^d$ , qual é o maior natural  $p(d)$  tal que existem pontos distintos  $p_1, p_2, \dots, p_{p(d)} \subset \mathbb{R}^d$ , dois-a-dois equidistantes (onde a distância é definida como  $d(p, q) = \|p - q\|$ )?

## 1.4 Partições Judiciosas

25/03/2014 – Yoshiharu Kohayakawa

O problema abaixo trata de partições judiciosas.

**Problema 1.4.1.** Sejam  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$  pontos do plano. Será que existe um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que toda reta que passa por  $p$  define dois semiplanos fechados com pelo menos  $n/3$  dos  $p_i$ 's?

Primeiramente, observemos que não podemos pedir mais do que  $n/3$  pois se  $p_1, p_2, p_3$  formarem um triângulo, então para todo ponto  $p$  haverá uma reta que passa por  $p$  que deixa no máximo um ponto em um dos semiplanos fechados por ela definidos. Mais geralmente, podemos colocar mais pontos arbitrariamente próximos dos vértices desse triângulo e manter essa propriedade para qualquer  $n \geq 3$ .

No caso do triângulo, escolher  $p$  fora do mesmo é claramente uma péssima escolha, pois há uma reta que define um semiplano fechado sem nenhum dos  $p_i$ 's. Para valores de  $n$  maiores, a escolha péssima de  $p$  será fora do fecho convexo do conjunto, que definiremos a seguir.

**Definição 1.4.2.** Um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é dito *convexo* se para todos  $x, y \in X$ , temos  $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subset X$  (o conjunto  $[x, y]$  é chamado de *segmento de reta* com pontas  $x$  e  $y$ ).

Abaixo enunciamos uma propriedade de conjuntos convexos como exercício.

**Exercício resolvido 1.4.3.** Se  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  é uma família de conjuntos convexos, então  $A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$  é um conjunto convexo.

O Exercício 1.4.3 torna natural a definição abaixo.

**Definição 1.4.4.** Dado um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , o *fecho convexo* de  $X$  (denotado por  $\text{conv}(X)$ ) é o menor conjunto convexo que contém  $X$ , mais formalmente, definimos

$$\text{conv}(X) = \bigcap_{\substack{C \subset \mathbb{R}^n: \\ C \text{ é convexo e } C \supset X}} C.$$

A noção de segmento de reta também pode ser generalizada para mais de dois pontos.

**Definição 1.4.5.** Uma *combinação convexa* de  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  é um ponto da forma

$$x = \sum_{i \in [m]} \lambda_i x_i,$$

com  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $i \in [m]$  e  $\sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1$ .

O exercício abaixo mostra uma outra caracterização do fecho convexo.

**Exercício resolvido 1.4.6.** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} \text{conv}(X) &= \{x : x \text{ é combinação convexa de pontos de } X\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in [m]} \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}^*; \forall i \in [m], x_i \in X \text{ e } \lambda_i \in [0, 1]; \sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

A seguir enunciamos um teorema muito útil sobre conjuntos convexos.

**Teorema 1.4.7 (Radon).** Se  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\} \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto com  $n + 2$  pontos, então existem  $I, J \subset [n + 2]$  disjuntos tais que  $\text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\} \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, supomos  $x_{n+2} = 0$ .

Como  $X' = X \setminus \{x_{n+2}\}$  é um conjunto com  $n + 1$  elementos em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $X'$  é linearmente dependente, ou seja, existem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que  $\sum_{i \in [n+1]} \lambda_i x_i = 0$ .

Seja  $\lambda_{n+2} = -\sum_{i \in [n+1]} \lambda_i$  e observe que  $\sum_{i \in [n+2]} \lambda_i = 0$ .

Defina  $I = \{i \in [n + 2] : \lambda_i > 0\}$  e  $J = \{j \in [n + 2] : \lambda_j < 0\}$ . Temos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i x_i &= \sum_{j \in J} (-\lambda_j) x_j; \text{ e} \\ \sum_{i \in I} \lambda_i &= \sum_{j \in J} (-\lambda_j). \end{aligned}$$

Sejam  $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$  e

$$x = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \sum_{j \in J} \frac{-\lambda_j}{\lambda} x_j.$$

Como  $\sum_{i \in I} \lambda_i / \lambda = \sum_{j \in J} -\lambda_j / \lambda$ , temos que  $x \in \text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\}$ . ■

A partir do Teorema 1.4.7 podemos derivar uma outra caracterização de fecho convexo.

**Exercício resolvido 1.4.8 (Teorema de Carathéodory).** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} \text{conv}(X) &= \{x : x \text{ é combinação convexa de } n + 1 \text{ pontos de } X\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i x_i : \forall i \in [n + 1], x_i \in X \text{ e } \lambda_i \in [0, 1]; \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Abaixo enunciamos algumas propriedades muito úteis sobre fechos convexos como um exercício.

**Exercício resolvido 1.4.9.** Seja  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

- i. Se  $X$  é limitado, então  $\text{conv}(X)$  é limitado;
- ii. Se  $X$  é compacto, então  $\text{conv}(X)$  é compacto.

O teorema a seguir trata de intersecções de conjuntos convexos.

**Teorema 1.4.10 (Helly).** Se  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\} \subset \mathcal{P}(X)$  é uma coleção finita de subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  tal que quaisquer  $n + 1$  conjuntos de  $\mathcal{C}$  possuem intersecção não-vazia, então temos  $\bigcap_{i \in [m]} C_i \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Provaremos o teorema por indução em  $m$ .

Se  $m \leq n + 1$ , a asserção é trivial. Suponha então  $m > n + 1$  e a asserção válida para  $m - 1$ .

Para todo  $i \in [m]$ , seja  $x_i \in \bigcap_{j \in [m] \setminus \{i\}} C_j$  (tal  $x_i$  existe por hipótese indutiva para a coleção  $\{C_j : j \in [m] \setminus \{i\}\}$ ).

Pelo Teorema 1.4.7, existem  $I, J \subset [m]$  tais que  $\text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\} \neq \emptyset$  e, sem perda de generalidade, temos  $I \cup J = [m]$ .

Observe que, para todos  $k, l \in [m]$  distintos, temos  $x_k \in C_l$ . Isso significa que, para todos  $i \in I$  e  $j \in J$ , temos  $x_i \in C_j$  e  $x_j \in C_i$ , logo temos

$$\text{conv}\{x_i : i \in I\} \subset \bigcap_{j \in J} C_j; \text{ e } \text{conv}\{x_j : j \in J\} \subset \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Portanto temos  $\emptyset \neq \text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\} \subset \bigcap_{k \in [m]} C_k$ .  
O resultado segue então por indução. ■

O teorema acima não pode ser generalizado para uma família infinita enumerável de conjuntos. Isso pode ser observado com a família  $\mathcal{C} = \{[i, +\infty) : i \in \mathbb{N}\}$ , cuja intersecção é vazia, mas cujas subfamílias finitas possuem intersecções não-vazias.

Porém, adicionando apenas uma hipótese o resultado torna-se válido. Enunciamos tal generalização no exercício abaixo.

**Exercício resolvido 1.4.11** (Generalização do Teorema de Helly). Se  $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(X)$  é uma coleção infinita enumerável de subconjuntos convexos e compactos de  $\mathbb{R}^n$  tal que quaisquer  $n + 1$  conjuntos de  $\mathcal{C}$  possuem intersecção não-vazia, então temos  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$ .

Agora estamos em condições de atacar o Problema 1.4.1.

**Teorema 1.4.12.** Se  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$  são pontos do plano, então existe um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que toda reta que passa por  $p$  define dois semiplanos fechados com pelo menos  $n/3$  dos  $p_i$ 's.

*Demonstração.* Seja  $K = \text{conv}\{p_i : i \in [n]\}$  e seja  $\mathcal{H} = (H_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  a coleção dos semiplanos fechados de  $\mathbb{R}^2$  que contêm estritamente mais do que  $2n/3$  dos  $p_i$ 's.

Defina também, para todo  $\gamma \in \Gamma$ , o conjunto  $K_\gamma = K \cap H_\gamma$ .

Observe que, como  $\{p_i : i \in [n]\}$  é compacto, então  $K$  é compacto e convexo e, portanto, todos os  $K_\gamma$  são compactos e convexos.

Sejam  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$  e observe que

$$\left| \bigcap_{i=1}^3 K_{\gamma_i} \right| \geq n - \sum_{i=1}^3 |[n] \setminus K_{\gamma_i}| > n - \sum_{i=1}^3 \frac{n}{3} = 0,$$

logo  $\bigcap_{i=1}^3 K_{\gamma_i} \neq \emptyset$ .

Pelo Exercício 1.4.11, sabemos que existe  $p \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$ . Vamos mostrar que  $p$  satisfaz a propriedade requerida.

Suponha que não, isto é, suponha que existe uma reta  $r$  que passa por  $p$  e um dos semiplanos fechados definido por ela possui estritamente menos que  $n/3$  dos  $p_i$ 's (Figura 4).

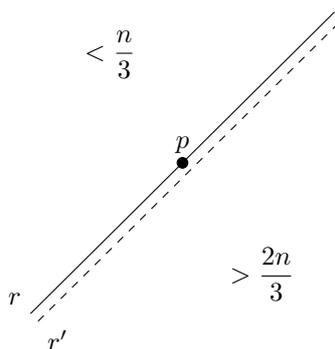


Figura 4: Redução a absurdo caso o ponto  $p$  não satisfaça a condição do teorema.

Como a coleção  $C$  dos  $p_i$ 's fora desse semiplano fechado tem distância  $d$  positiva a  $r$ , podemos considerar uma reta  $r'$  paralela a  $r$  e distando  $d/2$  à coleção  $C$ .

O semiplano fechado definido por  $r'$  do lado de  $C$  contém todos os pontos de  $C$ , que são estritamente mais que  $2n/3$  dos  $p_i$ 's mas não contém  $p$ , o que contradiz sua escolha. ■

Abaixo enunciamos alguns exercícios relacionados aos tópicos dessa subseção.

**Exercício 1.4.13** (Generalização do Teorema 1.4.12). Prove que se  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$  pontos de  $\mathbb{R}^d$ , então existe um ponto  $p \in \mathbb{R}^d$  tal que toda reta que passa por  $p$  define dois semiespaços fechados com pelo menos  $n/(d+1)$  dos  $p_i$ 's.

**Exercício 1.4.14.** Encontre um conjunto  $X \in \mathbb{R}^2$  fechado tal que  $\text{conv}(X)$  não é fechado. O que acontece com  $\text{conv}(X)$  se  $X$  é um fechado em  $\mathbb{R}$ ?

## 2 Teoria Extremal dos Conjuntos

08/04/2014 – Fabrício Caluza Machado

Entendemos por teoria extremal dos conjuntos o estudo do tamanho de sistemas de conjuntos satisfazendo certas propriedades. Alguns problemas típicos de teoria extremal dos conjuntos são os Problemas 1.1.1 e 1.1.6 da seção anterior. Aprofundaremos agora o estudo desses problemas.

### 2.1 Conjuntos $L$ -intersectantes

Os teoremas e demonstrações desta subseção são baseados em [2].

Relembramos primeiramente o Teorema 1.1.2 sobre o Problema 1.1.1.

**Teorema** (Desigualdade de Fisher). (1.1.2) Se  $C_1, C_2, \dots, C_n \subset [N]$  são distintos e tais que  $|C_i \cap C_j| = t > 0$  para um  $t$  fixo, então  $n \leq N$ .

A ideia da demonstração do Teorema acima era considerar o espaço vetorial  $\{0, 1\}^N$  e as funções indicadoras dos conjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  e encontrar um conjunto linearmente independente nesse espaço vetorial relacionado às funções e dessa forma saberemos que tal conjunto não pode possuir mais elementos que a dimensão do espaço vetorial.

Estamos interessados agora em estudar o Problema 1.1.6, então começaremos com algumas definições que nos auxiliarão.

**Definição 2.1.1** (Famílias uniformes e famílias intersectantes). Seja  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([n])$  uma família de subconjuntos de  $[n]$  e sejam  $L \subset \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{N}$ .

Dizemos que  $\mathcal{F}$  é  $k$ -uniforme se, para todo  $F \in \mathcal{F}$ , temos  $|F| = k$ .

Por brevidade, dizemos que  $\mathcal{F}$  é uniforme se existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{F}$  é  $k_0$  uniforme;

Dizemos que  $\mathcal{F}$  é  $L$ -intersectante se, para todos  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  distintos, temos  $|F_1 \cap F_2| \in L$ .

Ao longo das demonstrações a seguir, faremos um pequeno abuso de notação: se  $A$  é um subconjunto de  $[n]$ , usaremos  $A$  para denotar tanto o conjunto em questão como o vetor característico de  $A$  em  $\{0, 1\}^n$  (i.e., o vetor que possui entradas 1 exatamente nas coordenadas correspondentes aos elementos de  $A$ ). Lembramos que uma propriedade essencial de tais vetores era  $\langle A, B \rangle = |A \cap B|$  para todos  $A, B \subset [n]$ .

O exercício a seguir é um resultado simples de álgebra linear.

**Exercício resolvido 2.1.2.** Se  $f_1, f_2, \dots, f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções e  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$  são tais que a matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por  $M_{ij} = f_i(a_j)$  para todos  $i, j \in [n]$  é não-singular, então  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são linearmente independentes.

O seguinte teorema fornece uma cota para o Problema 1.1.6.

**Teorema 2.1.3.** Se  $L \subset \mathbb{N}$  com  $|L| = s$  e  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}([n])$  é uma família  $L$ -intersectante e uniforme, então temos

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}.$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  uma família  $L$ -intersectante e  $k$ -uniforme e, sem perda de generalidade, assumimos que  $k \notin L$  (pois se dois conjuntos de tamanho  $k$  possuem intersecção de tamanho  $k$ , então eles são iguais).

Consideremos agora o espaço das funções de valores reais sobre o domínio  $\Omega = \{0, 1\}^n$  e, para todo  $i \in [m]$ , seja  $p_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$p_i((x_j)_{j=1}^n) = \prod_{l \in L} (\langle (x_j)_{j=1}^n, A_i \rangle - l) = \prod_{l \in L} \left( \sum_{j=1}^n (A_i)_j x_j - l \right).$$

Observe agora que, para todo  $i \in [m]$ , temos

$$p_i(A_i) = \prod_{l \in L} (|A_i| - l) \neq 0,$$

pois  $k \notin L$ .

Ademais, se  $i$  e  $j$  são elementos distintos de  $[m]$ , então

$$p_i(A_j) = \prod_{l \in L} (|A_i \cap A_j| - l) = 0,$$

pois  $|A_i \cap A_j| \in L$ .

Logo, considerando as funções  $p_1, p_2, \dots, p_m$  e os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , pelo Exercício 2.1.2, temos que  $p_1, p_2, \dots, p_m$  são linearmente independentes.

Observe agora que  $\forall x \in \{0, 1\}^n, x^2 = x$ , isso significa que podemos reescrever os  $p_i$ 's como polinômios multilineares em  $n$  variáveis (i.e., polinômios cujos mônômios não contêm nenhum fator que é quadrado de variável).

Então, para todo  $i \in [n]$ , seja  $\tilde{p}_i$  um polinômio multilinear correspondente a  $p_i$  (mais formalmente, seja  $\tilde{p}_i$  um polinômio multilinear tal que  $\forall x \in \Omega, \tilde{p}_i(x) = p_i(x)$ ) e observe que  $\text{gr}(\tilde{p}_i) \leq \text{gr}(p_i) \leq s$ . Ademais, sabemos que  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m$  são linearmente independentes.

Para todo  $I \subset [n]$ , seja  $\chi_I$  como o polinômio multilinear em  $n$  variáveis definido por  $\chi_I((x_j)_{j=1}^n) = \prod_{i \in I} x_i$ .

Observe agora que todo polinômio multilinear em  $n$  variáveis e de grau no máximo  $s$  pode ser escrito como combinação linear de elementos de  $\{\chi_I : I \in \binom{[n]}{\leq s}\}$ . Isso significa que esse conjunto gera o espaço dos polinômios multilineares em  $n$  variáveis e de grau no máximo  $s$ , logo ele tem dimensão no máximo  $\sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$ .

Como  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m$  são linearmente independentes e são elementos desse espaço vetorial, temos que

$$|\mathcal{F}| = m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}. \quad \blacksquare$$

A cota do teorema acima, porém, não é justa e com um pequeno ajuste dos polinômios usados, podemos nos livrar de umas hipóteses e obter o teorema abaixo.

**Teorema 2.1.4** (Frankl–Wilson '81 [5]). Se  $L \subset \mathbb{N}$  com  $|L| = s$  e  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}([n])$  é uma família  $L$ -intersectante, então temos

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}.$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  uma família  $L$ -intersectante com  $|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_m|$ .

Para todo  $i \in [m]$ , seja  $p_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$p_i((x_j)_{j=1}^n) = \prod_{\substack{l \in L: \\ l < |A_i|}} (\langle (x_j)_{j=1}^n, A_i \rangle - l) = \prod_{\substack{l \in L: \\ l < |A_i|}} \left( \sum_{j=1}^n (A_i)_j x_j - l \right).$$

Observe que, para todo  $i \in [m]$ , temos

$$p_i(A_i) = \prod_{\substack{l \in L: \\ l < |A_i|}} (|A_i| - l) > 0.$$

Ademais, para todos  $i, j \in [m]$  com  $i < j$ , temos

$$p_i(A_j) = \prod_{\substack{l \in L: \\ l < |A_i|}} (|A_j \cap A_i| - l) = 0,$$

pois  $|A_j \cap A_i| < |A_i|$ , já que  $|A_j| \leq |A_i|$  e  $A_i \neq A_j$ .

Logo a matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por  $M_{ij} = p_i(A_j)$  é triangular e todas as entradas de sua diagonal são não-nulas. Isso significa que  $A$  é não-singular e pelo Exercício 2.1.2, temos que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são linearmente independentes.

Construindo  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m$  da mesma forma que na demonstração do teorema anterior, obtemos um conjunto linearmente independente no espaço vetorial dos polinômios multilineares em  $n$  variáveis e de grau no máximo  $s$  e portanto temos

$$|\mathcal{F}| = m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}. \quad \blacksquare$$

Considerando a família  $\mathcal{F} = \left\{ \binom{[n]}{\leq s} \right\}$  e  $L = \{0, 1, \dots, s-1\}$ , observamos que a cota desse teorema é justa.

O teorema abaixo fortalece a cota do Teorema 2.1.3 mantendo suas hipóteses.

**Teorema 2.1.5** (Ray–Chaudhuri–Wilson '75 [7]). Se  $L \subset \mathbb{N}$  com  $|L| = s$  e  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}([n])$  é uma família  $L$ -intersectante e uniforme, então temos

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s}.$$

*Demonstração.* Seja novamente  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  uma família  $L$ -intersectante e  $k$ -uniforme e, sem perda de generalidade, assumimos que  $k \notin L$  e que  $s \leq k$  (pois podemos remover de  $L$  todos os números maiores que  $k$ ).

Construimos de novo, para todo  $i \in [m]$ , a função  $p_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$p_i((x_j)_{j=1}^n) = \prod_{l \in L} (\langle (x_j)_{j=1}^n, A_i \rangle - l) = \prod_{l \in L} \left( \sum_{j=1}^n (A_i)_j x_j - l \right).$$

E consideramos os polinômios multilineares correspondentes  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_m$ .

Da demonstração do Teorema 2.1.3, já sabemos que esses polinômios são linearmente independentes a ideia agora é completar essa família a uma outra ainda linearmente independente.

Lembremos que, para todo  $i \in [m]$ , temos

$$p_i(A_i) = \prod_{l \in L} (|A_i| - l) \neq 0,$$

e, se  $i$  e  $j$  são elementos distintos de  $[m]$ , então

$$p_i(A_j) = \prod_{l \in L} (|A_i \cap A_j| - l) = 0.$$

Defina, para todo  $I \subset [n]$ , o polinômio multilinear em  $n$  variáveis  $\chi_I$  a partir de  $\chi_I((x_j)_{j=1}^n) = \prod_{i \in I} x_i$ . Para todo  $I \subset [n]$ , seja  $q_I$  o polinômio definido a partir de

$$q_I((x_j)_{j=1}^n) = \chi_I((x_j)_{j=1}^n) \left( \binom{\sum_{j=1}^n x_j}{k} - k \right),$$

e seja  $\tilde{q}_I$  o polinômio multilinear de  $n$  variáveis associado a  $q_I$  (observe que  $\tilde{q}_I$  possui grau no máximo  $|I| + 1$ ).

Por outro lado, para todo  $i \in [m]$ , temos  $q_I(A_i) = 0$ , pois  $|A_i| = k$ .

Sejam  $\mathcal{P} = \{\tilde{p}_i : i \in [m]\}$  e  $\mathcal{Q} = \{\tilde{q}_I : I \in \binom{[n]}{\leq s-1}\}$ .

Observe que, para todo  $I \in \binom{[n]}{\leq s-1}$ , temos

$$\sum_{j=1}^n \chi_{\{j\}}(I) - k = |I| - k < 0,$$

pois  $|I| \leq s-1 \leq k-1$ .

O seguinte lema nos dá que  $\mathcal{Q}$  é linearmente independente.

**Lema.** Se  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que, para todo  $I \in \binom{[n]}{\leq r}$ , temos  $f(I) \neq 0$ , então o conjunto  $\{\chi_I f : I \in \binom{[n]}{\leq r}\}$  é linearmente independente.

*Demonstração do Lema.* Observe inicialmente que se  $I, J \in \binom{[n]}{\leq r}$  são tais que  $I \not\subseteq J$ , então  $\chi_I(J) = 0$ .

Logo, se  $|J| \leq |I|$  e  $I \neq J$ , temos  $\chi_I(J)f(J) = 0$  e  $\chi_I(I)f(I) \neq 0$ , ou seja, a matriz  $A$  cujas entradas são  $(\chi_I f)(J)$  é triangular e com todas as entradas da diagonal não-nulas e, portanto, invertível.

Pelo Exercício 2.1.2, temos que  $\{\chi_I f : I \in \binom{[n]}{\leq r}\}$  é linearmente independente. ■

Vamos provar agora que  $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$  é linearmente independente.

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  e  $\mu_I \in \mathbb{R}$  para cada  $I \in \binom{[n]}{\leq s-1}$  tais que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{p}_i + \sum_{I \in \binom{[n]}{\leq s-1}} \mu_I \tilde{q}_I = 0.$$

Avaliando a expressão acima em  $A_j$ , obtemos  $\lambda_j \tilde{p}_j = 0$ , ou seja, para todo  $j \in [m]$ , temos  $\lambda_j = 0$  e a expressão se torna

$$\sum_{I \in \binom{[n]}{\leq s-1}} \mu_I \tilde{q}_I = 0.$$

Como  $\mathcal{Q}$  é linearmente independente, temos que os  $\mu_I$ 's são todos nulos.

Portanto  $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$  é linearmente independente, logo, como  $\mathcal{Q}$  também é uma família de polinômios multilineares de  $n$  variáveis e de grau no máximo  $s$ , temos

$$m + \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} = |\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i},$$

de onde o resultado segue. ■

Considerando a família  $\mathcal{F} = \binom{[n]}{s}$ , observamos que a cota do teorema acima é justa.

O seguinte exercício generaliza ambos os Teoremas 2.1.4 e 2.1.5.

**Exercício 2.1.6** (Teorema de Alon–Babai–Suzuki '91 [1]). Sejam  $K, L \subset \mathbb{N}$  conjuntos finitos não-vazios de naturais com  $|K| = r$  e  $|L| = s$  e tal que  $\min K > s - r$

Se  $\mathcal{F}$  é uma família  $L$ -intersectante tal que, para todo  $F \in \mathcal{F}$ , temos  $|F| \in K$  e, então

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{s-r+1}.$$

## 2.2 Aplicações ao Número Cromático de $\mathbb{R}^n$

22/04/2014 – Fabrício Caluza Machado

Apresentaremos inicialmente outra versão do Teorema 2.1.4.

**Teorema 2.2.1.** Se  $L \subset \mathbb{N}$  com  $|L| = s$ ,  $p$  é um primo e  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}([n])$  é uma família satisfazendo

1. Para todo  $l \in L$  e todo  $A \in \mathcal{F}$ , temos  $|A| \not\equiv l \pmod{p}$ ;

2. Para todos  $A, B \in \mathcal{F}$  distintos, temos que existe  $l \in L$  tal que  $|A \cap B| \equiv l \pmod{p}$ ;

então temos

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}.$$

*Demonstração.* A prova desse teorema é muito similar. Porém, agora trabalhamos no corpo  $\mathbb{Z}_p$  dos inteiros módulo  $p$ . É importante que  $p$  seja primo para que  $\mathbb{Z}_p$  não tenha divisores de 0 (i.e., elementos não nulos  $a$  e  $b$  tais que  $ab \equiv 0 \pmod{p}$ ).

Suponha que  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  e, para todo  $i \in [m]$ , seja  $p_i: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{Z}_p$  definida por

$$p_i((x_j)_{j=1}^n) = \prod_{l \in L} (\langle (x_j)_{j=1}^n, A_i \rangle - l) = \prod_{l \in L} \left( \sum_{j=1}^n (A_i)_j x_j - l \right).$$

Observe que, para todo  $i \in [m]$ , temos

$$p_i(A_i) = \prod_{l \in L} (|A_i| - l) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Ademais, para  $i, j \in [m]$  distintos, temos

$$p_i(A_j) = \prod_{l \in L} (|A_j| - l) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Logo a matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por  $M_{ij} = p_i(A_j)$  é não-singular e pelo Exercício 2.1.2, temos que  $p_1, p_2, \dots, p_m$  são linearmente independentes.

Multilinearizando os polinômios, obtemos um conjunto linearmente independente no espaço vetorial dos polinômios multilineares em  $n$  variáveis e de grau no máximo  $s$  e portanto temos

$$|\mathcal{F}| = m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}. \quad \blacksquare$$

Forneceremos agora algumas estimativas para binomiais.

**Proposição 2.2.2.** Para todos  $n, l, s \in \mathbb{N}$  com  $l > 2$  e  $s \leq n/l$  temos

$$\sum_{i=0}^s \binom{n}{i} < \binom{n}{s} \left( 1 + \frac{1}{l-2} \right).$$

*Demonstração.* Observe que para todo  $u \in \mathbb{N}$  com  $u \leq n$ , temos

$$\binom{n}{u-1} / \binom{n}{u} = \frac{u}{n-u+1} \leq \frac{s}{n-s+1}$$

Logo, aplicando a equação acima recursivamente, temos

$$\binom{n}{u-1} = \left( \frac{s}{n-s+1} \right)^u \binom{n}{s}.$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s \binom{n}{i} &\leq \binom{n}{s} \sum_{i=0}^s \left( \frac{s}{n-s+1} \right)^i \\ &< \frac{1}{1 - s/(n-s+1)} \binom{n}{s} \\ &= \left( 1 + \frac{s}{n-2s+1} \right) \binom{n}{s}. \end{aligned}$$

Mas observe que

$$\begin{aligned} \frac{s}{n-2s+1} < \frac{1}{l-2} &\iff s(l-2) < n-2s+1 \\ &\iff s < \frac{n+1}{l} \\ &\iff s \leq \text{frac}n{l}, \end{aligned}$$

logo temos

$$\sum_{i=0}^s \binom{n}{i} < \left(1 + \frac{1}{l-2}\right) \binom{n}{s}. \quad \blacksquare$$

**Corolário 2.2.3.** Para todos  $n, s \in \mathbb{N}$  com  $s \leq n/4$ , temos

$$\sum_{i=0}^s \binom{n}{l} < \frac{3}{2} \binom{n}{s} < 2 \binom{n}{s}.$$

**Lema 2.2.4.** Se  $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$  é um racional fixado e  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$\binom{n}{\alpha n} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)} \right)^n.$$

**Observação.** A condição de racionalidade de  $\alpha$  serve apenas para garantir que  $\binom{n}{\alpha n}$  estará bem definido para infinitos valores de  $n$  e que possamos estudar seu comportamento assintótico.

*Demonstração.* Lembramos a Fórmula de Stirling para o comportamento assintótico de  $n!$  abaixo.

$$n! = (1+o(1))\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Usando essa estimativa, temos

$$\begin{aligned} \binom{n}{\alpha n} &= \frac{n!}{(\alpha n)!((1-\alpha)n)!} \\ &= (1+o(1)) \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi\alpha n} \left(\frac{\alpha n}{e}\right)^{\alpha n} \sqrt{2\pi(1-\alpha)n} \left(\frac{(1-\alpha)n}{e}\right)^{(1-\alpha)n}} \\ &= \frac{1+o(1)}{2\pi\alpha(1-\alpha)n} \frac{1}{\alpha^{\alpha n}(1-\alpha)^{(1-\alpha)n}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolário 2.2.5.** Para todo  $\alpha \in (0, 1)$ , existem  $\varepsilon_0 > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que, para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  e  $n \geq n_0$  tal que  $\alpha n$  e  $(1-\alpha)n$  são inteiros, temos

$$\left( \frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}} - \varepsilon \right)^n < \binom{n}{\alpha n} < \left( \frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}} + \varepsilon \right)^n.$$

**Observação.** O  $\varepsilon_0$  serve apenas para garantir que o  $\varepsilon$  escolhido será tal que o lado esquerdo da primeira desigualdade não será negativo.

Definimos agora o número cromático de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.2.6.** O número cromático de  $\mathbb{R}^n$  (denotado  $\chi(\mathbb{R}^n)$ ) é definido como o número cromático do grafo  $G_n$  cujos vértices são os pontos de  $\mathbb{R}^n$  e dois vértices são adjacentes se e somente se a distância (euclidiana) entre eles é 1.

Mais formalmente, temos

$$V(G_n) = \mathbb{R}^n \qquad E(G_n) = \{vw : d(v, w) = 1\}.$$

**Observação.** Se definirmos, para todo  $d > 0$  o grafo  $G_n(d)$  como sendo o grafo cujos vértices são os pontos de  $\mathbb{R}^n$  e dois vértices são adjacentes se e somente se a distância (euclidiana) entre eles é  $d$ , então a contração/dilatação pelo fator  $d$  é um isomorfismo entre  $G_n$  e  $G_n(d)$ , logo  $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(G_n) = \chi(G_n(d))$ .  
Muitas vezes é mais conveniente trabalhar com  $G_n(d)$  do que  $G_n$ .

**Exercício resolvido 2.2.7.** Prove que  $\chi(\mathbb{R}) = 2$ .

Embora possamos calcular o número cromático de  $\mathbb{R}$  (Exercício 2.2.7), o caso geral ainda é um problema em aberto. A seguir apresentamos alguns resultados sobre  $\chi(\mathbb{R}^n)$  para valores maiores de  $n$ .

**Proposição 2.2.8.** Temos  $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 9$ .

*Demonstração.* Considere uma partição de  $\mathbb{R}^2$  em quadrados da forma  $[a, a+l) \times [b, b+l)$  de forma que a diagonal de tais quadrados seja 1 (i.e., temos  $l = 1/\sqrt{2}$ ).

Observe que se  $ab$  é uma aresta de  $G_n$  e  $a$  está em um quadrado  $Q$ , então  $b$  está em um dos 8 quadrados vizinhos a  $Q$  (Figura 5).

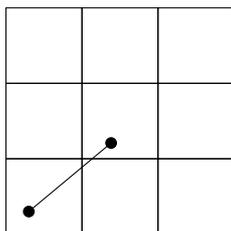


Figura 5: Vizinhança de um quadrado da partição da Proposição 2.2.8.

Logo, considerando 9 cores, podemos colorir cada quadrado com uma cor de forma que para todo quadrado  $Q$  todos os seus 8 vizinhos possuem uma cor distinta da cor de  $Q$ . Tal coloração é uma coloração própria de  $G_n$  pois toda aresta de  $G_n$  é de um quadrado  $Q$  para um de seus 8 vizinhos. ■

Com apenas uma mudança simples no argumento, podemos melhorar a cota da proposição acima.

**Proposição 2.2.9.** Temos  $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ .

*Demonstração (rascunho).* Basta repetir o argumento da prova da Proposição 2.2.8 utilizando hexágonos regulares cuja diagonal maior mede 1 (i.e., cujo lado mede  $1/2$ ). Dessa forma, cada hexágono possuirá 6 vizinhos (Figura 6).

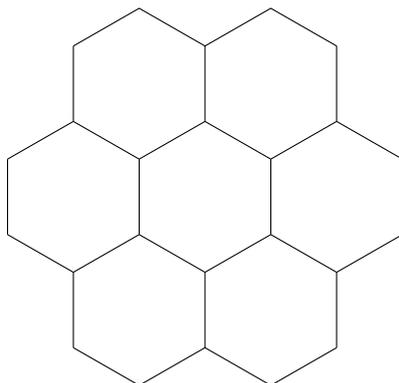


Figura 6: Vizinhança de um hexágono da partição da Proposição 2.2.9.

Porém, uma aresta pode cruzar de um hexágono para vizinhos um pouco mais distantes (uma aresta com uma extremidade próxima a um vértice de hexágono, por exemplo), então a escolha das 7 cores deve ser feita com certo cuidado (mas é possível). □

**Exercício 2.2.10.** Complete a prova da Proposição 2.2.9, mostrando que é possível fazer a escolha das 7 cores para os hexágonos construídos.

A cota da Proposição 2.2.8 também pode ser generalizada para dimensões maiores como sugere o exercício abaixo.

**Exercício 2.2.11.** Prove que  $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \lceil 2\sqrt{n} \rceil^n \sim n^{n/2}$ .

**Observação.** É possível provar que  $\chi(\mathbb{R}^n) \leq 9^n$ .

**Proposição 2.2.12.** Temos  $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ .

*Demonstração.* Suponha por absurdo que há uma coloração própria de  $G_n$  com apenas três cores. Considere um triângulo equilátero de vértices  $a, b, c \in \mathbb{R}^2$  do plano e seja  $d \in \mathbb{R}^2$  o (único) ponto do plano que dista 1 de  $b$  e  $c$  e que é diferente de  $a$ .

Observe que  $a$  deve possuir a mesma cor que  $d$  pois há apenas três cores e triângulos equiláteros devem possuir um vértice de cada cor.

Considere agora os pontos  $b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}^2$  obtidos a partir da rotação horária dos pontos  $b, c$  e  $d$  em torno de  $a$  de um ângulo  $\alpha$  de forma que  $d$  e  $d_2$  distam 1.

Pelo mesmo raciocínio, o vértice  $d_2$  possui a mesma cor que  $a$ , o que é um absurdo pois isso implica que  $d$  possui a mesma cor que  $d_2$ . ■

**Corolário 2.2.13.** Temos  $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$ .

*Demonstração (rascunho).* O mesmo raciocínio da Proposição 2.2.12 trocando “triângulos” por “hipertetraedros regulares” funciona em  $\mathbb{R}^n$ . □

Observe que a prova da Proposição 2.2.12 se dá apresentando um subgrafo finito de  $G_n$  que não é 4-colorível. Uma pergunta natural é se é possível que todos os subgrafos finitos de  $G_n$  sejam  $k$ -coloríveis para um  $k$  fixo sem que  $G_n$  seja  $k$ -colorível. O Teorema de De Bruijn–Erdős (Exercício 2.2.14) diz que tal situação é impossível.

**Exercício resolvido 2.2.14** (Teorema de De Bruijn–Erdős '51). Se  $k$  é um natural e  $G$  é um grafo tal que todos seus subgrafos finitos possuem uma  $k$ -coloração própria, então  $G$  possui uma  $k$ -coloração própria (i.e., temos  $\chi(G) \leq k$ ).

Nesse espírito, o teorema abaixo fornece cotas inferiores para  $\chi(\mathbb{R}^n)$  com  $n$  suficientemente grande.

**Teorema 2.2.15** (Frankl–Wilson '81 [5]). Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_0$ , temos  $\chi(\mathbb{R}^n) \geq 1.2^n$ .

Provaremos a versão enfraquecida desse teorema enunciada abaixo.

**Teorema 2.2.16.** Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_0$  da forma  $n = 4p - 1$  com  $p$  um número primo, temos  $\chi(\mathbb{R}^n) \geq 1.1397^n$ .

*Demonstração.* Nesta demonstração, trabalharemos com o grafo  $G_n(d)$  (i.e., o grafo cujas arestas são entre pontos distando  $d$ ) e utilizaremos o Teorema 2.2.1.

Consideramos novamente a interpretação de subconjuntos de  $[n]$  como vetores de  $\{0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$  e observamos que se  $A, B \subset [n]$ , então temos

$$d(A, B)^2 = \langle A, B \rangle^2 = |A| - |A \cap B| - |B \cap A| + |B|,$$

e se  $|A| = |B| = k$ , então

$$d(A, B)^2 = 2(k - |A \cap B|).$$

Seja  $k = 2p - 1$  e  $d = \sqrt{2(2p - 1) - (p - 1)} = \sqrt{4p - 1}$  e considere uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $[n]$  (e portanto de vértices de  $G_n(d)$ )  $k$ -uniforme.

Observe que se  $A, B \in \mathcal{F}$  são distintos, então  $|A \cap B| \in \{0\} \cup [2p - 2] \setminus \{p - 1\}$ , pois  $d(A, B) \neq d$  implica que  $|A \cap B| \neq p - 1$ .

Ademais, observe que o único número em  $\{0\} \cup [2p - 2]$  que é congruente módulo  $p$  a  $p - 1$  é  $p - 1$ . Logo, tomando  $L = \{0\} \cup [p - 2]$  e  $s = |L| = p - 1$ , temos, pelo Teorema 2.2.1, que

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}.$$

Como  $s = p - 1 < n/4$ , temos pelos Corolários 2.2.3 e 2.2.5 que

$$|\mathcal{F}| < 1.7548^n,$$

desde que  $n$  seja grande o suficiente.

Considere o subgrafo  $H$  induzido em  $G_n(d)$  pelos vértices correspondentes aos subconjuntos de tamanho  $k$  de  $[n]$ . Um conjunto independente em  $H$  corresponde a uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $[n]$  que é  $k$ -uniforme, logo sabemos que  $\alpha(H) \leq 1.7548^n$ . Então temos

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{R}^n) = \chi(G_n(d)) &\geq \chi(H) \geq \frac{|V(H)|}{\alpha(H)} \\ &> 1.7548^{-n} \binom{n}{k} > 1.1397^n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Observação.** Para obter o Teorema 2.2.15 basta fazer a mesma demonstração do Teorema 2.2.16 utilizando uma proporção  $\alpha \in (0, 1)$  entre  $p$  e  $n$  que otimiza a desigualdade do Proposição 2.2.2 e do Corolário 2.2.5.

Dessa forma obtemos um teorema que depende apenas que  $n$  seja um múltiplo fixado de um primo  $p$ . Porém, o exercício abaixo implica que, para  $n$  suficientemente grande podemos tomar uma proporção suficientemente próxima da desejada.

**Exercício resolvido 2.2.17.** Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0 > 0$  tal que, para todo  $x \geq x_0$ , existe um primo no intervalo  $[x, (1 + \varepsilon)x]$ .

## 3 Coloração e Preenchimento de $\mathbb{R}^n$

### 3.1 Número Cromático Mensurável de $\mathbb{R}^n$ e Densidade Superior

06/05/2014 – Fernando Mário de Oliveira Filho

Vimos já que calcular o número cromático de  $\mathbb{R}^n$  é um problema difícil. Ademais o fato de todas as provas conhecidas do Teorema de De Bruijn–Erdős (Exercício 2.2.14) utilizarem o Axioma da Escolha sugere que a coloração própria de  $\mathbb{R}^n$  com um número mínimo de cores pode depender do Axioma da Escolha e, portanto, ser não construtiva.

Com isso em mente, é natural exigir que a coloração feita não utilize o Axioma da Escolha e uma forma de fazê-lo é exigir que a partição nas classes de cores seja em conjuntos Lebesgue-mensuráveis.

Será conveniente ao longo desta seção a definição abaixo.

**Definição 3.1.1.** Dizemos que um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  evita a distância  $d > 0$  se para todo par de pontos  $a, b \in A$  temos  $d(a, b) \neq d$ .

Definimos agora o número cromático mensurável que captura a noção de colorir com o menor número de cores sem usar o Axioma da Escolha.

**Definição 3.1.2.** O número cromático mensurável de  $\mathbb{R}^n$  (denotado por  $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ ) é o menor número de partes em que conseguimos particionar  $\mathbb{R}^n$  de forma que todas as partes evitam a distância 1 e são Lebesgue-mensuráveis. Mais formalmente, definimos

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^k A_i \text{ com } A_i \text{ Lebesgue-mensurável e } A_i \text{ evita distância 1 para todo } i \in [k] \right\}.$$

Como toda coloração mensurável é também uma coloração, as proposições abaixo seguem diretamente.

**Proposição 3.1.3.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \chi_m(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposição 3.1.4.** Temos  $\chi_m(\mathbb{R}^2) \leq 7$ .

A proposição abaixo também segue diretamente do Exercício 2.2.7.

**Proposição 3.1.5.** Temos  $\chi_m(\mathbb{R}) = 2$ .

Já vimos que a melhor cota inferior que se sabe para o número cromático de  $\mathbb{R}^2$  é  $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$ , porém o teorema abaixo sugere que talvez uma coloração com quatro cores não seja palpável.

**Teorema 3.1.6** (Falconer '81 [4]). Temos  $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq 5$ .

**Observação.** O teorema acima não afirma que  $\chi(\mathbb{R}^2) < \chi_m(\mathbb{R}^2)$ , ele apenas nos dá uma cota inferior para  $\chi_m(\mathbb{R}^2)$  que é melhor que a conhecida para  $\chi(\mathbb{R}^2)$ .

Naturalmente, podemos nos perguntar quão grandes podem ser as partes da partição mensurável de uma coloração própria. Nesse sentido, a definição abaixo é muito útil.

**Definição 3.1.7.** Se  $A$  é um subconjunto Lebesgue-mensurável de  $\mathbb{R}^n$ , então definimos a *densidade superior* de  $A$  como

$$\bar{\delta}(A) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)},$$

onde  $m$  denota a medida de Lebesgue.

Informalmente, a densidade superior é calculada pelo limite da porção preenchida por  $A$  em hipercubos cada vez maiores.

Os exercícios abaixo são algumas propriedades básicas da densidade superior.

**Exercício resolvido 3.1.8.** Se  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  são Lebesgue-mensuráveis e  $A \subset B$ , então  $\bar{\delta}(A) \leq \bar{\delta}(B)$ .

**Exercício resolvido 3.1.9.** Suponha que  $A \subset \mathbb{R}^n$  é Lebesgue-mensurável e limitado em uma das coordenadas, i.e., existe  $i \in [n]$  e  $R > 0$  tais que

$$A \subset \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1 \text{ vezes}} \times [-R, R] \times \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i \text{ vezes}}.$$

Então  $\bar{\delta}(A) = 0$ .

Em particular, se  $A$  é limitado, então  $\bar{\delta}(A) = 0$ .

**Exercício resolvido 3.1.10.** Se  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\bar{\delta} \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\delta}(A_i).$$

Em particular, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\bar{\delta} \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \bar{\delta}(A_i).$$

O exercício abaixo nos diz que a densidade superior é invariante sob translação.

**Exercício resolvido 3.1.11.** Se  $A$  é um subconjunto Lebesgue-mensurável de  $\mathbb{R}^n$  e  $v \in \mathbb{R}^n$  é um vetor arbitrário, então  $\bar{\delta}(A) = \bar{\delta}(A + v)$ .

O exercício abaixo nos dá um caso de igualdade para o Exercício 3.1.10.

**Exercício resolvido 3.1.12.** Se  $A$  é um subconjunto Lebesgue-mensurável de  $\mathbb{R}^n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_r$  é uma sequência de vetores de  $\mathbb{R}^n$  tais que os conjuntos  $A + v_i$  são dois-a-dois disjuntos, então

$$\bar{\delta} \left( \bigcup_{i=1}^r (A + v_i) \right) = r \bar{\delta}(A).$$

O exercício abaixo nos diz que a densidade superior de um conjunto com simetrias de translação pode ser calculada restringindo a atenção apenas para uma célula do conjunto que se repete.

**Exercício resolvido 3.1.13.** Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  uma base de  $\mathbb{R}^n$  e  $k \in [n]$ . Defina

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in [n] \text{ e } a_i \in [0, 1) \text{ para todo } i \in [k] \right\}.$$

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é Lebesgue-mensurável tal que

$$A = \bigcup_{(i_j)_{j=1}^k \in \mathbb{Z}^k} \left( (A \cap S) + \sum_{j=1}^k i_j v_j \right),$$

então temos

$$\bar{\delta}(A) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)}.$$

Em particular, se  $S$  é limitado, temos

$$\bar{\delta}(A) = \frac{m(A \cap S)}{m(S)}.$$

Estamos interessados em calcular a maior densidade superior superior de um conjunto que evita distância 1.

**Definição 3.1.14.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$m_1(\mathbb{R}^n) = \sup\{\bar{\delta}(A) : A \subset \mathbb{R}^n \text{ é Lebesgue-mensurável e evita a distância } 1\}.$$

A proposição abaixo relaciona os números  $\chi_m(\mathbb{R}^n)$  e  $m_1(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposição 3.1.15.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $\chi_m(\mathbb{R}^n) m_1(\mathbb{R}^n) \geq 1$ .

*Demonstração.* Sejam  $k = \chi_m(\mathbb{R}^n)$  e  $A_1, A_2, \dots, A_k$  uma partição de  $\mathbb{R}^n$  tal que para todo  $i \in [k]$ , temos que  $A_i$  é Lebesgue-mensurável e evita a distância 1.

Do Exercício 3.1.10, temos

$$1 = \bar{\delta}(\mathbb{R}^n) = \bar{\delta}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \bar{\delta}(A_i) \leq k m_1(\mathbb{R}^n) = \chi_m(\mathbb{R}^n) m_1(\mathbb{R}^n). \quad \blacksquare$$

A proposição acima nos dá imediatamente que uma cota superior para qualquer uma de  $m_1(\mathbb{R}^n)$  de  $\chi_m(\mathbb{R}^n)$  implica em uma cota inferior para a outra.

Abaixo fornecemos cotas inferiores para  $m_1(\mathbb{R})$  e  $m_1(\mathbb{R}^2)$ .

**Proposição 3.1.16.** Temos  $m_1(\mathbb{R}) \geq \frac{1}{2}$ .

*Demonstração.* Poderíamos simplesmente usar a Proposição 3.1.15, porém daremos uma prova independente simples.

Considere o conjunto  $A = \{[2i, 2i + 1) : i \in \mathbb{Z}\}$  e observe que  $A$  é Lebesgue-mensurável e evita distância 1.

Pelo Exercício 3.1.13, tomando  $v_1 = 2$  e  $k = 1$ , temos que a célula de simetria é  $S = [0, 2)$  e

$$\bar{\delta}(A) = \frac{m(A \cap [0, 2))}{m([0, 2))} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, temos que  $m_1(\mathbb{R}) \geq 1/2$ . \blacksquare

**Proposição 3.1.17.** Temos  $m_1(\mathbb{R}^2) \geq \pi/(8\sqrt{3}) \approx 0.22672$ .

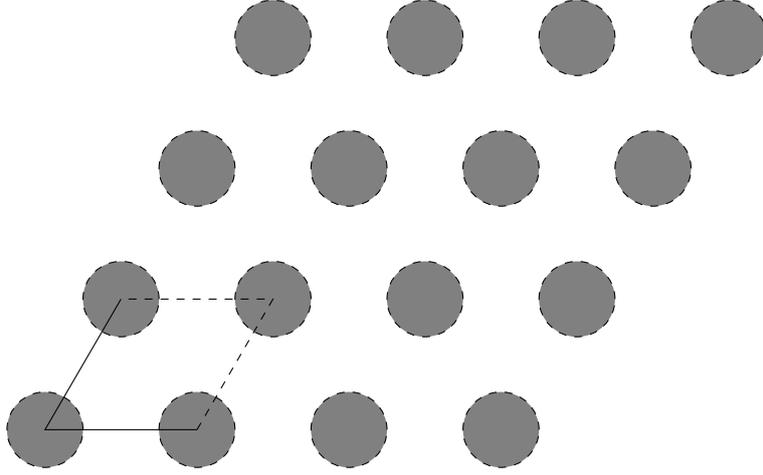


Figura 7: Conjunto  $A$  (em cinza) da Proposicao 3.1.17 com a célula de simetria  $S$  representada (o paralelogramo).

*Demonstração.* Sejam  $v_1 = (2, 0)$  e  $v_2 = 2(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))$  e considere o conjunto

$$A = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} B\left(iv_1 + jv_2, \frac{1}{2}\right),$$

onde  $B(p, r)$  denota a bola aberta de raio  $r$  centrada em  $p$ , mais formalmente, temos  $B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) < r\}$  (Figura 7).

Observe que, como o diâmetro das bolas consideradas é 1 e as bolas são abertas, temos que nenhuma delas contém um par de pontos distando 1.

Ademais, como os centros das bolas distam pelo menos 2 um do outro, temos que a distância entre quaisquer duas bolas distintas é pelo menos 1.

Portanto  $A$  é um conjunto Lebesgue-mensurável que evita distância 1.

Pelo Exercício 3.1.13 com  $k = 2$  (e com  $v_1$  e  $v_2$  já definidos), temos que a célula de simetria  $S$  é o paralelogramo de vértices  $0, v_1, v_2$  e  $v_1 + v_2$  aberto nos lados que não incidem em  $0$ . Logo

$$\begin{aligned} \bar{\delta}A &= \frac{m(A \cap S)}{m(S)} = \frac{\pi(1/2)^2}{2^2\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \approx 0.22672. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

O teorema abaixo nos dá formas de se obter limitantes superiores para  $m_1(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 3.1.18.** Se  $G$  é um subgrafo finito do grafo de  $\mathbb{R}^n$ , então

$$m_1(\mathbb{R}^n) \leq \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}.$$

Provaremos apenas uma versão mais fraca do teorema acima.

**Proposição 3.1.19.** Se  $G$  é um subgrafo finito completo (não-vazio) do grafo de  $\mathbb{R}^n$ , então

$$m_1(\mathbb{R}^n) \leq \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}.$$

*Demonstração.* Nesse caso, temos  $\alpha(G) = 1$ . Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto Lebesgue-mensurável que evita distância 1 arbitrário.

Afirmamos que se  $x, y \in V(G)$  são distintos, então  $(A + x) \cap (A + y) = \emptyset$ . De fato, pois se  $z \in (A + x) \cap (A + y)$ , então temos que existem  $a, b \in A$  tais que  $a + x = z = b + y$ , logo temos

$$\|a - b\| = \|y - x\| = 1,$$

pois  $xy \in E(G)$ , mas isso contradiz o fato que  $A$  evita distância 1.

Pelo Exercício 3.1.12, temos

$$\alpha(G) = 1 = \bar{\delta}(\mathbb{R}^n) \geq \bar{\delta} \left( \bigcup_{x \in V(G)} (A + x) \right) = |V(G)| \bar{\delta}(A).$$

Portanto  $m_1(\mathbb{R}^n) \leq \alpha(G)/|V(G)|$ . ■

Enunciamos agora algumas conjecturas relacionadas ao número  $m_1(\mathbb{R}^2)$ .

**Conjectura 3.1.20** (Erdős). Temos  $m_1(\mathbb{R}^2) < 1/4$  (o que implicaria que  $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq 5$ ).

**Conjectura 3.1.21** (Erdős). O valor

$$\sup\{m(A) : A \subset B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \text{ com } A \text{ um conjunto que evita distância } 1\}$$

é  $\pi/4$  e é atingido pela bola (aberta) de raio  $1/2$  centrado na origem.

## 3.2 Análise Harmônica

13/05/2014 – Fernando Mário de Oliveira Filho

Faremos agora uma breve introdução à análise harmônica, que será uma ferramenta muito útil no estudo do preenchimento do espaço. Para isso, relembremos a definição de espaço de Hilbert.

**Definição 3.2.1.** Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , a norma induzida por ele  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  e completo quanto a essa norma, isto é, toda sequência de Cauchy em relação a essa norma é convergente.

**Observação.** Quando dizemos que o espaço de Hilbert é completo em relação à norma, estamos munindo o espaço de uma métrica induzida  $d(x, y) = \|x - y\|$  e da topologia métrica.

O exemplo mais simples de espaço de Hilbert é  $\mathbb{C}^n$  munido do produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j,$$

e da norma  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ .

Uma propriedade muito útil em espaços de Hilbert é a enunciada no exercício abaixo.

**Exercício resolvido 3.2.2.** Se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de vetores de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty,$$

então existe  $x \in \mathcal{H}$  tal que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^n x_k \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Definição 3.2.3.** Se  $x$  e  $u$  são vetores em um espaço de Hilbert, então definimos o *coeficiente de Fourier* de  $x$  na direção  $u$  (denotado por  $\hat{x}(u)$ ) como

$$\hat{x}(u) = \langle x, u \rangle.$$

**Observação.** Estamos mais interessados nessa definição e notação quando possuímos uma base ortonormal do espaço de Hilbert, pois teremos uma forma simples de calcular os coeficientes da expansão do vetor como combinação linear da base.

**Proposição 3.2.4.** Se  $(u_j)_{j=1}^n$  é um conjunto ortonormal de vetores de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $x \in \mathcal{H}$  e  $(\alpha_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$  são tais que

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j,$$

então, para todo  $j \in J$ , temos  $\alpha_j = \widehat{x}(u_j)$ .

*Demonstração.* Observe que, para todo  $k \in J$ , temos

$$\widehat{x}(u_k) = \langle x, u_k \rangle = \left\langle \sum_{j \in J} \alpha_j u_j, u_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, u_k \rangle = \alpha_k,$$

onde a última igualdade segue do fato que  $(u_j)_{j \in J}$  é ortonormal, ou seja, temos  $\langle u_j, u_k \rangle = 0$  se  $j \neq k$  e  $\langle u_k, u_k \rangle = 1$ . ■

**Corolário 3.2.5** (Identidade de Parseval para dimensão finita). Se  $(u_j)_{j=1}^n$  é uma base ortonormal de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão finita, então para todos  $x, y \in \mathcal{H}$ , temos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \widehat{x}(u_j) \overline{\widehat{y}(u_j)}.$$

*Demonstração.* Basta observar que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \widehat{x}(u_j) u_j, \sum_{k=1}^n \widehat{y}(u_k) u_k \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^n \widehat{x}(u_j) \overline{\widehat{y}(u_k)} \langle u_j, u_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \widehat{x}(u_j) \overline{\widehat{y}(u_j)}. \end{aligned}$$

**Observação.** No caso de espaços que podem possuir dimensão infinita, costumamos chamar conjuntos ortogonais e conjuntos ortonormais respectivamente de *sistemas ortogonais* e *sistemas ortonormais* para enfatizar que a dimensão não é necessariamente finita.

O exercício abaixo relembra uma das propriedades de espaços vetoriais.

**Exercício resolvido 3.2.6.** Se  $V$  é um espaço vetorial, então  $V$  possui uma base.

Apesar de essa propriedade parecer muito forte, ela não é muito prática quando o espaço vetorial tem dimensão infinita, pois a base que obtemos não é construtiva (depende do Axioma da Escolha), logo não temos muita ideia de como são os coeficientes em tal base.

Com isso em mente, a definição abaixo diminui as restrições sobre bases ortogonais para tentar obter bases mais palpáveis de espaços de Hilbert de dimensão infinita.

**Definição 3.2.7.** Um *sistema ortonormal completo* de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é um sistema ortonormal  $\{u_j : j \in J\}$  tal que, para todo vetor  $x \in \mathcal{H}$ , temos que

$$x = \sum_{j \in J} \widehat{x}(u_j) u_j.$$

**Observação.** A soma do lado direito da equação acima pode ser infinita, nesse caso, estamos interessados no limite dela com respeito à norma do espaço de Hilbert.

No caso em que o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  possui um sistema ortonormal completo  $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$  enumerável, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , temos que

$$\left\| x - \sum_{j=0}^n \hat{x}(u_j) u_j \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Abaixo enunciamos a Desigualdade de Bessel, que relaciona a norma de um vetor com seus coeficientes de Fourier em um sistema ortonormal.

**Proposição 3.2.8** (Desigualdade de Bessel). Se  $\{u_j : j \in J\}$  é um sistema ortonormal (não necessariamente completo) em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , então, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , temos

$$\sum_{j \in J} |\hat{x}(u_j)|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Demonstração.* Observe que, para todo  $K \subset J$  finito, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) u_j \right\|^2 \\ &= \left\langle x - \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) u_j, x - \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) u_j \right\rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \left\langle x, \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) u_j \right\rangle - \left\langle \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) u_j, x \right\rangle + \left\langle \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) u_j, \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) u_j \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j \in K} \overline{\hat{x}(u_j)} \langle x, u_j \rangle - \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) \langle u_j, x \rangle + \sum_{j, k \in K} \hat{x}(u_j) \overline{\hat{x}(u_k)} \langle u_j, u_k \rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j \in K} \overline{\hat{x}(u_j)} \hat{x}(u_j) - \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) \overline{\hat{x}(u_j)} + \sum_{j \in K} \hat{x}(u_j) \overline{\hat{x}(u_j)} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j \in K} |\hat{x}(u_j)|^2 \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $K \subset J$  finito, temos

$$\sum_{j \in K} |\hat{x}(u_j)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Isso significa que, para todo  $K \subset J$  enumerável, também temos a desigualdade acima (pois basta tomar o limite em uma enumeração  $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $K$ ).

Por outro lado, como, para todo  $j \in J$ , temos que  $|\hat{x}(u_j)|$  é um real não negativo, podemos calcular a soma em  $J$  a partir das somas parciais enumeráveis, então obtemos

$$\sum_{j \in J} |\hat{x}(u_j)|^2 = \sup \left\{ \sum_{j \in K} |\hat{x}(u_j)|^2 : K \subset J \text{ com } K \text{ enumerável} \right\} \leq \|x\|^2.$$

■

**Corolário 3.2.9.** Se  $\{u_j : j \in J\}$  é um sistema ortonormal (não necessariamente completo) em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , então, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , temos que  $\hat{x}(u_j)$  é não-nulo apenas para uma quantidade enumerável de índices  $j \in J$ . Em fórmula, temos  $|\{j \in J : \hat{x}(u_j) \neq 0\}| \leq |\mathbb{N}|$ .

*Demonstração.* Como a soma  $\sum_{j \in J} |\hat{x}(u_j)|^2$  é finita, segue do Exercício 3.2.10 (abaixo) que apenas uma quantidade enumerável das parcelas não é nula. ■

**Exercício resolvido 3.2.10.** Se  $(x_j)_{j \in J}$  é uma sequência de reais não-negativos somável (i.e., temos  $\sum_{j \in J} x_j < +\infty$ ), então apenas uma quantidade enumerável de termos é (estritamente) positiva (i.e., temos  $|\{j \in J : x_j > 0\}| \leq |\mathbb{N}|$ ).

O exercício abaixo é análogo ao Exercício 3.2.6.

**Exercício resolvido 3.2.11.** Se  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert, então  $\mathcal{H}$  possui um sistema ortonormal completo.

O objeto de estudo da análise harmônica são as funções periódicas. Para estudá-las, é conveniente definirmos o espaço abaixo.

**Definição 3.2.12.** O espaço do *toro* ou *círculo* (denotado por  $\mathbb{T}$ ) é definido como  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , isto é, é o conjunto das classes de equivalência da relação  $\sim$  sobre  $\mathbb{R}$  definida como

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Com essa definição, toda função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que é 1-periódica (i.e., para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $f(x) = f(x+1)$ ) corresponde à função

$$f_{\mathbb{T}}: \begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [x] & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Estamos interessados em estudar um subconjunto de tais funções que possui propriedades boas.

**Definição 3.2.13.** O espaço das funções quadrado integráveis (denotado por  $L^2(\mathbb{T})$ ) é definido como

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm < +\infty \right\},$$

onde  $m$  denota a medida induzida em  $\mathbb{T}$  pela medida de Lebesgue. Em outras palavras, consideramos a integral da função 1-periódica correspondente a  $f$  no intervalo  $[0, 1]$ , i.e., se  $g$  é 1-periódica tal que  $g_{\mathbb{T}} = f$ , então temos

$$\int_{\mathbb{T}} f dm = \int_{[0,1]} g dm.$$

**Observação.** Na verdade, o espaço  $L^2(\mathbb{T})$  é definido como o espaço das classes de equivalência da relação  $\sim$  sobre o conjunto das funções quadrado integráveis definida como

$$f \sim g \iff \int_{\mathbb{T}} |f - g|^2 dm = 0.$$

**Proposição 3.2.14.** O espaço  $L^2(\mathbb{T})$  é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} dm.$$

Nosso objetivo será encontrar um sistema ortonormal completo para o espaço  $L^2(\mathbb{T})$ , para isso, relembramos a Fórmula de Euler e algumas propriedades que derivam dela.

**Definição 3.2.15** (Fórmula de Euler). Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , definimos

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

**Proposição 3.2.16.** Para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , temos  $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$  e  $|e^{i\theta}| = 1$ .

*Demonstração.* Basta observar que

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta = \overline{e^{i\theta}},$$

pois  $\cos$  é uma função par e  $\sin$  é uma função ímpar.

Para a segunda afirmação, basta observar que

$$|e^{i\theta}| = e^{i\theta} \overline{e^{i\theta}} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad \blacksquare$$

Definimos então, para todo  $u \in \mathbb{Z}$ , a função

$$\varphi_u: \begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [x] & \longmapsto & e^{2\pi i u x}. \end{array}$$

Observe que essas funções estão bem definidas, pois, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , temos

$$e^{2\pi i u(x+k)} = \cos(2\pi u(x+k)) + i \sin(2\pi u(x+k)) = \cos(2\pi u x) + i \sin(2\pi u x) = e^{2\pi i u x}.$$

**Proposição 3.2.17.** Para todos inteiros  $u$  e  $v$ , temos

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_u \overline{\varphi_v} dm = \begin{cases} 1, & \text{se } u = v; \\ 0, & \text{se } u \neq v. \end{cases}$$

*Demonstração.* Basta observar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \varphi_u \overline{\varphi_v} dm &= \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i u x} e^{-2\pi i v x} dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i (u-v)x} dm(x) \\ &= \begin{cases} \int_{\mathbb{T}} 1 dm, & \text{se } u = v \\ \int_{\mathbb{T}} (\cos(2\pi(u-v)x) + i \sin(2\pi(u-v)x)) dm(x), & \text{se } u \neq v \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } u = v \\ 0, & \text{se } u \neq v \end{cases}. \end{aligned}$$

Isso significa que as  $\varphi_u$  são elementos de  $L^2(\mathbb{T})$  e que formam um sistema ortonormal. A seguinte definição nos dá os elementos do subespaço vetorial gerado por essas funções.

**Definição 3.2.18.** Um *polinômio trigonométrico* é uma combinação linear (finita) dos  $\varphi_u$ 's.

O teorema abaixo é uma versão fortalecida do Teorema de Stone–Weierstrass.

**Teorema 3.2.19.** Para toda função  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , existe uma sequência  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polinômios trigonométricos tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para todo  $n \geq n_0$  e todo  $x \in \mathbb{T}$ .

Ou seja, toda função contínua em  $L^2(\mathbb{T})$  pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos.

**Corolário 3.2.20.** O conjunto  $\{\varphi_u : u \in \mathbb{Z}\}$  é um sistema ortonormal completo

Apresentaremos inicialmente um rascunho da prova desse corolário para funções contínuas.

*Demonstração (rascunho).* Suponha que  $f \in L^2(\mathbb{T})$  é uma função contínua mas temos

$$\left\| f - \sum_{u \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_u \rangle \varphi_u \right\| > 0.$$

Seja  $g = f - \sum_{u \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_u \rangle \varphi_u$ . Então sabemos que  $g$  não é a função nula.

Observe que, para todo  $u \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\langle g, \varphi_u \rangle = \langle f, \varphi_u \rangle - \langle f, \varphi_u \rangle = 0.$$

Se  $g$  for contínua, então existirá uma sequência de polinômios trigonométricos  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que se aproximará uniformemente de  $g$ , então teremos

$$0 = \left\langle g, \sum_{u \in \mathbb{Z}} \langle p_n, \varphi_u \rangle \varphi_u \right\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle g, g \rangle > 0. \quad \square$$

### 3.3 Análise Harmônica Aplicada à Densidade Superior

20/05/2014 – Fernando Mário de Oliveira Filho

Ao longo dessa subseção, todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  considerados serão Lebesgue-mensuráveis e, por brevidade, omitiremos essa informação.

Enunciamos agora um fato de teoria da medida.

**Fato 3.3.1.** As funções contínuas são densas em  $L^2(\mathbb{T})$ , i.e., para toda  $f \in L^2(\mathbb{T})$  e todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $g \in L^2(\mathbb{T})$  contínua tal que  $\|f - g\| < \varepsilon$ .

O exercício abaixo nos dá uma definição equivalente de sistemas ortonormais completos.

**Exercício resolvido 3.3.2.** Seja  $\{u_j : j \in J\}$  um sistema ortonormal em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então  $\{u_j : j \in J\}$  é sistema ortonormal completo se e somente se não existe vetor  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $\|x\| \neq 0$  e  $\langle x, u_j \rangle = 0$  para todo  $j \in J$ .

Munidos desse fato e desse exercício, podemos completar a prova do Corolário 3.2.20 (que diz que  $\{\varphi_u : u \in \mathbb{Z}\}$  é um sistema ortonormal completo).

*Demonstração do Corolário 3.2.20.* Suponha que  $\{\varphi_u : u \in \mathbb{Z}\}$  não é completo. Então, pelo Exercício 3.3.2, sabemos que existe  $f \in L^2(\mathbb{T})$  tal que  $\|f\| \neq 0$ , mas  $\langle f, \varphi_u \rangle = 0$  para todo  $u \in \mathbb{Z}$ .

Pelo Fato 3.3.1, sabemos que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $g_\varepsilon \in L^2(\mathbb{T})$  contínua tal que  $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$ .

Por outro lado, pelo Teorema 3.2.19, temos que, existe  $p_\varepsilon$  polinômio trigonométrico tal que  $|g_\varepsilon(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in \mathbb{T}$ .

Como  $p_\varepsilon$  é polinômio trigonométrico, temos que  $p_\varepsilon$  é combinação linear (finita) dos  $\varphi_u$ 's, logo  $\langle f, p_\varepsilon \rangle = 0$ .

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= |\langle f, f \rangle| = |\langle f, f \rangle - \langle f, p_\varepsilon \rangle| \\ &\leq |\langle f, f \rangle - \langle f, g_\varepsilon \rangle| + |\langle f, g_\varepsilon \rangle - \langle f, p_\varepsilon \rangle| = |\langle f, f - g_\varepsilon \rangle| + |\langle f, g_\varepsilon - p_\varepsilon \rangle| \\ &\leq \|f\| \|f - g_\varepsilon\| + \|f\| \|g_\varepsilon - p_\varepsilon\| \\ &\leq \|f\| \varepsilon + \|f\| \left( \int_{\mathbb{T}} \varepsilon^2 dm \right)^{1/2} \\ &= 2\varepsilon \|f\|, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Como  $\|f\| \neq 0$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , temos  $\|f\| \leq 2\varepsilon$ , o que é um absurdo, pois implica que  $\|f\| = 0$ . ■

Usaremos agora a ideia de  $L^2(\mathbb{T})$  para dimensões maiores e períodos diferentes de 1.

**Definição 3.3.3.** Seja  $c > 0$ . O espaço das funções quadrado integráveis em  $\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$  (denotado por  $L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n))$ ) é definido como

$$L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)) = \left\{ f: \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} |f|^2 dm < +\infty \right\},$$

onde  $m$  denota a medida induzida em  $\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$  pela medida de Lebesgue.

E novamente, temos um espaço de Hilbert.

**Proposição 3.3.4.** O espaço  $L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n))$  é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} dm.$$

**Observação.** O fator  $1/c^n$  foi incluído apenas como uma normalização que se mostrará útil no futuro.

A proposição abaixo afirma que  $L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n))$  também possui um sistema ortonormal completo enumerável.

**Proposição 3.3.5.** Seja  $c > 0$  e, para todo  $u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n$ , seja

$$\begin{aligned} \varphi_u: \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{2\pi i\langle u, x \rangle}, \end{aligned}$$

onde  $\langle u, x \rangle$  denota o produto interno euclidiano comum  $\sum_{j=1}^n u_j x_j$ .

Então  $\{\varphi_u : u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n\}$  é um sistema ortonormal completo de  $\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$ .

**Observação.** Note que de fato as  $\varphi_u$ 's estão bem definidas, pois para todo  $v \in c\mathbb{Z}^n$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$e^{2\pi i\langle u, x+v \rangle} = e^{2\pi i\langle u, x \rangle + 2\pi i\langle u, v \rangle} = e^{2\pi i\langle u, x \rangle} e^{2\pi i\langle u, v \rangle} = e^{2\pi i\langle u, x \rangle},$$

onde a última igualdade segue do fato que  $\langle u, v \rangle \in \mathbb{Z}^n$  (pois  $u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n$  e  $v \in c\mathbb{Z}^n$ ).

A análise harmônica sobre  $\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$  servirá para estudar conjuntos  $c\mathbb{Z}^n$  periódicos em  $\mathbb{R}^n$  e fornecerá uma cota superior para a densidade superior máxima  $m_1(\mathbb{R}^n)$  de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . O exercício abaixo nos diz que podemos considerar apenas conjuntos periódicos ao calcular  $m_1(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercício resolvido 3.3.6.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos

$$\begin{aligned} m_1(\mathbb{R}^n) &= \sup\{\bar{\delta}(A) : A \subset \mathbb{R}^n \text{ é Lebesgue-mensurável e evita a distância } 1 \\ &\text{e existe } c > 0 \text{ tal que } A = A + c\mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

Definimos agora, para todo subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  que é  $c\mathbb{Z}^n$  periódico, sua função característica como

$$\begin{aligned} \chi_A^{(c)}: \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{se } y \in A; \\ 0, & \text{se } y \notin A; \end{cases} \end{aligned}$$

e observamos que  $\chi_A^{(c)} \in L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n))$ , pois

$$\int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} |\chi_A^{(c)}|^2 dm = m(A \cap [0, c]^n).$$

Definimos também, para todo  $x \in \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$  o operador de deslocamento (que opera sobre funções de  $\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$  a  $\mathbb{C}$ ) como

$$\begin{aligned} L_x^{(c)}: L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)) \\ f &\longmapsto f_x: \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad y \longmapsto f(y-x). \end{aligned}$$

Observe que, em particular, temos  $L_x^{(c)} \chi_A^{(c)} = (\chi_A^{(c)})_x = \chi_{A+x}^{(c)}$ , pois, para todo  $y \in \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$ , temos

$$\begin{aligned} L_x^{(c)} \chi_A^{(c)}(y) &= \chi_A^{(c)}(y-x) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } y-x \in A; \\ 0, & \text{se } y-x \notin A; \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } y \in A+x; \\ 0, & \text{se } y \notin A+x; \end{cases} \\ &= \chi_{A+x}^{(c)}(y). \end{aligned}$$

Note que o operador  $L_x^{(c)}$  preserva norma, i.e., se  $f \in L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n))$ , então

$$\begin{aligned} \|L_x^{(c)} f\|^2 &= \|f_x\|^2 = \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} |f(y-x)|^2 dm \\ &= \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} |f|^2 dm = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, definimos o operador de autocorrelação como

$$\begin{aligned} \Phi_c: L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)) \\ f &\longmapsto \Phi_c f: \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \qquad \qquad \qquad x \longmapsto \langle f, L_x^{(c)} f \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, para todo  $x \in \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$ , temos

$$\begin{aligned} \Phi_c f(x) &= \langle f, L_x^{(c)} f \rangle = \langle f, f_x \rangle = \widehat{f}(f_x) \\ &= \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} f(y) \overline{f(y-x)} dm(y). \end{aligned}$$

Observe que de fato  $\Phi_c f \in L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n))$ , pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} |\Phi_c f|^2 dm &= \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} |\langle f, f_x \rangle|^2 dm \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} \|f\|^2 \|f_x\|^2 dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} \|f\|^4 dm \\ &= c^n \|f\|^4 < +\infty. \end{aligned}$$

Enunciamos agora uma propriedade muito útil do operador de autocorrelação quando aplicado a uma função característica.

**Proposição 3.3.7.** Se  $c > 0$  e  $A \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto  $c\mathbb{Z}^n$ -periódico (i.e., temos  $A + c\mathbb{Z}^n = A$ ), então, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\Phi_c \chi_A^{(c)}(x) = \bar{\delta}(A \cap (A + x)).$$

*Demonstração.* Basta observar que

$$\begin{aligned} \Phi_c \chi_A^{(c)}(x) &= \langle \chi_A^{(c)}, L_x^{(c)} \chi_A^{(c)} \rangle = \langle \chi_A^{(c)}, \chi_{A+x}^{(c)} \rangle \\ &= \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} \chi_A^{(c)}(y) \overline{\chi_{A+x}^{(c)}(y)} dm(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} \chi_{A \cap (A+x)}^{(c)}(y) dm(y) \\ &= \frac{m(A \cap (A+x)) \cap [0, c]^n}{m([0, c]^n)} \\ &= \bar{\delta}(A \cap (A+x)), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Exercício 3.1.13.

**Observação.** É aqui que o fator de normalização  $1/c^n$  do produto interno mostra-se útil. ■

**Corolário 3.3.8.** Para todo  $c > 0$  e  $A \subset \mathbb{R}^n$  conjunto  $c\mathbb{Z}^n$ -periódico, temos

$$\Phi_c \chi_A^{(c)}(0) = \bar{\delta}(A).$$

Ademais, se  $A$  evita distância 1, então, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $\|x\| = 1$ , temos  $\Phi_c \chi_A^{(c)}([x]) = 0$ .

O exercício abaixo nos diz que a Identidade de Parseval (Corolário 3.2.5) continua válida para dimensão infinita e sistemas ortonormais completos.

**Exercício resolvido 3.3.9** (Identidade de Parseval). Se  $\{u_j : j \in J\}$  é um sistema ortonormal completo de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $x$  e  $y$  são dois vetores de  $\mathcal{H}$ , então

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \widehat{x}(u_j) \overline{\widehat{y}(u_j)}.$$

E o exercício abaixo nos dá a unicidade da representação através dos coeficientes de Fourier.

**Exercício resolvido 3.3.10.** Se  $\{u_j : j \in J\}$  é um sistema ortonormal completo de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $(\alpha_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  é uma sequência de coeficientes tal que  $\sum_{j \in J} \alpha_j u_j = x \in \mathcal{H}$  (i.e., a série converge a  $x$  em norma), então, para todo  $j \in J$ , temos  $\widehat{x}(u_j) = \alpha_j$ .

Estamos agora interessados em calcular os coeficientes de Fourier de  $\Phi_c f$  no sistema ortonormal dos  $\varphi_u$ 's.

**Proposição 3.3.11.** Seja  $c > 0$  e  $f \in L^2$ . Se  $u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n$ , então temos

$$\widehat{\Phi_c f}(\varphi_u) = \left| \widehat{f}(\varphi_u) \right|^2.$$

Em particular, se  $A \in \mathbb{R}^n$  é um conjunto  $c\mathbb{Z}^n$ -periódico, então temos

$$\widehat{\Phi_c \chi_A^{(c)}}(\varphi_0) = \bar{\delta}(A)^2.$$

*Demonstração.* Observe primeiramente que, para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)$ , temos

$$\begin{aligned} L_x^{(c)} f(y) &= f_x(y) = f(y-x) \\ &= \sum_{u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\varphi_u) \varphi_u(y-x) \\ &= \sum_{u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\varphi_u) \varphi_u(y) \varphi_u(-x). \end{aligned}$$

Logo, pelo Exercício 3.3.10, temos que  $\widehat{f_x}(\varphi_u) = \widehat{f}(\varphi_u) \varphi_u(-x)$ .  
Pela Identidade de Parseval (Exercício 3.3.9), temos

$$\begin{aligned} \Phi_c f &= \left\langle f, L_x^{(c)} f \right\rangle = \langle f, f_x \rangle \\ &= \sum_{u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\varphi_u) \overline{\widehat{f_x}} \\ &= \sum_{u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\varphi_u) \overline{\widehat{f}(\varphi_u) \varphi_u(-x)} \\ &= \sum_{u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n} \left| \widehat{f}(\varphi_u) \right|^2 \varphi_u(x). \end{aligned}$$

Logo, novamente pelo Exercício 3.3.10, temos que  $\widehat{\Phi_c f}(\varphi_u) = \left| \widehat{f}(\varphi_u) \right|^2$ .  
Para a segunda afirmação, basta observar que

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi_c \chi_A^{(c)}}(\varphi_0) &= \left| \widehat{\chi_A^{(c)}}(\varphi_0) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)} \chi_A^{(c)} \overline{\text{Idm}} \right|^2 \\ &= \bar{\delta}(A)^2, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Exercício 3.1.13. ■

Finalmente, isso nos dá uma forma de se obter cotas superiores para  $m_1(\mathbb{R}^n)$ .

**Corolário 3.3.12.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos

$$m_1(\mathbb{R}^n) \leq \sup \begin{cases} \widehat{\Phi}(\varphi_0) \\ \Phi(0) = 1; \\ \Phi(x) = 0, & \text{se } \|x\| = 1; \\ \widehat{\Phi}(\varphi_u) \in \mathbb{R}_+, & \text{para todo } u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n; \\ \Phi \in L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)), & \text{com } \Phi(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)) \subset \mathbb{R}; \\ c > 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Basta observar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existem  $c > 0$  e  $A$  subconjunto  $c\mathbb{Z}^n$ -periódico de  $\mathbb{R}^n$  que evita distância 1 tais que  $m_1(\mathbb{R}^n) \leq \bar{\delta}(A) - \varepsilon$  (e com  $\bar{\delta}(A) > 0$ ).

Então, tomando  $\Phi = \Phi_c \chi_A^{(c)} / \bar{\delta}(A)$ , temos que  $\Phi$  é solução viável do problema de otimização em questão, pois

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \frac{\Phi_c \chi_A^{(c)}(0)}{\bar{\delta}(A)} = \frac{\bar{\delta}(A)}{\bar{\delta}(A)} = 1; \\ \Phi(x) &= 0, \text{ se } \|x\| = 1; \end{aligned}$$

pelo Corolário 3.3.8;

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(\varphi_0) &= \frac{\bar{\delta}(A)^2}{\bar{\delta}(A)} = \bar{\delta}(A); \\ \widehat{\Phi}(\varphi_u) &\geq 0, \text{ para todo } u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n; \end{aligned}$$

pela Proposição 3.3.11 e  $\Phi$  só atinge valores reais pela Proposição 3.3.7. ■

**Observação.** Note que o uma solução ótima do problema de otimização em questão não precisa corresponder a uma  $\Phi_c f$  para alguma  $f \in L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n))$ , muito menos precisa corresponder a uma  $\Phi_c \chi_A^{(c)}$  para algum  $A$  e um  $c > 0$ .

### 3.4 Uma Nova Cota para Densidade Superior

27/05/2014 – Fernando Mário de Oliveira Filho

Na última seção vimos uma cota para  $m_1(\mathbb{R}^n)$  através do Corolário 3.3.12 que utilizava o operador de autocorrelação.

Reenunciamos a cota abaixo já substituindo  $\Phi$  por sua expansão em coeficientes de Fourier.

**Corolário 3.4.1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos

$$m_1(\mathbb{R}^n) \leq \sup \begin{cases} \widehat{\Phi}(\varphi_0) \\ \sum_{u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n} \widehat{\Phi}(\varphi_u) = 1; \\ \sum_{u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n} \widehat{\Phi}(\varphi_u) \varphi_u(x) = 0, & \text{se } \|x\| = 1; \\ \widehat{\Phi}(\varphi_u) \in \mathbb{R}_+, & \text{para todo } u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n; \\ \Phi \in L^2(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)), & \text{com } \Phi(\mathbb{R}^n/(c\mathbb{Z}^n)) \subset \mathbb{R}; \\ c > 0. \end{cases}$$

Note que podemos adicionar a restrição  $\widehat{\Phi}(\varphi_u) = \widehat{\Phi}(\varphi_{-u})$  sem alterar o valor do supremo, pois, como

todos os coeficientes de Fourier  $\widehat{\Phi}(\varphi_u)$  de uma solução viável  $\Phi$  são reais, temos

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(\varphi_u) &= \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n / (c\mathbb{Z}^n)} \Phi \overline{\varphi_u} dm \\ &= \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n / (c\mathbb{Z}^n)} \Phi \varphi_{-u} dm \\ &= \overline{\frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n / (c\mathbb{Z}^n)} \Phi \overline{\varphi_{-u}} dm} \\ &= \overline{\langle \Phi, \varphi_{-u} \rangle} \\ &= \widehat{\Phi}(\varphi_{-u}).\end{aligned}$$

Podemos agora relaxar a cota acima usando  $\widehat{\Phi}$  como variável e considerando  $\mathbb{R}^n$  inteiro e não apenas uma grade  $c^{-1}\mathbb{Z}^n$ .

**Corolário 3.4.2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos

$$\begin{aligned}m_1(\mathbb{R}^n) &\leq \sup && \gamma(0) \\ &&& \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) = 1; \\ &&& \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \varphi_u && \text{convergente em norma } L^2; \\ &&& \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \varphi_u(x) = 0, && \text{se } \|x\| = 1; \\ &&& \gamma(u) \in \mathbb{R}_+, && \text{para todo } u \in \mathbb{R}^n; \\ &&& \gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ && \text{com suporte } c\mathbb{Z}^n\text{-periódico para um } c > 0; \\ &&& \gamma(u) = \gamma(-u) && \text{para todo } u \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Essa cota é válida pois se  $(c, \Phi)$  é solução do problema do Corolário 3.4.1, então a função

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto \begin{cases} \widehat{\Phi}(\varphi_u), & \text{se } u \in c^{-1}\mathbb{Z}^n; \\ 0, & \text{se } u \notin c^{-1}\mathbb{Z}^n; \end{cases}\end{aligned}$$

é solução viável do problema do Corolário 3.4.2.

Reformularemos o problema ainda mais uma vez, observando que se  $\gamma$  é solução do problema do Corolário 3.4.2, então, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , tomamos

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \frac{1}{m_{S^{n-1}}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \varphi_u(\theta \|x\|) dm_{S^{n-1}}(\theta), \\ &= \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \frac{1}{m_{S^{n-1}}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \varphi_u(\theta \|x\|) dm_{S^{n-1}}(\theta),\end{aligned}$$

onde  $S^{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^n : \|\theta\| = 1\}$  e  $m_{S^{n-1}}$  é a medida de superfície de Lebesgue em  $S^{n-1}$ .

E definindo

$$\Omega_n(t) = \frac{1}{m_{S^{n-1}}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} e^{it\theta_1} dm_{S^{n-1}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n),$$

temos que

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \frac{1}{m_{S^{n-1}}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle u, \theta \|x\| \rangle} dm_{S^{n-1}}(\theta) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \frac{1}{m_{S^{n-1}}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} e^{i \langle 2\pi \|x\| u, \theta \rangle} dm_{S^{n-1}}(\theta) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \Omega_n(2\pi \|x\| \|u\|) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t) \Omega_n(2\pi \|x\| t),\end{aligned}$$

onde  $\alpha(t) = \sum_{u \in \mathbb{R}^n: \|u\|=t} \gamma(u)$  e a penúltima igualdade segue do fato que, como o integrando depende apenas do produto interno entre  $u$  e  $\theta$  e a medida  $m_{S^{n-1}}$  é invariante sob rotações, então podemos aplicar uma rotação que leva  $u$  em um múltiplo do vetor primeiro vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$  (que é  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ ) sem alterar o valor da integral.

Observe agora que, como  $\Omega_n(0) = 1$ , temos

$$\zeta(0) = \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t) = \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) = 1.$$

Ademais, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $\|x\| = 1$ , temos

$$\zeta(x) = \frac{1}{m_{S^{n-1}}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \varphi_u(\theta \|x\|) dm_{S^{n-1}}(\theta) = 0,$$

pois  $\sum_{u \in \mathbb{R}^n} \gamma(u) \varphi_u(\theta \|x\|) = 0$ , mas por outro lado

$$0 = \zeta(x) = \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t) \Omega_n(2\pi \|x\| t) = \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t) \Omega_n(2\pi t).$$

Como  $\gamma(u) \in \mathbb{R}_+$  para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $\alpha(t) \in \mathbb{R}_+$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Em particular, temos  $\alpha(0) = \gamma(0)$ , pois  $\Omega_n(0) = 1$ .

Isso nos dá o seguinte corolário.

**Corolário 3.4.3.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos

$$\begin{aligned} m_1(\mathbb{R}^n) &\leq \sup && \alpha(0) \\ &&& \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t) = 1; \\ &&& \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t) \Omega_n(2\pi t) = 0; \\ &&& \alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, && \text{com suporte enumerável;} \\ &&& c > 0. \end{aligned}$$

Observe que o problema do corolário acima é um problema de programação linear de infinitas variáveis e apenas duas restrições lineares.

Resolveremos agora esse problema analiticamente. Observe inicialmente que existem soluções de valores positivos, pois  $m_1(\mathbb{R}^n) > 0$ .

Suponha que  $\alpha$  é uma solução de valor  $\alpha(0) > 0$  e suponha que  $a > 0$  é um real positivo tal que  $\alpha(a) > 0$  e que  $\Omega_n(2\pi a) > 0$  e tome

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(0) + \Omega_n(2\pi a)\alpha(a), & \text{se } t = 0; \\ 0, & \text{se } t = a; \\ \alpha(t), & \text{se } t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, a\}. \end{cases}$$

Tome também  $\alpha' = \beta / \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \beta(t)$  e observe que

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha'(t) &= 1; \\ \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha'(t) \Omega_n(2\pi t) &= \left( \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \beta(t) \right)^{-1} \left( \beta(0) + \sum_{t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}} \beta(t) \Omega_n(2\pi t) \right) \\ &= \left( \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \beta(t) \right)^{-1} \left( \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t) \Omega_n(2\pi t) \right) \\ &= 0; \end{aligned}$$

logo  $\alpha'$  é solução do problema de programação linear e possui valor

$$\alpha'(0) = \frac{\alpha(0) + \Omega_n(2\pi a)\alpha(a)}{1 + \alpha(a)(\Omega_n(2\pi a) - 1)}.$$

Como  $|\Omega(t)| \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , temos

$$\begin{aligned} \Omega_n(2\pi a) &> 0 \geq \alpha(0)(\Omega(2\pi a) - 1); \\ \alpha(0) + \Omega_n(2\pi a)\alpha(a) &> \alpha(0) + \alpha(0)\alpha(a)(\Omega(2\pi a) - 1); \\ \alpha'(0) = \frac{\alpha(0) + \Omega_n(2\pi a)\alpha(a)}{1 + \alpha(a)(\Omega_n(2\pi a) - 1)} &> \alpha(0). \end{aligned}$$

Isso significa que, a partir de soluções  $\alpha$  com suporte  $I$  e que possuem  $\alpha(a) > 0$  para um  $a > 0$  tal que  $\Omega_n(2\pi a) > 0$ , podemos construir uma solução  $\alpha'$  de valor maior e suporte contido em  $I$ . Como  $I$  é enumerável (e o espaço viável do problema restrito a suportes contidos em  $I$  é fechado), podemos construir  $\alpha''$  com suporte contido em  $I$  que possui valor maior que  $\alpha(0)$  e tal que não existe  $a > 0$  com  $\Omega_n(2\pi a) > 0$  e  $\alpha''(a) > 0$ .

Então podemos considerar apenas soluções  $\alpha$  tais que  $\Omega_n(2\pi a) < 0$  para todo  $a > 0$  no suporte de  $\alpha$ .

Suponha agora que  $\alpha$  é uma tal solução e que  $a, b > 0$  são reais positivos no suporte de  $\alpha$  tais que  $|\Omega_n(2\pi a)| < |\Omega_n(2\pi b)|$  e tome

$$\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = a; \\ \alpha(b) + \frac{\Omega_n(2\pi a)}{\Omega_n(2\pi b)}\alpha(a) = \alpha(b) + \frac{|\Omega_n(2\pi a)|}{|\Omega_n(2\pi b)|}\alpha(a), & \text{se } t = b; \\ \alpha(t), & \text{se } t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a, b\}. \end{cases}$$

Tome novamente  $\alpha' = \beta / \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \beta(t)$  e observe que

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha'(t) &= 1; \\ \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha'(t)\Omega_n(2\pi t) &= \left( \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \beta(t) \right)^{-1} \left( \beta(b)\Omega_n(2\pi b) + \sum_{t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{b\}} \beta(t)\Omega_n(2\pi t) \right) \\ &= \left( \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \beta(t) \right)^{-1} \left( \sum_{t \in \mathbb{R}_+} \alpha(t)\Omega_n(2\pi t) \right) \\ &= 0; \end{aligned}$$

logo  $\alpha'$  é solução do problema de programação linear e possui valor

$$\alpha'(0) = \alpha(0) \left( 1 + \alpha(a) \left( \frac{|\Omega_n(2\pi a)|}{|\Omega_n(2\pi b)|} - 1 \right) \right)^{-1} > \alpha(0),$$

pois  $|\Omega_n(2\pi a)| < |\Omega_n(2\pi b)|$ .

Novamente, isso significa que podemos considerar apenas soluções  $\alpha$  tais que  $\Omega_n(2\pi a) = \Omega_n(2\pi a') < 0$  para todos  $a, a' > 0$  no suporte de  $\alpha$ .

Tome então uma tal solução e suponha que existem  $a, a' > 0$  distintos no suporte de  $\alpha$ .

Então tomando

$$\alpha'(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = a; \\ \alpha(a) + \alpha(a'), & \text{se } t = a'; \\ \alpha(t), & \text{se } t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a, a'\}; \end{cases}$$

temos que  $\alpha'$  é uma solução com o mesmo valor que  $\alpha$  e por argumento similar, isso significa que podemos considerar apenas soluções que possuem suporte com apenas dois pontos (um deles sendo 0).

Seja  $\alpha$  uma solução com apenas os pontos 0 e  $t > 0$  em seu suporte. Sabemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha(0) + \alpha(t); \\ 0 &= \alpha(0) + \alpha(t)\Omega_n(2\pi t); \end{aligned}$$

logo temos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{1}{1 - \Omega_n(2\pi t)}; \\ \alpha(0) &= -\frac{\Omega_n(2\pi t)}{1 - \Omega_n(2\pi t)}. \end{aligned}$$

A função  $\Omega_n(t)$  é muito estudada e sabe-se que ela possui mínimo e máximo globais em  $\mathbb{R}_+$ . Uma fórmula alternativa para  $\Omega_n$  é

$$\Omega_n(t) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{t}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(t),$$

onde  $J_{(n-2)/2}$  é a Função de Bessel (e  $\Gamma$  é a função gama usual).

Seja então  $M = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \Omega_n(t) > -1$  e observe que, como a função  $(-1, 1) \ni x \mapsto -x/(1-x) \in \mathbb{R}$  é decrescente, temos que

$$\alpha(0) \leq -\frac{M}{1-M}.$$

Por outro lado, se  $t^* > 0$  é tal que  $\Omega_n(2\pi t^*) = M$ , então a solução  $\alpha^*$  que possui suporte  $\{0, t^*\}$  possui valor  $-M/(1-M)$ . Portanto, temos que  $\alpha^*$  é solução ótima do programa linear. Então temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.4.4.** Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos  $m_1(\mathbb{R}^n) \leq -M/(1-M)$ , onde

$$\begin{aligned} M &= \min_{t \in \mathbb{R}_+} \Omega_n(t) \\ &= \min_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{m_{S^{n-1}}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} e^{it\theta_1} dm_{S^{n-1}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ &= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{t}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(t), \end{aligned}$$

e  $J_{(n-2)/2}$  é a Função de Bessel.

Lembramos que cotas superiores para  $m_1(\mathbb{R}^n)$  implicam cotas inferiores para  $\chi_m(\mathbb{R}^n)$  e apresentamos abaixo uma comparação entre algumas cotas que podem ser obtidas com esse corolário e as cotas conhecidas anteriormente (para  $\mathbb{R}^2$  as cotas são piores do que as antigas).

Antiga	Nova
$m_1(\mathbb{R}^2) \leq 0.279$	$m_1(\mathbb{R}^2) \leq 0.2871$
$m_1(\mathbb{R}^3) \leq 0.1875$	$m_1(\mathbb{R}^3) \leq 0.1784$
$\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq 5$	$\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq 4$
$\chi_m(\mathbb{R}^3) \geq 6$	$\chi_m(\mathbb{R}^3) \geq 6$
$\chi_m(\mathbb{R}^4) \geq 11$	$\chi_m(\mathbb{R}^4) \geq 13$

## 4 Lema de Sperner e Aplicações

---

03/06/2014 – Fabrício Caluza Machado

---

Essa seção é baseada em [9].

Inicialmente, enunciaremos informalmente as aplicações do Lema de Sperner em que estamos interessados.

**Problema 4.0.5** (Ponto Fixo). Seja  $f: A \rightarrow A$  uma função. Sob que condições (topológicas) a função  $f$  possui um ponto fixo, i.e., sob que condições existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = x$ .

**Problema 4.0.6** (Divisão de Bolo). Considere um bolo (representado pelo intervalo  $[0, 1]$ ) e  $n$  jogadores  $p_1, p_2, \dots, p_n$  que possuem preferências por partes desse bolo. Sob que condições (topológicas) existe uma partição do bolo  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tal que cada jogador prefere uma parte distinta da partição?

**Problema 4.0.7** (Divisão de Aluguel). Considere uma casa com quartos  $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  e com um custo de aluguel igual a 1 (sem perda de generalidade) e  $n$  jogadores que possuem preferências de quarto dependentes do valor do aluguel.

O problema consiste em encontrar condições (topológicas) em que existe uma divisão do aluguel da casa para os quartos, representado por uma sequência  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tal que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  tal que cada jogador prefere um quarto distinto da partição.

## 4.1 Combinações afins

Nesta seção relembremos conceitos e propriedades relacionadas a combinações afins em  $\mathbb{R}^N$ .

**Definição 4.1.1.** Um vetor  $x \in \mathbb{R}^N$  é dito *combinação afim* dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$  se existem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = x.$$

O *espaço afim* gerado por um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^N$  (denotado por  $\text{afim}(A)$ ) é o conjunto de todas as combinações afins de um número finito de elementos de  $A$ , ou, em fórmulas, temos

$$\text{afim}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ e } \forall i \in [n], v_i \in A \right\}.$$

Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^N$  é dito *afim dependente* se existe uma sequência de escalares  $(\lambda_a)_{a \in A} \in \mathbb{R}^A$  com

$$\{a \in A : \lambda_a \neq 0\} \text{ finito mas não vazio} \quad \text{e} \quad \sum_{a \in A} \lambda_a = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{a \in A} \lambda_a a = 0.$$

Um subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  que não é afim dependente é dito *afim independente* e muitas vezes diremos que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  é afim (in)dependente quando, na verdade, estamos nos referindo a  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

**Proposição 4.1.2.** Vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$  são afim independentes se e somente se nenhum dos  $v_i$ 's é combinação afim dos demais.

*Demonstração.* Suponha que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são afim dependentes, i.e., existem escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0.$$

Sem perda de generalidade, suponha que  $\lambda_1 \neq 0$  e observe que

$$\sum_{i=2}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} = 1 \quad \text{e} \quad v_1 = \sum_{i=2}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i,$$

logo  $v_1$  é combinação afim de  $v_2, v_3, \dots, v_n$ .

Suponha agora que  $v_1$  é combinação afim de  $v_2, v_3, \dots, v_n$ , i.e., existem escalares  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i = v_1.$$

Tomando  $\lambda_1 = -1$ , temos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0,$$

ou seja, os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são afim dependentes (pois  $\lambda_1 \neq 0$ ). ■

**Proposição 4.1.3.** Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$  vetores quaisquer.

Então  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são afim independentes se e somente se  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_n - v_1$  são linearmente independentes.

*Demonstração.* Suponha que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são afim dependentes, i.e., existem escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0.$$

Observe agora que

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \left( \sum_{i=2}^n \lambda_i \right) v_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i (v_i - v_1) = \sum_{i=2}^n \lambda_i (v_i - v_1),$$

pois  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ . Ademais, sabemos que pelo menos um dentre  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  é diferente de  $\lambda_1$  (caso contrário a soma não seria nula), logo  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_n - v_1$  são linearmente dependentes.

Suponha agora que  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_n - v_1$  são linearmente dependentes, i.e., existem escalares  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i (v_i - v_1) = 0.$$

Tomando  $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^n \lambda_i$ , temos

$$0 = \sum_{i=2}^n \lambda_i (v_i - v_1) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ , logo  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são afim dependentes. ■

**Corolário 4.1.4.** Independência afim é invariante por translação, i.e., se  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$  são afim independentes e  $x \in \mathbb{R}^N$  é um vetor qualquer, então  $v_1 + x, v_2 + x, \dots, v_n + x$  são afim independentes.

*Demonstração.* Basta observar que, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , os vetores  $v_1 + x, v_2 + x, \dots, v_n + x$  são afim independentes se e somente se  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_n - v_1$  são linearmente independentes. ■

Referimos o leitor à Seção 1.4 para relembrar as definições associadas a combinações convexas e definimos abaixo a noção de dimensão de um conjunto convexo.

**Definição 4.1.5.** A *dimensão* de um subconjunto convexo  $A$  de  $\mathbb{R}^N$  (denotada por  $\dim(A)$ ) é a cardinalidade de um maior subconjunto de  $A$  afim independente menos um, ou, em fórmulas, temos

$$\dim(A) = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \in A \text{ afim independente}\}.$$

**Observação.** A dimensão de qualquer subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^N$  no sentido de subconjunto convexo coincide com a dimensão no sentido de espaço vetorial.

Abaixo definimos a noção de simplexo, que são os conjuntos convexas mais simples em certo sentido.

**Definição 4.1.6.** Um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^N$  é dito *simplexo* se ele é o fecho convexo de um conjunto  $V$  finito não-vazio de pontos afim independentes.

Os elementos de  $V$  são dito de *vértices* de  $S$  e para todo  $V' \subsetneq V$  com  $V' \neq \emptyset$ , o simplexo  $\text{conv}(V')$  é dito *face* de  $S$ . Ademais, se  $\dim(S) = d$  então toda face de dimensão  $d - 1$  é dita *faceta* de  $S$  e toda face de dimensão 1 é dita *aresta* de  $S$ .

**Observação.** A afim independência dos vértices implica que todo ponto do simplexo se escreve de uma única maneira como combinação convexa dos vértices. Isso também significa que o conjunto dos vértices de um simplexo  $S$  é único, i.e., se  $V, V'$  são dois subconjuntos afim independentes de  $\mathbb{R}^N$  tais que  $S = \text{conv}(V) = \text{conv}(V')$ , então  $V = V'$ .

Cabe notar também que os vértices de um simplexo podem ser vistos como faces de dimensão 0.

Enunciamos abaixo uma propriedade interessante de simplexos como exercício.

**Exercício resolvido 4.1.7.** Se  $F$  é uma face de um simplexo  $S \subset \mathbb{R}^N$ , então  $F$  está contido na fronteira de  $S$ .

## 4.2 O Lema de Sperner

Agora apresentaremos algumas definições específicas do Lema de Sperner.

**Definição 4.2.1.** Uma *triangulação* de um simplexo  $S \in \mathbb{R}^N$  de dimensão  $d$  é uma coleção  $\mathcal{T}$  de simplexos de dimensão  $d$  tal que

$$S = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T \quad \text{e} \quad \forall T, U \in \mathcal{T}, T \cap U \text{ ou é vazio ou é face de ambos } T \text{ e } U.$$

Os vértices de simplexos da triangulação são ditos também *vértices* da triangulação e seu conjunto é denotado por  $V(\mathcal{T})$ , ou, em fórmulas, temos

$$V(\mathcal{T}) = \{x \in \mathbb{R}^N : x \text{ é vértice de } T \text{ para algum } T \in \mathcal{T}\}.$$

Uma *Rotulação de Sperner* de  $\mathcal{T}$  é uma coloração de  $V(\mathcal{T})$  com  $d+1$  cores, i.e., uma função  $f: V(\mathcal{T}) \rightarrow [d+1]$  tal que

1. Os vértices de  $S$  recebem cores distintas;
2. Se  $V'$  é um subconjunto dos vértices de  $S$  e  $w \in V(\mathcal{T})$  é um vértice de  $\mathcal{T}$  tal que  $w \in \text{conv}(V')$ , então  $f(w) \in f(V')$ . Ou seja, vértices em uma face  $F$  de  $S$  só podem receber cores dos vértices de  $F$ .

Um simplexo de  $\mathcal{T}$  cujos vértices têm cores distintas é dito *totalmente rotulado* em  $f$ .

**Lema 4.2.2** (Sperner, 1928 [8]). Toda Rotulação de Sperner de uma triangulação de um simplexo gera uma quantidade ímpar de simplexos totalmente rotulados.

*Demonstração.* Provaremos esse lema por indução na dimensão do simplexo.

O caso base é a dimensão 0 em que o simplexo consiste de apenas um ponto e consequentemente a triangulação possui um único simplexo, que é totalmente rotulado.

Suponha então que  $S$  é um simplexo de dimensão  $d \geq 1$  e que o resultado é válido para  $d-1$  e seja  $f$  uma Rotulação de Sperner qualquer de uma triangulação  $\mathcal{T}$  qualquer de  $S$ .

Note que a intersecção de um simplexo  $T$  de  $\mathcal{T}$  com a fronteira de  $S$  (denotada por  $\delta S$ ) ou é vazia ou é uma faceta de  $T$ .

Para toda faceta  $F$  de um simplexo de  $\mathcal{T}$ , seja  $V(F)$  o conjunto dos vértices de  $F$ .

Seja  $G$  o grafo tal que

$$\begin{aligned} V(G) &= \mathcal{T} \cup \{\delta S\}; \\ E(G) &= \{TU : T \cap U \text{ é uma faceta de } T \text{ e } f(V(T \cap U)) = [d]\}; \end{aligned}$$

ou seja, as arestas do grafo  $G$  correspondem exatamente às facetas que receberam todas as cores exceto a cor  $d+1$ .

Seja  $T$  um simplexo qualquer da triangulação  $\mathcal{T}$  tal que  $d_G(T) \geq 1$  e observe que, se os vértices de  $T$  são  $v_1, v_2, \dots, v_{d+1}$  e  $f(v_i) = i$  para todo  $i \in [d]$ , então temos

$$d_G(T) = \begin{cases} 2, & \text{se } f(v_{d+1}) \neq d+1; \\ 1, & \text{se } f(v_{d+1}) = d+1. \end{cases}$$

Portanto, para todo  $T \in \mathcal{T}$ , temos  $d_G(T) \leq 2$  e  $d_G(T) = 1$  se e somente se  $T$  é totalmente rotulado.

Seja  $F$  a face de  $S$  cujos vértices receberam as cores  $1, 2, \dots, d$  e observe que todas as arestas de  $G$  que incidem em  $\delta S$  correspondem a facetas que estão contidas em  $F$  (pois vértices em uma face de  $S$  só podem receber cores dessa face de  $S$ ).

Considere a rotulação  $f' = f|_F$  da triangulação  $\mathcal{T}' = \{T \cap F : T \in \mathcal{T}\} \setminus \{\emptyset\}$ . Observe que de fato  $\mathcal{T}'$  é uma triangulação e que  $f'$  é uma coloração de Sperner de  $\mathcal{T}'$  (pois  $f'$  não atinge  $d+1$  e toda face de  $F$  é face de  $S$ ).

Como  $F$  tem dimensão  $d-1$ , pela hipótese de indução, existe uma quantidade ímpar de simplexos de  $\mathcal{T}'$  totalmente rotulados por  $f'$ . Observe que tais simplexos correspondem exatamente às arestas que incidem em  $\delta S$ , logo  $d_G(\delta S)$  é ímpar.

Como  $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$ , sabemos que há uma quantidade par de vértices com grau ímpar em  $G$ , logo existe uma quantidade ímpar de simplexos em  $\mathcal{T}$  totalmente rotulados por  $f'$  (pois os vértices de grau ímpar são exatamente os simplexos totalmente rotulados e  $\delta S$ ). ■

**Observação.** Como corolário, temos que o grafo construído na demonstração acima pode ser decomposto em circuitos e caminhos cujas extremidades são ou simplexos totalmente rotulados ou  $\delta S$ . Ademais, nessa decomposição sempre há ao menos um caminho com uma extremidade  $\delta S$  (vide Figura 8 para um exemplo).

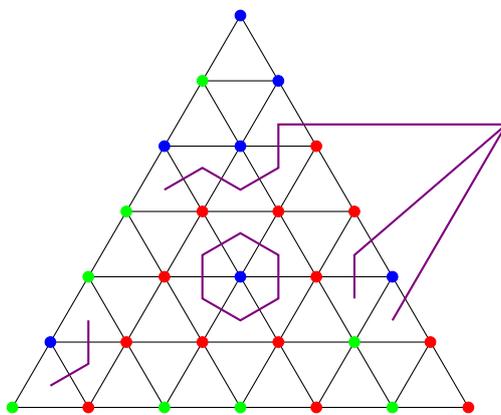


Figura 8: Exemplo de Rotulação de Sperner em dimensão 2. As cores 1, 2, 3 correspondem respectivamente a **vermelho**, **azul** e **verde**. As arestas do grafo estão representadas em **roxo** e o vértice correspondente a  $\delta S$  está representado no exterior de  $S$ .

### 4.3 Aplicações do Lema de Sperner

10/06/2014 – Fabrício Caluza Machado

Abaixo definimos a noção de diâmetro de uma triangulação, que será muito útil ao longo dessa seção.

**Definição 4.3.1.** Se  $T$  é uma triangulação de um simplexo  $A$ , definimos o *diâmetro* de  $T$  como  $\text{diam}(T) = \sup\{\text{diam}(S) : S \in T\}$ .

Iniciamos com uma demonstração alternativa do Teorema de Brouwer do Ponto Fixo.

**Teorema 4.3.2** (Ponto Fixo, Brouwer, 1910 [3]). Seja  $B(\mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ .

Se  $f: B(\mathbb{R}^n) \rightarrow B(\mathbb{R}^n)$  é uma função contínua, então  $f$  possui um ponto fixo, i.e., existe  $x \in B(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f(x) = x$ .

*Demonstração.* Observe primeiramente que basta provar o teorema para funções contínuas  $g: A \rightarrow A$  sobre um conjunto  $A$  homeomorfo a  $B(\mathbb{R}^n)$ . De fato, pois se  $A$  é homeomorfo a  $B(\mathbb{R}^n)$  e o teorema vale para  $A$ , então existe  $\varphi: A \rightarrow B(\mathbb{R}^n)$  contínua, bijetora e com inversa contínua. Logo, para toda  $f: B(\mathbb{R}^n) \rightarrow B(\mathbb{R}^n)$ , temos que  $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  é uma função contínua, logo existe  $y \in A$  tal que  $g(y) = y$  e tomando  $x = \varphi(y)$ , obtemos

$$f(x) = f \circ \varphi(y) = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(y) = \varphi \circ g(y) = \varphi(y) = x.$$

Seja então  $A$  o simplexo de vértices  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$  e observe que  $A$  está contido em um espaço afim de dimensão  $n$  e que  $A$  é homeomorfo a  $B(\mathbb{R}^n)$ .

Para todo  $i \in [n+1]$ , seja  $\pi_i$  a projeção na  $i$ -ésima coordenada.

Seja  $f: A \rightarrow A$  contínua arbitrária e suponha por absurdo que  $f$  não possui ponto fixo.

Observe que se  $x \in A$ , temos  $\sum_{i \in [n+1]} \pi_i(x) = 1$ , logo, como  $f(x) \neq x$ , existe  $i \in [n+1]$  tal que  $\pi_i(f(x)) < \pi_i(x)$ , pois  $f(x) \in A$ .

Defina então a função

$$\begin{aligned} \lambda: A &\longrightarrow [n+1] \\ x &\longmapsto \min\{i \in [n+1] : \pi_i(f(x)) < \pi_i(x)\}. \end{aligned}$$

Observe que se  $T$  é uma triangulação de  $A$  então  $\lambda$  é uma Rotulação de Sperner de  $T$ , pois se  $x \in A$  pertence à face de  $A$  gerada por  $\{e_i : i \in I\}$  para algum  $I \subset [n+1]$ , então temos  $\pi_j(f(x)) \geq 0 = \pi_j(x)$  para todo  $j \in [n+1] \setminus I$ , logo  $\lambda(x) \in I$ .

Seja  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de triangulações tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$  (é fácil ver que uma tal seqüência de triangulações existe).

Pelo Lema de Sperner (Lema 4.2.2), sabemos que para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $S_k \in T_k$  totalmente rotulado. Sejam  $v_k^{(1)}, v_k^{(2)}, \dots, v_k^{(n+1)}$  os vértices de  $S_k$  de forma que  $\lambda(v_k^{(i)}) = i$  para todo  $i \in [n+1]$ .

Considere a seqüência  $(v_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ . Como  $A$  é compacto, sabemos que essa seqüência possui uma subsequência  $(v_{k_l}^{(1)})_{l \in \mathbb{N}}$  convergente. Por simplicidade de notação, vamos supor que a própria seqüência  $(v_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$  é convergente.

Seja  $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(1)}$ . Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$ , temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(i)} = v$  para todo  $i \in [n+1]$ .

Observe que, para todo  $i \in [n+1]$ , temos  $\pi_i(f(v_k^{(i)})) < \pi_i(v_k^{(i)})$ , pois  $\lambda(v_k^{(i)}) = i$ . Mas, como  $f$  é contínua, isso significa que  $\pi_i(f(v)) \leq \pi_i(v)$  para todo  $i \in [n+1]$ .

Logo temos  $\pi_i(f(v)) = \pi_i(v)$  para todo  $i \in [n+1]$ , pois  $\sum_{i \in [n+1]} \pi_i(f(v)) = \sum_{i \in [n+1]} \pi_i(v) = 1$ . ■

**Corolário 4.3.3.** Se  $A$  é um conjunto homeomorfo a  $B(\mathbb{R}^n)$  e  $f: A \rightarrow A$  é uma função contínua, então  $f$  possui um ponto fixo.

**Teorema 4.3.4** (Divisão de Bolo). Suponha que um bolo de comprimento 1 está para ser dividido entre  $n$  jogadores utilizando exatamente  $n-1$  cortes. Cada divisão é representada como uma  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de reais não-negativos tal que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , ou seja, um ponto no simplexo  $A$  gerado por  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Suponha também que cada jogador  $i \in [n]$  possui uma preferência de pedaços em cada divisão, i.e., suponha que para todo  $i \in [n]$  é dada uma função  $f_i: A \rightarrow \mathcal{P}([n])$  (dessa forma, se  $x \in A$ , então  $f_i(x)$  são quais pedaços o jogador  $i$  prefere na divisão  $x$ ).

Suponha também que a família  $(f_i)_{i=1}^n$  satisfaz as seguintes condições.

1. (Ausência de indiferença) Os jogadores sempre preferem algum pedaço, i.e., se  $x \in A$ , então  $f_i(x) \neq \emptyset$  para todo  $i \in [n]$ .
2. (Fome) Os jogadores nunca preferem um pedaço de tamanho 0, i.e., se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$  e  $x_j = 0$  para algum  $j \in [n]$ , então  $j \notin f_i(x)$  para todo  $i \in [n]$ .
3. (Continuidade de preferências) Se um jogador preferiu um pedaço ao longo de uma seqüência de divisões convergente, então ele ainda preferirá o mesmo pedaço no limite, i.e., para todo  $i \in [n]$  e todo  $j \in [n]$ , se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  é uma seqüência que converge a  $x \in A$  e  $j \in f_i(x_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $j \in f_i(x)$ .

Sob essas condições, existe uma divisão do bolo que satisfaz todos os jogadores, i.e., existe  $x \in A$  e uma permutação  $\sigma: [n] \rightarrow [n]$  tal que  $\sigma(i) \in f_i(x)$  para todo  $i \in [n]$ .

A demonstração abaixo está completa a menos da existência de seqüências de triangulações e rotulações e que provaremos mais tarde através das triangulações baricêntricas (Lema 4.3.6).

*Demonstração.* Suponha que  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de triangulações de  $A$  com  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$  e suponha que  $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de funções tal que  $\chi_k: V(T_k) \rightarrow [n]$  é uma função dos vértices de  $T_k$  a  $[n]$  tal que todo simplexo  $S$  de  $T_k$  recebe todos os rótulos, i.e., para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos  $\chi_k(V) = [n]$  para todo  $V$  conjunto de vértices de um simplexo de  $T_k$  (cabe ressaltar que não requeremos que tal rotulação

seja uma Rotulação de Sperner e uma tal escolha é apresentada no Lema 4.3.6). Essa rotulação nos dirá que na triangulação  $T_k$  o “dono” de um vértice  $v \in V(T_k)$  é  $\chi_k(v)$ .

Defina, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a seguinte rotulação de  $V(T_k)$ .

$$\begin{aligned} \lambda_k: V(T_k) &\longrightarrow [n] \\ v &\longmapsto \min f_{\chi_k(v)}(v) \end{aligned}$$

Em palavras, para cada vértice  $v$  de  $T_k$ , perguntamos ao seu “dono” ( $\chi_k(v)$ ) qual é um pedaço que ele prefere ( $\min f_{\chi_k(v)}(v)$ ). Observe que essa rotulação está bem definida devido à condição de ausência de indiferença.

Vamos provar que  $\lambda_k$  é uma Rotulação de Sperner.

Observe primeiramente que, da condição de fome, temos  $f_i(e_j) = j$  para todos  $i, j \in [n]$ , logo todos os vértices de  $A$  possuem rótulos distintos em  $\lambda_k$ . Ademais, se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um vértice da face de  $A$  gerada por  $\{e_u : u \in U\}$  para algum  $U \subset [n]$ , então temos  $x_v = 0$  para todo  $v \in [n] \setminus U$  e, como os jogadores têm fome, sabemos que  $f_i(x) \subset U = f_j(\{e_u : u \in U\})$  para todos  $i, j \in [n]$ . Em particular, temos que  $\lambda_k(x) \subset \lambda_k(\{e_u : u \in U\})$ .

Portanto, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $\lambda_k$  é uma Rotulação de Sperner.

Pelo Lema de Sperner (Lema 4.2.2), temos que para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe  $S_k \in T_k$  que é totalmente rotulado em  $\lambda_k$ . Sejam  $v_k^{(1)}, v_k^{(2)}, \dots, v_k^{(n)}$  os vértices de  $S_k$  de forma que  $\chi_k(v_k^{(i)}) = i$  para todo  $i \in [n]$  (observe que isso só é possível graças à condição imposta sobre  $\chi_k$ ) e considere a sequência  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (A \times [n]^n)^{\mathbb{N}}$  definida por

$$p_k = (v_k^{(1)}, \lambda_k(v_k^{(1)}), \lambda_k(v_k^{(2)}), \dots, \lambda_k(v_k^{(n)})).$$

Como  $A \times [n]^n$  é compacto, sabemos que  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergente. Por simplicidade de notação, passando a subsequências, vamos supor que  $(v_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}$  é convergente e que  $(\lambda_k(v_k^{(i)}))_{k \in \mathbb{N}}$  é constante para todo  $i \in [n]$ .

Seja  $\sigma: [n] \rightarrow [n]$  a permutação tal que  $\sigma(i) = \lambda_k(v_k^{(i)})$  para todos  $i \in [n]$  e  $k \in \mathbb{N}$  (observe que a injetividade de  $\sigma$  segue do fato que  $S_k$  é totalmente rotulado) e seja  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(i)} \in A$ .

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$ , sabemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(i)} = x$  para todo  $i \in [n]$ .

Observe agora que, para todo  $i \in [n]$  e todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\sigma(i) = \lambda_k(v_k^{(i)}) \in f_{\chi_k(v_k^{(i)})}(v_k^{(i)}) = f_i(v_k^{(i)}),$$

logo, como  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(i)} = x$ , temos  $\sigma(i) \in f_i(x)$ , da condição de continuidade de preferências. ■

**Teorema 4.3.5** (Divisão de Aluguéis). Suponha que uma casa com quartos  $1, 2, \dots, n$  está para ser alugada por  $n$  jogadores por um valor total de 1 de aluguel. Suponha que o aluguel para ser dividido entre os quartos. Cada divisão de aluguel é representada como uma  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de reais não-negativos tal que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , ou seja, um ponto no simplexo  $A$  gerado por  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Suponha também que cada jogador  $i \in [n]$  possui uma preferência de quartos em cada divisão do aluguel, i.e., suponha que para todo  $i \in [n]$  é dada uma função  $f_i: A \rightarrow \mathcal{P}([n])$  (dessa forma, se  $x \in A$ , então  $f_i(x)$  são quais quartos o jogador  $i$  prefere na divisão  $x$ ).

Suponha também que a família  $(f_i)_{i=1}^n$  satisfaz as seguintes condições.

1. (Ausência de indiferença) Os jogadores sempre preferem algum quarto, i.e., se  $x \in A$ , então  $f_i(x) \neq \emptyset$  para todo  $i \in [n]$ .
2. (Moradia de graça) Os jogadores sempre preferem um quarto de aluguel 0 a um de aluguel não-nulo, i.e., se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$  e  $x_j = 0 \neq x_k$  para certos  $j, k \in [n]$ , então  $k \notin f_i(x)$  para todo  $i \in [n]$ .
3. (Continuidade de preferências) Se um jogador preferiu um quarto ao longo de uma sequência de divisões de aluguel convergente, então ele ainda preferirá o mesmo pedaço no limite, i.e., para todo  $i \in [n]$  e todo  $j \in [n]$ , se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  é uma sequência que converge a  $x \in A$  e  $j \in f_i(x_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $j \in f_i(x)$ .

Sob essas condições, existe uma divisão do aluguel que satisfaz todos os jogadores, i.e., existe  $x \in A$  e uma permutação  $\sigma: [n] \rightarrow [n]$  tal que  $\sigma(i) \in f_i(x)$  para todo  $i \in [n]$ .

Abaixo apresentamos uma demonstração baseada na demonstração do teorema anterior. Ressaltamos, porém, que essa demonstração não é completamente análoga à anterior.

*Demonstração.* Provaremos inicialmente que se  $v$  pertence a uma face de  $A$  gerada por  $\{e_k : k \in K\}$  para algum  $K \subset [n]$ , então  $f_i(v) = K$  para todo  $i \in [n]$ .

Da condição de moradia de graça, já sabemos que temos  $f_i(v) \subset K$ . Isso, aliado à condição de ausência de indiferença, significa que se  $|K| = 1$ , então  $f_i(v) = K$ . Por outro lado, se  $|K| \neq 1$ , para todo inteiro  $k \in K$ , existe uma sequência  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  que converge a  $v$  e tal que  $x_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$  com  $x_{mk} = 0$  e  $x_{mj} \neq 0$  para todo  $j \neq k$ . Como  $f_i(x_m) = \{k\}$  para todo  $i \in [n]$  e todo  $m \in \mathbb{N}$ , temos, pela condição de continuidade de preferências que  $k \in f_i(v)$  para todo  $i \in [n]$ .

Portanto  $f_i(v) = K$  para todo  $i \in [n]$  (ou seja, se houver quartos de graça, a preferência será exatamente pelos quartos de graça).

Novamente consideramos uma sequência  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de triangulações de  $A$  com  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$  e uma sequência  $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de funções tal que  $\chi_k : V(T_k) \rightarrow [n]$  satisfaz  $\chi_k(V) = [n]$  para todo  $V$  conjunto de vértices de um simplexo de  $T_k$  (uma tal escolha é a do Lema 4.3.6).

Em seguida, perguntaremos para cada dono de um vértice  $v$  de  $T_k$  qual é um quarto que ele prefere para produzir uma rotulação  $\lambda_k : V(T_k) \rightarrow [n]$ .

Porém certo cuidado deve ser tomado para que a rotulação produzida seja de fato uma Rotulação de Sperner.

Para todo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ , seja

$$L_x = \{k \in [n] : x_k = 0 \text{ e } x_l \neq 0, \text{ para } l \equiv k - 1 \pmod{n}\},$$

ou, em palavras, o conjunto  $L_x$  é o conjunto das coordenadas nulas de  $x$  que sucedem coordenadas não-nulas (considerando que a coordenada 1 sucede  $n$ ).

Observe que se  $x$  está em uma face própria de  $A$ , então  $L_x \neq \emptyset$ , pois  $x$  possui ao menos uma coordenada nula e uma não-nula. Por outro lado, se  $x$  está no interior de  $A$ , então  $L_x = \emptyset$ , pois  $x$  não possui coordenada nula. Observe também que, em qualquer dos casos, temos  $L_x \subset f_i(x)$  para todo  $i \in [n]$  (pois se houver quarto de graça, a preferência será exatamente pelos quartos de graça).

Considere então, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a rotulação

$$\lambda_k : \begin{array}{ll} V(T_k) & \longrightarrow [n] \\ x & \longmapsto \begin{cases} \min L_x, & \text{se } L_x \neq \emptyset; \\ \min f_{\chi_k(x)}(x), & \text{se } L_x = \emptyset; \end{cases} \end{array}$$

e observe que temos  $\lambda_k(x) \in f_{\chi_k(x)}(x)$  para todo  $x \in V(T_k)$ .

Vamos mostrar agora que  $\lambda_k$  é uma Rotulação de Sperner.

Observe primeiramente que  $\lambda_k(e_j) = \min L_{e_j} = j \bmod n + 1$ , logo todos os vértices de  $A$  possuem rótulos distintos em  $\lambda_k$ . Ademais, se  $x$  é um vértice da face própria de  $A$  gerada por  $\{e_u : u \in U\}$  para algum  $U \subset [n]$ , então temos  $\emptyset \neq L_x \subset (U \bmod n + 1)$ , logo  $\lambda_k(x) \subset (U \bmod n + 1) = \lambda_k(U)$ .

Portanto, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $\lambda_k$  é uma Rotulação de Sperner.

A demonstração agora segue como a do Teorema 4.3.4.

Pelo Lema de Sperner (Lema 4.2.2), temos que para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe  $S_k \in T_k$  que é totalmente rotulado em  $\lambda_k$ . Sejam  $v_k^{(1)}, v_k^{(2)}, \dots, v_k^{(n)}$  os vértices de  $S_k$  de forma que  $\chi_k(v_k^{(i)}) = i$  para todo  $i \in [n]$ .

Pelo mesmo argumento de compacidade da prova do Teorema 4.3.4 e passando a subsequências, podemos supor que  $(v_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$  é convergente e que  $(\lambda_k(v_k^{(i)}))_{k \in \mathbb{N}}$  é constante para todo  $i \in [n]$ .

Seja  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$  a permutação tal que  $\sigma(i) = \lambda_k(v_k^{(i)})$  para todos  $i \in [n]$  e  $k \in \mathbb{N}$  e seja  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(1)} \in A$ .

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$ , sabemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(i)} = x$  para todo  $i \in [n]$ .

Observe agora que, para todo  $i \in [n]$  e todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\sigma(i) = \lambda_k(v_k^{(i)}) \in f_{\chi_k(v_k^{(i)})}(v_k^{(i)}) = f_i(v_k^{(i)}),$$

logo, como  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k^{(i)} = x$ , temos  $\sigma(i) \in f_i(x)$ , da condição de continuidade de preferências. ■

**Observação.** Observe que o ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  da divisão de aluguéis que satisfaz todos os jogadores nunca está em uma face própria de  $A$ , pois se estivesse, teríamos  $\emptyset \neq K = \{k \in [n] : x_k = 0\} \subsetneq [n]$  e  $f_i(x) = K$  para todo  $i \in [n]$ , o que contradiria o fato que  $\sigma$  é sobrejetora (pois teríamos  $\sigma([n]) \subsetneq [n]$ ).

Em outras palavras, a divisão de aluguéis que satisfaz todos os jogadores nunca possui um quarto de graça.

Completaremos agora as demonstrações dos Teoremas 4.3.4 e 4.3.5, apresentando uma possível escolha de  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Lema 4.3.6.** Existe uma sequência de triangulações  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  do simplexo  $A$  gerado por  $e_1, e_2, \dots, e_n$  e existe uma sequência  $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$  e para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $\chi_k: V(T_k) \rightarrow [n]$  é tal que todo simplexo  $S$  de  $T_k$  recebe todos os rótulos, i.e., para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos  $\chi_k(V) = [n]$  para todo  $V$  conjunto de vértices de um simplexo de  $T_k$ .

*Demonstração.* A sequência de triangulações que construiremos é chamada de *sequência de triangulações baricêntricas*.

Relembramos primeiramente que se  $S$  é um simplexo gerado por  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , então seu baricentro é dado por  $\sum_{i=1}^n v_i/n \in S$  e tal ponto não está em nenhuma face própria de  $S$ . Isso em particular significa que se  $S$  é um simplexo com  $n$  vértices, então os baricentros de todas as suas faces são dois-a-dois distintos e incluem seus vértices (a saber, o conjunto de baricentros de faces de  $S$  tem cardinalidade  $2^n - 1$ ).

Ademais, se  $b$  é o baricentro de  $S$ , e  $b_F$  é baricentro de uma face de  $S$  gerada por  $\{v_i : i \in I\}$ , então temos

$$\begin{aligned} d(b_F, b) &= \left\| \sum_{i \in I} \left( \frac{1}{|I|} - \frac{1}{n} \right) v_i - \sum_{j \in [n] \setminus I} \frac{1}{n} v_j \right\| \\ &= \left( 1 - \frac{|I|}{n} \right) \left\| \sum_{i \in I} \frac{1}{|I|} v_i - \sum_{j \in [n] \setminus I} \frac{1}{n - |I|} v_j \right\| \\ &\leq \left( 1 - \frac{|I|}{n} \right) \text{diam}(S) \\ &\leq \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \text{diam}(S) \end{aligned}$$

Relembramos também que o diâmetro de um simplexo  $S$  é dado pelo maior comprimento de uma aresta de  $S$ .

Dado um simplexo  $S$  com conjunto de vértices  $W$ , definimos sua *triangulação baricêntrica* como

$$B(S) = \{ \text{conv}\{b_1, b_2, \dots, b_n\} : \exists (V_i)_{i=1}^n \subset W \text{ tal que } b_i \text{ é baricentro de } \text{conv}(V_i) \text{ para todo } i \in [n] \text{ e } V_i \subset V_{i+1} \text{ para todo } i \in [n] \},$$

e definimos sua *rotulação baricêntrica* como

$$\chi(S): \begin{array}{ccc} V(B(S)) & \longrightarrow & [n] \\ v & \longmapsto & d+1, \text{ onde } d \text{ é a dimensão da face de } S \text{ da qual } v \text{ é baricentro.} \end{array}$$

Observe que de fato  $B(S)$  é triangulação de  $S$  e que  $\chi(S)$  está bem-definida, pois um baricentro de  $F$  não está em uma face própria de  $F$ .

Observe também que  $\text{diam}(B(S)) \leq (1 - 1/n) \text{diam}(S)$ , pois toda aresta de um simplexo de  $B(S)$  é gerada por dois baricentros de faces de  $S$ .

Observe finalmente que  $\chi(S)(T) = [n]$  para todo  $T \in B(S)$ , pois cada simplexo de  $B(S)$  possui apenas um baricentro de cada dimensão.

Defina então as sequências  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  indutivamente tomando  $T_0 = A$  e  $\chi_0$  uma bijeção entre os vértices de  $A$  e  $[n]$  e, supondo que  $T_k$  está definido, defina

$$T_{k+1} = \bigcup_{S \in T_k} B(S)$$

e defina

$$\begin{aligned} \chi_k : V(T_{k+1}) &\longrightarrow [n] \\ v &\longmapsto \chi(S)(v), \text{ para } v \in S \in T_k. \end{aligned}$$

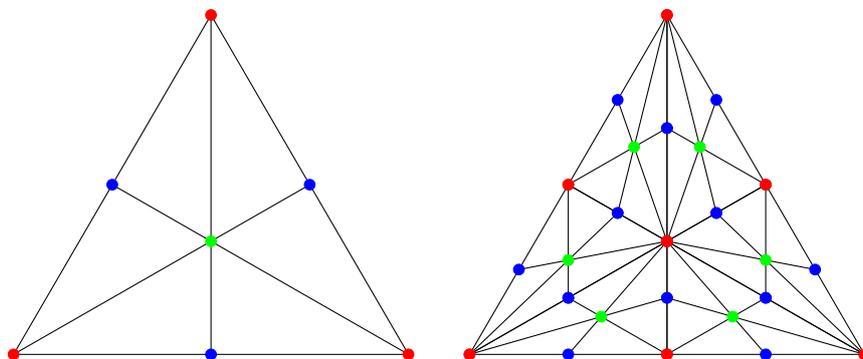


Figura 9: À esquerda, exemplo de  $T_1$  e, à direita, exemplo de  $T_2$  para o caso em que  $A$  é gerado por 3 pontos. Os rótulos 1, 2, 3 correspondem respectivamente a **vermelho**, **azul** e **verde**.

Observe que  $\chi_k$  está bem definida, pois se  $v$  pertence à intersecção de dois simplexos  $S_1$  e  $S_2$  de  $T_k$ , então  $v$  está em uma face comum a ambos (pois  $T_k$  é triangulação de  $S$ ), logo  $v$  é um baricentro de mesma dimensão em  $B(S_1)$  e  $B(S_2)$ .

Como os simplexos de  $T_{k+1}$  são simplexos de  $B(S)$  para algum  $S$  em  $T_k$ , temos que  $\chi_k(S) = [n]$  para todo  $S \in T_{k+1}$ .

Finalmente, observe que  $\text{diam}(T_{k+1}) \leq (1 - 1/n) \text{diam}(T_k)$ , logo  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(T_k) = 0$ . ■

**Observação.** Na sequência de triangulações baricêtricas, a rotulação  $\chi_{k+1}$  não é consistente com a rotulação  $\chi_k$ . Na verdade, temos  $\chi_{k+1}(v) = 1$  para todo  $v \in V(T_k)$ .

## 5 Paridade em Grafos e Aplicações

### 5.1 Problema da Mansão

24/06/2014 – Yoshiharu Kohayakawa

Nesta seção estudaremos o seguinte problema.

**Problema 5.1.1** (Problema da Mansão). Suponha dado um grafo  $G$  cujos vértices representam salas de uma mansão e cujas arestas representam ligações entre as salas.

Essa mansão possui uma lâmpada e um interruptor em cada cômodo. Porém, ao acionar um interruptor de uma sala, a lâmpada da própria sala e as lâmpadas de todas as salas adjacentes trocam de estado (i.e., se a lâmpada estiver apagada, ela acende; e se estiver acesa, ela apaga).

Ao anoitecer, o mordomo foi instruído a acender todas as lâmpadas da mansão (elas estavam todas apagadas) e a pergunta é: existe uma sequência de interruptores que ele pode apertar para completar a tarefa?

**Observação.** O problema acima também é chamado de Problema da Festa dos Cabides, quando enunciado na seguinte variante.

Uma festa dos cabides consiste em uma festa em que todos os convidados levam um cabide e toda vez que um convidado recebe um sinal do anfitrião da festa, ele e seus amigos devem tirar a roupa se estiverem usando e colocá-la se estiverem nus.

O problema consiste em descobrir como o anfitrião pode deixar todos seus convidados nus.

Nosso objetivo será o seguinte teorema.

**Teorema 5.1.2.** No Problema da Mansão, sempre há uma forma de acender todas as lâmpadas.

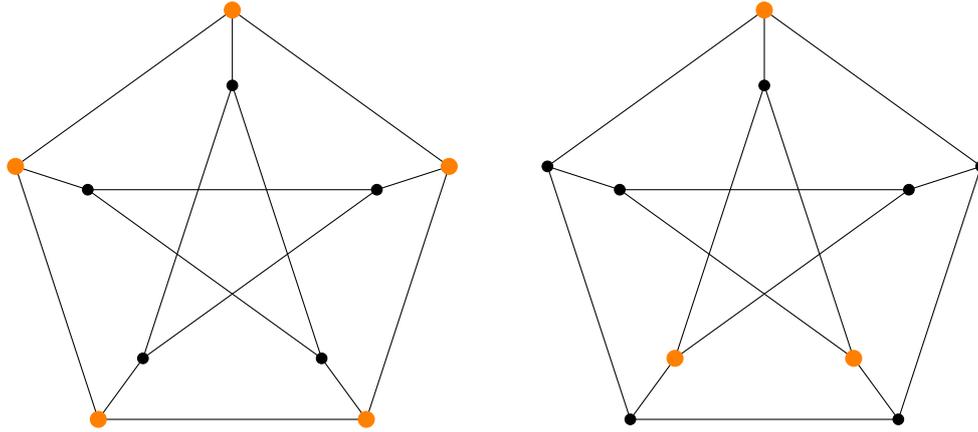


Figura 10: Duas soluções do Problema da Mansão para o Grafo de Petersen. Os interruptores que devem ser acionados estão marcados em laranja.

Inicialmente, faremos algumas observações simples que permitirão modelar o problema de forma mais fácil.

Observe que podemos contar, para cada vértice de  $G$ , quantas vezes ele ou um de seus vizinhos tiveram seu interruptor apertado e o estado final da lâmpada dependerá apenas da paridade desse número (se for ímpar, a lâmpada termina acesa; se for par, a lâmpada termina apagada). Isso significa que podemos supor que nenhum interruptor é apertado duas ou mais vezes (pois dois acionamentos correspondem a nenhum) e a ordem dos acionamentos dos interruptores é irrelevante.

Ademais, se definirmos como  $S$  o conjunto dos vértices de  $G$  cujo interruptor foi acionado, então uma solução deve ser tal que  $G[S]$  só possui vértices de grau par e todo vértice de  $V(G) \setminus S$  possui uma quantidade ímpar de vizinhos em  $S$ . Dessa forma, podemos reencuniar o Teorema 5.1.2 da seguinte forma.

**Teorema 5.1.3.** Para todo grafo  $G$ , existe um subconjunto de vértices  $S \subset V(G)$  tal que  $G[S]$  só tem vértices de grau par e todo vértice de  $V(G) \setminus S$  possui uma quantidade par de vizinhos em  $S$ . Ou, em fórmula, temos

$$\forall v \in S, 2 \mid d_{G[S]}(v) \text{ e } \forall v \in V(G) \setminus S, 2 \nmid |N_G(v) \cap S|.$$

Enunciaremos agora um par de teoremas relacionados.

**Teorema 5.1.4** (Gallai; Chen '71). Para todo grafo  $G$ , existem subconjuntos de vértices  $X, Y \subset V(G)$  disjuntos, cuja união é  $V(G)$  e tais que ambos induzem grafos em  $G$  cujos vértices têm todos grau par. Em fórmulas, temos

$$X \cap Y = \emptyset; X \cup Y = V(G); \forall v \in X, 2 \mid d_{G[X]}(v) \text{ e } \forall v \in Y, 2 \mid d_{G[Y]}(v).$$

**Teorema 5.1.5.** Para todo grafo  $G$ , existem subconjuntos de vértices  $X, Y \subset V(G)$  disjuntos, cuja união é  $V(G)$  e tais que  $X$  induz um grafo em  $G$  cujos vértices têm todos grau par e  $Y$  induz um grafo em  $G$  cujos vértices têm todos grau ímpar. Em fórmulas, temos

$$X \cap Y = \emptyset; X \cup Y = V(G); \forall v \in X, 2 \mid d_{G[X]}(v) \text{ e } \forall v \in Y, 2 \nmid d_{G[Y]}(v).$$

E naturalmente, surge a seguinte pergunta.

**Pergunta 5.1.6.** Será que para todo grafo  $G$  existem subconjuntos de vértices  $X, Y \subset V(G)$  disjuntos, cuja união é  $V(G)$  e tais que ambos induzem grafos em  $G$  cujos vértices têm todos grau ímpar?

Com algumas pequenas observações é fácil ver que a pergunta acima não tem resposta positiva para todo grafo.

Por exemplo, se  $G$  possuir um vértice  $v$  de grau zero, certamente não conseguiremos alterar o grau de  $v$  para ímpar.

Outro impedimento é o seguinte: se o número de vértices de  $G$  não for divisível por 4, então um dos conjuntos  $X$  ou  $Y$  deverá possuir um número ímpar de vértices e, como todo grafo possui uma quantidade par de vértices de grau ímpar, esse conjunto de cardinalidade ímpar não poderá induzir um grafo cujos vértices têm todos grau ímpar.

**Exercício 5.1.7.** Caracterizar quando em um grafo  $G$  existem subconjuntos de vértices  $X, Y \subset V(G)$  disjuntos, cuja união é  $V(G)$  e tais que ambos induzem grafos em  $G$  cujos vértices têm todos grau ímpar.

Provaremos agora que o Teorema 5.1.4 implica os outros teoremas.

**Proposição 5.1.8.** O Teorema 5.1.4 implica os Teoremas 5.1.3 e 5.1.5.

*Demonstração.* Suponha  $G$  dado e vamos provar o Teorema 5.1.4.

Seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  adicionando-se um novo vértice  $u$  e ligando-o a todos os vértices de  $G$ , i.e., seja  $G'$  tal que

$$V(G') = V(G) \cup \{u\}; u \notin V(G) \text{ e } E(G') = E(G) \cup \{vu : v \in V(G)\}.$$

Pelo Teorema 5.1.4, existem  $X', Y' \subset V(G')$  com  $X' \cup Y' = V(G')$  e  $X' \cap Y' = \emptyset$  e que induzem grafos em  $G'$  cujos vértices têm todos grau par.

Sem perda de generalidade, suponha que  $u \in Y'$  e defina  $X = X'$  e  $Y = Y' \setminus \{u\}$  e trivialmente temos  $X \cup Y = V(G)$  e  $X \cap Y = \emptyset$ .

Observe que  $G[X] = G'[X']$ , logo  $X$  induz um grafo em  $G$  cujos vértices têm todos grau par.

Por outro lado, observe que  $G[Y] = G'[Y'] - u$ , e como  $u$  é adjacente a todos os vértices de  $G$ , temos que  $Y$  induz um grafo em  $G$  cujos vértices têm todos grau ímpar.

Vamos provar agora o Teorema 5.1.3.

Seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  adicionando-se um novo vértice  $u$  e ligando-o a todos os vértices de grau par em  $G$ , i.e., seja  $G'$  tal que

$$V(G') = V(G) \cup \{u\}; u \notin V(G) \text{ e } E(G') = E(G) \cup \{vu : v \in V(G) \text{ com } 2 \mid d_G(v)\}.$$

Pelo Teorema 5.1.4, existem  $X', Y' \subset V(G')$  com  $X' \cup Y' = V(G')$  e  $X' \cap Y' = \emptyset$  e que induzem grafos em  $G'$  cujos vértices têm todos grau par.

Sem perda de generalidade, suponha que  $u \in Y'$  e defina  $S = X$ .

Observe que  $G[S] = G'[X']$ , logo  $G[S]$  só tem vértices de grau par.

Suponha então que  $v \in V(G) \setminus S$ , então temos

$$|N_G(v) \cap S| = d_G(v) - d_{G-S}(v).$$

Se  $d_G(v)$  é ímpar, então temos  $d_{G-S}(v) = d_{G'-S}(v)$ , logo  $|N_G(v) \cap S|$  é ímpar, pois  $d_G(v)$  é ímpar e  $d_{G'-S}(v)$  é par.

Por outro lado, se  $d_G(v)$  é par, então temos  $d_{G-S}(v) = d_{G'-S}(v) - 1$ , logo  $|N_G(v) \cap S|$  é ímpar, pois  $d_G(v)$  é par e  $d_{G'-S}(v) - 1$  é ímpar. ■

A demonstração abaixo foi apresentada por Pósa.

*Demonstração do Teorema 5.1.4.* Provaremos a asserção por indução em  $n = |V(G)|$ .

Se  $n \leq 1$ , então a asserção é trivial, basta tomar  $X = V(G)$  e  $Y = \emptyset$ .

Suponha então que  $n > 1$  e que a asserção é válida para  $n - 1$ .

Se todos os vértices de  $G$  possuírem grau par, então novamente podemos tomar  $X = V(G)$  e  $Y = \emptyset$ .

Suponha então que  $x \in V(G)$  é um vértice de grau ímpar. Seja  $G'$  o grafo obtido tal que

$$\begin{aligned} V(G') &= V(G) \setminus \{x\} \text{ e} \\ E(G') &= \{vw : vw \in E(G) \text{ e } w \notin N_G(x)\} \cup \{vw : vw \notin E(G) \text{ e } v, w \in N_G(x)\}. \end{aligned}$$

Em palavras, seja  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  removendo-se o vértice  $x$  e complementando o grafo induzido pela vizinhança de  $x$  em  $G$ .

Pela hipótese indutiva, temos que existem  $X', Y' \in V(G')$  com  $X' \cup Y' = V(G')$  e  $X' \cap Y' = \emptyset$  e tais que  $X'$  e  $Y'$  ambos induzem em  $G'$  grafos cujos vértice têm todos grau par.

Como  $d_G(x)$  é ímpar, sabemos que um dentre  $X' \cap N_G(x)$  e  $Y' \cap N_G(x)$  deve possuir cardinalidade par. Sem perda de generalidade, suponha que  $X' \cap N_G(x)$  possui cardinalidade par e sejam  $X = X' \cup \{x\}$  e  $Y = Y'$ .

Observe que  $x$  possui grau par em  $G[X]$ , pois  $N_G(x) \cap X'$  possui cardinalidade par.

Observe também que se  $v \in X' \setminus N_G(x)$ , então  $d_{G[X]}(v) = d_{G'[X']}(v)$ , logo  $v$  possui grau par em  $G[X]$ .

Analogamente, se  $v \in Y' \setminus N_G(x)$ , então  $d_{G[Y]}(v) = d_{G'[Y']}(v)$ , logo  $v$  possui grau par em  $G[Y]$ .

Suponha então que  $v \in X' \cap N_G(x)$  e observe que

$$\begin{aligned} d_{G[X]}(v) &= |N_{G[X]}(v) \cap N_G(x)| + |N_{G[X]}(v) \setminus N_G(x)| \\ &= (|N_G(x) \cap X'| - |N_{G'[X']}(v) \cap N_G(x)| + 1) + |N_{G'[X']}(v) \setminus N_G(x)|, \end{aligned}$$

onde a parcela 1 vem do vértice  $x$ .

Observe agora que

$$|N_{G'[X']}(v) \setminus N_G(x)| - |N_{G'[X']}(v) \cap N_G(x)|$$

tem a mesma paridade que

$$|N_{G'[X']}(v) \setminus N_G(x)| + |N_{G'[X']}(v) \cap N_G(x)|,$$

que por sua vez é igual a  $|N_{G'[X']}(v)|$ , que sabemos ser par.

Finalmente, como  $N_G(x) \cap X'$  tem cardinalidade par, temos que  $d_{G[X]}(v)$  é par.

Suponha agora que  $v \in Y' \cap N_G(x)$  e observe que

$$\begin{aligned} d_{G[Y]}(v) &= |N_{G[Y]}(v) \cap N_G(x)| + |N_{G[Y]}(v) \setminus N_G(x)| \\ &= (|N_G(x) \cap Y'| - |N_{G'[Y']}(v) \cap N_G(x)|) + |N_{G'[Y']}(v) \setminus N_G(x)|. \end{aligned}$$

Note que dessa vez não há parcela 1 pois  $x \notin Y'$ .

Novamente, temos que

$$|N_{G'[Y']}(v) \setminus N_G(x)| - |N_{G'[Y']}(v) \cap N_G(x)|$$

tem a mesma paridade que

$$|N_{G'[Y']}(v) \setminus N_G(x)| + |N_{G'[Y']}(v) \cap N_G(x)|,$$

que por sua vez é igual a  $|N_{G'[Y']}(v)|$ , que sabemos ser par.

Porém, dessa vez temos que  $N_G(x) \cap Y'$  possui cardinalidade ímpar, logo  $d_{G[Y]}(v)$  é par (essa cardinalidade ímpar é compensada exatamente pela ausência da parcela 1 observada anteriormente).

Portanto a asserção é válida por indução. ■

Com a prova acima e a prova da Proposição 5.1.8, os Teoremas 5.1.3 e 5.1.5 ficam também demonstrados. Terminaremos esta seção com o seguinte exercício.

**Exercício 5.1.9.** O grafo  $G_{n \times n}$  da grade  $n \times n$  é definido de forma que

$$V(G_{n \times n}) = [n]^2 \text{ e } E(G_{n \times n}) = \{(i, j)(k, l) : |i - k| + |j - l| = 1\}$$

Qual é uma solução do Problema da Mansão quando o grafo em questão é o grafo da grade  $n \times n$ ?

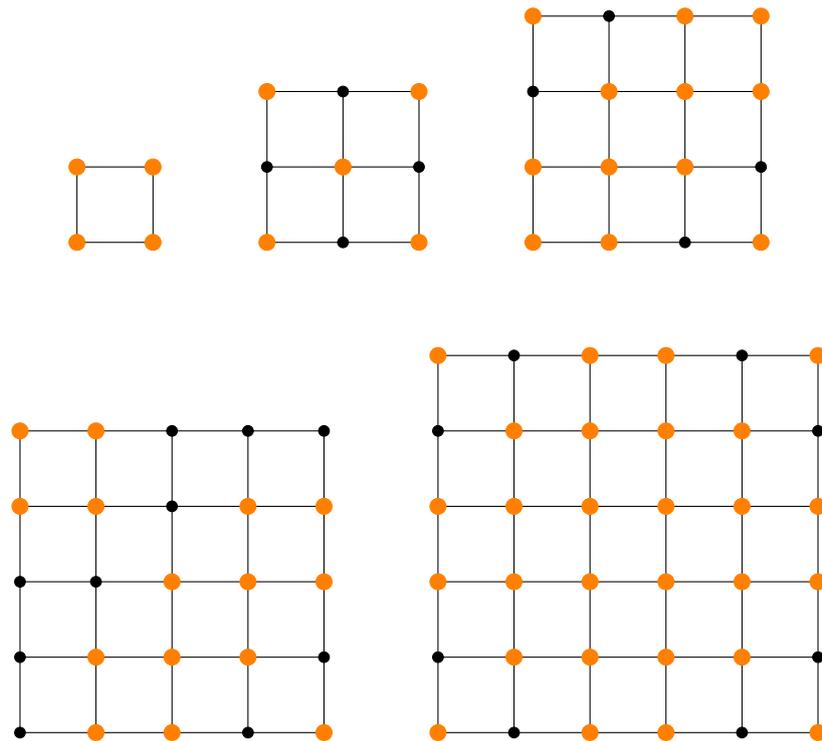


Figura 11: Solução do Problema da Mansão para as grades  $n \times n$  com  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  respectivamente. Os interruptores que devem ser acionados estão marcados em laranja.

## A Soluções dos exercícios resolvidos

**Exercício resolvido.** (1.1.4) Toda matriz positiva definida é diagonalizável.

*Demonstração.* Suponha que  $A \succ 0$ , mas não é diagonalizável, então existe  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $Ax = 0$ . Logo temos  $x^t Ax = 0$ , contradizendo o fato que  $A$  é positiva definida. ■

**Exercício resolvido.** (1.4.3) Se  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  é uma família de conjuntos convexos, então  $A = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$  é um conjunto convexo.

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in A$  arbitrários. Para todo  $C \in \mathcal{C}$ , temos  $[x, y] \subset C$ , pois  $x, y \in C$  e  $C$  é convexo, logo  $[x, y] \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$ . ■

**Exercício resolvido.** (1.4.6) Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} \text{conv}(X) &= \{x : x \text{ é combinação convexa de pontos de } X\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in [m]} \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}^*; \forall i \in [m], x_i \in X \text{ e } \lambda_i \in [0, 1]; \sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Observe inicialmente que um conjunto é convexo se e somente se todas as combinações convexas de seus pontos pertencem a ele. De fato, pois a convexidade é caracterizada por combinações convexas de tamanho 2, as combinações convexas de tamanho 1 são os próprios pontos do conjunto e assumindo que as combinações de tamanho  $m$  estão no conjunto uma combinação de tamanho  $m+1$  pode ser vista como uma de tamanho 2 com um dos pontos sendo uma combinação convexa de tamanho  $m$  da seguinte forma:

$$\sum_{i \in [m+1]} \lambda_i x_i = \left( \sum_{j \in [m]} \lambda_j \right) \left( \sum_{i \in [m]} \frac{\lambda_i}{\sum_{j \in [m]} \lambda_j} x_i \right) + \lambda_{m+1} x_{m+1}.$$

Logo, definindo  $A = \{x : x \text{ é combinação convexa de pontos de } X\}$ , temos que  $\text{conv}(X) \subset A$ , pois  $X \subset \text{conv}(X)$ .

Por outro lado, se  $C \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo que contém  $X$ , então  $A \subset C$ , logo  $A \subset \text{conv}(X)$ . ■

**Exercício resolvido** (Teorema de Carathéodory). (1.4.8) Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned} \text{conv}(X) &= \{x : x \text{ é combinação convexa de } n+1 \text{ pontos de } X\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i x_i : \forall i \in [n+1], x_i \in X \text{ e } \lambda_i \in [0, 1]; \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pelo Exercício 1.4.6, basta provar que toda combinação convexa de  $m$  pontos de  $X$  está em  $A = \{x : x \text{ é combinação convexa de } n+1 \text{ pontos de } X\}$ .

Observe que toda combinação convexa de menos de  $n+1$  pontos pode ser vista como uma de  $n+1$  pontos repetindo algum ponto. Logo, para todo  $m \in [n+1]$ , toda combinação convexa de  $m$  pontos de  $X$  está em  $A$ .

Seja  $m > n+1$  e suponha por hipótese de indução que toda combinação convexa de menos que  $m$  pontos está em  $A$ .

Considere uma combinação convexa  $x = \sum_{i \in [m]} \lambda_i x_i$  de  $m$  pontos de  $X$  qualquer ( $\lambda_i \geq 0$  para todo  $i \in [m]$  e  $\sum_{i \in [m]} \lambda_i = 1$ ).

Como  $m \geq n+2$ , pelo Teorema 1.4.7, existem  $I, J \subset [m]$  disjuntos tais que  $\text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\} \neq \emptyset$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $I \cup J = [m]$ .

Sejam  $y \in \text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\}$  e  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \mu_i x_i &= \sum_{j \in J} \mu_j x_j = y; \text{ e} \\ \sum_{i \in I} \mu_i &= \sum_{j \in J} \mu_j = 1. \end{aligned}$$

Se algum dos  $\lambda_k$ 's for nulo, então não há o que fazer, pois  $x$  será combinação convexa de menos que  $m$  pontos.

Suponha então que todos os  $\lambda_k$ 's são não-nulos e sejam  $I_0 = \{i \in I : \mu_i \neq 0\}$  e  $i_0 \in I_0$  tal que  $\lambda_{i_0}/\mu_{i_0} = \min\{\lambda_i/\mu_i : i \in I_0\} > 0$ . Note que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k \in [m]} \lambda_k x_k = \sum_{i \in I_0} \lambda_i x_i + \sum_{k \in [m] \setminus I_0} \lambda_k x_k \\ &= \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} y + \sum_{i \in I_0 \setminus \{i_0\}} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_i \right) x_i + \sum_{k \in [m] \setminus I_0} \lambda_k x_k \\ &= \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \sum_{j \in J} \mu_j x_j + \sum_{i \in I_0 \setminus \{i_0\}} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_i \right) x_i + \sum_{k \in [m] \setminus I_0} \lambda_k x_k \\ &= \sum_{i \in I_0 \setminus \{i_0\}} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_i \right) x_i + \sum_{i \in I \setminus I_0} \lambda_i x_i + \sum_{j \in J} \left( \lambda_j + \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_j \right) x_j. \end{aligned}$$

Queremos provar agora que esse formato atesta que  $x$  é combinação convexa dos pontos de  $\{x_k : k \in [m] \setminus \{i_0\}\}$ .

Primeiramente observe que, pela escolha de  $i_0$ , para todo  $i \in I_0$ , temos  $\lambda_i/\mu_i \geq \lambda_{i_0}/\mu_{i_0}$ , logo  $\lambda_i - \mu_i \lambda_{i_0}/\mu_{i_0} \geq 0$ , ou seja, todos os coeficientes da combinação são positivos.

Resta provar que esses coeficientes somam 1. Note que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0 \setminus \{i_0\}} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_i \right) + \sum_{i \in I \setminus I_0} \lambda_i + \sum_{j \in J} \left( \lambda_j + \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_j \right) &= \sum_{i \in [m] \setminus \{i_0\}} \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \sum_{i \in I_0 \setminus \{i_0\}} \mu_i + \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \sum_{j \in J} \mu_j \\ &= (1 - \lambda_{i_0}) - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} (1 - \mu_{i_0}) + \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} = 1. \end{aligned}$$

Como  $\{x_k : k \in [m] \setminus \{i_0\}\}$  possui  $m - 1$  elementos, pela hipótese indutiva, temos que  $x \in A$ .

Por indução segue que toda combinação convexa de  $m$  pontos de  $X$  está em  $A$  e a demonstração está concluída.  $\blacksquare$

**Exercício resolvido.** (1.4.9) Seja  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

- i. Se  $X$  é limitado, então  $\text{conv}(X)$  é limitado;
- ii. Se  $X$  é compacto, então  $\text{conv}(X)$  é compacto.

*Demonstração.* Pelo Exercício 1.4.8, sabemos que todo elemento  $y$  de  $\text{conv}(X)$  é da forma

$$y = \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i x_i,$$

com  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $i \in [n+1]$  e  $\sum_{i \in [n+1]} \lambda_i = 1$ .

Se  $X$  é limitado, então existe  $r > 0$  tal que  $\|x\| < r$  para todo  $x \in X$ . Daí temos  $\|y\| \leq \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i \|x_i\| < (n+1)r$ , ou seja, temos que  $\text{conv}(X)$  é limitado.

Suponha agora que  $X$  é compacto.

Vamos provar inicialmente que  $\text{conv}(X)$  é fechado.

Seja  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\text{conv}(X)$  que converge a  $y \in \mathbb{R}^n$ . Então, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , escrevemos  $y_k = \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)}$  com  $\lambda_i^{(k)} \geq 0$  para todo  $i \in [n+1]$  e  $\sum_{i \in [n+1]} \lambda_i^{(k)} = 1$ .

Como  $X$  e  $[0, 1]$  são compactos, então  $[0, 1]^{n+1} \times X^{n+1}$  é compacto, logo existe uma sequência crescente de índices  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  tal que para todo  $i \in [n+1]$ , temos que  $(\lambda_i^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$  converge a um certo  $\mu_i$  e  $(x_i^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$  converge a um certo  $z_i$ .

Como  $X$  é fechado, todos os  $z_i$ 's pertencem a  $X$  e como  $[0, 1]$  é fechado, todos os  $\mu_i$ 's pertencem a  $[0, 1]$ . Ademais temos

$$\sum_{i \in [n+1]} \mu_i = \sum_{i \in [n+1]} \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_i^{(k_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i^{(k_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [n+1]} \mu_i z_i &= \sum_{i \in [n+1]} \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_i^{(k_j)} \right) \left( \lim_{j \rightarrow \infty} x_i^{(k_j)} \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in [n+1]} \lambda_i^{(k_j)} x_i^{(k_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j} = y. \end{aligned}$$

Portanto  $y$  é combinação convexa dos  $z_i$ 's, o que significa que  $y \in X$ .

Concluimos então que  $\text{conv}(X)$  é fechado.

Por outro lado, como  $X$  é limitado, então  $\text{conv}(X)$  é limitado, logo  $\text{conv}(X)$  é compacto. ■

**Exercício resolvido** (Generalização do Teorema de Helly). (1.4.11) Se  $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(X)$  é uma coleção infinita enumerável de subconjuntos convexos e compactos de  $\mathbb{R}^n$  tal que quaisquer  $n + 1$  conjuntos de  $\mathcal{C}$  possuem intersecção não-vazia, então temos  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.4.10, já sabemos que toda subcoleção finita de  $\mathcal{C}$  possui intersecção não-vazia.

Definimos então, para todo  $i \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $K_i = \bigcap_{j=0}^i C_j$  e temos  $K_i \neq \emptyset$ .

Como  $\mathcal{C}$  é uma família de compactos, sabemos que todos os  $K_i$ 's são compactos.

Pela construção dos  $K_i$ 's, sabemos também que, para todo  $i \in \mathbb{N}$ , temos  $K_i \supset K_{i+1}$ . Em particular, temos  $K_i \subset K_0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Para todo  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $x_i \in K_i$ . Seja  $A$  o conjunto dos pontos de aderência da sequência  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (i.e., seja  $A = \{x : \text{existe uma subsequência de } (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ que converge a } x\}$ ).

Como todo elemento dessa sequência está no compacto  $K_0$ , sabemos que  $A \neq \emptyset$ , então seja  $x \in A$  e seja  $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  uma subsequência de  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  que converge a  $x$ .

Tome  $t \in \mathbb{N}$  arbitrário e vamos provar que  $x \in K_t$ .

Tomando  $k_0 = \min\{k : i_k \geq t\}$ , temos que a sequência  $s = (x_{i_k})_{k \in \mathbb{N} \setminus \{k_0\}}$  é uma subsequência de  $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  e portanto converge a  $x$ . Ademais todos os elementos de  $s$  está em  $K_t$ , então, como  $K_t$  é fechado, temos que  $x \in K_t$ .

Portanto  $x \in \bigcap_{t \in \mathbb{N}} K_t = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} C_t$ . ■

**Exercício resolvido.** (2.1.2) Se  $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções e  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$  são tais que a matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por  $M_{ij} = f_i(a_j)$  para todos  $i, j \in [n]$  é não-singular, então  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são linearmente independentes.

*Demonstração.* Sejam  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tais que  $\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0$ . Então, para todo  $j \in [n]$ , podemos avaliar a equação em  $a_j$ , obtendo  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(a_j) = 0$ . Mas essas  $n$  equações podem ser reescritas na forma matricial como  $Ac = 0$ , onde  $c$  é o vetor coluna de coordenadas  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Como  $A$  é não-singular, temos  $c = A^{-1}0 = 0$  e portanto  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são linearmente independentes. ■

**Exercício resolvido.** (2.2.7) Prove que  $\chi(\mathbb{R}) = 2$ .

*Demonstração.* Como  $G_1$  possui pelo menos uma aresta, sabemos que  $\chi(\mathbb{R}) \geq 2$ .

Por outro lado, se colorirmos todo intervalo da forma  $[2n + k, 2n + k + 1)$  para  $n \in \mathbb{Z}$  e  $k \in \{0, 1\}$  com a cor  $k$ , obtemos uma 2 coloração própria de  $G_1$ . ■

**Exercício resolvido** (Teorema de De Bruijn–Erdős '51). (2.2.14) Se  $k$  é um natural e  $G$  é um grafo tal que todos seus subgrafos finitos possuem uma  $k$ -coloração própria, então  $G$  possui uma  $k$ -coloração própria (i.e., temos  $\chi(G) \leq k$ ).

*Demonstração.* Relembramos abaixo o Lema de Zorn (que depende do Axioma da Escolha).

**Lema A.1** (Zorn). Suponha que  $A$  é um conjunto munido de uma ordem parcial  $\preceq$  e é tal que para todo  $B \subset A$  no qual  $\preceq$  induz uma ordem total existe um  $m \in A$  tal que  $b \preceq m$  para todo  $b \in B$  (i.e., todo subconjunto totalmente ordenado possui um majorante em  $A$ ).

Nessas condições, existe  $M \in A$  tal que não existe  $a \in A$  com  $M \preceq a$  e  $M \neq a$ .

Suponha que todo subgrafo finito de  $G$  é  $k$ -colorível e considere a família  $\mathcal{F}$  dos grafos cujos vértices são  $V(G)$ , as arestas são um superconjunto de  $E(G)$  e tais que todo subgrafo finito é  $k$ -colorível ( $G$  é um elemento particular de  $\mathcal{F}$ , e com o número mínimo de arestas). Mais formalmente, seja

$$\mathcal{F} = \{H \text{ grafo} : V(H) = V(G), E(H) \supset E(G) \text{ e } \chi(H[V]) \leq k \text{ para todo } V \subset V(G) \text{ finito}\}.$$

Considere a ordem parcial  $\preceq$  sobre  $\mathcal{F}$  definida por  $H \preceq K \iff E(H) \subset E(K)$ . Vamos mostrar que  $\mathcal{F}$  e  $\preceq$  satisfazem as condições do Lema de Zorn.

Suponha que  $B \subset \mathcal{F}$  é um subconjunto totalmente ordenado por  $\preceq$  e considere o grafo  $H$  definido por  $V(H) = V(G)$  e  $E(H) = \bigcup_{K \in B} E(K)$ . Vamos mostrar agora que  $H \in \mathcal{F}$ .

Trivialmente temos que  $E(G) \subset E(H)$ . Seja então  $V$  um subconjunto finito de  $V(G)$  arbitrário e vamos mostrar que  $\chi(H[V]) \leq k$ . Considere a família de grafos  $C = \{K[V] : K \in B\}$ . Sabemos que todos esses grafos são finitos e  $k$ -coloríveis. Ademais, sabemos que  $E[H[V]] = \bigcup_{K' \in C} E(K')$ .

Observe agora que  $C$  é finito, pois  $C$  é um subconjunto dos grafos sobre o conjunto finito  $V$  (sabemos inclusive que o conjunto dos grafos sobre  $V$  tem cardinalidade  $2^{|V|(|V|-1)/2}$ ), logo existe  $K'_0 \in C$  tal que  $|E(K'_0)|$  é máximo. Como  $B$  é totalmente ordenado, temos que  $E(K') \subset E(K'_0)$  para todo  $K' \in C$ .

Então segue que

$$E[H[V]] = \bigcup_{K' \in C} E(K') = E(K'_0),$$

logo  $H[V] = K'_0$ , ou seja, temos que  $H[V]$  é  $k$ -colorível para todo  $V \subset V(G)$  finito e portanto  $H \in \mathcal{F}$ .

Da definição de  $H$ , temos que  $K \preceq H$  para todo  $K \in B$  (pois  $E(K) \subset E(H)$ ), logo as hipóteses do Lema de Zorn são válidas para  $\mathcal{F}$  e  $\preceq$ .

Seja então  $M \in \mathcal{F}$  tal que não existe  $H \in \mathcal{F}$  com  $M \preceq H$  e  $M \neq H$  e vamos mostrar que  $\chi(M) \leq k$ .

Para isso, vamos mostrar que a relação de não-adjacência em  $M$  é uma relação de equivalência sobre os vértices de  $M$ .

Trivialmente, a relação de não-adjacência em  $M$  é reflexiva ( $vv \notin E(M)$ ) e simétrica ( $vw \notin E(M)$  implica  $wv \notin E(M)$ ).

Suponha por absurdo que a relação de não-adjacência não é transitiva. Então existem  $x, v, w \in V(M)$  tais que  $E(M[\{x, v, w\}]) = \{xw\}$ . Considere os grafos  $H_1, H_2$  obtidos a partir de  $M$  adicionando as arestas  $xv$  e  $vw$  respectivamente.

Como  $E(M) \subsetneq E(H_1)$  e  $E(M) \subsetneq E(H_2)$ , temos que  $H_1$  e  $H_2$  não são elementos de  $\mathcal{F}$  (pois isso contrariaria a escolha de  $M$ ). Então existem  $V_1, V_2 \subset V(M)$  finitos tais que  $H_1[V_1]$  e  $H_2[V_2]$  não são  $k$ -coloríveis.

Definindo  $V = V_1 \cup V_2$ , temos trivialmente que  $H_1[V]$  e  $H_2[V]$  não são  $k$ -coloríveis. Porém, como  $V$  é finito, sabemos que  $M[V]$  é  $k$ -colorível e como  $E(H_1[V] \setminus E(M)) = \{xv\}$ , temos que toda  $k$ -coloração própria de  $M[V]$  atribui a mesma cor de  $x$  a  $v$  (caso contrário, ela seria também uma  $k$ -coloração própria de  $H_1[V]$ ). Analogamente, toda  $k$ -coloração própria de  $M[V]$  atribui a mesma cor de  $v$  a  $w$ . Mas isso é um absurdo, pois toda  $k$ -coloração própria de  $M[V]$  não pode atribuir a mesma cor de  $x$  a  $w$  já que  $xw \in E(M[V])$ .

Portanto a relação de não-adjacência em  $M$  é uma relação de equivalência. Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto das classes de equivalência da relação de não-adjacência em  $M$ . Trivialmente  $|\mathcal{C}| \leq k$ , senão poderíamos escolher um vértice de cada uma de  $k+1$  classes distintas e formar um  $k+1$ -clique em  $M$  (que é um subgrafo finito), logo colorindo cada classe com uma cor distinta obtemos uma  $k$ -coloração própria de  $M$ .

Como  $E(G) \subset E(M)$ , isso implica que  $\chi(G) \leq k$ . ■

**Exercício resolvido.** (2.2.17) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0 > 0$  tal que, para todo  $x \geq x_0$ , existe um primo no intervalo  $[x, (1 + \varepsilon)x]$ .

*Demonstração.* Lembramos do Teorema dos Números Primos abaixo.

**Teorema A.2** (Teorema dos Números Primos). Temos  $\pi(x) = (1 + o(1))x / \ln x$ , onde  $\pi(x) = \{p < x : p \text{ é primo}\}$ .

Observe que, para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$  e todo  $x > 0$  tal que  $\varepsilon \ln x - \ln 2 > 1$  (i.e., precisamos de  $x > (2e)^{1/\varepsilon}$ ), temos

$$\begin{aligned} \frac{(1+\varepsilon)x}{\ln((1+\varepsilon)x)} - \frac{x}{\ln x} &\geq \frac{(1+\varepsilon)x}{\ln(2x)} - \frac{x}{\ln x} \\ &= \frac{\varepsilon x \ln x - x \ln 2}{(\ln 2 + \ln x) \ln x} \\ &> \frac{x}{(\ln 2 + \ln x) \ln x}. \end{aligned}$$

Logo, para  $x$  suficientemente grande, temos

$$\frac{(1+\varepsilon)x}{\ln((1+\varepsilon)x)} - \frac{x}{\ln x} > 1, \quad (1)$$

isso significa que, para  $x$  suficientemente grande, existe um primo entre  $x$  e  $(1+\varepsilon)x$  (a escolha de  $x_0$  deve tornar verdadeira a Desigualdade (1) e deve compreender o termo  $o(1)$  do Teorema dos Números Primos). ■

**Exercício resolvido.** (3.1.8) Se  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  são Lebesgue-mensuráveis e  $A \subset B$ , então  $\bar{\delta}(A) \leq \bar{\delta}(B)$ .

*Demonstração.* Basta observar que para todo  $T > 0$ , temos

$$\frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \leq \frac{m(B \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)},$$

pois  $A \cap [-T, T]^n \subset B \cap [-T, T]^n$ . ■

**Exercício resolvido.** (3.1.9) Suponha que  $A \subset \mathbb{R}^n$  é Lebesgue-mensurável e limitado em uma das coordenadas, i.e., existe  $i \in [n]$  e  $R > 0$  tais que

$$A \subset \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1 \text{ vezes}} \times [-R, R] \times \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i \text{ vezes}}.$$

Então  $\bar{\delta}(A) = 0$ .

Em particular, se  $A$  é limitado, então  $\bar{\delta}(A) = 0$ .

*Demonstração.* Do Exercício 3.1.8, basta provar que, para todos  $i \in [n]$  e  $R > 0$ , a densidade superior do conjunto

$$S_{i,R} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{i-1 \text{ vezes}} \times [-R, R] \times \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-i \text{ vezes}}$$

é 0.

Observe que, para todo  $T > R$ , temos

$$S_{i,R} \cap [-T, T]^n = \underbrace{[-T, T] \times [-T, T] \times \cdots \times [-T, T]}_{i-1 \text{ vezes}} \times [-R, R] \times \underbrace{[-T, T] \times [-T, T] \times \cdots \times [-T, T]}_{n-i \text{ vezes}},$$

logo  $m(S_{i,R} \cap [-T, T]^n) = (2R)(2T)^{n-1}$ , daí

$$\bar{\delta}(S_{i,R}) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{2^n R T^{n-1}}{(2T)^n} = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{R}{T} = 0. \quad \blacksquare$$

**Exercício resolvido.** (3.1.10) Se  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\bar{\delta} \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\delta}(A_i).$$

Em particular, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\bar{\delta} \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \bar{\delta}(A_i).$$

*Demonstração.* Seja  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ . Sabemos que, para todo  $T > 0$ , temos

$$m(A \cap [-T, T]^n) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i \cap [-T, T]^n),$$

donde segue que

$$\bar{\delta}(A) \leq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{m(A_i \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(A_i \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\delta}(A_i). \quad \blacksquare$$

O caso particular segue substituindo todo  $A_i$  com  $i > k$  por  $\emptyset$ .

**Exercício resolvido.** (3.1.11) Se  $A$  é um subconjunto Lebesgue-mensurável de  $\mathbb{R}^n$  e  $v \in \mathbb{R}^n$  é um vetor arbitrário, então  $\bar{\delta}(A) = \bar{\delta}(A + v)$ .

*Demonstração.* Observe que para todo  $T > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} |m(A \cap [-T, T]^n) - m((A + v) \cap [-T, T]^n)| &= |m(A \cap [-T, T]^n) - m(A \cap ([-T, T]^n - v))| \\ &= m((A \cap [-T, T]^n) \Delta (A \cap ([-T, T]^n - v))) \\ &\leq m([-T, T]^n \Delta ([-T, T]^n - v)) \\ &\leq n(2T)^{n-1} \|v\|. \end{aligned}$$

Logo temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m((A + v) \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \right| &\leq \frac{n(2T)^{n-1} \|v\|}{(2T)^n} \\ &= \frac{n \|v\|}{2T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

(lembrando que  $n$  e  $v$  estão fixados).

Portanto  $\bar{\delta}(A) = \bar{\delta}(A + v)$ . \blacksquare

**Exercício resolvido.** (3.1.12) Se  $A$  é um subconjunto Lebesgue-mensurável de  $\mathbb{R}^n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_r$  é uma sequência de vetores de  $\mathbb{R}^n$  tais que os conjuntos  $A + v_i$  são dois-a-dois disjuntos, então

$$\bar{\delta} \left( \bigcup_{i=1}^r (A + v_i) \right) = r \bar{\delta}(A).$$

*Demonstração.* O argumento desta prova é semelhante ao da prova do Exercício 3.1.11.

Observe que para todo  $T > 0$  e todo  $i \in [r]$ , temos que

$$\begin{aligned} |m(A \cap [-T, T]^n) - m((A + v_i) \cap [-T, T]^n)| &= |m(A \cap [-T, T]^n) - m(A \cap ([-T, T]^n - v_i))| \\ &= m((A \cap [-T, T]^n) \Delta (A \cap ([-T, T]^n - v_i))) \\ &\leq m([-T, T]^n \Delta ([-T, T]^n - v_i)) \\ &\leq n(2T)^{n-1} \|v_i\|. \end{aligned}$$

Seja  $R = \max_{i=1}^r \|v_i\|$ , então temos

$$\begin{aligned}
& \left| r \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m(\bigcup_{i=1}^r (A + v_i) \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^r \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \sum_{i=1}^r \frac{m((A + v_i) \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^r \left| \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m((A + v_i) \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^r \frac{n(2T)^{n-1} \|v_i\|}{(2T)^n} \\
&\leq r \frac{n(2T)^{n-1} R}{(2T)^n} \\
&= \frac{nrR}{2T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0,
\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue do fato que os  $A + v_i$ 's são dois-a-dois disjuntos.

Por outro lado, temos

$$r\bar{\delta}(A) = r \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} = \limsup_{T \rightarrow +\infty} r \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)}$$

Portanto temos

$$\bar{\delta} \left( \bigcup_{i=1}^r (A + v_i) \right) = r\bar{\delta}(A). \quad \blacksquare$$

**Exercício resolvido.** (3.1.13) Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  uma base de  $\mathbb{R}^n$  e  $k \in [n]$ . Defina

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in [n] \text{ e } a_i \in [0, 1] \text{ para todo } i \in [k] \right\}.$$

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é Lebesgue-mensurável tal que

$$A = \bigcup_{(i_j)_{j=1}^k \in \mathbb{Z}^k} \left( (A \cap S) + \sum_{j=1}^k i_j v_j \right),$$

então temos

$$\bar{\delta}(A) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)}.$$

Em particular, se  $S$  é limitado, temos

$$\bar{\delta}(A) = \frac{m(A \cap S)}{m(S)}.$$

*Demonstração.* Queremos provar que

$$\frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

Seja  $R = \sum_{i=1}^n \|v_i\|$  e tome  $T > R$  arbitrário e defina, para todo  $i \in [n]$ , inteiros  $a_i \leq b_i$  indutivamente a partir de

$$\begin{aligned}
a_i &= \min \{ z \in \mathbb{Z} : \forall (t_j)_{j=1}^{i-1} \in \mathbb{Z}^{i-1} \text{ com } a_j \leq t_j \leq b_j, \sum_{j=1}^{i-1} t_j v_j + z v_i \in [-T, T]^n \}; \\
b_i &= \max \{ z \in \mathbb{Z} : \forall (t_j)_{j=1}^{i-1} \in \mathbb{Z}^{i-1} \text{ com } a_j \leq t_j \leq b_j, \sum_{j=1}^{i-1} t_j v_j + z v_i \in [-T, T]^n \}.
\end{aligned}$$

Observe que os conjuntos considerados acima são limitados para todo  $i$  devido ao fato que  $[-T, T]^n$  é limitado e que os  $v_i$ 's são linearmente independentes.

Seja então

$$Q = [-T, T]^n \cap \left\{ \sum_{i=1}^n z_i v_i : \forall i \in [n], z_i \in [a_i, b_i] \right\}.$$

Observe que  $Q \supset [-T+R, T-R]^n$ . E como  $Q \subset [-T, T]^n$ , temos que

$$m([-T, T]^n) - m(Q) \leq (2n)(2T)^{n-1}R = O(T^{n-1}),$$

donde segue que também temos

$$m(A \cap [-T, T]^n) - m(A \cap Q) = O(T^{n-1}).$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m(A \cap Q)}{m(Q)} \right| \\ &= \left| \frac{(m(A \cap Q) + O(T^{n-1}))(2T)^n + O(T^{n-1}) - m(A \cap Q)(2T)^n}{(2T)^n((2T)^n + O(T^{n-1}))} \right| \\ &= \frac{m(A \cap Q)O(T^{n-1}) + O(T^{2n-1})}{O(T^{2n})} \\ &= O\left(\frac{1}{T}\right), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que  $m(A \cap Q) \leq m([-T, T]^n) = O(T^n)$ .

Por outro lado, temos  $m(S \cap [-T, T]^n) = \Theta(T^{n-k})$  pois  $v_1, v_2, \dots, v_n$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Ademais, temos que

$$m(S \cap [-T, T]^n) - m(S \cap Q) \leq (2(n-k))(2R)^k(2T)^{n-k-1}R = O(T^{n-k-1}),$$

donde segue que

$$m(A \cap S \cap [-T, T]^n) - m(A \cap S \cap Q) = O(T^{n-k-1}).$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)} - \frac{m(A \cap S \cap Q)}{m(S \cap Q)} \right| \\ &= \left| \frac{(m(A \cap S \cap Q) + O(T^{n-k-1}))(m(S \cap [-T, T]^n) + O(T^{n-k-1})) - m(A \cap S \cap Q)m(S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)(m(S \cap [-T, T]^n) + O(T^{n-k-1}))} \right| \\ &= \frac{m(A \cap S \cap Q)O(T^{n-k-1}) + m(S \cap [-T, T]^n)O(T^{n-k-1}) + O(T^{2n-2k-2})}{m(S \cap [-T, T]^n)(m(S \cap [-T, T]^n) + O(T^{n-k-1}))} \\ &= \frac{O(T^{n-k})O(T^{n-k-1}) + \Theta(T^{n-k})O(T^{n-k-1}) + O(T^{2n-2k-2})}{\Theta(T^{n-k})(\Theta(T^{n-k}) + O(T^{n-k-1}))} \\ &= O\left(\frac{1}{T}\right), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue do fato que  $m(A \cap S \cap Q) \leq m(S \cap [-T, T]^n) = \Theta(T^{n-k})$ .

Portanto ficamos com

$$\left| \left( \frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)} \right) - \left( \frac{m(A \cap Q)}{m(Q)} - \frac{m(A \cap S \cap Q)}{m(S \cap Q)} \right) \right| = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Basta provar então que

$$\frac{m(A \cap Q)}{m(Q)} - \frac{m(A \cap S \cap Q)}{m(S \cap Q)} = o(1),$$

para obter que

$$\frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)} = o(1)$$

(que é o que buscamos nesta prova).

Defina agora  $J = \{(t_j)_{j=1}^k \in \mathbb{Z}^k : \forall j \in [k], a_j \leq t_j < b_j\}$  e observe que pela construção de  $Q$  temos

$$Q = \bigcup_{(t_j)_{j=1}^k \in J} \left( (S \cap Q) + \sum_{j=1}^k t_j v_j \right).$$

Por outro lado, temos por hipótese que

$$A = \bigcup_{(i_j)_{j=1}^k \in \mathbb{Z}^k} \left( (A \cap S) + \sum_{j=1}^k i_j v_j \right),$$

logo temos

$$A \cap Q = \bigcup_{(i_j)_{j=1}^k \in J} \left( (A \cap S \cap Q) + \sum_{j=1}^k i_j v_j \right),$$

donde segue que

$$\frac{m(A \cap Q)}{m(Q)} - \frac{m(A \cap S \cap Q)}{m(S \cap Q)} = \frac{|J|m(A \cap S \cap Q)}{|J|m(S \cap Q)} - \frac{m(A \cap S \cap Q)}{m(S \cap Q)} = 0.$$

Portanto

$$\frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} - \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)} = o(1),$$

o que significa que

$$\bar{\delta}(A) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(A \cap S \cap [-T, T]^n)}{m(S \cap [-T, T]^n)}.$$

Para o caso particular em que  $S$  é limitado, temos que para  $T$  suficientemente grande, o argumento do lim sup é constante, logo

$$\bar{\delta}(A) = \frac{m(A \cap S)}{m(S)}. \quad \blacksquare$$

**Exercício resolvido.** (3.2.2) Se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de vetores de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty,$$

então existe  $x \in \mathcal{H}$  tal que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^n x_k \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

*Demonstração.* Observe que para todo  $n_0, \in \mathbb{N}$  e todos  $n \geq m \geq n_0$ , temos

$$\left\| \left( \sum_{k=0}^n x_k \right) - \left( \sum_{k=0}^m x_k \right) \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=n_0}^n \|x_k\| \xrightarrow{n_0 \rightarrow \infty} 0,$$

logo a sequência das somas parciais  $\sum_{k=0}^n x_k$  é de Cauchy e portanto convergente.  $\blacksquare$

**Exercício resolvido.** (3.2.6) Se  $V$  é um espaço vetorial, então  $V$  possui uma base.

*Demonstração.* Considere o conjunto  $\mathcal{B}$  dos subconjuntos linearmente independentes de  $V$  munido da ordem parcial  $\subset$ .

Vamos aplicar o Lema de Zorn (Lema A.1) a esse par  $(\mathcal{B}, \subset)$ , para isso, vamos provar que a hipótese do lema está satisfeita.

Seja  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  um conjunto totalmente ordenado por  $\subset$  arbitrário e considere  $L = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ . Trivialmente, para todo  $A \in \mathcal{A}$ , temos  $A \subset L$ . Vamos provar agora que  $L$  é linearmente independente.

Suponha que não, então existem  $v_1, v_2, \dots, v_n \in L$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  (onde  $\mathbb{K}$  é o corpo associado ao espaço vetorial) tais que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0,$$

ou seja, os  $v_j$ 's são linearmente dependentes.

Como  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é finito e  $L$  é totalmente ordenado, existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset A$ , o que é um absurdo, pois  $A$  é um conjunto linearmente independente.

Portanto, pelo Lema de Zorn, temos que existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que se  $B' \in \mathcal{B}$  e  $B \subset B'$ , então  $B' = B$ .

Vamos mostrar que  $B$  é uma base de  $V$ . Como  $B$  é linearmente independente, basta mostrar que  $B$  gera o espaço  $V$  inteiro.

Suponha que não, isto é, suponha que existe  $v \in V$  que não é combinação linear dos elementos em  $B$ . Mas isso significa que  $B \cup \{v\}$  é linearmente independente, ou seja, temos  $B \cup \{v\} \in \mathcal{B}$ , mas isso é um absurdo pois  $B \subsetneq B \cup \{v\}$ . ■

**Exercício resolvido.** (3.2.10) Se  $(x_j)_{j \in J}$  é uma sequência de reais não-negativos somável (i.e., temos  $\sum_{j \in J} x_j < +\infty$ ), então apenas uma quantidade enumerável de termos é (estritamente) positiva (i.e., temos  $|\{j \in J : x_j > 0\}| \leq |\mathbb{N}|$ ).

*Demonstração.* Como a sequência é de números não-negativos, temos que

$$\sum_{j \in J} x_j = \sup \left\{ \sum_{j \in K} x_j : K \subset J \text{ com } K \text{ enumerável} \right\}.$$

Considere então, para todo  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , o conjunto  $J_n = \{j \in J : x_j > 1/n\}$ .

Observe que esse conjunto tem de ser finito, caso contrário, a soma não seria finita.

Por outro lado, temos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} J_n = \{j \in J : x_j > 0\}$  e esse conjunto é enumerável pois é união enumerável de conjuntos finitos. ■

**Exercício resolvido.** (3.2.11) Se  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert, então  $\mathcal{H}$  possui um sistema ortonormal completo.

*Demonstração.* Esta prova é análoga à prova do Exercício 3.2.6.

Considere o conjunto  $\mathcal{B}$  dos subconjuntos de  $\mathcal{H}$  que são sistemas ortonormais munido da ordem parcial  $\subset$ .

Vamos aplicar o Lema de Zorn (Lema A.1) a esse par  $(\mathcal{B}, \subset)$ , para isso, vamos provar que a hipótese do lema está satisfeita.

Seja  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  um conjunto totalmente ordenado por  $\subset$  arbitrário e considere  $L = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ . Trivialmente, para todo  $A \in \mathcal{A}$ , temos  $A \subset L$ . Por outro lado, também temos que  $L$  é um sistema ortonormal, pois, se  $u, v \in L$ , então existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $u, v \in A$ , logo

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } u \neq v; \\ 1, & \text{se } u = v. \end{cases}$$

Portanto, pelo Lema de Zorn, temos que existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que se  $B' \in \mathcal{B}$  e  $B \subset B'$ , então  $B' = B$ .

Vamos mostrar que  $B$  é um sistema ortonormal completo de  $\mathcal{H}$ . Como  $B$  é sistema ortonormal, basta mostrar que para todo  $x \in \mathcal{H}$ , temos

$$x = \sum_{v \in B} \hat{x}(v)v.$$

Suponha que não, isto é, suponha que existe  $x \in \mathcal{H}$  que não é da forma acima.

Vamos provar que  $\sum_{v \in B} \hat{x}(v)v$  é convergente em norma.

Pelo Corolário 3.2.9, sabemos que apenas uma quantidade enumerável dos coeficientes de Fourier de  $x$  relativos a vetores de  $B$  são não-nulos. Se apenas uma quantidade finita deles for não-nula, não há o que fazer, então suponha que os coeficientes não-nulos são exatamente os das direções  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ .

Observe que, para todo  $n_0 \in \mathbb{N}$  e todos  $n \geq m \geq n_0$ , temos

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sum_{j=0}^n \hat{x}(v_j)v_j \right) - \left( \sum_{k=0}^m \hat{x}(v_k)v_k \right) \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^n \hat{x}(v_k)v_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=m+1}^n |\hat{x}(v_k)v_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=n_0}^n |\hat{x}(v_k)v_k| \xrightarrow{n_0 \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

logo a seqüência das somas parciais é de Cauchy e, portanto, convergente.

Observe também que, como o produto interno é contínuo e  $B$  é ortonormal, para todo  $w \in B$ , temos

$$\left\langle \sum_{v \in B} \hat{x}(v)v, w \right\rangle = \hat{x}(w).$$

Defina então  $y = x - \sum_{v \in B} \hat{x}(v)v$  e observe que  $y \neq 0$ .

Observe também que, para todo  $v \in B$ , temos  $\langle y, v \rangle = 0$ . Logo, tomando  $B' = B \cup \{y/\|y\|\}$  obtemos um sistema ortonormal que contém estritamente  $B$ , o que é uma contradição. ■

**Exercício resolvido.** (3.3.2) Seja  $\{u_j : j \in J\}$  um sistema ortonormal em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então  $\{u_j : j \in J\}$  é sistema ortonormal completo se e somente se não existe vetor  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $\|x\| \neq 0$  e  $\langle x, u_j \rangle = 0$  para todo  $j \in J$ .

*Demonstração.* Se existe tal  $x$ , então temos  $\sum_{j \in J} \hat{x}(u_j)u_j \neq x$  (i.e., a série não converge a  $x$ ), pois essa série só possui parcelas nulas, logo  $\{u_j : j \in J\}$  não é sistema ortonormal completo.

Por outro lado, se  $\{u_j : j \in J\}$  não é sistema ortonormal completo, então existe  $y \in \mathcal{H}$  tal que  $\sum_{j \in J} \hat{y}(u_j)u_j \neq y$  (i.e., a série não converge a  $y$ ). Por outro lado, pela Desigualdade de Bessel (Proposição 3.2.8), sabemos que essa série converge absolutamente e, pelo Exercício 3.2.2, isso significa que existe  $z \in \mathcal{H}$  tal que  $z = \sum_{j \in J} \hat{y}(u_j)u_j$  (i.e., a série converge a  $z$ ).

Pelo Corolário 3.2.9, sabemos que  $\hat{y}(u_j)$  é não-nulo apenas para uma quantidade enumerável de índices  $j \in J$ , logo, podemos assumir que

$$z = \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{y}(u_{j_k})u_{j_k},$$

para uma seqüência  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$  de índices distintos.

Observe agora que, para todo  $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ , temos

$$\left\langle \sum_{k=0}^N \hat{y}(u_{j_k})u_{j_k}, u_{j_{\tilde{k}}} \right\rangle = \begin{cases} \hat{y}(u_{j_{\tilde{k}}}), & \text{se } N \geq \tilde{k}; \\ 0, & \text{se } N < \tilde{k}; \end{cases}$$

pois  $\{u_j : j \in J\}$  é um sistema ortonormal.

Como o produto interno é contínuo, isso significa que, para todo  $j \in J$ , temos  $\hat{z}(u_j) = \hat{y}(u_j)$ .

Seja então  $x = z - y$  e observe que  $x \neq 0$ , pois  $y \neq z$ , mas, para todo  $j \in J$ , temos  $\langle x, u_j \rangle = \hat{z}(u_j) - \hat{y}(u_j) = 0$ . ■

**Exercício resolvido.** (3.3.6) Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos

$$m_1(\mathbb{R}^n) = \sup\{\bar{\delta}(A) : A \subset \mathbb{R}^n \text{ é Lebesgue-mensurável e evita a distância 1} \\ \text{e existe } c > 0 \text{ tal que } A = A + c\mathbb{Z}^n\}.$$

*Demonstração.* Seja

$$\widetilde{m}_1(\mathbb{R}^n) = \sup\{\bar{\delta}(A) : A \subset \mathbb{R}^n \text{ é Lebesgue-mensurável e evita a distância 1} \\ \text{e existe } c > 0 \text{ tal que } A = A + c\mathbb{Z}^n\}.$$

Certamente temos  $m_1(\mathbb{R}^n) \geq \widetilde{m}_1(\mathbb{R}^n)$ . Vamos provar agora que vale a outra desigualdade.

Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Então existe  $A \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-mensurável e que evita distância 1 tal que  $\bar{\delta}(A) \geq m_1(\mathbb{R}^n) - \varepsilon$ .

Seja também  $T_0 > 0$  tal que  $n/(2T_0) < \varepsilon$ . Da definição de densidade superior, sabemos que existe  $T > T_0$  tal que

$$\frac{m(A \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \geq \bar{\delta}(A) - \varepsilon.$$

$$A_0 = A \cap [-T, T-1]^n + 2T\mathbb{Z}^n = \{a + u : a \in A \cap [-T, T-1]^n, u \in 2T\mathbb{Z}^n\}.$$

Observe que  $A$  é  $2T\mathbb{Z}^n$ -periódico e Lebesgue-mensurável e, do Exercício 3.1.13, temos

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(A_0) &= \frac{m(A_0 \cap [-T, T]^n)}{m([-T, T]^n)} \\ &= \frac{m(A \cap [-T, T-1]^n)}{m([-T, T]^n)} \\ &\geq \frac{m(A \cap [-T, T]^n) - n(2T)^{n-1}}{m([-T, T]^n)} \\ &= \bar{\delta}(A) - \frac{n}{2T} \\ &\geq \bar{\delta}(A) - \frac{n}{2T_0} \\ &\geq \bar{\delta}(A) - \varepsilon \\ &\geq m_1(\mathbb{R}^n) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Observe também que  $A_0$  evita distância 1, pois  $A$  evita distância 1 e  $A_0 \cap [-T, T]^n = A \cap [-T, T-1]^n$ . Portanto temos

$$\widetilde{m}_1(\mathbb{R}^n) \geq \bar{\delta}(A_0) \geq m_1(\mathbb{R}^n) - 2\varepsilon,$$

e como  $\varepsilon$  é arbitrário, temos que  $\widetilde{m}_1(\mathbb{R}^n) \geq m_1(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Exercício resolvido** (Identidade de Parseval). (3.3.9) Se  $\{u_j : j \in J\}$  é um sistema ortonormal completo de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $x$  e  $y$  são dois vetores de  $\mathcal{H}$ , então

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \widehat{x}(u_j) \overline{\widehat{y}(u_j)}.$$

*Demonstração.* Do Corolário 3.2.9, sabemos que  $\widehat{x}(u_j)$  e  $\widehat{y}(u_j)$  são não-nulos apenas para uma quantidade enumerável de índices  $j \in J$ , então podemos supor que  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$  é uma sequência de índices tal que

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{x}(u_{j_k}) u_{j_k} \qquad y = \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{y}(u_{j_k}) u_{j_k}.$$

Observe que, para todo  $N \in \mathbb{N}$ , temos

$$\left\langle \sum_{k=0}^N \widehat{x}(u_{j_k}) u_{j_k}, \sum_{k=0}^N \widehat{y}(u_{j_k}) u_{j_k} \right\rangle = \sum_{k=0}^N \widehat{x}(u_{j_k}) \overline{\widehat{y}(u_{j_k})}$$

e também que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \left| \widehat{x}(u_{j_k}) \overline{\widehat{y}(u_{j_k})} \right| &\leq \sum_{k=0}^n |\widehat{x}(u_{j_k})|^2 + |\widehat{y}(u_{j_k})|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2, \end{aligned}$$

logo a série é convergente.

Portanto, como o produto interno é contínuo (em  $\mathcal{H}^2$ ) temos que

$$\langle x, y \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \widehat{x}(u_{j_k}) \overline{\widehat{y}(u_{j_k})} = \sum_{j \in J} \widehat{x}(u_j) \overline{\widehat{y}(u_j)}.$$

■

**Exercício resolvido.** (3.3.10) Se  $\{u_j : j \in J\}$  é um sistema ortonormal completo de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $(\alpha_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  é uma sequência de coeficientes tal que  $\sum_{j \in J} \alpha_j u_j = x \in \mathcal{H}$  (i.e., a série converge a  $x$  em norma), então, para todo  $j \in J$ , temos  $\widehat{x}(u_j) = \alpha_j$ .

*Demonstração.* Provaremos primeiramente para o caso em que  $\alpha_j$  é não-nulo apenas para uma quantidade enumerável de índices  $j \in J$ . Nesse caso, podemos supor que  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$  é uma sequência de índices tal que

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_{j_k} u_{j_k}.$$

Observe que, para todo  $N \in \mathbb{N}$ , e todo  $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ , temos

$$\left\langle \sum_{k=0}^N \alpha_{j_k} u_{j_k}, u_{j_{\tilde{k}}} \right\rangle = \begin{cases} \alpha_{j_{\tilde{k}}}, & \text{se } N \geq \tilde{k}; \\ 0, & \text{se } N < \tilde{k}. \end{cases}$$

Como o produto interno é contínuo, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\langle x, u_{j_k} \rangle = \alpha_{j_k}.$$

Vamos agora provar que se  $\sum_{j \in J} \alpha_j u_j$  é convergente então apenas uma quantidade enumerável de  $\alpha_j$ 's não é nula. Sem perda de generalidade, supomos que os  $\alpha_j$ 's nulos são somados por último (lembramos que a série não necessariamente converge incondicionalmente, mas as parcelas nulas não interferem na série).

Seja  $(j_k)_{k < \beta}$  a sequência em  $J$  indexada por ordinais  $k < \beta$  que fornece a ordem da soma. Como essa série é convergente, em particular, temos que para todo ordinal  $k$  a série  $\sum_{t < k} \alpha_{j_t} u_{j_t}$  é convergente, então defina

$$x_k = \sum_{t < k} \alpha_{j_t} u_{j_t},$$

em particular, se  $k < \omega_1$ , temos

$$\|x_k\|^2 = \sum_{t < k} |\alpha_{j_t}|^2.$$

Por outro lado, como  $\|\cdot\|$  é contínua, temos que

$$\|x_{\omega_1}\|^2 = \sup_{k < \omega_1} \sum_{t < k} |\alpha_{j_t}|^2 = \sum_{t < \omega_1} |\alpha_{j_t}|^2,$$

logo, pelo Exercício 3.2.10, temos que  $\alpha_{j_t}$  é não-nulo apenas para uma quantidade enumerável de ordinais  $t < \omega_1$  e portanto existe um ordinal enumerável  $t_0$  tal que  $\alpha_t = 0$  para todo  $t > t_0$ . ■

**Exercício resolvido.** (4.1.7) Se  $F$  é uma face de um simplexo  $S \subset \mathbb{R}^N$ , então  $F$  está contido na fronteira de  $S$ .

*Demonstração.* Vamos provar primeiramente para o caso em que  $F$  é uma faceta de  $S$ . Seja  $v$  o único vértice de  $S$  que não pertence a  $F$  e tome  $x \in F$  arbitrário.

Observe que para todo  $t > 1$ , afirmamos que  $w_t = v + t(x - v) \notin S$ . De fato, pois  $x$  é combinação convexa dos vértices de  $F$ , então como os vértices de  $S$  são afim independentes, sabemos que  $w_t$  se escreve de uma única maneira como combinação afim dos vértices de  $S$ , que é  $w_t = (1 - t)v + tx$  e essa não é uma combinação convexa.

Por outro lado, para todo  $r > 0$ , temos que existe  $t > 1$  tal que  $d(w_t, x) \leq r$  (a saber um tal  $t$  é  $(r + 1)/\|x - v\|$ ), logo  $x$  está na fronteira de  $S$ .

O caso em que  $F$  é uma face (e não faceta) segue diretamente, pois toda face de  $S$  está contida em uma faceta de  $S$ . ■

## B Notação

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

$\mathbb{J}_n$  denota a matriz  $n \times n$  com todas as entradas 1

$$f(n) \sim g(n) \text{ significa } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ significa } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < +\infty$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \text{ significa } g(n) = O(f(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ significa } f(n) = O(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) \asymp g(n) \text{ significa } f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \text{ significa } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \text{ significa } g(n) = o(f(n))$$

$$\pi(n) = |\{a \in [n] : a \text{ é primo}\}|, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

$\lfloor x \rfloor$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $x$ , para  $x \in \mathbb{R}$

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

$$\binom{A}{k} = \{B \subset A : |B| = k\}, \text{ para } A \text{ um conjunto}$$

$$\binom{A}{\leq k} = \{B \subset A : |B| \leq k\}, \text{ para } A \text{ um conjunto}$$

$n \mid m$  significa  $n$  divide  $m$ , para  $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$

$$N_G(v) = \{w \in V(G) : vw \in E(G)\}, \text{ para } G \text{ um grafo e } v \in V(G)$$

$$d_G(v) = |N_G(v)|, \text{ para } G \text{ um grafo e } v \in V(G)$$

$$N_G(X) = \bigcup_{x \in X} N_G(x), \text{ para } G \text{ um grafo e } X \subset V(G)$$

$$\delta_G(X) = \{xy \in E(G) : x \in X\}, \text{ para } G \text{ um grafo e } X, Y \subset V(G)$$

$$\delta_G(X, Y) = \{xy \in E(G) : x \in X \text{ e } y \in Y\}, \text{ para } G \text{ um grafo e } X, Y \subset V(G)$$

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}, \text{ para } G \text{ um grafo}$$

$$\Delta(G) = \sup\{d_G(v) : v \in V(G)\}, \text{ para } G \text{ um grafo}$$

## Índice de palestrantes

Fabrício Caluza Machado

08/04/2014, 8

22/04/2014, 11

03/06/2014, 33

10/06/2014, 37

Fernando Mário de Oliveira Filho

06/05/2014, 16

13/05/2014, 20

20/05/2014, 25

27/05/2014, 29

Yoshiharu Kohayakawa

18/03/2014, 2

25/03/2014, 5

24/06/2014, 42

## Índice de nomes

Alon, 11

Babai, 11

Bessel, 22, 33, 57

Brouwer, 37

Carathéodory, 6, 47

Cauchy, 20, 25, 55, 57

Chaudhuri, 10

Chen, 43

De Bruijn, 15, 16, 49

Erdős, 15, 16, 20, 49

Euler, 23

Falconer, 17

Fisher, 2, 8

Fourier, 20, 22, 28–30, 57

Frankl, 9, 15

Gallai, 43

Helly, 6, 7, 49

Hilbert, 20–23, 25, 28, 55–59

Kohayakawa, 2, 5, 42

Lebesgue, 16–19, 23, 25, 26, 30, 51–53, 58

Machado, 8, 11, 33, 37

Oliveira, 16, 20, 25, 29

Pósa, 44

Parseval, 21, 27, 28, 58

Petersen, 43

Radon, 6

Ray, 10

Schwarz, 25

Sperner, 33, 36–40

Stirling, 13

Stone, 24

Suzuki, 11

Weierstrass, 24

Wilson, 9, 10, 15

Zorn, 49, 50, 56

## Referências

- [1] N. Alon, L. Babai, and H. Suzuki, *Multilinear polynomials and Frankl–Ray–Chaudhuri–Wilson type intersection theorems*, J. Combin. Theory Ser. A **58** (1991), no. 2, 165–180. 11
- [2] L. Babai and P. Frankl, *Linear algebra methods in combinatorics with applications to geometry and computer science*, Preliminary Version 2, 1992. 8
- [3] L. E. J. Brouwer, *Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich*, Math. Ann. **69** (1910), no. 2, 176–180. 37
- [4] K. J. Falconer, *The realization of distances in measurable subsets covering  $\mathbf{R}^n$* , J. Combin. Theory Ser. A **31** (1981), no. 2, 184–189. 17
- [5] P. Frankl and R. M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), no. 4, 357–368. 9, 15
- [6] J. Matoušek, *Thirty-three miniatures*, Student Mathematical Library, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, Mathematical and algorithmic applications of linear algebra. 2
- [7] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *On  $t$ -designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), no. 3, 737–744. 10
- [8] E. Sperner, *Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928), no. 1, 265–272. 36
- [9] F. E. Su, *Rental harmony: Sperner’s lemma in fair division*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), no. 10, 930–942. 33