

Notas das reuniões do PICME

Segundo semestre de 2013

Leonardo Nagami Coregliano

13 de janeiro de 2014

Sumário

1 Teoria dos números e grafos	2
1.1 Um problema e um teorema de Erdős	2
1.2 Convexidade de pontos no plano	4
1.3 Outro problema de Erdős	5
1.4 Happy ending problem ou o Problema de Klein	7
2 Colorações fortes de hipergrafos	10
2.1 Definições e resultados preliminares	10
2.2 Famílias intersectantes e uma cota superior	13
2.3 Cotas inferiores	14
2.4 Colorações 3-fortes de hipergrafos 2-intersectantes	15
2.5 Problemas em aberto	17
3 Famílias intersectantes	18
3.1 Teoremas clássicos	18
3.2 A p -medida sobre $\mathcal{P}([n])$	19
3.3 Rumo ao Teorema de Dinur, Safra e Friedgut	22
3.4 O Teorema de Dinur, Safra e Friedgut	27
4 O jogo dos policiais e ladrão em grafos	32
4.1 A definição do jogo	32
4.2 Definições e resultados	32
5 Número cromático de grafos densos livres de triângulos	38
5.1 Resultados iniciais e o Grafo de Kneser	38
5.2 O Teorema de Thomassen	42
5.3 Outros resultados	44
A Soluções dos exercícios resolvidos	46
B Notação	48
Índice de palestrantes	49
Índice de nomes	50
Referências	51

1 Teoria dos números e grafos

1.1 Um problema e um teorema de Erdős

27/08/2013 – Yoshiharu Kohayakawa

O seguinte problema foi enunciado (e resolvido) por Erdős.

Problema 1.1. Determinar o maior $f = f(n)$ tal que existem $a_1, a_2, \dots, a_f \in [n]$ distintos satisfazendo

$$\forall i, j, k \in [f] \text{ distintos, } a_i \nmid a_j a_k.$$

É imediato que, se tomarmos os primos em $[n]$, temos a propriedade requerida, logo temos a proposição abaixo.

Proposição 1.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq \pi(n) = |\{a \in [n] : a \text{ é primo}\}|$

Com o teorema dos números primos (abaixo) podemos ter uma ideia do crescimento assintótico dessa função.

Fato 1.3 (Teorema dos números primos). Temos $\pi(n) \sim n / \ln n$.

Porém é possível encontrar uma família assintoticamente maior que essa e melhorar a cota inferior de $f(n)$.

Proposição 1.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 125$, temos

$$f(n) \geq \pi(n) + \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{n^{2/3}}{(\ln n)^2}.$$

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 125$ e sejam $t = \pi(\lfloor n^{1/3} \rfloor) \geq 3$ e $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_t \leq n$ os primos em $[n]$.

A ideia é considerar números da forma $p_i p_j p_k$ de forma a satisfazer as propriedades requeridas, para isso consideraremos famílias da forma $\mathcal{T} \subset \binom{[t]}{3}$ que satisfazem

$$\forall T, T' \in \mathcal{T} \text{ distintos, } |T \cap T'| \leq 1.$$

Seja $g(t)$ o tamanho de uma maior família $\mathcal{T} \subset \binom{[t]}{3}$ satisfazendo a propriedade acima.

Observe que a propriedade requerida é equivalente a $\forall i, j \in [t], |\{T \in \mathcal{T} : i, j \in T\}| \leq 1$, logo temos $g(t) \leq \binom{t}{2}$.

Por outro lado, cada elemento $T = \{a, b, c\}$ de uma família \mathcal{T} com essa propriedade impede que exatamente $3(t-3)$ outros elementos de $\binom{[t]}{3}$ também estejam em \mathcal{T} . A saber $\{a, b, c\}$ impede que qualquer elemento de $\{\{a, b, i\} : i \in [t] \setminus \{a, b, c\}\} \cup \{\{a, i, c\} : i \in [t] \setminus \{a, b, c\}\} \cup \{\{i, b, c\} : i \in [t] \setminus \{a, b, c\}\}$ esteja em \mathcal{T} .

Logo, se \mathcal{T} é uma família com essa propriedade de tamanho máximo, então temos $\binom{t}{3} \leq |\mathcal{T}|(3(t-3) + 1) \leq 3(t-2)$, ou seja

$$g(t) \geq \frac{1}{3(t-2)} \binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{18(t-2)} = \frac{1}{9} \binom{t}{2}.$$

Munidos de uma família \mathcal{T} satisfazendo essa propriedade e de cardinalidade $g(t)$ consideramos o subconjunto $X = A \cup B$ de $[n]$, onde

$$A = \{p_i p_j p_k : \{i, j, k\} \in \mathcal{T}\} \text{ e} \\ B = \{p_i \in [n] : p_i \geq n^{1/3}\}.$$

Observe que, se $p_i p_j p_k \in A$, então $\max\{p_i, p_j, p_k\} \leq n^{1/3}$, logo $p_i p_j p_k \leq n$.

É imediato que, se $b \in B$, então nenhum produto de elementos de $X \setminus \{b\}$ é divisível por b . Ademais, se $a_1, a_2 \in A$ e $b \in B$, então $a_1 \mid a_2 b$ se e somente se $a_1 = a_2$.

Finalmente, se $p_i p_j p_k, p_r p_s p_t, p_u p_w p_v \in A$ são distintos, então $p_i p_j p_k \nmid (p_r p_s p_t)(p_u p_w p_v)$, caso contrário teríamos $|\{r, s, t\} \cap \{u, w, v\}| \geq 3$, contradizendo a construção de A a partir de \mathcal{T} .

Portanto $X \subset [n]$ é de fato uma família satisfazendo a propriedade requerida. Logo

$$\begin{aligned} |X| &= \pi(n) - \pi(\lfloor n^{1/3} \rfloor) + g(\lfloor n^{1/3} \rfloor) = \pi(n) - (1 + o(1)) \frac{n^{1/3}}{\ln n^{1/3}} + \frac{1}{9} \left(\pi(\lfloor n^{1/3} \rfloor) \right) = \\ &= \pi(n) - (3 + o(1)) \frac{n^{1/3}}{\ln n} \frac{1}{18} \left((3 + o(1)) \frac{n^{1/3}}{\ln n} \right)^2 = \pi(n) + \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \frac{n^{2/3}}{(\ln n)^2}. \end{aligned}$$

Portanto $f(n) \geq |X| = \pi(n) + (1/2 + o(1)) n^{2/3}/(\ln n)^2$. ■

O teorema abaixo nos dá que essa construção é assintoticamente justa.

Teorema 1.5 (Erdős '38 [10]). Existe uma função não-negativa $g(n) = O(n^{2/3}/(\ln n)^2)$ tal que $f(n) \leq \pi(n) + g(n)$.

Vamos provar uma versão levemente mais fraca desse teorema.

Teorema 1.6. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos $f(n) \leq \pi(n) + 2n^{2/3}$.

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}^*$ e vamos provar inicialmente o seguinte fato.

Fato 1.7. Sejam $V_1 = [\lfloor n^{2/3} \rfloor]$ e $V_2 = \{d \in \mathbb{N} : \lfloor n^{2/3} \rfloor < d \leq n \text{ e } d \text{ é primo}\}$. Todo $a \in [n]$ é da forma $a = bd$, com $b \in V_1$ e $d \in V_1 \cup V_2$.

Prova do Fato 1.7. Fixe $a \in [n]$. Se $a < n^{2/3}$ o resultado é trivial tomando $b = a$ e $d = 1$.

Suponha então que $a \geq n^{2/3}$ e seja p o maior primo que divide a .

Se $p > n^{1/3}$, então $a/p < n^{2/3}$, daí tomamos $b = a/p \in V_1$ e $d = p \in V_1 \cup V_2$

Suponha então que todo primo que divide a é menor ou igual a $n^{1/3}$ e que esses primos são $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$.

Certamente existe $s \in [k]$ tal que $n^{1/3} \leq p_1 p_2 \dots p_s \leq n^{2/3}$, pois todos os primos são menores ou iguais a $n^{2/3}/n^{1/3}$ e $a \geq n^{1/3}$.

Daí tomamos $b = p_1 p_2 \dots p_k \in V_1$ e $d = a/(p_1 p_2 \dots p_k) \leq n^{2/3}$ (d também está em V_1). ■

Suponha que a_1, a_2, \dots, a_f satisfazem a propriedade do Problema 1.1 e seja $A = \{a_i : i \in [f]\}$. Consideramos então um grafo G sobre $V_1 \cup V_2$ fixando para cada $a_i \in A$ uma decomposição $a_i = b_i d_i$ com $b_i \in V_1$ e $d_i \in V_2$ e fazendo $E(G) = \{\{b_i, d_i\} : i \in [f]\}$. Note que G pode possuir laços, mas G possui no máximo $|V_1| = n^{2/3}$ laços.

Seja G' o grafo obtido a partir de G removendo seus laços. Afirmamos que G' não pode possuir trilhas (passeios que não repetem arestas) de comprimento três.

De fato, pois v_0, v_1, v_2, v_3 fossem vértices consecutivos de uma trilha teríamos $v_0 v_1, v_1 v_2, v_2 v_3 \in A$, mas $v_1 v_2 \mid (v_0 v_1)(v_2 v_3)$, contradizendo a propriedade do Problema 1.1.

Logo, G' é uma floresta, o que significa que $|E(G')| \leq |V(G')| - 1 \leq \pi(n) + n^{2/3}$.

Portanto $|A| = |E(G)| \leq |E(G')| + n^{2/3} \leq \pi(n) + 2n^{2/3}$. ■

A seguir enunciamos um problema similar.

Problema 1.8. Determinar o maior $g = g(n)$ tal que existem $a_1, a_2, \dots, a_g \in [n]$ distintos satisfazendo

$$\forall \{i, j\}, \{k, l\} \subset [g] \text{ distintos e com } i \neq j \text{ e } k \neq l, a_i a_j \neq a_k a_l.$$

Novamente é imediato que se tomarmos os primos em $[n]$ temos a propriedade requerida, logo temos a proposição abaixo.

Proposição 1.9. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \geq \pi(n)$.

Exercício 1.10. Encontrar uma cota inferior melhor para $g(n)$.

1.2 Convexidade de pontos no plano

A seguir enunciamos um problema sobre convexidade de pontos no plano.

Problema 1.11 (Problema de Klein). Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$, determinar $N = N(n)$ menor o possível tal que toda coleção de $m \geq N$ pontos no plano em posição geral (não há três pontos colineares) contém n deles formando um polígono convexo.

Facilmente calculamos $N(3)$ e $N(4)$.

Proposição 1.12. Temos $N(3) = 3$ e $N(4) = 5$.

Demonstração. Como quaisquer três pontos não colineares formam um triângulo (que é convexo), temos $N(3) = 3$.

Suponha agora que temos 5 pontos no plano. Se ao calcularmos o fecho convexo desses pontos obtivermos um quadrilátero ou um pentágono, não há nada o que fazer.

Suponha então que o fecho convexo é um triângulo, então há dois pontos no interior desse triângulo e a reta que passa por esses dois pontos intersecta exatamente dois lados do triângulo. Portanto os vértices do lado restante mais os dois do interior formam um quadrilátero convexo. Logo $N(4) \leq 5$.

Como certamente $N(4) \geq 5$, então $N(4) = 5$. ■

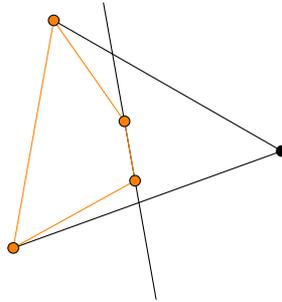


Figura 1: Exemplo de disposição dos 5 pontos no último caso da demonstração.

Lembremos (uma das versões do) o Teorema de Ramsey.

Teorema 1.13 (Ramsey). Para todos $k, m, l \in \mathbb{N}$, existe $R = R(k, m, l) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq R$, então toda m -coloração de $\binom{[n]}{k}$ possui um conjunto monocromático de tamanho l .

Observação. Uma m -coloração de $\binom{[n]}{k}$ é uma função $c: \binom{[n]}{k} \rightarrow [m]$.

Um conjunto monocromático (em relação a c) é um conjunto $A \subset [n]$ tal que existe uma cor $\alpha \in [m]$ de forma que todo subconjunto de k elementos de A possui cor α , i.e. $\binom{A}{k} \subset c^{-1}(\alpha)$.

Com o Teorema de Ramsey, podemos provar que $N(n)$ existe para todo n .

Proposição 1.14. Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$, temos que $N(n)$ existe.

Demonstração. O caso $n \in \{3, 4\}$ já foi provado.

Fixe $n \geq 5$ e considere uma coleção de m pontos no plano em posição geral.

Considere a 2-coloração de subconjuntos de 4 elementos dentre os m pontos dada por

$$c(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A \text{ forma um polígono convexo;} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Teorema de Ramsey, se m for grande o suficiente, existirá um conjunto monocromático A de tamanho n . Como $n \geq 5 = N(4)$, sabemos que a cor de A é 0 (toda coleção de pelo menos 5 pontos possui um quadrilátero convexo).

Vamos mostrar agora que A forma um polígono convexo.

Para isso, basta considerar o fecho convexo B de A munido de uma triangulação T . Certamente não pode existir nenhum ponto p de A no interior de B , caso contrário p juntamente com os vértices do triângulo de T em cujo interior p está formaria um quadrilátero côncavo. Portanto A é convexo. ■

Essa prova fornece uma cota superior para $N(n)$ baseada nos números de Ramsey. Porém, Erdős e Szekeres provaram uma cota superior melhor que essa.

Teorema 1.15 (Erdős–Szekeres '35 [9]). Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$, temos $N(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1$.

A seguir definimos duas noções úteis para estudar o problema.

Definição 1.16. Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Uma \cup -*configuração* é uma subsequência $(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2}), \dots, (x_{i_k}, y_{i_k})$ da sequência acima tal que

$$\forall j \in [k-2], \frac{y_{i_{j+2}} - y_{i_{j+1}}}{x_{i_{j+2}} - x_{i_{j+1}}} \geq \frac{y_{i_{j+1}} - y_{i_j}}{x_{i_{j+1}} - x_{i_j}}.$$

Uma \cap -*configuração* é uma subsequência $(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2}), \dots, (x_{i_k}, y_{i_k})$ da sequência acima tal que

$$\forall j \in [k-2], \frac{y_{i_{j+2}} - y_{i_{j+1}}}{x_{i_{j+2}} - x_{i_{j+1}}} \leq \frac{y_{i_{j+1}} - y_{i_j}}{x_{i_{j+1}} - x_{i_j}}.$$

Se definirmos $g(a, b)$ como o maior número de pontos no plano (sem coordenadas x coincidentes) que evita uma \cup -configuração de tamanho a e evita uma \cap -configuração de tamanho b , teremos trivialmente que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, N(n) \leq g(n, n) + 1.$$

Exercício 1.17. Prove que, para todo $n \geq 3$, temos $g(n, n) \leq \binom{2n-4}{n-2}$.

Dica. Tente fazer algo parecido com a prova do teorema abaixo.

Um outro teorema de Erdős e Szekeres é provado a seguir.

Teorema 1.18 (Erdős–Szekeres '35 [9]). Toda sequência de n^2+1 números reais possui uma subsequência monótona de n elementos.

A prova abaixo deve-se a Seidenberg [20].

Demonstração. Fixe n^2+1 pontos de \mathbb{R}^2 : $(p_i)_{i=1}^{n^2+1} = ((x_i, y_i))_{i=1}^{n^2+1}$ e defina para todo p_i o par $(a_i, b_i) \in [n] \times [n]$, onde a_i é o tamanho da maior subsequência decrescente terminando em p_i e b_i é o tamanho da maior subsequência crescente terminando em p_i .

Como há n^2+1 pontos e $|[n] \times [n]| = n^2$, pelo princípio da casa dos pombos, existem $1 \leq i < j \leq n$ tais que $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$.

Suponha que $y_i \leq y_j$, então conseguimos construir uma sequência crescente terminando em p_j de tamanho b_j+1 tomando a sequência crescente terminando em p_i de tamanho b_i e adicionando p_j ao final, o que contradiz o valor de b_j .

Suponha então que $y_i > y_j$, nesse caso, conseguimos construir uma sequência decrescente terminando em p_j de tamanho a_j+1 tomando a sequência decrescente terminando em p_i de tamanho a_i e adicionando p_j ao final, o que contradiz o valor de b_j .

Portanto a sequência tem de possuir uma subsequência monótona de tamanho n . ■

1.3 Outro problema de Erdős

10/09/2013 – Yoshiharu Kohayakawa

A seguir relembremos o Problema 1.8.

Problema. (1.8) Determinar o maior $g = g(n)$ tal que existem $a_1, a_2, \dots, a_g \in [n]$ distintos satisfazendo

$$\forall \{i, j\}, \{k, l\} \subset [g] \text{ distintos e com } i \neq j \text{ e } k \neq l, a_i a_j \neq a_k a_l.$$

Definição 1.19. Dizemos que $(a_i)_{i=1}^g \in [n]^g$ é uma *sequência de Sidon multiplicativa* se $(a_i)_{i=1}^g$ satisfaz a propriedade do Problema 1.8.

Com essa definição, o Problema 1.8 consiste em determinar $g(n) = \max\{g : \exists (a_i)_{i=1}^g \in [n]^g \text{ sequência de Sidon multiplicativa}\}$.

Em 1938, Erdős provou o seguinte teorema.

Teorema 1.20 (Erdős '38). Com a definição de $g(n)$ do Problema 1.8, temos (para todo $n \in \mathbb{N}^*$):

1. $g(n) \leq \pi(n) + O(n^{3/4})$;
2. Existe uma constante $c > 0$ tal que $g(n) \geq \pi(n) + cn^{3/4}/(\ln n)^{3/2}$.

Para estudar a prova desse teorema, estudaremos primeiramente outro problema.

Problema 1.21 (Problema de Zarankiewicz). Determinar o maior $M = z(m, n)$ tal que existe G um grafo (V, W) bipartido com $|V| = n$, $|W| = m$, $|E(G)| = M$ e $K_{2,2} = C_4 \not\subseteq G$.

Teorema 1.22. Para todos m e n naturais, temos $z(m, n) \leq n\sqrt{m} + m$.

Antes de provar o teorema acima, enunciaremos uma propriedade simples de grafos como exercício.

Exercício resolvido 1.23. Se G é um grafo (V, W) bipartido com $|V| = n$, $|W| = m$ e $|E(G)| = M$, então

$$\sum_{w \in W} \binom{d_G(w)}{2} \geq m \binom{M/m}{2}.$$

Demonstração. Seja G um grafo (V, W) bipartido com $|V| = n$, $|W| = m$, $|E(G)| = M = z(m, n)$ e $K_{2,2} = C_4 \not\subseteq G$.

Como $K_{2,2} \not\subseteq G$, temos que $\forall v_1, v_2 \in V$ distintos, $\{v_1, v_2\}$ está contido em no máximo um conjunto dentre $(N_G(w))_{w \in W}$, logo, pelo Exercício 1.23, temos

$$n^2/2 \geq \binom{n}{2} \geq \sum_{w \in W} \binom{|N_G(w)|}{2} = \sum_{w \in W} \binom{d_G(w)}{2} \geq m \binom{M/m}{2} \geq m \frac{(M/m - 1)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{\sqrt{m}} - \sqrt{m} \right)^2.$$

Donde segue que $n \geq M/\sqrt{m} - \sqrt{m}$, e, portanto $M \leq n\sqrt{m} + m$. ■

A seguir provamos o primeiro item do Teorema 1.20.

Prova do Teorema 1.20. Fixemos $n \geq 2$ e lembremos do seguinte fato.

Fato. (1.7) Sejam $V_1 = [\lfloor n^{2/3} \rfloor]$ e $V_2 = \{d \in \mathbb{N} : \lfloor n^{2/3} \rfloor < d \leq n \text{ e } d \text{ é primo}\}$. Todo $a \in [n]$ é da forma $a = bd$, com $b \in V_1$ e $d \in V_1 \cup V_2$.

Observe que, na decomposição acima, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $b \leq d$.

Suponha então que $(a_i)_{i=1}^g$ é uma sequência de Sidon multiplicativa e fixe, para cada $i \in [g]$, uma decomposição $a_i = b_i d_i$ como no Fato 1.7.

Seja $V'_1 = \{x' : x \in V_1\}$ uma cópia disjunta de V_1 e considere o grafo $(V'_1, V_1 \cup V_2)$ -bipartido G tal que $E(G) = \{b'_i d_i : i \in [g]\}$.

Observe que $G \not\supseteq K_{2,2}$, caso contrário teríamos $b', \hat{b}' \in V'_1$ e $d, \hat{d} \in V_1 \cup V_2$ induzindo um $K_{2,2}$ em G o que significa que existiriam $i, j, k, l \in [g]$ tais que $a_i = bd$, $a_j = b\hat{d}$, $a_k = \hat{b}d$ e $a_l = \hat{b}\hat{d}$, o que é uma contradição, pois teríamos $a_i a_l = a_j a_k$ em uma sequência de Sidon multiplicativa.

Considere a partição de $E(G) = A \cup B \cup C$, onde

$$\begin{aligned} A &= \{b'd : d \leq n^{1/2}\} \\ B &= \{b'd : n^{1/2} < d \leq n^{3/4}\} \\ C &= \{b'd : n^{3/4} < d\} \end{aligned}$$

Observe que, se $b'd \in A$, então temos $b' \leq n^{1/2}$, logo, pelo Teorema 1.22, temos $|A| \leq z(\lfloor n^{1/2} \rfloor, \lfloor n^{1/2} \rfloor) \leq n^{1/2} n^{1/4} + n^{1/2} \leq 2n^{3/4}$.

Analogamente, se $b'd \in C$, então temos $b' < n^{1/4}$ e $d \in V_2$, logo

$$|C| \leq z(\pi(n) - \pi(\lfloor n^{3/4} \rfloor), \lfloor n^{1/4} \rfloor) \leq n^{1/4} \sqrt{\pi(n)} + \pi(n) \sim \frac{n^{3/4}}{\sqrt{\ln n}} + \pi(n) \leq n^{3/4} + \pi(n).$$

Para dar uma boa cota para o tamanho do conjunto B , teremos que subparticioná-lo. Fazendo $B_k = \{b'd : 2^{k-1}n^{1/2} < d \leq 2^k n^{1/2}\}$ e $t = \lceil \lg n^{1/4} \rceil$, temos

$$B = \bigcup_{k=1}^t B_k$$

(pois $2^{\lceil \lg n^{1/4} \rceil} \geq n^{1/4}$).

Para cada $k \in [t]$, temos que, se $b'd \in B_k$, então $b' < n/(2^{k-1}n^{1/2}) = 2^{1-k}n$, logo, pelo Teorema 1.22, temos

$$|B_k| \leq z((2^k - 2^{k-1})n^{1/2}, 2^{1-k}n^{1/2}) \leq 2^{1-k}n^{1/2} \sqrt{2^{k-1}n^{1/2}} + 2^{k-1}n^{1/2} = \frac{n^{1/4}}{2^{(k-1)/2}} + 2^{k-1}n^{1/2}.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^t |B_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^t \frac{n^{1/4}}{2^{(k-1)/2}} \right) + \left(\sum_{k=1}^t t 2^{k-1} n^{1/2} \right) = \frac{1}{1 - 2^{-1/2}} n^{1/4} + (2^t - 1)n^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} n^{1/4} + (2n^{1/4} - 1)n^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} + 2 \right) n^{3/4}. \end{aligned}$$

Portanto $M \leq \pi(n) + O(n^{3/4})$. ■

A seguir damos uma ideia de uma prova do segundo item do Teorema 1.20.

Demonstração (Rascunho). Consideramos uma sequência $(a_i)_{i=1}^g$ tal que $\{a_i : i \in [g]\} = A \cup B$, onde $A = \{p \in [n] : p \text{ é primo e } p \geq n^{1/2}\}$ e $B \subset \{pq : p \text{ e } q \text{ são primos e } p, q < n^{1/2}\}$ é tal que $(a_i)_{i=1}^g$ é de Sidon de tamanho pelo menos $c\pi(n)^{3/2}$.

Observe primeiramente que, se $a_i a_j = a_k a_l$ com pelo menos um dentre a_i, a_j, a_k, a_l em A , então temos $\{a_i, a_j\} = \{a_k, a_l\}$.

Resta saber como construir tal B , que pode ser resumido no seguinte exercício.

Exercício 1.24. Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{N}$, existe um grafo G bipartido tal que $G \not\supset K_{2,2}$ e $E(G) \geq \alpha t^{3/2}$.

Tomando $t = \pi(\lfloor n^{1/2} \rfloor)$ construímos B a partir das arestas de G e de uma bijeção entre os vértices de G e os primos menores que $n^{1/2}$ (observe que cada produto de primos corresponde a no máximo duas arestas de G).

Portanto, existe uma constante $c > 0$ tal que $g(n) \geq \pi(n) + cn^{3/4}/(\ln n)^{3/2}$. □

1.4 Happy ending problem ou o Problema de Klein

01/10/2013 – Yoshiharu Kohayakawa

Relembramos abaixo o Problema de Klein.

Problema (Problema de Klein). (1.11) Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$, determinar $N = N(n)$ menor o possível tal que toda coleção de $m \geq N$ pontos no plano em posição geral (não há três pontos colineares) contém n deles formando um polígono convexo.

Curiosidade (Happy ending problem). O Problema de Klein também é conhecido como Happy ending problem. Esse nome foi dado ao problema por Paul Erdős porque o problema desencadeou o casamento de George Szekeres e Esther Klein.

Definimos $\text{Klein}(n) = N(n)$ como acima.

Já vimos que $\text{Klein}(n)$ existe para todo natural n , mas a prova dada nos fornecia a seguinte cota:

Proposição 1.25. Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $\text{Klein}(n) \leq R_2^{(4)}(k, 5)$, onde $R_2^{(4)}$ denota o número de Ramsey para hipergrafos 4-uniformes com bicolorações.

Observação. A prova dada anteriormente fornecia a cota $\text{Klein}(n) \leq R_2^{(4)}(k, k)$, mas é fácil ver que o segundo k pode ser substituído por 5.

Essa cota não é muito boa e para melhorá-la relembramos uma versão mais geral do Teorema de Ramsey.

Teorema 1.26 (Ramsey). Para todos $r, k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{N}$, existe $R = R_t^{(k)}(k_1, k_2, \dots, k_t) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq R$, então toda coloração c de $\binom{[n]}{r}$ em cores $1, 2, \dots, n$ possui um conjunto monocromático de cor i de tamanho k_i para algum $i \in [t]$.

Além disso, enunciamos e provamos novamente um lema implicitamente provado durante a demonstração da cota da Proposição 1.25.

Lema 1.27. Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$, se n pontos no plano em posição geral não são os vértices de um n -ágono convexo, então existem 4 desses pontos que não são os vértices de um quadrilátero convexo.

Demonstração. Basta considerar uma triangulação do fecho convexo dos n pontos e observar que o ponto no interior deve pertencer a um triângulo dessa triangulação. ■

Esse lema certamente motiva a coloração de quádruplas de pontos, mas, para obter uma cota melhor para $\text{Klein}(n)$, uma primeira ideia seria colorir triplas de pontos.

Teorema 1.28. Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $\text{Klein}(n) \leq R_2^{(3)}(k, k)$.

Demonstração. Fixe $n \geq 5$ e suponha que temos N pontos no plano com $N \geq R_2^{(3)}(k, k)$.

Considere uma ordenação qualquer desses pontos x_1, x_2, \dots, x_N .

Cada tripla $\{x_i, x_j, x_k\}$ forma um triângulo em que os índices i, j, k quando lidos na ordem estão na ordem horária ou anti-horária no plano.

Considere então essa coloração de triplas $c: \binom{[N]}{3} \rightarrow \{\text{horária, antihorária}\}$.

Como $N \geq R_2^{(3)}(k, k)$, sabemos que existe um conjunto monocromático A de tamanho k .

Sem perda de generalidade, assumimos que A é monocromático “horária”. Observe que, se há quatro pontos de A que não são vértices de um quadrilátero convexo, então três desses pontos deveriam ser da cor “antihorária”, o que é uma contradição.

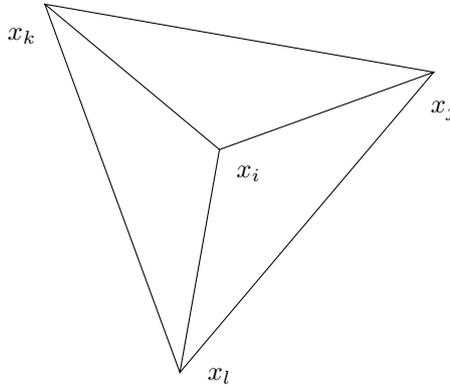


Figura 2: Se definirmos, para todos $a, b \in [N]$ distintos, o conjunto $(a, b)_N$ como $\{a + 1, a + 2, \dots, b - 1\}$ se $a < b$ e $\{1, 2, \dots, a - 1, b + 1, b + 2, \dots, N\}$, se $b < a$; então, na figura temos $i \in (l, j)_N$, $i \in (k, l)_N$, $j \in (k, l)_N$ e $i \in (j, k)_N$.

Se l for o menor dos índices, então teremos $l < i < j$, $l < k < i$, $l < k < j$ e $i \in (j, k)_N$, uma contradição ($l < k < i < j$ é incompatível com $i \in (j, k)_N$).

E, se i for o menor dos índices, então teremos $i < j < l$, $i < l < k$, $j \in (k, l)_N$ e $i < k < j$, também uma contradição ($j < l < k < j$).

Logo, pelo Lema 1.27, segue que A é convexo. ■

Para ter uma ideia da grandeza dessa cota, enunciamos algumas cotas para números de Ramsey abaixo.

Fato 1.29. Para todos naturais k e l , temos

$$\begin{aligned} R_2^{(2)}(k, l) &\leq \binom{k+l+2}{k-1}; \\ 2^{k/2} &\leq R_2^{(2)}(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 2^{2k-2}; \\ 2^{O(k^2)} &\leq R_2^{(3)}(k, k) \leq 2^{2^{O(k)}}; \\ 2^{2^{O(k^2)}} &\leq R_2^{(4)}(k, k) \leq 2^{2^{2^{O(k)}}}. \end{aligned}$$

Observação. As cotas inferiores provêm do Stepping-up Lemma de Erdős e Hajnal que pode ser encontrado no livro [12].

A melhor cota que se conhece para $\text{Klein}(n)$, porém, não utiliza números de Ramsey.

Teorema 1.30 (Erdős–Szekeres '35 [9]). Para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $\text{Klein}(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}$.

A prova que daremos é devida a Moshkovitz e Shapira e demonstra um resultado um pouco mais geral.

Teorema 1.31 (Moshkovitz–Shapira 2012 [19]). Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos que toda configuração de pelo menos $\binom{2n}{n} + 1$ pontos em posição geral possui uma \cup -configuração de tamanho $n + 2$ ou uma \cap -configuração de tamanho $n + 2$.

Antes de fornecer a prova, definimos alguns conceitos úteis e provamos um pequeno lema.

Definição 1.32. Seja X um conjunto parcialmente ordenado por \preceq . Um subconjunto A de X é dito um *down-set* se

$$\forall x \in X, \forall a \in A, (x \preceq a \implies x \in A).$$

Definição 1.33. Para todos naturais d e n , definimos $P_d(n)$ como o número de down-sets em $[n]^{d+1}$ quando munido da ordem parcial $x \preceq y$ se e só se x é menor ou igual a y coordenada-a-coordenada.

Lema 1.34. Para todo natural n , temos $P_1(n) = \binom{2n}{n}$.

Demonstração. Seja $D \subset [n]^2$ um down-set e, para todo $j \in [n]$, defina $a_j = \max\{i : (i, j) \in D\} \cup \{0\}$. Observe que $(a_j)_{j=1}^n$ forma uma sequência decrescente de elementos de $\{0, 1, \dots, n\}$. Ademais, essa correspondência é uma bijeção.

Considere então o conjunto $A_D = \bigcup_{j \in [n]} [0, a_j] \times [j-1, j]$ e observe que a fronteira de A_D é composta por segmentos dos eixos x e y mais uma poligonal de $(0, n)$ a $(n, 0)$ cujos segmentos são paralelos aos eixos, têm comprimento inteiro e seguem para cima ou para esquerda.

Note também que essa é uma bijeção entre down-sets de $[n]^2$ e poligonais dessa forma.

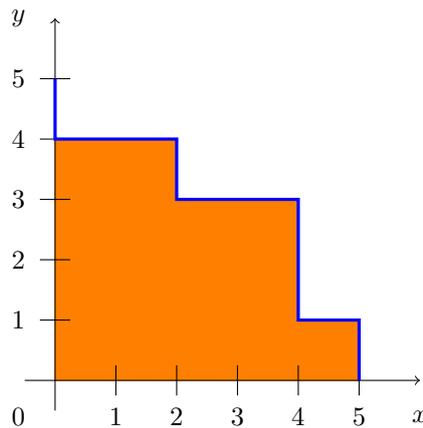


Figura 3: Exemplo de poligonal com $(a_j)_{j=1}^5 = (5, 4, 4, 2, 0)$.

Porém, toda poligonal dessa forma possui exatamente n (sub)segmentos de comprimento 1 para cima e n para esquerda. Portanto há exatamente $\binom{2n}{n}$ dessas poligonais. ■

Prova do Teorema 1.31. Fixe $n \in \mathbb{N}^*$ e uma coleção de pontos $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ em posição geral com $N \geq \binom{2n}{n} + 1 = P_1(n) + 1$.

Considere a coloração das triplas de $\binom{[N]}{3}$ em duas cores \cup e \cap na qual $\{i, j, k\}$ recebe cor \cup se e só se $\{x_i, x_j, x_k\}$ é uma \cup -configuração.

Queremos encontrar um caminho ordenado monocromático com n arestas, i.e. uma sequência crescente $(a_i)_{i=1}^{n+2}$ tal que todas as arestas da forma $\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}, \{a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}\}$ são da mesma cor. Tal caminho será uma \cup -configuração ou uma \cap -configuração de tamanho $n + 2$.

Suponha que não existe tal caminho. Para todos $u, v \in [N]$ com $u < v$, defina $c(u, v) = (n_1 + 1, n_2 + 1)$, onde n_i é o número de arestas em um caminho ordenado monocromático de cor i e terminando em (u, v) de tamanho maior possível. Note que $n_i < n$, pois não há tais caminhos com n arestas, logo $c(u, v) \in [n]^2$.

Para todo $v \in [n]$, seja $D(v) = \{x \in [n]^2 : x \preceq c(u, v) \text{ para algum } u < v\}$. Note que $D(v)$ é down-set.

Como há N possibilidades de escolha para v e $N > P_1(n)$, segue que existem $v_1, v_2 \in [N]$ distintos tais que $D(v_1) = D(v_2)$.

Sem perda de generalidade, assumimos que $v_1 < v_2$.

Por definição, temos $c(v_1, v_2) \in D(v_2) = D(v_1)$, logo, existe um $u < v_1$ tal que $c(v_1, v_2) \preceq c(u, v_1)$.

Seja c a cor da tripla $\{u, v_1, v_2\}$ e seja P um caminho ordenado monocromático de cor c terminando em (u, v_1) de tamanho maior possível (tal tamanho é uma coordenada de $c(u, v_1)$). Adicionando a aresta $\{u, v_1, v_2\}$ obtemos um caminho ordenado monocromático de cor c terminando em (v_1, v_2) , logo uma das coordenadas de $c(v_1, v_2)$ é estritamente maior que a respectiva de $c(u, v_1)$, mas isso contradiz $c(v_1, v_2) \preceq c(u, v_1)$.

Portanto tem de haver um caminho ordenado monocromático com n arestas. ■

Essa prova pode ser generalizada para o problema de encontrar *cup*-configurações e \cap -configurações de tamanhos diferentes. Ademais, essa cota é justa. Deixamos tal generalização e a prova de que a cota é justa como exercício.

Exercício 1.35. Prove que, se $p, q \in \mathbb{N}^*$, então toda coleção de $\binom{p+q}{p} + 1$ pontos em posição geral possui ou uma \cup -configuração de $p + 2$ pontos ou uma \cap -configuração de $q + 2$ pontos.

Prove também que há uma coleção de $\binom{p+q}{p}$ pontos em posição geral que não possui nem uma \cup -configuração de $p + 2$ pontos nem uma \cap -configuração de $q + 2$ pontos.

Não se sabe se a cota fornecida por essa prova para $\text{Klein}(n)$ é justa ou não. Enunciamos no exercício abaixo as cotas conhecidas para $\text{Klein}(n)$.

Exercício 1.36. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$, temos

$$2^{n-2} + 1 \leq \text{Klein}(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}.$$

2 Colorações fortes de hipergrafos

2.1 Definições e resultados preliminares

15/10/2013 – Lucas Colucci Cavalcante de Souza

Vamos inicialmente relembrar algumas definições básicas de hipergrafos.

Definição 2.1. Um *hipergrafo* é um par ordenado $\mathcal{H} = (V, E)$, onde V é um conjunto e $E \subset \mathcal{P}(V)$. O conjunto V é dito *conjunto de vértices* de \mathcal{H} (denotado por $V(\mathcal{H})$) e o conjunto E é dito o *conjunto de hiperarestas* de \mathcal{H} (denotado por $E(\mathcal{H})$).

Ademais, se t é um natural, o hipergrafo \mathcal{H} é dito *t-intersectante* se $E(\mathcal{H})$ for uma família t intersectante, isto é, para todas hiperarestas e e f de \mathcal{H} , temos $|e \cap f| \geq t$ (em particular, toda hiperaresta de \mathcal{H} possui pelo menos t elementos).

Definimos a seguir a noção de colorações c fortes, que é uma generalização da noção de colorações próprias de grafos.

Definição 2.2. Uma *coloração c-forte* de um hipergrafo \mathcal{H} é uma função $g: V(\mathcal{H}) \rightarrow X$, onde X é um conjunto qualquer e tal que, para toda hiperaresta e de \mathcal{H} , temos $|g(e)| \geq \min\{|e|, c\}$.

O conjunto X é chamado *conjunto de cores* da coloração g e o tamanho de g é definido como $|X|$.

Definimos então o *número cromático c -forte* de \mathcal{H} como $\chi_c(\mathcal{H}) = \min\{|X| : \exists g: V(\mathcal{H}) \rightarrow X \text{ coloração } c\text{-forte de } \mathcal{H}\}$.

Além disso, definimos $\chi(t, c) = \sup\{\chi_c(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \text{ é um hipergrafo } t\text{-intersectante}\}$.

Observação. Considerar colorações 2-fortes de hipergrafos 2-uniformes coincide exatamente com o conceito de colorações próprias de grafos.

Como toda coloração $(c+1)$ -forte de um hipergrafo \mathcal{H} é também uma coloração c -forte de \mathcal{H} , então $\chi_{c+1}(\mathcal{H}) \geq \chi_c(\mathcal{H})$. Portanto $\chi(t, c+1) \geq \chi(t, c)$.

Ademais, como todo hipergrafo $(t+1)$ -intersectante é também um hipergrafo t -intersectante, então $\chi(t+1, c) \leq \chi(t, c)$.

A seguir, fornecemos duas provas distintas para um resultado de Erdős e Lovász sobre hipergrafos 1-intersectantes (chamados apenas de intersectantes).

Teorema 2.3 (Erdős–Lovász '73 [8]). Todo hipergrafo \mathcal{H} intersectante possui uma coloração 2-forte com no máximo 3 cores.

Isto é, temos $\chi(1, 2) \leq 3$.

Demonstração 1. Seja e uma hiperaresta minimal de \mathcal{H} , isto é, uma hiperaresta que não contém propriamente nenhuma outra hiperaresta. Seja $v \in e$.

Suponha que $|e| \geq 2$. Considere a coloração

$$g: V(\mathcal{H}) \longrightarrow [3]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x = v; \\ 2, & \text{se } x \in e \setminus \{v\}; \\ 3, & \text{se } x \notin e. \end{cases}$$

Observe que, como toda hiperaresta $f \neq e$ deve intersectar tanto e como $V(\mathcal{H}) \setminus e$, então $|g(f)| \geq 2$, portanto g é coloração 2-forte de \mathcal{H} .

Suponha então que $|e| = 1$. Considere a coloração $\mathbb{1}_e$. Novamente, como toda hiperaresta deve intersectar tanto e como $V(\mathcal{H}) \setminus e$, então $\mathbb{1}_e$ é coloração 2-forte de \mathcal{H} . ■

Demonstração 2. Considere uma coloração 2-forte gulosa de \mathcal{H} . Isto é, ordene os vértices de \mathcal{H} , digamos $V(\mathcal{H}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e defina a coloração g recursivamente como:

- Atribua a cor 1 para v_1 ($g(v_1) = 1$);
- Suponha que já foram definidos $g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_{k-1})$ e atribua a cor t a v_k , onde t é o menor natural tal que, para toda hiperaresta e contida em $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, temos $g(e \setminus \{v_k\}) \neq \{t\}$, ou seja, atribuir a cor t a v_k preserva a 2-força da coloração g .

Afirmamos que tal coloração nunca usa a cor 4.

De fato, pois caso usasse, existiriam vértices v_i e v_j tais que $g(v_i) = 2$ e $g(v_j) = 4$ com i e j menores o possível.

Devido à construção de g , a atribuição dessas cores a esses vértices implica a existência de hiperarestas e e f tais que $v_i \in e$, $v_j \in f$, $g(e \setminus \{v_i\}) = \{1\}$ e $g(f \setminus \{v_j\}) = \{3\}$. Donde segue que $e \cap f = \emptyset$, o que é um absurdo (pois \mathcal{H} é intersectante). ■

A proposição mostra que esse resultado para $\chi(1, 2)$ é ótimo.

Proposição 2.4. Temos $\chi(1, 2) > 2$.

Demonstração. Considere o hipergrafo \mathcal{H} dado por

$$V(\mathcal{H}) = \{A, B, C, AB, AC, BC, ABC\}$$

$$E(\mathcal{H}) = \{\{A, AB, B\}, \{A, AC, C\}, \{B, BC, C\}, \{A, ABC, BC\}, \\ \{B, ABC, AC\}, \{C, ABC, AB\}, \{AB, AC, BC\}\}.$$

Suponha que \mathcal{H} possui uma coloração 2 forte g em apenas duas cores, digamos 1 e 2.

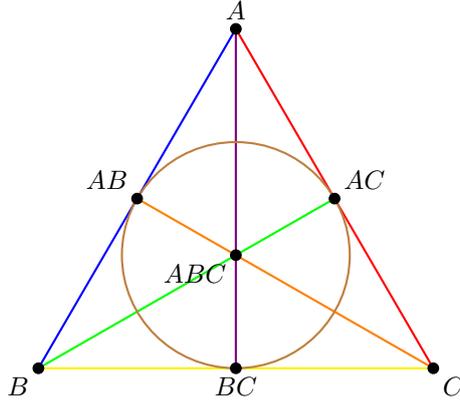


Figura 4: O hipergrafo \mathcal{H} , com suas hiperarestas representadas em cores duas-a-duas distintas.

Suponha que $g(A) = g(B) = g(C) = 1$ e, sem perda de generalidade, suponha $g(A) = 1$. Então temos que ter $g(AB) = g(AC) = g(BC) = 2$ devido às hiperarestas $\{A, AB, B\}$, $\{A, AC, C\}$ e $\{B, BC, C\}$. Mas isso gera uma contradição com a hiperaresta $\{AB, AC, BC\}$.

Suponha então que $\{g(A), g(B), g(C)\} = \{1, 2\}$ e, sem perda de generalidade, suponha $g(A) = 1$ e $g(B) = g(C) = 2$. Então a hiperaresta $\{B, BC, C\}$ nos dá $g(BC) = 1$, em seguida, a hiperaresta $\{A, ABC, BC\}$ nos dá $g(ABC) = 2$. Segue então que $g(AB) = g(AC) = 1$, devido às hiperarestas $\{C, ABC, AB\}$ e $\{B, ABC, AC\}$, o que novamente gera uma contradição com a hiperaresta $\{AB, AC, BC\}$.

Portanto $\chi_2(\mathcal{H}) > 2$, o que significa que $\chi(1, 2) > 2$. ■

Abaixo, calculamos mais alguns valores de $\chi(t, c)$.

Proposição 2.5. Temos $\chi(0, 2) = +\infty$ e, para todo $t \geq 2$, temos $\chi(t, 2) = 2$.

Demonstração. Como já observamos, considerar colorações 2-fortes em hipergrafos uniformes corresponde à noção de coloração própria de grafos. Como grafos são hipergrafos 0-intersectantes e existem grafos com número cromático arbitrariamente grande (e.g., todo grafo completo possui número cromático igual à sua ordem), então $\chi(0, 2) = +\infty$.

Como $\chi(t, c)$ é decrescente com t e $\chi(t, 2) \geq 2$ (pois um hipergrafo com uma hiperaresta de tamanho 2 certamente precisará de mais de uma cor para ser colorido 2-fortemente), então basta provar que $\chi(2, 2) \leq 2$.

Seja \mathcal{H} um hipergrafo 2-intersectante e faça uma coloração 2-forte de \mathcal{H} pelo método guloso.

Afirmamos que tal coloração não utiliza a cor 3.

De fato, pelo caso usasse, existiriam vértices v_i e v_j tais que $g(v_i) = 2$ e $g(v_j) = 3$ com i e j menores o possível.

Devido à construção de g , a atribuição dessas cores a esses vértices implica a existência de hiperarestas e e f tais que $v_i \in e$, $v_j \in f$, $g(e \setminus \{v_i\}) = \{1\}$ e $g(f \setminus \{v_j\}) = \{2\}$. Donde segue que $e \cap f \subset \{v_i\}$, o que é um absurdo (pois \mathcal{H} é 2-intersectante). ■

A seguir, provamos um lema que permite obter cotas para $\chi(t, c)$ recursivamente.

Lema 2.6. Se t e c são naturais com $c \geq 2$, então temos $\chi(t+1, c+1) \geq \chi(t, c) + 1$.

Demonstração. Seja \mathcal{H} um hipergrafo t -intersectante tal que $\chi_c(\mathcal{H}) = \chi(t, c)$.

Considere o hipergrafo \mathcal{H}' obtido adicionando um novo vértice v ao hipergrafo \mathcal{H} e a todas as suas hiperarestas, i.e., $\mathcal{H}' = (V(\mathcal{H}) \cup \{v\}, E)$, onde $v \notin V(\mathcal{H})$ e $E = \{e \cup \{v\} : e \in E(\mathcal{H})\}$.

Observe que \mathcal{H}' é $(t+1)$ -intersectante e vamos mostrar que $\chi_{c+1}(\mathcal{H}') \geq \chi(t, c) + 1$, donde o resultado seguirá imediatamente.

Seja então g uma coloração $(c+1)$ -forte qualquer de \mathcal{H}' que usa $\chi_{c+1}(\mathcal{H}')$ cores e seja $x = g(v)$ a cor de v e y uma outra cor qualquer usada por g .

Considere a coloração h de \mathcal{H} obtida a partir de g tal que, para todo $w \in V(\mathcal{H})$, temos

$$h(w) = \begin{cases} g(w), & \text{se } g(w) \neq x; \\ y, & \text{se } g(w) = x. \end{cases}$$

Observe que, para toda hiperaresta e de \mathcal{H} , temos $|g(e \cup \{v\})| \geq \min\{|e| + 1, c + 1\}$, donde segue que $|h(e)| \geq \{|e|, c\}$.

Portanto h é uma coloração c -forte de \mathcal{H} usando $\chi_{c+1}(\mathcal{H}') - 1$ cores, o que significa que $\chi(t+1, c+1) \geq \chi_{c+1}(\mathcal{H}') \geq \chi_c(\mathcal{H}) + 1 = \chi(t, c) + 1$. ■

Com esse lema, podemos mostrar que alguns valores de $\chi(t, c)$ são infinitos.

Corolário 2.7. Se t e c são naturais tais que $t \leq c - 2$, então $\chi(t, c) = +\infty$.

Demonstração. Basta observar que

$$\chi(t, c) \geq \chi(t-1, c-1) \geq \chi(t-2, c-2) \geq \dots \geq \chi(0, t-c)$$

e que, como $\chi(t, c)$ é crescente com c e $t - c \geq 2$, temos $\chi(0, t-c) \geq \chi(0, 2) = +\infty$. ■

2.2 Famílias intersectantes e uma cota superior

A seguir, enunciamos alguns resultados relacionados a famílias intersectantes.

Teorema 2.8 (Dinur–Safra '05 [6]; Friedgut '08 [11]). Se \mathcal{F} é uma família t -intersectante de subconjuntos de $[n]$ e $0 < p < 1/(t+1)$, então $\mathbb{P}_p(\mathcal{F}) \leq p^t$, onde \mathbb{P}_p denota a medida

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p: \mathcal{P}([n]) &\longrightarrow [0, 1] \\ \mathcal{F} &\longmapsto \sum_{F \in \mathcal{F}} p^{|F|} (1-p)^{n-|F|}. \end{aligned}$$

Corolário 2.9 (Blais–Weinstein–Yoshida '12 [3]). Se \mathcal{F} é uma família t -intersectante de subconjuntos de $[n]$ e $0 < p < 1/(t+1)$, então $\mathbb{P}_p(\{S \subset \mathcal{P}([n]) : \text{existe } S' \in \mathcal{F} \text{ tal que } S \supset S'\}) \leq p^t$.

Demonstração. Seja $\mathcal{F}' = \{S \subset \mathcal{P}([n]) : \text{existe } S' \in \mathcal{F} \text{ tal que } S \supset S'\}$.

Observe que \mathcal{F}' é $(t+1)$ -intersectante, pois se $A', B' \in \mathcal{F}'$, então existem $A, B \in \mathcal{F}$ tais que $A \supset A'$ e $B \supset B'$ e como \mathcal{F} é t -intersectante, temos $|A' \cap B'| \geq |A \cap B| \geq t$.

Portanto, pelo Teorema 2.8, temos $\mathbb{P}_p(\mathcal{F}') \leq p^t$. ■

Teorema 2.10 (Blais–Weinstein–Yoshida '12 [3]). Se t, c e l são naturais tais que $t \geq c \geq 2$, $l > (c-1)(t+1)$ e

$$\binom{l}{c-1} \left(\frac{c-1}{l}\right)^t < 1,$$

então $\chi(t, c) \leq l$.

Demonstração. Seja \mathcal{H} um hipergrafo t -intersectante e considere uma coloração g de \mathcal{H} em l cores escolhida uniformemente ao acaso.

Fixe C um conjunto de $c-1$ cores.

Considere o conjunto $S_C = g^{-1}(C)$ e observe que cada vértice de \mathcal{H} pertence a S_C com probabilidade $p = (c-1)/l$ independentemente de outros vértices.

O Corolário 2.9 nos garante que a probabilidade de existir uma hiperaresta de \mathcal{H} que está contida em S_C é no máximo p^t .

Pela cota da união, a probabilidade de existir um conjunto C de $c-1$ cores e uma hiperaresta de \mathcal{H} que está contida em S_C é no máximo

$$\binom{l}{c-1} \left(\frac{c-1}{l}\right)^t < 1.$$

Isso significa que existe uma coloração de \mathcal{H} em l cores tal que toda hiperaresta recebe ao menos c cores distintas, i.e., é uma coloração c -forte. ■

Observação. No teorema acima, como $t \geq c$ a condição de c -força de uma coloração g reduz-se a $|g(e)| \geq c$ para toda hiperaresta e .

Corolário 2.11. Para todos naturais t e c com $t \geq c \geq 2$, temos $\chi(t, c) \leq t^t$, $\chi(c, c) \leq \sqrt{ce^c}$ e $\chi(2c, c) < 2c^2$.

Demonstração. Basta observar que os valores satisfazem as condições pedidas pelo Teorema 2.10.

Para a primeira desigualdade, temos

$$(c-1)(t+1) \leq (t-1)(t+1) < t^t; \text{ e}$$

$$\binom{t^t}{c-1} \left(\frac{c-1}{t^t} \right)^t \leq \frac{t^{t(c-1)}}{(c-1)!} \frac{(c-1)^t}{t^{t^2}} \leq \frac{t^{t^2-t}}{(c-1)!} \frac{(c-1)^t}{t^{t^2}} \left(\frac{c-1}{t} \right)^t \frac{1}{(c-1)!} < 1.$$

Para a segunda desigualdade, temos

$$(c-1)(c+1) \leq \sqrt{ce^c}; \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{ce^c}}{c-1} \right) \left(\frac{c-1}{\sqrt{ce^c}} \right)^c &\leq \frac{c^{c/2} e^{c^2}}{\sqrt{ce^c}} \frac{1}{(c-1)!} \frac{(c-1)^c}{e^{c/2} e^{c^2}} = \frac{(c-1)^c}{\sqrt{ce^c}} \frac{1}{(c-1)!} \\ &\sim \frac{(c-1)^c}{\sqrt{ce^c}} \frac{e^{c-1}}{\sqrt{2\pi(c-1)}(c-1)^{c-1}} = \frac{c-1}{e} \frac{1}{\sqrt{2\pi c(c-1)}} \\ &= \frac{\sqrt{c-1}}{c} \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} < 1. \end{aligned}$$

Finalmente, para a terceira desigualdade, temos

$$(c-1)(2c+1) = 2c^2 - 2c + c - 1 < 2c^2; \text{ e}$$

$$\binom{2c^2}{c-1} \left(\frac{c-1}{2c^2} \right)^{2c} \leq \frac{2^{c-1} c^{2c-2}}{(c-1)!} \frac{(c-1)^{2c}}{2^{2c} c^{4c}} = \frac{1}{2^{c+1}} \frac{(c-1)^{2c}}{c^{2c}} \frac{1}{c^2(c-1)!} < 1.$$

■

Observação. O Teorema 2.10 não pode ser usado para $t = c - 1$, pois

$$\binom{l}{c-1} \left(\frac{c-1}{l} \right)^{c-1} \geq \left(\frac{l}{c-1} \right)^{c-1} \left(\frac{c-1}{l} \right)^{c-1} = 1.$$

2.3 Cotas inferiores

22/10/2013 – Lucas Colucci Cavalcante de Souza

Apresentando alguns hipergrafos, conseguimos obter algumas cotas inferiores para $\chi(t, c)$.

Proposição 2.12. Se c é um inteiro tal que $c \geq 2$, então $\chi(c-1, c) \geq 2c-1$.

Demonstração. Considere o hipergrafo $\mathcal{H} = ([3c-3], \binom{[3c-3]}{2c-2})$.

Observe que \mathcal{H} é $(c-1)$ -intersectante, pois se e e f são hiperarestas de \mathcal{H} , então temos $|e \cap f| = |e| + |f| - |e \cup f| \geq 4c-4 - (3c-3) = c-1$.

Considere uma $(2c-2)$ -coloração arbitrária de \mathcal{H} .

Afirmamos que as $c-1$ cores mais usadas nessa coloração cobrem $2c-2$ vértices.

De fato, pois, se cobrissem apenas $2c-3$, em média, cada uma dessas cores cobriria $(2c-3)/(c-1) < 2$ vértices, ou seja, uma delas cobriria menos que dois vértices. Isso significaria que as $c-1$ cores menos usadas cobririam no máximo um vértice cada, logo no máximo a quantidade total de vértices cobertos por todas as cores seria $c-1 + 2c-3 = 3c-4 < |V(\mathcal{H})|$, o que é um absurdo.

Como as $c-1$ cores mais usadas cobrem $2c-2$ vértices, alguma hiperaresta recebeu apenas essas cores, ou seja, a coloração não é c -forte. ■

Proposição 2.13. Se t e c são inteiros positivos, então $\chi(t, c) \geq 2c - 2$.

Demonstração. Considere o hipergrafo $\mathcal{H} = ([(6c - 1)t], \binom{[(6c-1)t]}{3ct})$.

Observe que \mathcal{H} é t -intersectante, pois se e e f são hiperarestas de \mathcal{H} , então temos $|e \cap f| = |e| + |f| - |e \cup f| \geq 6ct - (6c - 1)t = t$.

Considere uma $(2c - 3)$ -coloração arbitrária de \mathcal{H} .

Afirmamos que as $c - 1$ cores mais usadas nessa coloração cobrem $3ct$ vértices.

De fato, pois, se cobrissem apenas $3ct - 1$, as $c - 2$ cores menos usadas cobririam apenas $(3ct - 1)(c - 2)/(c - 1)$. Isso significaria que no máximo a quantidade total de vértices cobertos por todas as cores seria

$$\frac{(3ct - 1)(c - 2)}{c - 1} + 3ct - 1 < (6c - 1)t$$

A inequação acima segue de

$$(3c^2t - c - 6ct + 2) + (3c^2t - c - 3ct + 1) - (6c^2t - ct - 6ct + t) = -3ct - 2c - t + 3 < 0.$$

Como $|V(\mathcal{H})| = (6c - 1)t$, isso é um absurdo.

Logo, temos que as $c - 1$ cores mais usadas cobrem $3ct$ vértices, então alguma hiperaresta recebeu apenas essas cores, ou seja, a coloração não é c -forte. ■

2.4 Colorações 3-fortes de hipergrafos 2-intersectantes

Vamos calcular agora $\chi(2, 3)$ precisamente.

Teorema 2.14 (Colucci–Gyárfás 2013 [5]). Temos $\chi(2, 3) = 5$.

Demonstração. Pela Proposição 2.12, basta provar que $\chi(2, 3) \leq 5$.

Seja então \mathcal{H} um hipergrafo 2-intersectante arbitrário.

Observe que, se \mathcal{H} possuir uma hiperaresta $e = \{v, w\}$ de cardinalidade 2, a coloração

$$g: V(\mathcal{H}) \longrightarrow [3]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x = v; \\ 2, & \text{se } x = w; \\ 3, & \text{se } x \notin e. \end{cases}$$

será 3-forte.

Observe também que se e e f são hiperarestas de \mathcal{H} com $e \subset f$, então a condição de que f receba cores suficientes implica que e receba cores suficientes.

Então podemos supor que \mathcal{H} possui apenas hiperarestas de cardinalidade pelo menos 3 e que não existem hiperarestas distintas e e f com $e \subset f$.

Caso 1. Toda tripla de hiperarestas distintas (e, f, g) possui intersecção não-vazia ($e \cap f \cap g \neq \emptyset$). Fixe e_0 uma hiperaresta de \mathcal{H} qualquer e considere o hipergrafo $\mathcal{H}' = (e_0, E)$, onde $E = \{e \cap e_0 : e \in E(\mathcal{H})\}$.

Observe que \mathcal{H}' é intersectante, pois se $e \cap e_0$ e $f \cap e_0$ são hiperarestas de \mathcal{H}' , então $e \cap f \cap e_0 \neq \emptyset$.

Pelo Teorema 2.3, sabemos que \mathcal{H}' possui uma 3-coloração 2-forte. Sem perda de generalidade, podemos assumir que foram utilizadas 3 cores distintas (e não menos).

Pintando o conjunto $V(\mathcal{H}) \setminus e_0$ com uma quarta cor, obtemos uma 4-coloração de \mathcal{H} que é 3-forte, pois e_0 possui 3 cores distintas e toda outra hiperaresta e possui duas cores distintas em $e \cap e_0$ mais a quarta cor.

Caso 2. Existem hiperarestas e, f e g tais que $e \cap f \cap g = \emptyset$.

Tome então e_1, e_2 e e_3 tais que $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = \emptyset$ e $|e_1 \cup e_2 \cup e_3|$ é menor o possível.

Sejam

$$E = e_1 \cup e_2 \cup e_3$$

$$E_1 = e_1 \setminus (e_2 \cup e_3)$$

$$E_2 = e_2 \setminus (e_1 \cup e_3)$$

$$E_3 = e_3 \setminus (e_1 \cup e_2)$$

Por simetria, basta considerar apenas quatro subcasos: (i) $E_1, E_2, E_3 \neq \emptyset$; (ii) $E_1, E_3 \neq \emptyset, E_2 = \emptyset$; (iii) $E_2 \neq \emptyset, E_1 = E_3 = \emptyset$ e (iv) $E_1 = E_2 = E_3 = \emptyset$.

A coloração de E em todos esses casos será a mesma, para isso, sejam $v \in e_1 \cap e_2$ e $w \in e_1 \cap e_3$ arbitrários (lembramos que \mathcal{H} é 2-intersectante) e tome

$$g: E \longrightarrow [5]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E_1 \cup \{w\}; \\ 2, & \text{se } x \in E_2 \cup \{v\}; \\ 3, & \text{se } x \in E_3 \cup (e_1 \cap e_3 \setminus \{w\}); \\ 4, & \text{se } x \in e_1 \cap e_2 \setminus \{v\}; \\ 5, & \text{se } x \in e_2 \cap e_3; \end{cases}$$

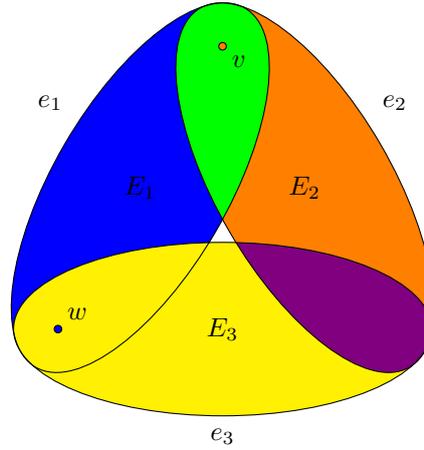


Figura 5: A coloração $g: E \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Denotaremos por f_{ij} uma hiperaresta arbitrária que recebeu exatamente as cores i e j (após estendermos a coloração a $V(\mathcal{H})$). Nosso objetivo será então provar que não existe f_{ij} qualquer que seja $1 \leq i \leq j \leq 5$ em cada um desses casos.

Caso i. Nenhum dentre E_1, E_2 e E_3 é vazio.

Estendemos então g para $V(\mathcal{H})$ colorindo os vértices de $V(\mathcal{H}) \setminus E$ sucessivamente com a cor 2 a menos que o vértice seja o último de alguma hiperaresta que recebeu apenas as cores 2 e 3, nesse caso, colorimo-lo com a cor 1.

A tabela abaixo fornece justificativas para a não existência de algumas das f_{ij} 's. Os principais argumentos são que \mathcal{H} é 2-intersectante e que não há hiperarestas e e f com $e \subsetneq f$.

$f_{11} \cap e_2 = \emptyset$				
$ f_{12} \cap e_3 \leq 1$	$f_{22} \cap e_3 = \emptyset$			
$f_{13} \cap e_2 = \emptyset$	*	$f_{33} \cap e_2 = \emptyset$		
$ f_{14} \cap e_3 \leq 1$	$f_{24} \cap e_3 = \emptyset$	*	$f_{44} \cap e_3 = \emptyset$	
*	$ f_{25} \cap e_1 \leq 1$	$f_{35} \subsetneq e_3$	$f_{45} \subsetneq e_2$	$f_{55} \cap e_1 = \emptyset$

Restam apenas f_{15}, f_{23} e f_{34} (marcadas com *).

Suponha que existe f_{15} . Se $f_{15} \subset E$, então teremos $f_{15} \cap e_1 \cap e_2 = \emptyset$ e $|f_{15} \cup e_1 \cup e_2| < |E|$ o que contraria a escolha de (e_1, e_2, e_3) .

Suponha então que existe $f_{15} \not\subset E$. Seja $x \in f_{15} \setminus E$ e observe que x possui cor 1. Pela construção da (extensão da) coloração, sabemos que existe uma hiperaresta f contendo x tal que $f \setminus \{x\}$ possui apenas as cores 2 e 3. Como \mathcal{H} é 2-intersectante, temos $|f_{15} \cap f| \geq 2$, o que significa que f tem que possuir pelo menos dois vértices de cor 1, uma contradição.

Portanto não existe f_{15} .

Suponha agora que existe f_{23} . Se $f_{23} \subset E$, então teremos $f_{23} \cap e_2 \cap e_3 = \emptyset$ e $|f_{15} \cup e_2 \cup e_3| < |E|$ o que contraria a escolha de (e_1, e_2, e_3) .

Suponha então que existe $f_{23} \not\subset E$. Seja $x \in f_{23} \setminus E$ e observe que x possui cor 2, mas isso é uma contradição com a construção da (extensão da) coloração, pois algum dos vértices de f_{23} deveria ter recebido a cor 1.

Portanto não existe f_{23} .

Finalmente, suponha que existe f_{34} . Observe que $f_{34} \subset E$. Mas então $f_{24} \cap e_1 \cap e_2 = \emptyset$ e $|f_{24} \cup e_1 \cup e_2| < |E|$ contrariam a escolha de (e_1, e_2, e_3) .

Portanto não existe f_{34} .

Caso ii. Dentre E_1, E_2 e E_3 , apenas E_2 é vazio.

Estendemos então g para $V(\mathcal{H})$ colorindo os vértices de $V(\mathcal{H}) \setminus E$ com a cor 2.

A tabela abaixo fornece justificativas para a não existência de algumas das f_{ij} 's.

$f_{11} \cap e_2 = \emptyset$				
$ f_{12} \cap e_3 \leq 1$	$f_{22} \cap e_3 = \emptyset$			
$f_{13} \cap e_2 = \emptyset$	$ f_{23} \cap e_2 \leq 1$	$f_{33} \cap e_2 = \emptyset$		
$ f_{14} \cap e_3 \leq 1$	$f_{24} \cap e_3 = \emptyset$	*	$f_{44} \cap e_3 = \emptyset$	
*	$ f_{25} \cap e_1 \leq 1$	$f_{35} \subsetneq e_3$	$f_{45} \subsetneq e_2$	$f_{55} \cap e_1 = \emptyset$

Restam apenas f_{15} e f_{34} (marcadas com *).

Suponha que existe f_{15} . Observe que $f_{15} \subset E$. Mas então temos $f_{15} \cap e_1 \cap e_2 = \emptyset$ e $|f_{15} \cup e_1 \cup e_2| < |E|$, o que contraria a escolha de (e_1, e_2, e_3) .

Portanto não existe f_{15} .

Suponha agora que existe f_{34} . Observe que $f_{34} \subset E$. Mas então $f_{24} \cap e_1 \cap e_2 = \emptyset$ e $|f_{24} \cup e_1 \cup e_2| < |E|$ contrariam a escolha de (e_1, e_2, e_3) .

Portanto não existe f_{34} .

Caso iii. Dentre E_1, E_2 e E_3 , apenas E_2 é não-vazio.

Estendemos então g para $V(\mathcal{H})$ colorindo os vértices de $V(\mathcal{H}) \setminus E$ com a cor 1.

A tabela abaixo fornece justificativas para a não existência de algumas das f_{ij} 's.

$f_{11} \cap e_2 = \emptyset$				
$ f_{12} \cap e_3 \leq 1$	$f_{22} \cap e_3 = \emptyset$			
$f_{13} \cap e_2 = \emptyset$	*	$f_{33} \cap e_2 = \emptyset$		
$ f_{14} \cap e_3 \leq 1$	$f_{24} \cap e_3 = \emptyset$	$f_{34} \subset e_1$	$f_{44} \cap e_3 = \emptyset$	
$ f_{15} \cap e_1 \leq 1$	$ f_{25} \cap e_1 \leq 1$	$f_{35} \subsetneq e_3$	$f_{45} \subsetneq e_2$	$f_{55} \cap e_1 = \emptyset$

Resta apenas provar que não existe f_{23} .

Suponha que existe f_{23} . Observe que $f_{23} \subset E$. Mas então temos $f_{23} \cap e_2 \cap e_3 = \emptyset$ e $|f_{23} \cup e_2 \cup e_3| < |E|$, o que contraria a escolha de (e_1, e_2, e_3) .

Portanto não existe f_{23} .

Caso iv. Todos dentre E_1, E_2 e E_3 são vazios.

Estendemos então g para $V(\mathcal{H})$ colorindo os vértices de $V(\mathcal{H}) \setminus E$ com a cor 2.

A tabela abaixo fornece justificativas para a não existência das f_{ij} 's.

$f_{11} \cap e_2 = \emptyset$				
$ f_{12} \cap e_3 \leq 1$	$f_{22} \cap e_3 = \emptyset$			
$f_{13} \cap e_2 = \emptyset$	$ f_{23} \cap e_2 \leq 1$	$f_{33} \cap e_2 = \emptyset$		
$ f_{14} \cap e_3 \leq 1$	$f_{24} \cap e_3 = \emptyset$	$f_{34} \subset e_1$	$f_{44} \cap e_3 = \emptyset$	
$ f_{15} \cap e_1 \leq 1$	$ f_{25} \cap e_1 \leq 1$	$f_{35} \subsetneq e_3$	$f_{45} \subsetneq e_2$	$f_{55} \cap e_1 = \emptyset$

Portanto $\chi(2, 3) = 5$. ■

2.5 Problemas em aberto

A seguir apresentamos alguns problemas ainda em aberto sobre colorações fortes de hipergrafos intersec-tantes.

Conjectura 2.15. O valor de $\chi(3, 4)$ é finito.

Conjectura 2.16. Para todo inteiro $c \geq 3$, temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi(t, c) = 2c - 2$.

Conjectura 2.17. Para todos inteiros $t \geq c \geq 2$, temos $\chi(t, c) = 2c - 2$.

3 Famílias intersectantes

3.1 Teoremas clássicos

29/10/2013 – Yoshiharu Kohayakawa

Um dos grandes teoremas sobre famílias intersectantes é devido a Erdős, Ko e Radoe está enunciado abaixo.

Teorema 3.1 (Erdős–Ko–Rado '61 [7]). Se $k \leq n/2$ e $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ é intersectante, então $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k}$.

Ademais, se $k < n/2$ e $|\mathcal{A}| = \binom{[n]}{k}$, então existe $x \in [n]$ tal que x pertence a todo conjunto da família \mathcal{A} .

Uma maneira bem simples de se construir uma família intersectante é considerar $\mathcal{A}_1^{(k)} = \{U \in \binom{[n]}{k} : 1 \in U\}$ e essa família possui exatamente $\binom{n-1}{k}$. Logo o teorema acima diz que, para $k \leq n/2$, esse é o maior tamanho de família intersectante possível e, para $k < n/2$, essa é a única família máxima a menos de isomorfismo.

Podemos tentar generalizar o teorema acima através do seguinte problema.

Problema 3.2. Sejam $t \leq k \leq n$ naturais e $M(n, k, t) = \max\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k} \text{ é } t\text{-intersectante}\}$.

Quão grande é $M(n, k, t)$?

Analogamente, podemos considerar a família t -intersectante $\mathcal{A}_{[t]}^{(k)} = \{U \in \binom{[n]}{k} : [t] \subset U\}$ e obtemos a cota $M(n, k, t) \geq \binom{n-t}{k-t}$.

Por outro lado, podemos fazer uma construção levemente diferente. Fixe $r \leq (n-t)/2$ natural e seja $I(n, k, t, r) = \{U \in \binom{[n]}{k} : |U \cap [t+2r]| \geq t+r\}$.

Observe que, se U_1 e U_2 são elementos de $I(n, k, t, r)$, então temos

$$|U_1 \cap U_2| \geq |U_1 \cap U_2 \cap [t+2r]| \geq (t+r) + (t+r) - (t+2r) = t,$$

ou seja, a família $I(n, k, t, r)$ é t -intersectante.

Note que $I(n, k, t, 0) = \mathcal{A}_{[t]}^{(k)}$.

Portanto temos a cota $M(n, k, t) \geq \max_{r=0}^{\lfloor (n-t)/2 \rfloor} |I(n, k, t, r)|$.

Frankl conjecturou em 1978 que essa cota seria justa, o que foi provado mais tarde por Ahlswede e Khachatryan.

Teorema 3.3 (Ahlswede–Khachatryan '97 [1]). Para todos naturais $t \leq k \leq n$, temos $M(n, k, t) = \max_{r=0}^{\lfloor (n-t)/2 \rfloor} |I(n, k, t, r)|$.

A maior parte das provas do Teorema 3.1 podem ser generalizadas para o caso t -intersectante desde que $n \gg k, t$ para obter $M(n, k, t) = |I(n, k, t, 0)|$.

Já se torna um problema difícil considerar $n = 4s$, $k = 2s$ e $t = 2$.

Se abdicarmos da hipótese de que os conjuntos da família têm o mesmo tamanho, o problema se torna um pouco mais simples.

Problema 3.4. Sejam $t \leq n$ naturais e $M(n, t) = \max\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n]) \text{ é } t\text{-intersectante}\}$.

Quão grande é $M(n, t)$?

Novamente, podemos considerar a família t -intersectante $\mathcal{A}_{[t]} = \{U \subset [n] : U \supset [t]\}$ e obter a cota $M(n, t) \geq 2^{n-t}$.

No caso $t = 2$ e $n = 2s$, podemos considerar a família $\binom{[n]}{\geq s+1} = \{U \subset [n] : |U| \geq s+1\}$.

Essa família é 2-intersectante pois, se U_1 e U_2 são elementos dela, então $|U_1 \cap U_2| = |U_1| + |U_2| - |U_1 \cup U_2| \geq (s+1) + (s+1) - 2s = 2$.

Ademais, temos

$$\left| \binom{[n]}{\geq s+1} \right| = \sum_{k=s+1}^{2s} \binom{2s}{k} = \left(2^{2s} - \binom{2s}{s} \right) / 2 \sim 2^{2s-1},$$

o que dá uma cota assintoticamente melhor do que a construção anterior.

3.2 A p -medida sobre $\mathcal{P}([n])$

Fixado $p \in [0, 1]$, definimos a função

$$\hat{\mu}_p: \mathcal{P}([n]) \rightarrow [0, 1] \\ U \mapsto p^{|U|}(1-p)^{n-|U|}$$

e a medida de probabilidade

$$\mu_p: \mathcal{P}(\mathcal{P}([n])) \rightarrow [0, 1] \\ \mathcal{A} \mapsto \sum_{U \in \mathcal{A}} \hat{\mu}_p(U)$$

chamada p -medida sobre $\mathcal{P}([n])$.

Observe que essa medida também pode ser calculada da seguinte forma: Consideramos o experimento aleatório de gerar um subconjunto X_p de $[n]$ jogando uma moeda com probabilidade p de resultar cara para cada elemento de $[n]$ independentemente e incluí-lo em X_p se o resultado for cara.

Dessa forma temos $\hat{\mu}_p(U) = \mathbb{P}(X_p = U)$ para todo $U \subset [n]$ e $\mu_p(\mathcal{A}) = \mathbb{P}(X_p \in \mathcal{A})$ para toda família \mathcal{A} de subconjuntos de $[n]$.

Identificamos $\mathcal{P}([n])$ com $2^{[n]} = \{0, 1\}^{[n]}$ através da bijeção

$$\chi: \mathcal{P}([n]) \rightarrow 2^{[n]} \\ U \mapsto \mathbb{1}_U: [n] \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin U; \\ 1, & \text{se } x \in U. \end{cases}$$

Dessa forma, a medida induzida por μ_p em $2^{[n]} = \times_{i \in [n]} \{0, 1\}$ é a medida produto

$$\bigotimes_{i \in [n]} \nu_p,$$

onde $\nu_p: \mathcal{P}(\{0, 1\}) \rightarrow [0, 1]$ é definida na tabela abaixo.

A	\emptyset	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$
$\nu_p(A)$	0	$1-p$	p	1

Para calcular μ_p é muito útil considerar X_p , ilustramos esse fato calculando μ_p para a família $\mathcal{A}_1 = \{U \subset [n] : 1 \in U\}$.

Pela definição, temos

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{A}_1) &= \sum_{U \in \mathcal{A}_1} p^{|U|}(1-p)^{n-|U|} = \sum_{B \subset [n] \setminus \{1\}} p^{|B|+1}(1-p)^{n-|B|-1} \\ &= p \sum_{b=0}^{n-1} \binom{n-1}{b} p^b (1-p)^{(n-1)-b} = p(p + (1-p))^{n-1} = p. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando o experimento X_p , basta observar que $X_p \in \mathcal{A}_1$ se e somente se a moeda jogada para 1 resultar cara, donde segue trivialmente que $\mu_p(\mathcal{A}_1) = \mathbb{P}(1 \in X_p) = p$.

Problemas relacionados com obter famílias satisfazendo certas propriedades com medida μ_p maior possível podem ser vistos como uma generalização dos problemas análogos em que queremos apenas cardinalidade maior possível. Essa asserção segue de observar que se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$, então

$$\mu_{1/2}(\mathcal{A}) = \sum_{U \in \mathcal{A}} \left(\frac{1}{2}\right)^{|U|} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-|U|} = \sum_{U \in \mathcal{A}} 2^{-n} = \frac{|\mathcal{A}|}{2^n}.$$

Vamos calcular a p -medida das famílias (1) $\mathcal{A}_{[t]} = \{U \subset [n] : U \supset [t]\}$; (2) $\mathcal{A}^{(t)} = \{U \subset [n] : |U \cap [t+2]| \geq t+1\}$.

Para o caso 1, temos claramente $\mu_p(\mathcal{A}_{[t]}) = \mathbb{P}(X_p \supset [t]) = p^t$.

Para o caso 2, temos

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{A}^{(t)}) &= \mathbb{P}(X_p \cap [t+2] \geq t+1) = \mathbb{P}(X_p \cap [t+2] = t+2) + \mathbb{P}(X_p \cap [t+2] = t+1) \\ &= p^{t+2} + (t+2)p^{t+1}(1-p). \end{aligned}$$

Observe que, para $p \in]0, 1[$, temos

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{A}^{(t)}) \leq \mu_p(\mathcal{A}_{[t]}) &\iff p^{t+2} + (t+2)p^{t+1}(1-p) \leq p^t \iff p^2 + (t+2)p(1-p) - 1 \leq 0 \\ &\iff (p+1)(p+1) + (t+2)p(1-p) \leq 0 \iff -(p+1) + (t+2)p \leq 0 \\ &\iff p \leq \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Essa observação mostra a necessidade de uma das hipóteses do Teorema 2.8 enunciado novamente abaixo.

Teorema (Dinur–Safra '05 [6]; Friedgut '08 [11]). (2.8) Se \mathcal{F} é uma família t -intersectante de subconjuntos de $[n]$ e $0 < p < 1/(t+1)$, então $\mathbb{P}_p(\mathcal{F}) \leq p^t$, onde \mathbb{P}_p denota a medida

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p: \quad \mathcal{P}([n]) &\longrightarrow [0, 1] \\ \mathcal{F} &\longmapsto \sum_{F \in \mathcal{F}} p^{|F|} (1-p)^{n-|F|}. \end{aligned}$$

Vamos apresentar inicialmente uma prova desse teorema para o caso $t = 1$ que, apesar de não ser a prova mais simples conhecida, é uma prova cuja ideia será reaproveitada para o caso $t > 1$. Porém precisaremos de um pouco de teoria dos grafos o que é justificado abaixo.

Se considerarmos o grafo G sobre $\mathcal{P}([n])$ tal que $E(G) = \{UV : U \cap V \neq \emptyset\}$, então $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ intersectante corresponderá a um conjunto estável (independente) de G , ou seja, queremos provar que a medida μ_p de conjuntos estáveis de G não excede p .

A seguir provaremos a Cota de Hoffman para o número de estabilidade ($\alpha(G)$) de um grafo G , para isso lembramos da definição de matriz de adjacência de um grafo G .

Definição 3.5 (Matriz de adjacência). A *matriz de adjacência* de um grafo G , denotada por M_G , é a matriz real de ordem $|V(G)| \times |V(G)|$ cujas linhas e colunas são indexadas por $V(G)$ e cujas entradas são

$$m_{vw} = \begin{cases} 0, & \text{se } vw \notin E(G); \\ 1, & \text{se } vw \in E(G). \end{cases}$$

Observação. Claramente, a matriz M_G é simétrica, então todos seus autovalores são reais e podem ser ordenados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{|V(G)|}$.

Denotamos $\lambda_{|V(G)|}$ também por λ_{\min} .

Como $\sum_{i=1}^{|V(G)|} \lambda_i = \text{tr}(M_G) = 0$, então temos $\lambda_{\min} \leq 0$. Ademais a igualdade só vale se M_G for nula (i.e., o grafo G for vazio).

Estamos especialmente interessados no caso em que o grafo G é r -regular. Nessa situação é fácil ver que r é um autovalor associado ao autovetor $\mathbb{1}_{V(G)} = (1, 1, \dots, 1)$, pois toda linha de M_G possui exatamente r entradas não-nulas.

Exercício resolvido 3.6. Se G é um grafo r -regular então todos os autovalores de M_G são menores ou iguais a r .

Estamos em condições agora de enunciar a Cota de Hoffman.

Teorema 3.7 (Hoffman 1969/70 [14, 15]). Seja G um grafo r -regular com N vértices, M_G sua matriz de adjacência e λ_1 e λ_{\min} os autovalores máximo e mínimo respectivamente de M_G . Nessas condições temos

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{\lambda_1 - \lambda_{\min}} N.$$

Antes da demonstração, faremos algumas definições que se tornarão convenientes ao longo da prova. Definimos $\bar{\alpha}(G) = \alpha(G)/N$ e definimos o seguinte produto interno em $\mathbb{R}^{V(G)} \cong \mathbb{R}^N$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{v \in V(G)} f(v)g(v)\mu(\{v\}) = \mathbb{E}_{x \in \mu V}(f(x)g(x)),$$

onde μ é a medida de probabilidade uniforme sobre $V(G)$.

Esse produto interno por sua vez gera a norma

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{v \in V(G)} (f(v))^2 \right)^{1/2}.$$

Dessa forma, temos $\|\mathbb{1}_A\|_2^2 = |A|/N$.

Tomamos então u_1, u_2, \dots, u_N uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{V(G)}$ composta de autovetores de M_G associados aos autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$, respectivamente e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u_1 = \mathbb{1}_{V(G)}$.

Então todo elemento f de $\mathbb{R}^{V(G)}$ pode ser escrito da forma $f = \sum_{i=1}^N a_i u_i$, onde $a_i = \langle f, u_i \rangle$. Ademais, teremos $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^N a_i^2$.

Demonstração da Cota de Hoffman. Seja $A \subset V(G)$ um conjunto estável de tamanho máximo em G .

Temos $\|A\|_2^2 = |A|/N = \bar{\alpha}(G)$.

Ademais, se $\mathbb{1}_A = \sum_{i=1}^N a_i u_i$, então $a_1 = \langle \mathbb{1}_A, u_1 \rangle = \langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_{V(G)} \rangle = |A|/N = \bar{\alpha}(G)$.

Note que $\mathbb{1}_A^t M_G \mathbb{1}_A = \sum_{v,w \in V(G)} \mathbb{1}_A(v) m_{vw} \mathbb{1}_A(w) = \sum_{v,w \in A} m_{vw} = 2|E(G[A])| = 0$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A^t M_G \mathbb{1}_A &= \left(\sum_{i=1}^N a_i u_i \right)^t M_G \left(\sum_{i=1}^N a_i u_i \right) = \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \lambda_j u_i^t u_j \\ &= \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \lambda_j N \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^N a_i^2 \lambda_i N. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^N a_i^2 \lambda_i = a_1^2 \lambda_1 + \sum_{i=2}^N a_i^2 \lambda_i \\ &\geq a_1^2 \lambda_1 + \lambda_{\min} \sum_{i=2}^N a_i^2 = a_1^2 (\lambda_1 - \lambda_{\min}) + \lambda_{\min} \|\mathbb{1}_A\|_2^2 = \bar{\alpha}(G)^2 (\lambda_1 - \lambda_{\min}) + \lambda_{\min} \bar{\alpha}(G) \end{aligned}$$

Donde segue que $\bar{\alpha}(G) \leq -\lambda_{\min}/(\lambda_1 - \lambda_{\min})$. ■

3.3 Rumo ao Teorema de Dinur, Safra e Friedgut

05/11/2013 – Lucas Colucci Cavalcante de Souza

Nosso objetivo será generalizar a prova feita com a cota de Hoffman. Para isso, faremos primeiramente algumas definições.

Definição 3.8 (Produto tensorial). Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ duas matrizes com entradas reais.

O produto tensorial de A por B é definido como a matriz

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{12}b_{1q} & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{2q} & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & a_{12}b_{p1} & a_{12}b_{p2} & \cdots & a_{12}b_{pq} & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1q} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{22}b_{1q} & \cdots & a_{2n}b_{11} & a_{2n}b_{12} & \cdots & a_{2n}b_{1q} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & \cdots & a_{21}b_{2q} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2q} & \cdots & a_{2n}b_{21} & a_{2n}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21}b_{p1} & a_{21}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{pq} & a_{22}b_{p1} & a_{22}b_{p2} & \cdots & a_{22}b_{pq} & \cdots & a_{2n}b_{p1} & a_{2n}b_{p2} & \cdots & a_{2n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & a_{m2}b_{11} & a_{m2}b_{12} & \cdots & a_{m2}b_{1q} & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & a_{m2}b_{21} & a_{m2}b_{22} & \cdots & a_{m2}b_{2q} & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & a_{m2}b_{p1} & a_{m2}b_{p2} & \cdots & a_{m2}b_{pq} & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{pmatrix}$$

A seguir enunciamos algumas propriedades do produto tensorial como exercícios.

Exercício resolvido 3.9. Prove que o produto tensorial não é comutativo, mas é associativo.

Exercício resolvido 3.10. Sejam A , B , C e D matrizes com entradas reais de ordens $m \times n$, $q \times r$, $n \times p$ e $r \times s$ respectivamente. Prove que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$.

Exercício resolvido 3.11. Suponha que v é autovetor de uma matriz A associado ao autovalor λ e w é autovetor de uma matriz B associado ao autovalor μ . Prove que $v \otimes w$ é autovetor de $A \otimes B$ associado ao autovalor $\lambda\mu$ (os autovetores estão considerados como matrizes coluna multiplicadas à direita).

Provaremos agora uma versão mais fraca do Teorema 2.8 de Dinur, Safra e Friedgut com uma demonstração com a ideia da cota de Hoffman, porém com cálculos um tanto artificiais.

Teorema 3.12. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ é uma família intersectante e $p \leq 1/2$, então $\mu_p(\mathcal{A}) \leq p$.

Demonstração. Definimos o grafo G como antes:

$$V(G) = \mathcal{P}([n]) \\ E(G) = \{ST : S \cap T = \emptyset\}$$

E relembramos que famílias intersectantes correspondem a conjuntos estáveis de G . Definimos também o seguinte produto interno em $\mathbb{R}^{V(G)}$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{A \in V(G)} f(A)g(A)\mu_p(A).$$

Ordenamos os elementos de $V(G)$ lexicograficamente a partir de suas representações como vetores de $\{0, 1\}^n$ (para facilitar na representação das matrizes).

Observe que, na prova baseada na cota de Hoffman, usamos apenas o fato de que a matriz de adjacência de G possuía entradas nulas nas posições correspondentes a não-arestas e que seus autovalores são fáceis de se calcular.

Seja $q = 1 - p$ e defina a seguinte matriz:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{q-p}{q} & \frac{p}{q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos mostrar que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} \right\}$$

forma uma base ortonormal de autovetores de $A^{(1)}$ e esses autovetores estão associados aos autovalores 1 e $-p/q$ respectivamente.

Isso pode ser verificado com simples contas abaixo.

$$\begin{aligned} A^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A^{(1)} \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{q-p}{q} - \sqrt{\frac{p}{q}} \\ \sqrt{\frac{p}{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{p}{q}} \frac{p}{q} \\ \sqrt{\frac{p}{q}} \end{pmatrix} \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 1 \cdot 1 + \mu_p(\emptyset) + 1 \cdot 1 \mu_p(\{1\}) = q + p = 1 \\ \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{p}{q} \mu_p(\emptyset) + \frac{q}{p} \mu_p(\{1\}) = \frac{p}{q} q + \frac{q}{p} p = 1 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} \right\rangle &= \sqrt{\frac{p}{q}} \mu_p(\emptyset) - \sqrt{\frac{q}{p}} \mu_p(\{1\}) = \sqrt{\frac{p}{q}} q - \sqrt{\frac{q}{p}} p = 0 \end{aligned}$$

Definimos agora, para todo inteiro positivo n , a matriz

$$A^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n A^{(1)}.$$

Observe que, ao indexarmos $A^{(n)}$ com $V(G) = \mathcal{P}([n])$, temos que toda entrada de $A^{(n)}$ correspondente a não-arestas ST de G é nula, pois $S \cap T \neq \emptyset$ implica que

$$A_{ST}^{(n)} = \prod_{i \in [n] \setminus (S \cup T)} \frac{q-p}{q} \prod_{i \in S \setminus T} 1 \prod_{i \in T \setminus S} \frac{p}{q} \prod_{i \in S \cap T} 0 = 0.$$

Defina também, para todos inteiros positivos n e i com $i \leq n$, a função

$$\chi_{\{i\}}^{(n)}: \mathcal{P}([n]) \longrightarrow \mathbb{R} \quad T \longmapsto \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{q}}, & \text{se } i \notin T; \\ -\sqrt{\frac{q}{p}}, & \text{se } i \in T. \end{cases}$$

Finalmente, para todo inteiro positivo n e todo subconjunto S de $[n]$, defina a função

$$\chi_S^{(n)} = \prod_{i \in S} \chi_{\{i\}}^{(n)}.$$

Observe que, para todo $S \subset [n]$, temos

$$\chi_S^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n \tau_i,$$

onde

$$\tau_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{se } i \notin S; \\ \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix}, & \text{se } i \in S. \end{cases}$$

Daí segue que $\{\chi_S^{(n)} : S \subset [n]\}$ forma uma base de autovetores de $A^{(n)}$.

Ademais, sabemos que $\chi_S^{(n)}$ é associado ao autovalor $(-p/q)^{|S|}$.

Também é fácil ver que, se $f, g \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([n])}$ e $r, s \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([m])}$, temos

$$\begin{aligned} \langle f \otimes r, g \otimes s \rangle &= \sum_{S \subset [n+m]} (f \otimes r)(S)(g \otimes s)(S) \mu_p(S) \\ &= \sum_{\substack{R \subset [n] \\ T \subset \{n+1, n+2, \dots, n+m\}}} (f \otimes r)(R \cup T)(g \otimes s)(R \cup T) \mu_p(R \cup T) \\ &= \sum_{\substack{R \subset [n] \\ U \subset [m]}} f(R)r(U)g(R)s(U) \mu_p(R) \mu_p(U) \\ &= \left(\sum_{R \subset [n]} f(R)g(R) \mu_p(R) \right) \left(\sum_{U \subset [m]} r(U)s(U) \mu_p(U) \right) = \langle f, g \rangle \langle r, s \rangle. \end{aligned}$$

O que significa que $\{\chi_S^{(n)} : S \subset [n]\}$ é também um conjunto ortonormal.

Seja $\mathcal{A} \subset [n]$ uma família intersectante qualquer, seja f seu vetor característico e seja $\alpha = \mu_p(\mathcal{A})$.

Observe que

$$\begin{aligned} \langle f, \chi_{\emptyset}^{(n)} \rangle &= \sum_{S \subset [n]} f(S) \chi_{\emptyset}^{(n)}(S) \mu_p(S) = \sum_{S \subset [n]} f(S) \mu_p(S) = \mu_p(\mathcal{A}) = \alpha; \\ \sum_{S \subset [n]} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle^2 &= \langle f, f \rangle^2 = \sum_{S \subset [n]} (f(S))^2 \mu_p(S) = \sum_{S \subset [n]} f(S) \mu_p(S) = \mu_p(\mathcal{A}) = \alpha. \end{aligned}$$

Como \mathcal{A} é um conjunto estável em G , temos

$$\langle f, A^{(n)} f \rangle = \sum_{S, T \subset [n]} f(S) A_{ST}^{(n)} f(T) \mu_p(S) = \sum_{ST \in E(G[\mathcal{A}])} A_{ST}^{(n)} \mu_p(S) = 0.$$

Por outro lado, também temos

$$\begin{aligned}
\langle f, A^{(n)} f \rangle &= \left\langle \sum_{S \subset [n]} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle \chi_S^{(n)}, A^{(n)} \sum_{S \subset [n]} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle \chi_S^{(n)} \right\rangle \\
&= \sum_{S, T \subset [n]} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle \langle f, \chi_T^{(n)} \rangle \langle \chi_S^{(n)}, A^{(n)} \chi_T^{(n)} \rangle \\
&= \sum_{S, T \subset [n]} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle \langle f, \chi_T^{(n)} \rangle \left\langle \chi_S^{(n)}, \left(-\frac{p}{q}\right)^{|T|} \chi_T^{(n)} \right\rangle = \sum_{S \subset [n]} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle^2 \left(-\frac{p}{q}\right)^{|T|} \\
&= \alpha^2 + \sum_{\substack{S \subset [n] \\ S \neq \emptyset}} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle^2 \left(-\frac{p}{q}\right)^{|T|} \geq \alpha^2 - \frac{p}{q} \sum_{\substack{S \subset [n] \\ S \neq \emptyset}} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle^2 = \alpha^2 - \frac{p}{q}(\alpha - \alpha^2).
\end{aligned}$$

Na desigualdade acima, é essencial que $p \leq 1/2$ para que $p/q \leq 1$.

Finalmente, ficamos com

$$0 \geq \alpha - \frac{p}{q}(1 - \alpha),$$

o que significa que $\alpha \leq p$. ■

Como já foi comentado, os números e cálculos dessa prova são um tanto artificiais. A seguir apresentaremos outra prova do Teorema 3.12 baseado em uma prova de Katona do Teorema 3.1 (Erdős–Ko–Rado). Mas antes apresentaremos tal prova de Katona, que requer a definição abaixo.

Definição 3.13. Seja $A \subset [n]$ de cardinalidade a e $\sigma \in S_n$ uma permutação sobre $[n]$ (i.e., uma função bijetora de $[n]$ em $[n]$).

Dizemos que A é uma *seção circular* de σ se existe um inteiro k tal que

$$A = \sigma(\{([a] + k) \bmod n + 1\}) = \sigma(\{(i + k) \bmod n + 1 : i \in [a]\})$$

Observação. Uma forma intuitiva das seções circulares consiste em dispor a imagem da permutação em uma circunferência e observar se os elementos de A estão em um setor do círculo.

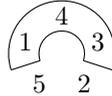


Figura 6: O conjunto $A = \{1, 3, 4\}$ é uma seção circular da permutação $\sigma \in S_5$ tal que $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 5$ e $\sigma(5) = 1$.

Relembramos o Teorema 3.1 e fornecemos a prova de Katona (apenas para a desigualdade).

Teorema (Erdős–Ko–Rado '61 [7]). (3.1) Se $k \leq n/2$ e $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ é intersectante, então $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Ademais, se $k < n/2$ e $|\mathcal{A}| = \binom{[n]}{k}$, então existe $x \in [n]$ tal que x pertence a todo conjunto da família \mathcal{A} .

Demonstração. (Katona '72 [17]) Consideramos os elementos de \mathcal{A} como seções circulares de permutações sobre $[n]$.

Fixada uma permutação σ e considerando sua disposição em uma circunferência, sabemos que, para qualquer divisão da circunferência em dois lados iguais A e B , não há elementos S_A e S_B de \mathcal{A} seções circulares de σ que estão completamente contidos nos lados A e B respectivamente, pois eles não se intersectariam e \mathcal{A} é intersectante (é essencial que $k \leq n/2$).

Isso significa que todos os elementos de \mathcal{A} que são seções circulares de σ devem estar contidos em uma seção circular \mathcal{A} de tamanho $2k - 1$. Ou seja, há no máximo k elementos de \mathcal{A} que são seções circulares de σ

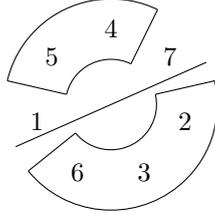


Figura 7: Seções circulares em lados opostos não se intersectam.

Contamos então a quantidade de pares (S, σ) tais que $S \in \mathcal{A}$, $\sigma \in S_n$ e S é seção circular de σ de duas maneiras diferentes.

Com o que observamos anteriormente, não há mais do que $kn!$ tais pares.

Ademais, cada elemento S de \mathcal{A} é seção circular de exatamente $k!(n-k)!n$ permutações (o fator $k!$ corresponde a permutar elementos de S , o fator $(n-k)!$ corresponde a permutar elementos de $[n] \setminus S$ e o fator n corresponde a escolher $\sigma(1)$).

Portanto, temos $|\mathcal{A}|k!(n-k)!n \leq kn!$, o que significa que

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

como queríamos. ■

Agora apresentamos a prova do Teorema 3.12 baseada na prova acima.

Demonstração. (do Teorema 3.12) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentemente escolhidas uniformemente na circunferência de comprimento 1 em \mathbb{R}^2 (centrada na origem).

Escolha aleatoria e independentemente um arco dessa circunferência de comprimento p , seja $S_C = \{i \in [n] : X_i \in C\}$ e considere o evento $E = [S_C \in \mathcal{A}]$.

Como os sorteios são independentes, podemos fazê-los em qualquer ordem.

Fazendo o sorteio do arco antes dos sorteios dos X_i 's, daí temos $\mathbb{P}(E) = \sum_{S \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(S_C = S) = \sum_{S \in \mathcal{A}} p^{|S|}(1-p)^{n-|S|} = \mu_p(\mathcal{A})$.

Por outro lado, fixado um sorteio dos X_i 's, as escolhas de C que satisfarão o evento E devem todas se intersectar (pois \mathcal{A} é intersectante). Isso significa que, para qualquer divisão da circunferência no meio em lados A e B , não pode haver escolhas C_A e C_B de C satisfazendo E completamente contidas em A e em B respectivamente (é essencial que $p \leq 1/2$).

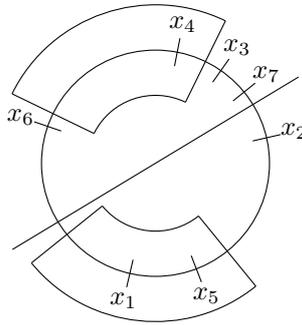


Figura 8: Escolhas de C em lados opostos não se intersectam.

Considerando uma divisão no meio de uma escolha de C que satisfaz E , temos $\mathbb{P}(E | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \leq p$, para todos x_1, x_2, \dots, x_n na circunferência.

Daí, pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{A}) = \mathbb{P}(E) &= \int_{\Omega_{X_1, X_2, \dots, X_n, C}} \mathbb{1}_E d\mathbb{P}_{X_1, X_2, \dots, X_n, C} = \int_{\Omega_{X_1, X_2, \dots, X_n}} \left(\int_{\Omega_C} \mathbb{1}_E d\mathbb{P}_C \right) d\mathbb{P}_{X_1, X_2, \dots, X_n} \\ &\leq \int_{\Omega_{X_1, X_2, \dots, X_n}} p d\mathbb{P}_{X_1, X_2, \dots, X_n} = p. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3.4 O Teorema de Dinur, Safra e Friedgut

12/11/2013 – Lucas Colucci Cavalcante de Souza

Nessa seção, apresentaremos agora uma prova do Teorema 2.8 baseada na primeira prova do Teorema 3.12. Observe que o essencial dessa prova era que as matrizes construídas possuíam entradas nulas correspondentes a índices S e T tais que $S \cap T \neq \emptyset$.

Gostaríamos do mesmo comportamento para o caso $|S \cap T| \geq t$, isso requererá que tomemos entradas em $\mathbb{R}[x]/(x^t)$ (i.e., as entradas das matrizes serão polinômios em uma variável x módulo x^t).

Abaixo enunciamos novamente o teorema e apresentamos sua prova.

Teorema (Dinur–Safra '05 [6]; Friedgut '08 [11]). (2.8) Se \mathcal{F} é uma família t -intersectante de subconjuntos de $[n]$ e $0 < p < 1/(t+1)$, então $\mathbb{P}_p(\mathcal{F}) \leq p^t$, onde \mathbb{P}_p denota a medida

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p: \quad \mathcal{P}([n]) &\longrightarrow [0, 1] \\ \mathcal{F} &\longmapsto \sum_{F \in \mathcal{F}} p^{|F|} (1-p)^{n-|F|}. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $R = \mathbb{R}[x]/(x^t)$ o anel dos polinômios sobre x módulo x^t .

Novamente ordenamos os elementos de $\mathcal{P}([n])$ lexicograficamente a partir de suas representações como vetores de $\{0, 1\}^n$ e definimos a seguinte forma bilinear em $R^{\mathcal{P}([n])}$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{A \in \mathcal{P}([n])} f(A)g(A)\mu_p(A).$$

Notamos que essa forma bilinear é simétrica e que sua restrição a $\mathbb{R}^{\mathcal{P}([n])}$ é um produto interno. Isso se tornará conveniente para trabalharmos com bases ortonormais de $R^{\mathcal{P}([n])}$.

Observação. Bases de R^n , nesse contexto, serão bases de R^n considerando-o como R -módulo livre.

É possível provar que todas as bases de R^n possuem tamanho n (pois R é comutativo não-trivial).

Um conjunto ortogonal em R^n será um conjunto em \mathbb{R}^n que é ortogonal com respeito ao produto interno definido. Analogamente para conjuntos ortonormais.

Um exemplo de base ortonormal de R^n é a base canônica

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}.$$

Ademais, qualquer base de \mathbb{R}^n será automaticamente uma base de R^n .

Definimos agora $q = 1 - p$ e a seguinte matriz sobre R :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q}x & \frac{p}{q} - \frac{p}{q}x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$$

Afirmamos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} \right\}$$

forma (novamente) uma base ortonormal de autovetores de $A^{(1)}$ e esses autovetores estão associados aos autovalores 1 e $-(p/q)(1-x/p)$ respectivamente.

A mesma conta mostra a ortonormalidade desses vetores

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 1 \cdot 1 \cdot \mu_p(\emptyset) + 1 \cdot 1 \mu_p(\{1\}) = q + p = 1 \\ \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{p}{q} \mu_p(\emptyset) + \frac{q}{p} \mu_p(\{1\}) = \frac{p}{q} q + \frac{q}{p} p = 1 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} \right\rangle &= \sqrt{\frac{p}{q}} \mu_p(\emptyset) - \sqrt{\frac{q}{p}} \mu_p(\{1\}) = \sqrt{\frac{p}{q}} q - \sqrt{\frac{q}{p}} p = 0. \end{aligned}$$

E o fato de que esses são autovetores de $A^{(1)}$ é verificado com as contas abaixo.

$$\begin{aligned} A^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q}x + \frac{p}{q} - \frac{p}{q}x \\ 1-x+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A^{(1)} \begin{pmatrix} \sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p}{q}} \left(\frac{q-p}{q} + \frac{p}{q}x \right) - \sqrt{\frac{p}{q}} (1-x) \\ \sqrt{\frac{p}{q}} (1-x) - \sqrt{\frac{q}{p}} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p}{q}} \left(\frac{q-p-q}{q} + \frac{p+q}{q}x \right) \\ -\sqrt{\frac{q}{p}} \left(-\frac{p}{q} (1-x) + x \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p}{q}} \left(\frac{-p}{q} + \frac{1}{q}x \right) \\ -\sqrt{\frac{q}{p}} \left(-\frac{p}{q} + \frac{1}{q}x \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p}{q}} \left(-\frac{p}{q} \left(1 - \frac{x}{p} \right) \right) \\ -\sqrt{\frac{q}{p}} \left(-\frac{p}{q} \left(1 - \frac{x}{p} \right) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para todo inteiro positivo n , definimos a matriz

$$A^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n A^{(1)}.$$

Mostramos a propriedade essencial de $A^{(n)}$, que é possuir 0 na entrada ST quando $|S \cap T| \geq t$ abaixo. Se $S, T \subset [n]$ são tais que $|S \cap T| \geq t$, então

$$A_{ST}^{(n)} = \prod_{i \in [n] \setminus (S \cup T)} \left(\frac{q-p}{q} + \frac{p}{q}x \right) \prod_{i \in S \setminus T} (1-x) \prod_{i \in T \setminus S} \left(\frac{p}{q} - \frac{p}{q}x \right) \prod_{i \in S \cap T} x = 0,$$

onde a última igualdade segue do fato que o último produto terá $|S \cap T| \geq t$ elementos, logo x^t dividirá o resultado.

Definimos novamente as funções $\chi_S^{(n)}$ abaixo.

Seja, para todos inteiros positivos n e i com $i \leq n$, a função

$$\chi_{\{i\}}^{(n)}: \mathcal{P}([n]) \rightarrow \mathbb{R} \quad T \mapsto \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{q}}, & \text{se } i \notin T; \\ -\sqrt{\frac{q}{p}}, & \text{se } i \in T. \end{cases}$$

E, para todo inteiro positivo n e todo subconjunto S de $[n]$, defina a função

$$\chi_S^{(n)} = \prod_{i \in S} \chi_{\{i\}}^{(n)}.$$

E lembramos que, se $f, g \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([n])}$ e $r, s \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}([m])}$, temos

$$\langle f \otimes r, g \otimes s \rangle = \langle f, g \rangle \langle r, s \rangle.$$

O que significa que $\{\chi_S^{(n)} : S \subset [n]\}$ é uma base ortonormal de autovetores de $A^{(n)}$ e que, para todo $S \subset [n]$, o autovalor associado a $\chi_S^{(n)}$ é

$$\lambda_S = \left(-\frac{p}{q} \left(1 - \frac{x}{p} \right) \right)^{|S|}.$$

Seja $\mathcal{A} \subset [n]$ uma família t -intersectante qualquer, seja f seu vetor característico e seja $\alpha = \mu_p(\mathcal{A})$. Escrevendo $f = \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S \chi_S^{(n)}$ com $\widehat{f}_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \subset [n]$, temos

$$\langle f, \chi_T^{(n)} \rangle = \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S \langle \chi_S^{(n)}, \chi_T^{(n)} \rangle = \widehat{f}_T,$$

para todo $T \subset [n]$.

Observe agora que

$$\begin{aligned} \langle f, \chi_\emptyset^{(n)} \rangle &= \sum_{S \subset [n]} f(S) \chi_\emptyset^{(n)}(S) \mu_p(S) = \sum_{S \subset [n]} f(S) \mu_p(S) = \mu_p(\mathcal{A}) = \alpha; \\ \sum_{S \subset [n]} \langle f, \chi_S^{(n)} \rangle^2 &= \langle f, f \rangle^2 = \sum_{S \subset [n]} (f(S))^2 \mu_p(S) = \sum_{S \subset [n]} f(S) \mu_p(S) = \mu_p(\mathcal{A}) = \alpha. \end{aligned}$$

Como \mathcal{A} é t -intersectante, temos

$$\langle f, A^{(n)} f \rangle = \sum_{S, T \subset [n]} f(S) A_{ST}^{(n)} f(T) \mu_p(S) = \sum_{S, T \in \mathcal{A}} A_{ST}^{(n)} \mu_p(S) = 0.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, A^{(n)} f \rangle = \left\langle \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S \chi_S^{(n)}, A^{(n)} \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S \chi_S^{(n)} \right\rangle \\ &= \sum_{S, T \subset [n]} \widehat{f}_S \widehat{f}_T \langle \chi_S^{(n)}, \lambda_T \chi_T^{(n)} \rangle = \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S^2 \lambda_S \\ &= \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S^2 \left(\frac{-p}{q} \right)^{|S|} \left(1 - \frac{x}{p} \right)^{|S|} = \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S^2 \left(\frac{-p}{q} \right)^{|S|} \sum_{m=0}^{t-1} \binom{|S|}{m} \left(\frac{-1}{p} \right)^m x^m \\ &= \sum_{m=0}^{t-1} \left(\left(\frac{-1}{p} \right)^m \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S^2 \left(\frac{-p}{q} \right)^{|S|} \binom{|S|}{m} \right) x^m. \end{aligned}$$

Mas para que esse polinômio seja o polinômio nulo, para todo $m \in \{0, 1, \dots, t-1\}$, temos que ter

$$0 = \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}_S^2 \left(\frac{-p}{q} \right)^{|S|} \binom{|S|}{m} = \sum_{s=0}^n \left(\frac{-p}{q} \right)^s \binom{s}{m} \sum_{\substack{S \subset [n]: \\ |S|=s}} \widehat{f}_S^2.$$

Consideramos então tais valores como polinômios em $\mathbb{R}[s]$ e observamos que

$$\left\{ \binom{s}{0}, \binom{s}{1}, \dots, \binom{s}{t-1} \right\} = \left\{ \binom{s}{m} : m \in \{0, 1, \dots, t-1\} \right\}$$

forma uma \mathbb{R} -base dos polinômios de variável s de grau no máximo $t-1$. Isso significa que, para todo

polinômio $Q \in \mathbb{R}[s]$ de grau no máximo $t - 1$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{s=0}^n \left(\frac{-p}{q}\right)^s Q(s) \sum_{\substack{S \subset [n]: \\ |S|=s}} \widehat{f}_S^2 \\
&= Q(0)\widehat{f}_\emptyset^2 + \sum_{s=1}^n \left(\frac{-p}{q}\right)^s Q(s) \sum_{S \subset [n]: |S|=s} \widehat{f}_S^2 = Q(0)\alpha^2 + \sum_{s=1}^n \left(\frac{-p}{q}\right)^s Q(s) \sum_{S \subset [n]: |S|=s} \widehat{f}_S^2 \\
&\geq Q(0)\alpha^2 + \min \left\{ \left(\frac{-p}{q}\right)^s Q(s) : s \in [n] \right\} \sum_{S \subset [n]: S \neq \emptyset} \widehat{f}_S^2 \\
&= Q(0)\alpha^2 + \min \left\{ \left(\frac{-p}{q}\right)^s Q(s) : s \in [n] \right\} (\alpha - \alpha^2).
\end{aligned}$$

Queremos obter $\alpha \leq p^t$, isso significa que, se fizermos $M = \min\{(-p/q)^s Q(s) : s \in [n]\}$ e supusermos que $Q(0) > 0$, precisamos que

$$M = \frac{-p^t Q(0)}{1 - p^t},$$

pois a conta acima implicará que $0 \geq Q(0)\alpha + M(1 - \alpha)$, levando a

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq \frac{-M}{Q(0) - M} = \frac{p^t Q(0)/(1 - p^t)}{Q(0) + p^t Q(0)/(1 - p^t)} \\
&= \frac{p^t}{1 - p^t + p^t} = p^t.
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, basta provar o seguinte lema.

Lema 3.14. Se $0 < p < 1/(t + 1)$ e $q = 1 - p$, então existe um polinômio Q de grau no máximo $t - 1$ tal que, se $F(s) = Q(s)(-p/q)^s$, então F possui as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
F(0) &= 1; \\
F(1) &= F(2) = \dots = F(t) = \frac{-p^t}{1 - p^t}; \\
F(s) &> \frac{-p^t}{1 - p^t}, \text{ para todo inteiro } s > t.
\end{aligned}$$

Demonstração (Rascunho). Provaremos o caso em que t é ímpar (o caso em que t é par pode ser feito com cálculos e argumentos análogos e algumas manipulações).

Para simplificar a notação, sejam $d = -q/p$ e $M = -p^t/(1 - p^t)$.

Seja Q um polinômio de grau no máximo $t - 1$ tal que

$$Q(i) = Md^i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, t,$$

ou seja, temos

$$Q(x) \equiv M \sum_{k=1}^t d^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^t \frac{x - j}{k - j}.$$

O cálculo abaixo mostra que $Q(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
Q(0) &= M \sum_{k=1}^t d^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^t \frac{-j}{k-j} = M \sum_{k=1}^t d^k \frac{(-1)^{t-1} t!}{k (k-1)! (t-k)! (-1)^{t-k}} \\
&= M \sum_{k=1}^t d^k \binom{t}{k} (-1)^{k-1} = -M((1-d)^t - 1) = -M \left(\left(1 + \frac{q}{p}\right)^t - 1 \right) \\
&= -M \left(\frac{1}{p^t} - 1 \right) = -M \frac{1-p^t}{p^t} = 1.
\end{aligned}$$

Observe agora que o sinal de $Q(i)$ é $(-1)^{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, t$, isso significa que todas as $t-1$ raízes de $Q(i)$ estão no intervalo $]0, t[$. Como t é ímpar, temos que $Q(x) > 0$ para todo $x \geq t$.

Observe agora que se $s > t$ é um inteiro par, então temos

$$F(s) = Q(s) \left(\frac{-p}{q} \right)^s > 0 > \frac{-p^t}{1-p^t} = M.$$

Resta provar o mesmo para $s > t$ ímpar.

Provaremos inicialmente o caso $s = t + 2$ e, para fazê-lo, basta provar que $Q(t+2)d^{-(t+2)}/M < 1$.

Observe então que

$$\begin{aligned}
\frac{Q(t+2)}{Md^{t+2}} &= \frac{1}{d^{t+2}} \sum_{k=1}^t d^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^t \frac{t+2-j}{k-j} = \sum_{k=1}^t d^{k-t-2} \frac{(t+1)!}{t+2-k} \frac{1}{(k-1)! (t-k)! (-1)^{t-k}} \\
&= \sum_{k=1}^t d^{k-t-2} \frac{(t+1)! (t-k+1) (-1)^{t-k}}{(k-1)! (t-k+2)!} = \sum_{k=1}^t d^{k-t-2} \binom{t+1}{k-1} (t-k+1) (-1)^{t-k+2} \\
&= \sum_{k=1}^t \binom{t+1}{k-1} (t-k+1) \left(\frac{-1}{d} \right)^{t-k+2}.
\end{aligned}$$

Fazendo $m = t - k + 2$ no somatório envolvido (então $k = t - m + 2$), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{Q(t+2)}{Md^{t+2}} &= \sum_{m=2}^{t+1} \binom{t+1}{t-m+1} \left(\frac{-1}{d} \right)^m (m-1) \\
&= \sum_{m=2}^{t+1} \binom{t+1}{m} \left(\frac{-1}{d} \right)^m (m-1) \\
&= \sum_{m=1}^{t+1} \binom{t+1}{m} \left(\frac{-1}{d} \right)^m (m-1) \\
&= \left(\frac{-1}{d} \sum_{m=1}^{t+1} \binom{t+1}{m} \left(\frac{-1}{d} \right)^{m-1} m \right) - \left(\sum_{m=1}^{t+1} \binom{t+1}{m} \left(\frac{-1}{d} \right)^m \right) \\
&= \left(\frac{-1}{d} \left((t+1) \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t \right) \right) - \left(\left(1 - \frac{1}{d}\right)^{t+1} - 1 \right) \\
&= \frac{-1}{d} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t (t+1+d-1) + 1 \\
&= \frac{-1}{d} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t (t+d) + 1.
\end{aligned}$$

Como $-d = q/p > 0$ e $(1-1/d)^t > 0$, temos $Q(t+2)d^{-(t+2)}/M < 1$ se e somente se $0 > t+d = t-q/p$, o que equivale a $0 > tp - 1 + p$, ou então a $p < 1/(t+1)$ que é uma hipótese.

Vamos provar agora que a função $R(x) = Q(x) + M(q/p)^x$ possui exatamente t raízes (contando multiplicidade).

Primeiramente, observe que a equação possui no máximo t raízes, pois o grau de Q é $t - 1$ (exercício abaixo).

Exercício resolvido 3.15. Se $c > 0$ e $p \in \mathbb{R}[x]$ possui grau n , então a função $f(x) = p(x) - c^x$ possui no máximo $n + 1$ raízes (contando multiplicidade).

Para $x = 1, 3, \dots, t$, temos, pela construção de Q , que $Q(x) = Md^x = M(-q/p)^x = -M(q/p)^x$, ou seja, esses pontos são raízes de R .

Por outro lado, para $x = 2, 4, \dots, t - 1$, temos $Q(x) = M(-q/p)^x = M(q/p)^x < 0$, ou seja, para esses pontos, temos $R(x) = 2M(q/p)^x < 0$.

Ademais, temos $Q(t + 2) < Md^{t+2} = M(-q/p)^{t+2} = -M(q/p)^{t+2}$, ou seja, temos $R(t + 2) < 0$.

Isso significa que há pelo menos duas raízes de R em cada intervalo da forma $]x, x + 2[$ para $x = 2, 4, \dots, t - 3$ (uma delas sendo $x + 1$), há mais duas raízes no intervalo $]t - 1, t + 2[$ (uma delas sendo t) e finalmente uma raiz em 1.

Isso nos dá que R possui pelo menos $(t - 3) + 2 + 1 = t$ raízes, como queríamos.

Isso significa que, para $x \geq t + 2$, temos $R(x) < 0$, em particular, se $s \geq t + 2$ é um inteiro ímpar, temos

$$Q(s) < -M(q/p)^s = M(-q/p)^s,$$

o que conclui a prova do lema (no caso t ímpar). □

Conforme mencionado anteriormente, o lema acima implica que $\alpha \leq p^t$ como queríamos. ■

4 O jogo dos policiais e ladrão em grafos

4.1 A definição do jogo

19/11/2013 – Thiago da Silva Pinheiro

O jogo dos policiais e ladrão é jogado por dois jogadores com um grafo conexo G como tabuleiro.

O primeiro jogador controla k -policiais e o segundo jogador controla um ladrão. O objetivo do primeiro jogador é colocar um policial no mesmo vértice de G que o ladrão estiver (pegar o ladrão) e o objetivo do segundo jogador é impedir isso (infinidamente).

O primeiro jogador inicia o jogo colocando cada um dos policiais sobre um vértice. Em seguida o segundo jogador coloca o ladrão sobre um vértice. A partir de então os jogadores jogam alternadamente em turnos.

Em seu turno, cada jogador pode mover suas peças de um vértice para um vértice adjacente ou escolher não mover a peça (no caso do primeiro jogador, ele move um subconjunto de todos os policiais). É permitido que duas peças ocupem o mesmo vértice.

Observação. O jogo poderia ser definido para grafos arbitrários, mas uma vez colocadas as peças, a única componente conexa de G relevante para o jogo seria a que possui o ladrão.

4.2 Definições e resultados

Observe primeiramente que o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora no grafo conexo G se possuir pelo menos $|V(G)|$ policiais.

Então definimos, para todo grafo conexo G , seu *cop number* como

$$c(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : k \text{ policiais pegam o ladrão em } G\},$$

i.e., é o menor número de policiais para o qual o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora em G .

Um resultado que foi provado em um semestre anterior no PICME caracteriza o cop number de grafos planares.

Teorema 4.1. Se G é um grafo conexo planar, então $c(G) \leq 3$.

Relembremos as noções de contração de aresta e de menor (“minor”) em grafos.

Definição 4.2 (Contração de aresta). Seja $e = xy$ uma aresta de um grafo G . O grafo G/e da contração da aresta e em G é definido de forma que

$$\begin{aligned} V(G/e) &= V(G) \setminus \{x, y\} \cup \{z\}, \text{ onde } z \notin V(G); \\ E(G/e) &= E(G - v - w) \cup \{vz : vx \in E(G) \text{ ou } vy \in E(G)\}; \end{aligned}$$

ou seja, o grafo G/e é obtido a partir de G identificando os vértices x e y e removendo possíveis arestas paralelas e laços.

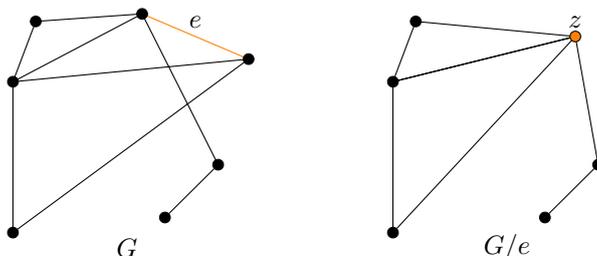


Figura 9: Exemplo de contração da aresta e .

Definição 4.3 (Menor). Um grafo H é dito um *menor* (“minor”) de um grafo G (denotado $H \preceq G$ ou $G \succeq H$) se existe um subgrafo K de G tal que H pode ser obtido a partir de K através de uma sequência de contrações de arestas, i.e., existe uma sequência de grafos $H = H_0, H_1, \dots, H_k \cong K$ tal que, para todo $i \in [k]$, existe uma aresta e em H_{i-1} tal que $H_i = H_{i-1}/e$.

Observação. A definição acima é equivalente à seguinte definição:

Um grafo H é dito menor de um grafo G se existe uma sequência $(X_v)_{v \in V(H)} \subset \mathcal{P}(V(G))^{V(H)}$ de subconjuntos de $V(G)$ tal que

- (A) Para todo $v \in V(H)$, temos que $G[X_v]$ é conexo;
- (B) Para toda aresta vw de H , temos que $\delta_G(X_v, X_w) \neq \emptyset$.

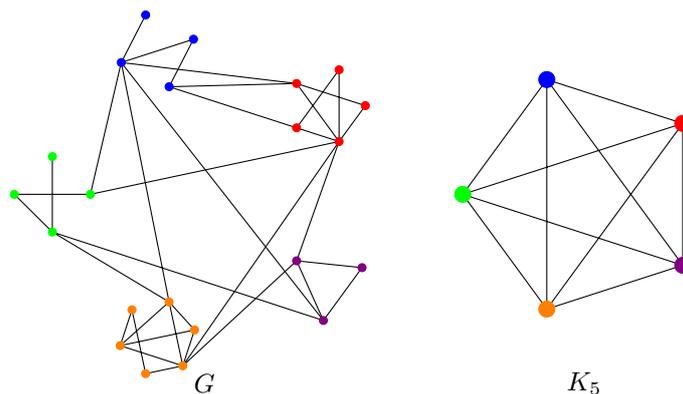


Figura 10: Exemplo de G tal que $K_5 \preceq G$.

Definimos agora algumas noções que serão úteis para o estudo do jogo de policiais e ladrão.

Definição 4.4. Sejam x e y dois vértices de um grafo G . Um xy -caminho é um caminho de x a y de comprimento mínimo (i.e., de comprimento $d_G(x, y)$).

Definição 4.5. Seja G um grafo e $X, Y \subset V(G)$. Um XY -caminho é um xy -caminho P tal que $V(P) \cap X = \{x\}$ e $V(P) \cap Y = \{y\}$.

Observação. Um XY -caminho não necessariamente terá comprimento $d_G(X, Y)$.

Ao longo das descrições das estratégias para o primeiro jogador, associaremos estratégias a cada policial. Para isso, diremos que um policial está *protegendo* um subgrafo H de G se a estratégia associada a ele é tal que, se o ladrão entrar em H , o policial é capaz de pegá-lo em seu próximo movimento.

Lema 4.6. Se x e y são vértices de um grafo G , então um policial é capaz, após um número finito de passos, de proteger um xy -caminho.

Demonstração. Seja P o xy -caminho em questão, $d = d_G(x, y)$ seu comprimento e, para todo $i \in \mathbb{N}$ com $i < d$, seja $A_i = \{v \in V(G) : d_G(x, v) = i\}$. Seja ainda $A_d = \{v \in V(G) : d_G(x, v) \geq d\}$.

Observe que $\{A_i : i \in \{0, 1, \dots, d\}\}$ é uma partição de $V(G)$. Ademais, temos que se $\delta(A_i, A_j) \neq \emptyset$, então $|i - j| \leq 1$.

Finalmente, para todo $i \in \mathbb{N}$ com $i \leq d$, seja v_i o único vértice de $V(P) \cap A_i$ (essa unicidade vem do fato que P é um menor caminho entre x e y). Note que $v_0 = x$ e $v_d = y$.

Considere a seguinte estratégia para o policial c em questão.

1. Enquanto c não estiver em P , sucessivamente mova-se para um vértice mais próximo de P ;
2. Seja k tal que o ladrão está em A_k . Mova-se na direção de v_k .

Observe que, como o grafo é conexo, o passo 1 não pode ser executado infinitamente.

Diremos que o estado do jogo é bom se k for tal que o ladrão está em A_k , o policial c está em v_k e é a vez do ladrão.

É fácil ver que após um número finito de aplicações do passo 2 (no máximo d), o estado do jogo é bom.

Suponha então que o estado do jogo é bom. Então afirmamos que c está protegendo P , pois, da construção dos A_i 's, o ladrão, estando em A_k só pode mover-se para A_{k-1} , A_k ou A_{k+1} , ou seja, se o ladrão entrar em P , estará adjacente ao policial ou na mesma casa do policial. ■

Observação. Se w é o vértice em que o policial c está inicialmente, essa estratégia faz com que o policial c esteja protegendo P em no máximo $d_G(w, P) + d$ passos.

Observação. Se em algum momento da estratégia descrita o policial c estiver em v_i e o ladrão em A_k com $i \leq k$, então o ladrão não consegue mais entrar em v_0, v_1, \dots, v_{i+1} sem ser pego por c na próxima rodada, ou seja, o policial c está implicitamente protegendo v_0, v_1, \dots, v_{i+1} .

Corolário 4.7. Se G é um grafo e $X, Y \subset V(G)$, então um policial é capaz, após um número finito de passos, de proteger um XY -caminho.

Demonstração. Basta observar que um XY -caminho é um xy -caminho para algum par de vértices x e y . ■

Definimos agora mais duas noções úteis para o estudo desse jogo.

Definição 4.8. Seja T um subgrafo de um grafo G . Um vértice v de G é dito um T -vizinho se $v \in N_G(V(T)) \setminus V(T)$.

Definição 4.9. Seja T um subgrafo de um grafo G e $x, y \in N_G(V(T)) \cup V(T)$.

Definimos o grafo $T \oplus \{x, y\}$ de forma que

$$\begin{aligned} V(T \oplus \{x, y\}) &= V(T) \cup \{x, y\}; \\ E(T \oplus \{x, y\}) &= E(T) \cup \{tv : t \in T \setminus \{x, y\} \text{ e } v \in \{x, y\}\}. \end{aligned}$$

Estamos agora em condições de enunciar e provar o teorema abaixo sobre o cop number.

Teorema 4.10 (Andraea '86 [2]). Sejam G e H grafos e $h \in V(H)$ tais que $H - h$ não possui vértices isolados e $G \not\subseteq H$.

Nessas condições, temos $c(G) \leq |E(H - h)|$.

Demonstração. Como temos à nossa disposição $|E(H - h)|$ policiais, podemos rotulá-los com elementos de $E(H - h)$, então seja $C = \{c_{ij} : ij \in E(H - h)\}$ o conjunto dos policiais e $\tilde{H} = H - h$.

A todo momento da estratégia, cada policial estará ou ocioso, ou incumbido de proteger algum XY -caminho com $X, Y \subset V(G)$ (que vimos ser possível no Corolário 4.7).

A estratégia se baseará em proteger um conjunto K de forma que o ladrão ficará preso em uma componente conexa T de $G - K$ e sucessivamente alterar K para K' de forma que o ladrão não escape de T e de forma que a componente conexa T' de $G - K'$ que possui o ladrão seja estritamente menor que T . A finitude do grafo nos garantirá então que tal estratégia é vencedora.

Utilizaremos também alguns objetos auxiliares para descrever a estratégia dos policiais.

A todo momento teremos os seguintes objetos com as seguintes propriedades:

- (a) Um subgrafo não-vazio A de \tilde{H} de forma que os policiais c_e com $e \in E(A)$ estarão protegendo algum caminho de G ;
- (b) Um subconjunto X das arestas em $\delta_{\tilde{H}}(V(A)) \setminus E(A)$ de forma que os policiais c_e com $e \in X$ estarão protegendo um vértice de G ;
- (c) Uma sequência $(H_v)_{v \in V(A)} \in \mathcal{P}(V(G))^{V(A)}$ de subconjuntos não-vazios dois-a-dois disjuntos de $V(G)$ indexada por vértices de A tal que, para todo $v \in V(A)$, temos que $G[H_v]$ é conexo;
- (d) Uma sequência $(P_e)_{e \in E(A)}$ de caminhos em G dois-a-dois internamente disjuntos nos vértices indexadas pelas arestas de A , onde, para toda aresta $e = xy \in E(A)$, temos que P_e é um $H_x H_y$ -caminho em G tal que $V(P_e) \cap H_k = \emptyset$ para todo $k \notin \{x, y\}$ e c_e está incumbido de proteger P_e ;
- (e) Uma sequência $(p_e)_{e \in X} \in V(G)^X$ de vértices de G , onde, para toda aresta $e = xy \in X$, temos que $p_e \in H_x \cup H_y$ e c_e está incumbido de proteger p_e ;
- (f) Um subgrafo K do grafo G definido como

$$K = G \left[\left(\bigcup_{v \in V(A)} H_v \right) \cup \left(\bigcup_{e \in E(A)} V(P_e) \right) \right]$$

tal que o ladrão não consegue entrar em K sem passar por um vértice protegido (note que $K \succeq A$);

- (g) Um conjunto P de vértices de G definido como

$$P = \left(\bigcup_{e \in E(A)} V(P_e) \right) \cup \left(\bigcup_{e \in X} p_e \right)$$

que está sendo completamente protegido pelos policiais em $\{c_e : e \in E(A) \cup X\}$.

- (h) Um grafo T que será a componente conexa de $G - K$ em que está o ladrão e de forma que todo T -vizinho pertence a P .

A jogada inicial do primeiro jogador será colocar todos os policiais em um mesmo vértice w de G de forma que teremos

$$\begin{aligned} |V(A)| &= 1; \\ E(A) &= \emptyset; \\ |X| &= 1; \\ H_v &= \{w\}, \text{ para o único elemento } v \in V(A); \\ p_e &= \{w\}, \text{ para o único elemento } e \in X. \end{aligned}$$

Em seguida, precisamos apenas provar que conseguimos fazer o passo indutivo, i.e., se estivermos em uma situação descrita por esses objetos, conseguimos fazer uma transição a uma nova situação que diminui o tamanho de T .

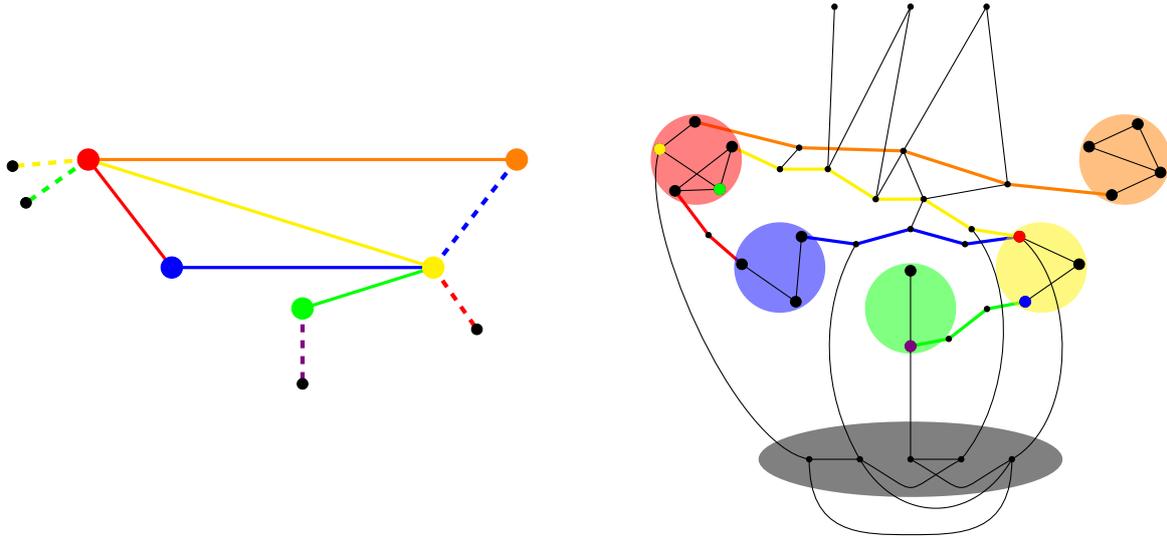


Figura 11: Exemplo dos objetos mencionados. À esquerda, temos o grafo A mais as arestas de X representadas tracejadas (os vértices que são extremidades de arestas de X que não são vértices de A estão representados menores). À direita, temos o grafo G com os H_v 's, P_e 's e p_e 's representados em cores correspondentes e T representado na parte cinza inferior do desenho.

Faremos uma transição inicial para adquirir duas novas propriedades:

- (I) Para toda aresta $e \in X$, temos que p_e é T -vizinho:

Essa propriedade pode ser obtida simplesmente removendo de X as arestas que não satisfazem a propriedade requerida.

Certamente essa operação não viola a propriedade a pois não remove vértices de A .

Quanto às propriedades b e e, ao realizarmos essa operação, os policiais correspondentes às arestas removidas se tornarão ociosos.

As propriedades c e d claramente não são afetadas.

E, como as arestas e removidas de X não tinham seu p_e sendo um T -vizinho, claramente a alteração de P (item g) não viola as propriedades f e h.

- (II) Para todo $v \in V(A)$, temos que H_v possui pelo menos um T -vizinho:

Para obter essa propriedade, primeiramente removemos todas as arestas e de A tais que P_e não possui um T -vizinho. Em seguida, removemos todos os vértices v de A que tornaram-se isolados com a operação anterior. Finalmente, para todo vértice de A que restou e que viola a propriedade (i.e., não há T -vizinho em H_v), escolhemos uma aresta e de A incidente a v e consideramos a menor seção de P_e que contém um vértice de H_v como extremidade e um T -vizinho como extremidade, incluímo-la em H_v e removemo-la de P_e .

Observe que, como T não é vazio (o ladrão está em T) e G é conexo, temos que existe pelo menos um T -vizinho, isso significa que não removemos todos os vértices de A , ou seja, a propriedade a continua válida.

Observe também que se $e \in X$, então pelo menos uma de suas extremidades, digamos v é tal que H_v possui um T -vizinho (a saber, o T -vizinho é p_e), ou seja, a propriedade b não é violada.

Como as operações realizadas ou removem H_v 's ou aumentam H_v 's com caminhos iniciados em H_v , temos que os $G[H_v]$'s restantes continuam conexos (i.e., o item c continua válido).

Também sabemos que os P_e 's ou são removidos ou tem seções de suas extremidades removidas e adicionadas no H_v correspondente, isso significa que a propriedade d continua válida.

Trivialmente, o item e não é afetado pois X não é alterado.

Certamente P é alterado (item g), porém isso não afeta os itens f e h, pois o ladrão não pode mover-se para nenhum vértice em K que não seja T -vizinho (o valor de K pode mudar, mas os vértices removidos de K não são acessíveis a partir de T sem passar por nenhum vértice de P).

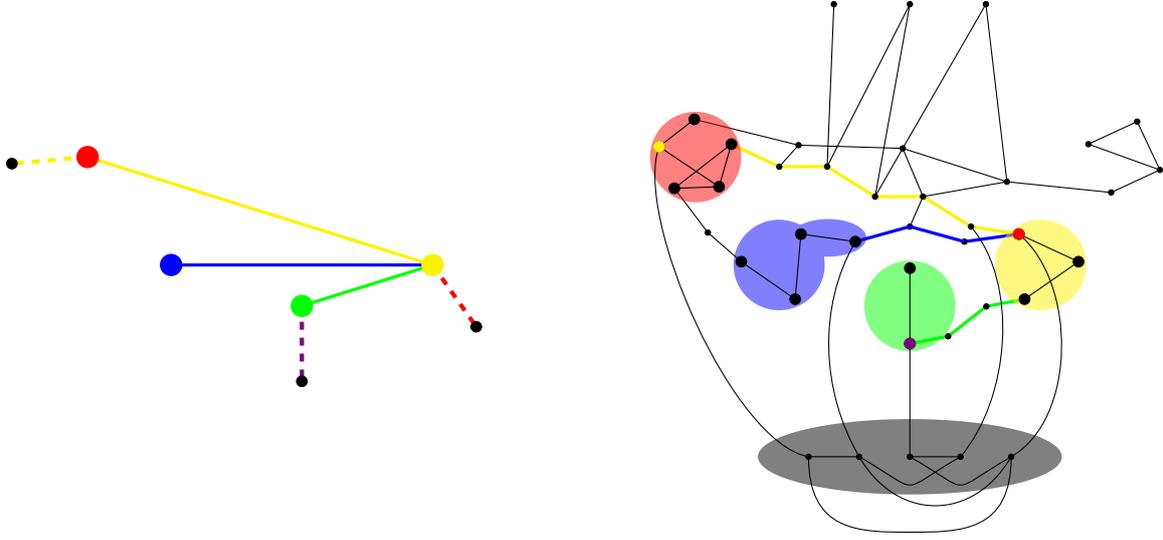


Figura 12: O mesmo exemplo da Figura 11 depois da transformação inicial dos itens I e II. Novamente, à esquerda, temos o grafo A mais as arestas de X representadas tracejadas (os vértices que são extremidades de arestas de X que não são vértices de A estão representados menores). À direita, temos o grafo G com os H_v 's, P_e 's e p_e 's representados em cores correspondentes e T representado na parte cinza inferior do desenho.

Nessa nova situação, observe que $A \subsetneq \tilde{H}$, pois caso contrário, teríamos $G \supset G[V(K) \cup V(T)] \succeq H$ (basta contrair os H_v 's aos vértices de H e T ao vértice h). Como \tilde{H} não possui vértices isolados, isso significa que existe uma aresta, digamos u_1u_2 em $E(\tilde{H}) \setminus E(A)$.

Consideramos então dois casos.

Caso 1. A aresta u_1u_2 não está em X .

Nesse caso, para todo $i \in \{1, 2\}$, escolhemos

$$\begin{aligned} x_i &\in V(H_{u_i}) \text{ um } T\text{-vizinho, se } u_i \in V(A); \\ x_i &\in V(T), \text{ se } u_i \notin V(A). \end{aligned}$$

(Isso é possível devido ao item II.)

Observe agora que $c_{u_1u_2}$ está ocioso, então escolhemos um x_1x_2 -caminho Q em $T \otimes \{x_1, x_2\}$, criamos $H_i = G[\{x_i\}]$ se u_i não pertenciam a $V(A)$, logo Q será um H_1H_2 -caminho e incumbimos $c_{u_1u_2}$ de protegê-lo. Observe que Q tem de passar por pelo menos um vértice de T , isso significa que T diminuirá de tamanho. Ao realizar essa operação, o grafo A não diminui (i.e., o item a se mantém) e o conjunto X não é alterado (i.e., os itens b e e se mantêm).

Ademais, se foram criados novos H_v 's, esses possuem apenas um vértice que não estava em nenhum outro H_w (ou seja, o item c se mantém).

A escolha de Q certamente não viola o item d, pois os vértices de seu interior estão todos em T .

Caso 2. A aresta u_1u_2 está em X .

Nesse caso uma das extremidades da aresta está em A .

Fazemos então a mesma escolha para todo $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} x_i &\in V(H_{u_i}) \text{ um } T\text{-vizinho, se } u_i \in V(A); \\ x_i &\in V(T), \text{ se } u_i \notin V(A); \end{aligned}$$

porém, de forma que pelo menos um dos x_i 's seja $p_{u_1u_2}$; isso é possível pois $p_{u_1u_2} \in H_{u_1} \cup H_{u_2}$ (item e) e devido ao fato de $p_{u_1u_2}$ ser T -vizinho (item I).

Observe agora que $c_{u_1u_2}$ protege apenas $p_{u_1u_2}$, então escolhamos um x_1x_2 -caminho Q em $T \otimes \{x_1, x_2\}$, criamos $H_i = G[\{x_i\}]$ se u_i não pertencia a $V(A)$, logo Q será um H_1H_2 -caminho e incumbimos $c_{u_1u_2}$ de protegê-lo.

Como $c_{u_1u_2}$ já estava protegendo uma das extremidades de Q , pela segunda observação da prova do Lema 4.6, esse policial pode passar a proteger Q sem deixar de proteger $p_{u_1u_2}$ em nenhum momento.

Observe que novamente Q tem de passar por algum vértice de T , isso significa que T diminuirá de tamanho.

Novamente a operação não diminui o grafo A (o item a se mantém).

O conjunto X perde o elemento u_1u_2 , ou seja, ele diminui (i.e., os itens b e e se mantêm).

Mais uma vez, se foram criados novos H_v 's, esses possuem apenas um vértice que não estava em nenhum outro H_w (ou seja, o item c se mantém).

Finalmente, a escolha de Q certamente não viola o item d, pois os vértices de seu interior estão todos em T .

Através dessas construções, conseguimos sucessivamente reduzir a componente conexa em que o ladrão consegue ficar sem ser pego e como o grafo é finito, isso significa que essa estratégia é vencedora. ■

Observação. Na verdade, na prova acima, para podermos afirmar que o Q escolhido é um H_1H_2 -caminho, precisamos considerar apenas o grafo que é acessível pelo ladrão (i.e., algo como T mais os T -vizinhos).

5 Número cromático de grafos densos livres de triângulos

5.1 Resultados iniciais e o Grafo de Kneser

26/11/2013 – Marcelo Tadeu Sales

Estamos interessados em estudar o seguinte problem.

Problema 5.1. Se G é um grafo livre de triângulos ($K_3 \not\subset G$) e $\delta(G) \geq c|V(G)|$ (para uma constante $c > 0$ fixada), então como $\chi(G)$ se comporta?

Nossa intuição poderia erroneamente sugerir que o número cromático de tal grafo seria pequeno pois, para cada vértice, sua vizinhança será um conjunto independente (caso contrário, haveria um triângulo).

O Grafo de Grötzsch é um exemplo de um grafo livre de triângulos, mas com número cromático 4.

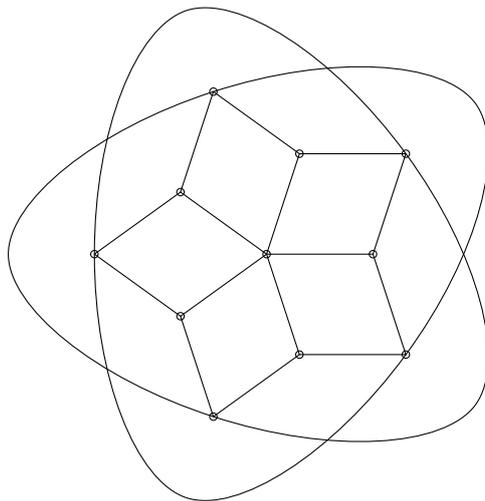


Figura 13: O Grafo de Grötzsch.

A proposição abaixo mostra que nossa intuição inicial estava errada.

Proposição 5.2. Para todo natural k , existe um grafo livre de triângulos com número cromático k .

Demonstração. O resultado para $k \in \{0, 1\}$ é trivial.

Vamos construir uma sequência de grafos $(G_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ recursivamente.

Seja $G_1 = K_2$.

Para $i > 1$, suponha que G_{i-1} já foi construído e seja $V(G_{i-1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Construímos então o grafo G_i fazendo

$$V(G_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, x_1, x_2, \dots, x_n, y\} \text{ (de forma que } |V(G_i)| = 2|V(G_{i-1})| + 1 = 2n + 1\text{);}$$

$$E(G_i) = E(G_{i-1}) \cup \{x_p v_q : p, q \in [n] \text{ e } v_p v_q \in E(G_{i-1})\} \cup \{y x_p : p \in [n]\}.$$

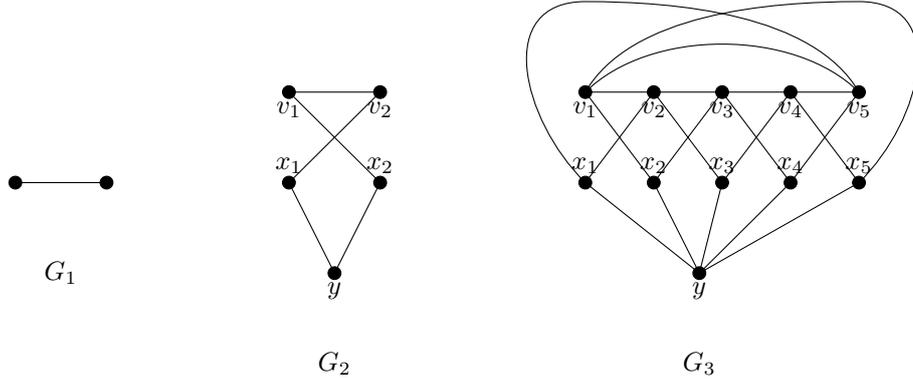


Figura 14: Os grafos G_1 , G_2 e G_3 da sequência construída com a nomenclatura dos vértices herdada da construção indutiva.

Vamos provar agora as seguintes asserções sobre essa sequência:

- i. Para todo $i \in \mathbb{N}^*$, o grafo G_i é livre de triângulos;
- ii. Para todo $i \in \mathbb{N}^*$, o grafo G_i possui número cromático $\chi(G_i) = i + 1$.

A prova será por indução em i .

Trivialmente, o grafo G_1 é livre de triângulos e possui número cromático $\chi(G_1) = 2$.

Seja $i > 1$ e suponha, por hipótese indutiva, que as asserções sejam válidas para $i - 1$.

Suponha por absurdo que G_i possui um triângulo. Considerando a nomenclatura da construção de G_i , como não há arestas da forma $x_p x_q$ nem da forma $y v_p$ e não há triângulos da forma $v_p v_q v_r$ (pela hipótese indutiva), esse triângulo tem de ser da forma $v_p x_q v_r$.

Como $v_p x_q, x_q v_r \in E(G_i)$, então temos $v_p v_q, v_q v_r \in E(G_{i-1})$

Por outro lado, como $v_p v_r \in E(G_i)$, então temos $v_p v_r \in E(G_{i-1})$, mas isso significa que $v_p v_q v_r$ é um triângulo de G_{i-1} , que é uma contradição com a hipótese indutiva.

Vamos mostrar agora que $\chi(G_i) \leq i + 1$.

A hipótese indutiva nos fornece uma coloração própria $g: V(G_{i-1}) \rightarrow [i]$ de G_{i-1} com i cores.

Considere a seguinte coloração dos vértices de G_i :

$$h: V(G_i) \longrightarrow [i + 1]$$

$$w \longmapsto \begin{cases} g(v_i), & \text{se } w = v_i \text{ ou } w = x_i; \\ i + 1, & \text{se } w = y. \end{cases}$$

Observe que h é coloração própria de G_i , pois há apenas três tipos de arestas em G_i :

1. Para arestas da forma $v_i v_j$, temos $h(v_i) = g(v_i) \neq g(v_j) = h(v_j)$, pois $v_i v_j \in E(G_{i-1})$;
2. Para arestas da forma $x_i v_j$, temos $h(x_i) = g(v_i) \neq g(v_j) = h(v_j)$, pois $v_i v_j \in E(G_{i-1})$;
3. Para arestas da forma $y x_i$, temos $h(y) = i + 1 \neq g(v_i) = h(x_i)$, pois g usa apenas i cores.

Portanto $\chi(G_i) \leq i + 1$.

Vamos mostrar agora que $\chi(G_i) \geq i + 1$, que concluirá a prova.

Suponha por absurdo que $\chi(G_i) \leq i$ e seja h uma coloração própria de G_i utilizando apenas i cores.

Seja $c = h(y)$ a cor do vértice y de G_i . Observe que, como y é adjacente a todos os x_i 's, temos que a cor c não ocorre nos x_i 's.

Considere a seguinte coloração dos vértices de G_{i-1} :

$$g: \begin{array}{l} V(G_{i-1}) \longrightarrow [i] \setminus \{c\} \\ v_i \longmapsto \begin{cases} h(v_i), & \text{se } h(v_i) \neq c; \\ h(x_i), & \text{se } h(v_i) = c. \end{cases} \end{array}$$

Vamos mostrar que essa é uma coloração própria de G_{i-1} .

Se $v_i v_j \in E(G_{i-1})$ e $c \notin \{h(v_i), h(v_j)\}$, então $g(v_i) = h(v_i) \neq h(v_j) = g(v_j)$, pois $v_i v_j \in E(G_i)$.

Por outro lado, se $v_i v_j \in E(G_{i-1})$ e $c \in \{h(v_i), h(v_j)\}$, então sem perda de generalidade, podemos assumir que $c = h(v_i)$. Nesse caso, como $v_i v_j \in E(G_i)$, temos $c \neq h(v_j)$. Finalmente, temos $g(v_i) = h(x_i) \neq h(v_j) = g(v_j)$, pois $x_i v_j \in E(G_i)$.

Portanto $\chi(G_{i-1}) \leq i - 1$, o que é uma contradição. ■

Observação. O grafo G_3 da sequência construída é isomorfo ao Grafo de Grötzsch apresentado anteriormente.

Definimos agora o Grafo de Kneser.

Definição 5.3. O Grafo de Kneser, denotado por $\text{Kn}(n, k)$ é definido a partir de

$$\begin{aligned} V(\text{Kn}(n, k)) &= \binom{[n]}{k} \\ E(\text{Kn}(n, k)) &= \{UV : U \cap V = \emptyset\} \end{aligned}$$

Observação. O grafo $\text{Kn}(5, 2)$ é isomorfo ao Grafo de Petersen.

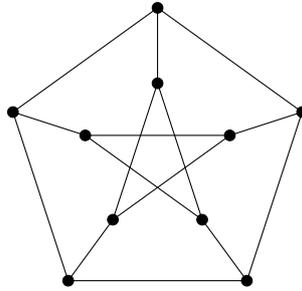


Figura 15: O Grafo de Petersen.

Note que $\text{Kn}(n, k)$ é regular, pois todos seus vértices possuem grau $\binom{n-k}{k}$.

Note também que, se $k > n/3$, então $\text{Kn}(n, k)$ é livre de triângulos (pois três conjuntos de tamanho k em $[n]$ terão de se intersectar).

Ademais, note que a coloração g tal que $g(U) = \min U$ para todo $U \in V(\text{Kn}(n, k))$ é uma coloração própria de $\text{Kn}(n, k)$ (pois $UV \in E(\text{Kn}(n, k))$ se e somente se $U \cap V = \emptyset$). Portanto $\chi(\text{Kn}(n, k)) \leq n - k + 1$.

A proposição abaixo melhora um pouco essa cota para o número cromático do Grafo de Kneser.

Proposição 5.4. Para todos naturais n e k , temos $\chi(\text{Kn}(n, k)) \leq n - 2k + 2$.

Demonstração. Considere a coloração

$$g: \begin{array}{l} V(\text{Kn}(n, k)) \longrightarrow [n - 2k + 2] \\ U \longmapsto \min(U \cup \{n - 2k + 2\}) \end{array}$$

Observe que, se $UV \in E(\text{Kn}(n, k))$, então temos $U \cap V = \emptyset$, daí $\min U \cup V < n - 2k + 2$, donde segue que $g(U) \neq g(V)$.

Portanto g é uma coloração própria de $\text{Kn}(n, k)$. ■

O teorema abaixo, devido a Lovász, mostra que esse é, na verdade, o valor exato do número cromático do Grafo de Kneser.

Teorema 5.5 (Lovász '78 [18]). Para todos naturais n e k , temos $\chi(\text{Kn}(n, k)) \geq n - 2k + 2$.

Agora estamos em condições de provar o seguinte resultado sobre números cromáticos de grafos densos.

Teorema 5.6. Para toda constante $c \in]0, 1/3[$ e para todo natural χ , existe um grafo G livre de triângulos tal que $\delta(G) \geq c|V(G)|$ e $\chi(G) \geq \chi$.

Demonstração. Considere o grafo $G(n, k, t)$ definido a partir de

$A, (B \times [n]), C$ conjuntos 2-a-2 disjuntos com

$$|A| = tn;$$

$$|B| = 2t;$$

$$C = V(\text{Kn}(n, k)) = \binom{[n]}{k}.$$

$$V(G(n, k, t)) = A \cup (B \times [n]) \cup C;$$

$$E(G(n, k, t)) = \{a(b, i) : a \in A, b \in B \text{ e } i \in [n]\} \cup \{(b, i)U : b \in B, i \in [n], U \in C \text{ e } i \in U\} \cup E(\text{Kn}(n, k)).$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} G(n, k, t)[C] &= \text{Kn}(n, k); \\ G(n, k, t)[A \cup (B \times [n])] &\cong K_{tn, 2tn}; \\ |V(G(n, k, t))| &= 3nt + \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Escolhemos agora $\varepsilon \in]0, 1/6[$ arbitrário e impomos $k = (1/2 - \varepsilon)n$ (de forma que $k/n < 1/3$).

Observe agora que, para todo vértice v de $G(n, k, t)$, temos

$$v \in A \implies \frac{d_G(v)}{|V(G(n, k, t))|} = \frac{2nt}{3nt + \binom{n}{k}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{2}{3};$$

Além disso, sabemos que $\chi(G(n, k, t)) \geq \chi(\text{Kn}(n, k)) = n - 2k + 2 = 2\varepsilon n + 2$.

Portanto, podemos escolher ε de modo que $(1 - 2\varepsilon)/3 > c$ (pois $c < 1/3$) e para n e t grandes o suficiente (com $t \gg n$), o grafo $G(n, k, t)$ satisfará as propriedades requeridas.

(A ordem de escolha é $\varepsilon = \varepsilon(c)$, $n = n(\varepsilon)$, $k = (1/2 - \varepsilon)n$ e $t = t(n)$.) ■

É natural se perguntar o que acontece se exigirmos $\delta(G) \geq c|V(G)|$ com $c > 1/3$. O teorema trata de um caso que força o grafo a ser bipartido.

Teorema 5.7. Se G é um grafo livre de triângulos tal que $\delta(G) > 2|V(G)|/5$, então $\chi(G) \leq 2$.

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo maximal tal que $|V(G)| = n$, $\delta(G) > 2n/5$ e $G \not\cong K_3$.

Suponha por absurdo que G não é bipartido, então G possui um circuito ímpar.

Como G é maximal, então G possui um C_5 . Seja X o conjunto dos vértices de um C_5 .

Observe agora que, como G é livre de triângulos, cada vértice de G é adjacente a no máximo 2 vértices de X , donde segue que

$$\sum_{x \in X} d_G(x) \leq 10 + 2(n - 5) = 2n.$$

Por outro lado, temos

$$\sum_{x \in X} d_G(x) > \sum_{x \in X} \frac{2n}{5} = 2n,$$

o que é um absurdo. ■

5.2 O Teorema de Thomassen

03/12/2013 – Marcelo Tadeu Sales

Nosso próximo objetivo será provar o seguinte teorema.

Teorema 5.8 (Thomassen '02 [21]). Para todo $c > 1/3$, existe $f_c > 0$ tal que se G é um grafo livre de triângulos com $\delta(G) \geq c|V(G)|$, então $\chi(G) \leq f_c$.

A prova é uma generalização do Teorema 5.7 através do conceito de pentágono generalizado definido abaixo.

Definição 5.9. Um grafo G é dito um *pentágono generalizado* se existe uma sequência de grafos G_0, G_1, \dots, G_n tal que

1. O grafo G_0 é isomorfo a C_5 ;
2. O grafo G_n é isomorfo a G ;
3. Para todo $i \in [n]$, temos
 - a. Temos $V(G_i) = V(G_{i-1}) \cup \{x, y, w\}$, com x, y e w três novos vértices (distintos);
 - b. Existe um $v \in V(G_{i-1})$ tal que

$$E(G_i) = E(G_{i-1}) \cup \{vx, xy, yw\} \cup \{wu : vu \in E(G_{i-1})\}.$$

Se $G \not\cong C_5$ (i.e., temos $n > 0$), diremos também que qualquer grafo isomorfo a G_{n-1} é um pentágono generalizado antecessor a G .

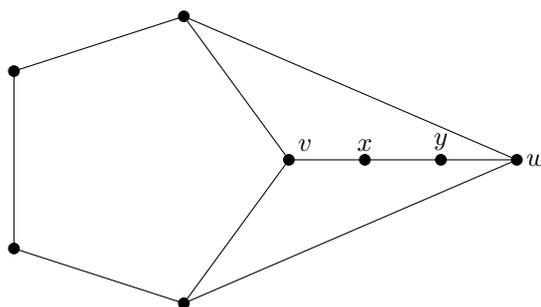


Figura 16: O único (a menos de isomorfismo) pentágono generalizado com 8 vértices.

Observe primeiramente que todo pentágono generalizado P satisfaz $|V(P)| \equiv 2 \pmod{3}$. Apresentamos agora algumas propriedades de pentágonos generalizados.

Proposição 5.10. Seja P um pentágono generalizado com $|V(P)| = 3k - 1$. Então temos as seguintes propriedades.

- (i) O grafo P é livre de triângulos;
- (ii) Temos $\alpha(P) = k$;
- (iii) O grafo P é α -dominado (i.e., para todo conjunto independente I máximo de P , existe um vértice v tal que $N_P(v) \subset I$);
- (iv) Se P é subgrafo gerador de um grafo H livre de triângulos, então $\Delta(H) \leq k$.

Demonstração. Provaremos as asserções por indução em k .

Observe primeiramente que, para $k = 2$, o grafo P é isomorfo a C_5 , logo os itens i, ii e iii são trivialmente satisfeitos. Ademais, como a adição de qualquer aresta a C_5 forma um triângulo, temos que o item iv é satisfeito (pois $\Delta(C_5) = 2$).

Suponha então $k > 2$ e seja P' um pentágono generalizado antecessor a P e considere as definições de x, y, v e w como na construção de P a partir de P' .

Por hipótese de indução P' satisfaz todas as propriedades.

Observe que se P possui um triângulo T , então T possui pelo menos dois vértices de $\{v, w, x, y\}$ (se possuir apenas v , então $T \subset P'$; se possuir apenas w , então $(T \cup \{v\}) \setminus \{w\}$ será triângulo em P' e x e y só possuem vizinhos no conjunto mencionado). Porém isso é um absurdo, já que $vw \notin E(P)$, $N_P(x) = \{v, y\}$ e $N_P(y) = \{x, w\}$.

Portanto P é livre de triângulos (item i).

Seja I' um conjunto independente máximo em P' , então claramente $I' \cup \{y\}$ é independente em P , logo $\alpha(P) \geq \alpha(P') + 1 = k$.

Suponha que $\alpha(P) \geq k + 1$ e seja I um conjunto independente máximo em P . Observe que $|I \cap \{x, y, w\}| \geq 2$ (caso contrário $I \setminus \{x, y, w\}$ seria um conjunto independente em P' de tamanho k), logo $x, w \in I$. Mas então temos que $(I \cup \{v\}) \setminus \{x\}$ é um conjunto independente de P' de tamanho k , o que é um absurdo.

Portanto $\alpha(P) = k$ (item ii).

Seja então I um conjunto independente máximo arbitrário em P .

Observe que a construção de P a partir de P' é simétrica ao trocarmos (v, x) por (w, y) , então basta considerar os seguintes casos.

Caso 1. $w \in I$ e $x \notin I$.

Então temos $y \notin I$ e $v \in I$. Seja $a \in V(P')$ tal que $N_{P'}(a) \subset I \setminus \{w\}$. Nesse caso, sabemos que $a \neq v$, logo $N_P(a) \subset I$.

Caso 2. $w \in I$ e $x \in I$.

Então temos $v, y \notin I$. E sabemos que $N_P(y) \subset I$.

Caso 3. $w \notin I$ e $x \in I$.

Então temos $v, y \notin I$. Seja $a \in V(P')$ tal que $N_{P'}(a) \subset I \setminus \{x\}$.

Se $a \neq v$, então trivialmente $N_P(a) \subset I$. Por outro lado, se $a = v$, então $N_{P'}(a) = N_P(a) \cup \{x\} \subset I$.

Portanto P é α -dominado (item iii).

Observe finalmente que se P é subgrafo gerador de um grafo H livre de triângulos, então para todo vértice v de H temos que $N_H(v)$ é independente em H , logo $\Delta(H) \leq \alpha(H) \leq \alpha(P) = k$ (item iv). ■

Estamos agora em condições de apresentar a prova do Teorema 5.8.

Demonstração do Teorema de Thomassen. Seja G um grafo livre de K_3 com $\delta(G) \geq c|V(G)|$ maximal e seja $n = |V(G)|$. Suponha que G não é bipartido (caso contrário, não há o que fazer). Então G possui um C_5 .

Seja P um pentágono generalizado contido em G de tamanho máximo e sejam $H = G[V(P)]$ e k tal que $|V(P)| = 3k - 1$.

Observe que

$$\begin{aligned} cn(3k - 1) &\leq \sum_{v \in V(H)} d_G(v) = \left(\sum_{w \in V(H)} d_H(w) \right) + \left(\sum_{w \in V(G) \setminus V(H)} |N_G(w) \cap V(H)| \right) \\ &\leq \left(\sum_{w \in V(H)} k \right) + \left(\sum_{w \in V(G) \setminus V(H)} \alpha(H) \right) \leq nk. \end{aligned}$$

Logo temos $(3k - 1)c \leq k$ e a seguinte cadeia de equivalências

$$(3k - 1)c \leq k \iff (3k - 1)3c \leq 3k - 1 + 1 \iff (3k - 1)(3c - 1) \leq 1 \iff 3k - 1 \leq \frac{1}{3c - 1}.$$

Sejam então $A = \{v \in V(G) \setminus V(H) : |N_G(v) \cap V(H)| = k\}$ e $B = V(G) \setminus (V(H) \cup A)$ e observe que para todo vértice v de B , temos que $N_G(v) \cap V(H)$ possui cardinalidade menor ou igual a $k - 1$ (pois é um conjunto independente em H e $v \notin A$).

Enumeremos os elementos de $\binom{V(H)}{k}$ como S_1, S_2, \dots, S_N , onde $N = \binom{3k-1}{k}$ e particionemos o conjunto A tomando, para todo $i \in [N]$, o conjunto $A_i = \{v \in A : N_G(v) \cap V(H) = S_i\}$.

Observe que os A_i 's são dois-a-dois disjuntos e para todo $i \in [N]$, o conjunto A_i é independente em G (pois está contido na vizinhança de um vértice).

Vamos agora estimar o tamanho de B . Observe que

$$\begin{aligned} cn(3k - 1) &\leq \sum_{v \in V(H)} d_G(v) = \left(\sum_{w \in V(H)} d_H(w) \right) + \left(\sum_{w \in A} |N_G(w) \cap V(H)| \right) + \left(\sum_{w \in B} |N_G(w) \cap V(H)| \right) \\ &\leq \left(\sum_{w \in V(H)} k \right) + \left(\sum_{w \in A} k \right) + \left(\sum_{w \in B} k - 1 \right) = nk - |B|, \end{aligned}$$

donde segue que $|B| \leq nk - (3k - 1)cn = n(c - k(3c - 1))$.

Vamos mostrar agora que, para todo vértice v de B , existe um vértice w em A tal que $vw \in E(G)$. Suponha que não, então temos

$$cn \leq d_G(v) = |N_G(v) \cap V(H)| + |N_G(v) \cap B| \leq k - 1 + |B| - 1 < k + |B| \leq k + n(c - k(3c - 1)).$$

Então temos $0 < k + nk(3c - 1)$, donde segue que $n(3c - 1) < 1$, o que é um absurdo para n suficientemente grande.

Observação. É suficiente provar o teorema para $n \geq n_0$ para um n_0 fixo, pois $\chi(G) \leq |V(G)|$.

Particionemos o conjunto B tomando, para todo $i \in [N]$, o conjunto

$$B_i = \{v \in B : N_G(v) \cap A_i \neq \emptyset \text{ e, para todo } j < i, N_G(v) \cap A_j = \emptyset\}.$$

Afirmamos agora que se $v, w \in A_i$, então $N_G(v) = N_G(w)$.

Suponha que não, então sem perda de generalidade, existe $y \in N_G(w) \setminus N_G(v)$.

Pela maximalidade de G , sabemos que existe $x \in N_G(v) \cap N_G(y)$.

Observe que $xw \notin E(G)$, caso contrário $G[\{x, y, w\}] \cong K_3$.

Como v e w pertencem a A_i , temos que $N_G(v) \cap V(H) = S_i = N_G(w) \cap V(H)$, logo $x, y \notin V(H)$.

Seja $I = N_G(v) \cap V(H)$ e observe que I é independente em H e portanto em P . Então existe um vértice a de P tal que $N_P(a) \subset I$, isso significa que $(V(H) \setminus \{a\}) \cup \{v\}$ possui uma cópia de P .

Mas então o grafo $G[(V(H) \setminus \{a\}) \cup \{v, x, y, w\}]$ possui um pentágono generalizado maior do que P o que contraria sua escolha.

Portanto, se $v, w \in A_i$, então $N_G(v) = N_G(w)$.

Observe agora que, para todo $i \in [N]$, o conjunto B_i é independente (pois existe um vértice de A_i que é adjacente a todos os vértices de B_i).

Logo $\chi(G) \leq 2\binom{3k-1}{k} + 3k - 1$ (basta colorir cada A_i de uma cor distinta, cada B_i de um cor distinta e cada vértice de H de uma cor distinta) e como $3k - 1 \leq 1/(3c - 1)$ a prova está completa. ■

5.3 Outros resultados

Em 1973, Erdős e Simonovitz conjecturaram que não existiria um grafo G livre de triângulos com $\chi(G) \leq 4$ e $\delta(G) > n/3$, mas Häggkvist [13] provou em 1981 que ao tomar o grafo de Grötzsch (Figura 13) e substituir cada vértice de grau 3 por dois vértices, cada vértice de grau 4 por três vértices, o vértice restante por quatro vértices e cada aresta por um grafo bipartido completo entre as partes geradas por

suas extremidades, obtemos um grafo de ordem 29, que é 10-regular e possui número cromático 4 (como o grafo de Grötzsch), provando que a Conjectura de Erdős e Simonovitz era falsa.

Em 1995, Jin [16] provou que todo grafo G de ordem n livre de triângulos e com $\delta(G) > 29n/30$ pode ser 3-colorido propriamente.

Finalmente, Brandt e Thomassé apresentaram uma prova [4] de que todo grafo G de ordem n livre de triângulos e com $\delta(G) > n/3$ pode ser 4-colorido.

A Soluções dos exercícios resolvidos

Exercício resolvido. (1.23) Se G é um grafo (V, W) bipartido com $|V| = n$, $|W| = m$ e $|E(G)| = M$, então

$$\sum_{w \in W} \binom{d_G(w)}{2} \geq m \binom{M/m}{2}.$$

Demonstração 1. Considere a função $f : [1, +\infty[\ni x \mapsto x(x-1)/2 \in \mathbb{R}$ e observe que f é convexa. Logo, pela desigualdade de Jensen, temos

$$\sum_{w \in W} \binom{d_G(w)}{2} = m \frac{1}{m} \sum_{w \in W} f(d_G(w)) \geq m f\left(\frac{1}{m} \sum_{w \in W} d_G(w)\right) = m f\left(\frac{M}{m}\right) = m \binom{M/m}{2}. \blacksquare$$

Demonstração 2. Observe que

$$\sum_{w \in W} \binom{d_G(w)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{w \in W} d_G(w)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{w \in W} d_G(w) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{w \in W} d_G(w)^2 \right) - \frac{M}{2}.$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz, temos

$$\sum_{w \in W} d_G(w)^2 \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{w \in W} d_G(w) \right)^2 = \frac{M^2}{m}.$$

Portanto

$$\sum_{w \in W} \binom{d_G(w)}{2} \geq \frac{M^2}{2m} - \frac{M}{2} = m \left(\frac{(M/m)^2}{2} - \frac{M/m}{2} \right) = m \binom{M/m}{2}. \blacksquare$$

Exercício resolvido. (3.6) Se G é um grafo r -regular então todos os autovalores de M_G são menores ou iguais a r .

Demonstração. Suponha que $A = (a_w)_{w \in V(G)}$ é um autovetor associado ao autovalor λ de $M_G = (m_{vw})_{v, w \in V(G)}$ e seja $v \in V(G)$ tal que $a_w \leq a_v$ para todo vértice w de G .

Sem perda de generalidade, assumimos que $a_v > 0$ (pois $A \neq 0$ e se $a_v = 0$, podemos considerar $-A$ como autovetor).

Como $M_G A = \lambda A$, temos $\lambda a_v = \sum_{w \in V} m_{vw} a_w \leq \sum_{w \in V} m_{vw} a_v = a_v \sum_{w \in V} m_{vw} = a_v r$.

Portanto $\lambda \leq r$. \blacksquare

Exercício resolvido. (3.9) Prove que o produto tensorial não é comutativo, mas é associativo.

Demonstração. A não comutatividade pode ser observada diretamente de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para provar a associatividade, usaremos uma notação um pouco mais conveniente para as matrizes.

Sejam $A = (a[i, j])_{m \times n}$, $B = (b[i, j])_{p \times q}$ e $C = (c[i, j])_{r \times s}$ três matrizes reais arbitrárias indexadas a partir do número 0 e observe que a entrada (i, j) da matriz $A \otimes B$ é dada por $a[\lfloor i/p \rfloor, \lfloor j/q \rfloor] b[i \bmod p, j \bmod q]$.

Daí, para todos naturais i e j com $i < mpr$ e $j < nqs$, temos

$$((A \otimes B) \otimes C)[i, j] = a \left[\left\lfloor \frac{i}{pr} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{j}{qs} \right\rfloor \right] b \left[\left\lfloor \frac{i}{r} \right\rfloor \bmod p, \left\lfloor \frac{j}{s} \right\rfloor \bmod q \right] c \left[i \bmod r, j \bmod s \right];$$

$$\begin{aligned}
& (A \otimes (B \otimes C)) [i, j] \\
&= a \left[\left[\frac{i}{pr} \right], \left[\frac{j}{qs} \right] \right] b \left[\left[\frac{i \bmod (pr)}{r} \right], \left[\frac{j \bmod (qs)}{s} \right] \right] c \left[(i \bmod (pr)) \bmod r, (j \bmod (qs)) \bmod s \right] \\
&= a \left[\left[\frac{i}{pr} \right], \left[\frac{j}{qs} \right] \right] b \left[\left[\frac{i}{r} \right] \bmod p, \left[\frac{j}{s} \right] \bmod q \right] c \left[i \bmod r, j \bmod s \right]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício resolvido. (3.10) Sejam A , B , C e D matrizes com entradas reais de ordens $m \times n$, $q \times r$, $n \times p$ e $r \times s$ respectivamente. Prove que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$.

Demonstração. Novamente usaremos a notação do exercício anterior.

Para todos naturais i e j com $i < mq$ e $j < ps$, temos

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)(C \otimes D)[i, j] &= \sum_{k=0}^{nr} (A \otimes B)[i, k](C \otimes D)[k, j] \\
&= \sum_{k=0}^{nr-1} A \left[\left[\frac{i}{q} \right], \left[\frac{k}{r} \right] \right] B \left[i \bmod q, k \bmod r \right] C \left[\left[\frac{k}{r} \right], \left[\frac{j}{s} \right] \right] D \left[k \bmod r, j \bmod s \right] \\
&= \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{b=0}^{r-1} A \left[\left[\frac{i}{q} \right], \left[\frac{ar+b}{r} \right] \right] B \left[i \bmod q, ar+b \bmod r \right] C \left[\left[\frac{ar+b}{r} \right], \left[\frac{j}{s} \right] \right] D \left[ar+b \bmod r, j \bmod s \right] \\
&= \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{b=0}^{r-1} A \left[\left[\frac{i}{q} \right], a \right] B \left[i \bmod q, b \right] C \left[a, \left[\frac{j}{s} \right] \right] D \left[b, j \bmod s \right] \\
&= \left(\sum_{a=0}^{n-1} A \left[\left[\frac{i}{q} \right], a \right] C \left[a, \left[\frac{j}{s} \right] \right] \right) \left(\sum_{b=0}^{r-1} B \left[i \bmod q, b \right] D \left[b, j \bmod s \right] \right) \\
&= (AC) \left[\left[\frac{i}{q} \right], \left[\frac{j}{s} \right] \right] (BD) \left[i \bmod q, j \bmod s \right] = (AC \otimes BD)[i, j]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício resolvido. (3.11) Suponha que v é autovetor de uma matriz A associado ao autovalor λ e w é autovetor de uma matriz B associado ao autovalor μ . Prove que $v \otimes w$ é autovetor de $A \otimes B$ associado ao autovalor $\lambda\mu$ (os autovetores estão considerados como matrizes coluna multiplicadas à direita).

Demonstração. Do exercício anterior, temos

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = (Av \otimes Bw) = (\lambda v \otimes \mu w) = \lambda\mu(v \otimes w).$$

Isso significa que $(v \otimes w)$ é autovetor de $(A \otimes B)$ associado ao autovalor $\lambda\mu$. ■

Exercício resolvido. (3.15) Se $c > 0$ e $p \in \mathbb{R}[x]$ possui grau n , então a função $f(x) = p(x) - c^x$ possui no máximo $n + 1$ raízes (contando multiplicidade).

Demonstração. Provamos por indução em n .

O caso $n = 0$ é trivial pois $c^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponha que $n > 0$ e que a afirmação seja verdadeira polinômios de grau $n - 1$.

Observe que $f'(x) = p'(x) - c^x \ln c$, ou seja, temos $f'(x) = 0$ se e somente se $p'(x)/\ln c - c^x = 0$.

Como $p'(x)/\ln c$ é um polinômio de grau $n - 1$, sabemos pela hipótese de indução que $f'(x)$ possui no máximo n raízes (contando multiplicidade). Isso significa que $f(x)$ possui no máximo $n + 1$ raízes (contando multiplicidade). ■

B Notação

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

$$f(n) \sim g(n) \text{ significa } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ significa } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < +\infty$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \text{ significa } g(n) = O(f(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ significa } f(n) = O(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) \asymp g(n) \text{ significa } f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \text{ significa } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \text{ significa } g(n) = o(f(n))$$

$$\pi(n) = |\{a \in [n] : a \text{ é primo}\}|, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

$\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x , para $x \in \mathbb{R}$

$$\lceil x \rceil = - \lfloor -x \rfloor$$

$$\binom{A}{k} = \{B \subset A : |B| = k\}, \text{ para } A \text{ um conjunto}$$

$n \mid m$ significa n divide m , para $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$

$$N_G(v) = \{w \in V(G) : vw \in E(G)\}, \text{ para } G \text{ um grafo e } v \in V(G)$$

$$d_G(v) = |N_G(v)|, \text{ para } G \text{ um grafo e } v \in V(G)$$

$$N_G(X) = \bigcup_{x \in X} N_G(x), \text{ para } G \text{ um grafo e } X \subset V(G)$$

$$\delta_G(X) = \{xy \in E(G) : x \in X\}, \text{ para } G \text{ um grafo e } X, Y \subset V(G)$$

$$\delta_G(X, Y) = \{xy \in E(G) : x \in X \text{ e } y \in Y\}, \text{ para } G \text{ um grafo e } X, Y \subset V(G)$$

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}, \text{ para } G \text{ um grafo}$$

$$\Delta(G) = \sup\{d_G(v) : v \in V(G)\}, \text{ para } G \text{ um grafo}$$

Índice de palestrantes

Lucas Colucci Cavalcante de Souza

15/10/2013, 10

22/10/2013, 14

05/11/2013, 22

12/11/2013, 27

Marcelo Tadeu Sales

26/11/2013, 38

03/12/2013, 42

Thiago da Silva Pinheiro

19/11/2013, 32

Yoshiharu Kohayakawa

27/08/2013, 2

10/09/2013, 5

01/10/2013, 7

29/10/2013, 18

Índice de nomes

Ahlswede, 18
Andreae, 34

Blais, 13
Brandt, 45

Cauchy, 46
Colucci, 10, 14, 15, 22, 27

Dinur, 1, 13, 20, 22, 27

Erdős, 1–3, 5–7, 9, 11, 18, 25, 44, 45

Frankl, 18
Friedgut, 1, 13, 20, 22, 27
Fubini, 27

Grötzsch, 38, 40, 44, 45
Gyárfás, 15

Häggkvist, 44
Hajnal, 9
Hoffman, 20–23

Jensen, 46
Jin, 45

Katona, 25
Khachatrian, 18
Klein, 1, 4, 7
Kneser, 1, 38, 40, 41
Ko, 18, 25
Kohayakawa, 2, 5, 7, 18

Lovász, 11, 41

Moshkovitz, 9

Petersen, 40
Pinheiro, 32

Rado, 18, 25
Ramsey, 4, 5, 7–9

Safra, 1, 13, 20, 22, 27
Sales, 38, 42
Schwarz, 46
Seidenberg, 5
Shapira, 9
Sidon, 5–7
Simonovitz, 44, 45
Szekeres, 5, 7, 9

Thomassé, 45
Thomassen, 1, 42, 43

Weinstein, 13

Yoshida, 13

Referências

- [1] R. Ahlswede and L. H. Khachatrian, *The complete intersection theorem for systems of finite sets*, European J. Combin. **18** (1997), no. 2, 125–136. 3.3
- [2] T. Andreae, *On a pursuit game played on graphs for which a minor is excluded*, J. Combin. Theory Ser. B **41** (1986), no. 1, 37–47. 4.10
- [3] E. Blais, A. Weinstein, and Y. Yoshida, *Semi-strong coloring of intersecting hypergraphs*, (2012). 2.9, 2.10
- [4] S. Brandt and S. Thomassé, *Dense triangle-free graphs are four-colorable: A solution to the Erdős–Simonovitz problem.*, J. Combin. Theory Ser. B, to be published, available at <http://perso.ens-lyon.fr/stephan.thomasse/liste/vega11.pdf>. 5.3
- [5] L. Colucci and A. Gyárfás, *Coloring 2-intersecting hypergraphs*, (2013). 2.14
- [6] I. Dinur and S. Safra, *On the hardness of approximating minimum vertex cover*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), no. 1, 439–485. 2.8, 3.2, 3.4
- [7] P. Erdős, C. Ko, and R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **12** (1961), 313–320. 3.1, 3.3
- [8] P. Erdős and L. Lovász, *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1975, pp. 609–627. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. 2.3
- [9] P. Erdős and G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. **2** (1935), 463–470. 1.15, 1.18, 1.30
- [10] P. Erdős, *Note on Sequences of Integers No One of Which is Divisible By Any Other*, J. London Math. Soc. **S1-10** (1938), no. 1, 126. 1.5
- [11] E. Friedgut, *On the measure of intersecting families, uniqueness and stability*, Combinatorica **28** (2008), no. 5, 503–528. 2.8, 3.2, 3.4
- [12] R. Graham, B. Rothschild, and J. Spencer, *Ramsey theory*, Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, 1990. 1.4
- [13] R. Häggkvist, *Odd cycles of specified length in nonbipartite graphs*, Graph theory (Cambridge, 1981), North-Holland Math. Stud., vol. 62, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 89–99. 5.3
- [14] A. J. Hoffman, *The eigenvalues of the adjacency matrix of a graph*, Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1967), Univ. North Carolina Press, Chapel Hill, N.C., 1969, pp. 578–584. 3.7
- [15] A. J. Hoffman, *On eigenvalues and colorings of graphs*, Graph Theory and its Applications (Proc. Advanced Sem., Math. Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1969), Academic Press, New York, 1970, pp. 79–91. 3.7
- [16] G. P. Jin, *Triangle-free four-chromatic graphs*, Discrete Math. **145** (1995), no. 1-3, 151–170. 5.3
- [17] G. O. H. Katona, *A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem*, J. Combinatorial Theory Ser. B **13** (1972), 183–184. 3.3
- [18] L. Lovász, *Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), no. 3, 319–324. 5.5
- [19] G. Moshkovitz and A. Shapira, *Ramsey theory, integer partitions and a new proof of the Erdős–Szekeres theorem*, (2012). 1.31
- [20] A. Seidenberg, *A simple proof of a theorem of Erdős and Szekeres*, J. London Math. Soc. **34** (1959), 352. 1.2

- [21] C. Thomassen, *On the chromatic number of triangle-free graphs of large minimum degree*, *Combinatorica* **22** (2002), no. 4, 591–596. 5.8