

PICME/IME/USP COMBINATÓRIA

NOTAS - 2009

YOSHIHARU KOHAYAKAWA E GUILHERME MOTA (IME/USP)

1. GRAFOS E NÚMERO CROMÁTICO

2/6/2009

1.1. Um *grafo* $G = (V, E)$ é a estrutura composta por um conjunto de *vértices* V e um conjunto de *arestas* E , onde uma aresta é um par não ordenado de vértices $\{x, y\}$.

1.2. O *número cromático* $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de *cores* tal que é possível colorir *propriamente* os vértices de G , isto é, de forma que vértices adjacentes devem receber cores diferentes.

1.3. O *grau* de um vértice v , denotado $\deg(v)$, é o número vizinhos de v , isto é, o número de vértices adjacentes a v .

1.4. Denotamos por $\delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V\}$ o grau mínimo de G e $\Delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V\}$ o grau máximo de G .

1.5. Uma questão importante sobre números cromáticos, conhecida como o **Problema das 4 cores**, foi proposta por Guthrie (1852) e respondida por Appel e Haken (1977) [1].

Teorema 1 (Teorema das 4 cores (Appel e Haken '77)). *Todo grafo planar pode ser colorido propriamente com 4 cores.*

A demonstração dada por Appel e Haken faz uso do computador e não pode ser verificada sem ele, de modo que não é uma prova completamente satisfatória. Para saber mais sobre a história do problema, detalhes de provas e generalizações, veja a página do pesquisador Robin Thomas:

<http://people.math.gatech.edu/~thomas/>

1.6. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

0. Quais grafos G são tais que $\chi(G) \geq 3$? A resposta é simples:

(i) $\chi(C^{2k+1}) = 3$, onde C^ℓ é um *circuito* com ℓ vértices.

(ii) Se $\chi(G) \geq 3$, então G contém um circuito ímpar.

1. É fácil ver que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Quais grafos conexos são tais que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$?

Grafos completos e circuitos ímpares são exemplos de grafos para os quais vale a igualdade acima. Existem outros grafos que satisfazem tal igualdade?

2. Sejam dados grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Definimos um novo grafo, pondo $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ (possivelmente, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ e $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$). Mostre que $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

3. Sejam dados grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Definimos um novo grafo $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$, onde $E = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} : \{x_1, y_1\} \in E_1 \text{ e } \{x_2, y_2\} \in E_2\}$. Mostre que $\chi(G_1 \times G_2) \leq \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

**4. Mostre que $\chi(G_1 \times G_2) = \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

(i) Este fato foi conjecturado por Hedetniemi e ainda não se sabe se o resultado é válido.

(ii) Sabe-se que o resultado é verdadeiro se $\chi(G_1) = \chi(G_2) = 4$.

(iii) Em geral, o resultado não vale para grafos com número cromático infinito. Existem G_1 e G_2 tais que $\chi(G_1)$ e $\chi(G_2)$ são não-enumeráveis e $G_1 \times G_2$ tem número cromático enumerável.

5. Seja $G = (\mathbb{N}, E)$ um grafo sobre os números naturais. Suponha que $\chi(G') \leq 2009$ para todo G' com $|V(G')| < \infty$ obtido de G removendo-se todos os vértices em $\mathbb{N} \setminus V(G')$. Mostre que $\chi(G) \leq 2009$.

6. Encontre um grafo G com $\chi(G) \geq 2009$ que não contém um triângulo.

7. Seja $G = (\mathbb{R}^2, E)$, onde $E = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \text{dist}(x, y) = 1\}$. Encontre boas cotas inferiores e superiores para $\chi(G)$.

2. GRAFOS DIRIGIDOS E GRAFOS PERFEITOS

9/6/2009

2.1. Um *grafo dirigido* (\vec{G}) é um par (V, A) onde A é um conjunto de *pares ordenados* de vértices. Chamamos uma aresta dirigida de *arco*.

2.2. O *grafo linha* $L(\vec{G})$ de $\vec{G} = (V, A)$ é o grafo (não-dirigido) com conjunto de vértices A e em $L(\vec{G})$ temos a aresta $\{a, a'\}$ se $a = (x, y)$ e $a' = (x', y')$ com $x' = y$.

2.3. O *número de clique* $\omega(G)$ de um grafo G é a quantidade de vértices do maior grafo completo (clique) contido em G . Observe que a desigualdade $\chi(G) \geq \omega(G)$ é verdadeira.

2.4. Um *subgrafo induzido* $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é o grafo formado por um subconjunto de vértices V' de V e pelas arestas cujas duas extremidades encontram-se em V' .

2.5. Um grafo G é dito *perfeito* quando $\chi(G') = \omega(G')$, para todo subgrafo induzido G' de G . Observe que, por exemplo, os grafos que contêm C^5 , C^7 ou \bar{C}^7 não são perfeitos. É um bom exercício calcular $\chi(\bar{C}^7)$ e $\omega(\bar{C}^7)$.

2.6. Uma *árvore* T é vazia ou da forma $(r; T_1, T_2, \dots)$, onde r é um vértice chamado *raiz* de T e os T_i são árvores não-vazias (possivelmente, a lista de árvores é vazia, isto é, $T = (r)$). As raízes dos T_i são os *filhos* de r .

2.7. Um *caminho (descendente)* em uma árvore T é uma sequência da forma r_0, r_1, \dots , onde r_i é filho de r_{i-1} para todo $i > 0$.

Lema 2 (Lema de König (D. König '36)). *Toda árvore infinita (com infinitos vértices) em que a quantidade de filhos de cada vértice é finita possui um caminho infinito.*

Demonstração. Pode ser provado por indução, utilizando o fato de que uma partição finita de um conjunto infinito necessariamente contém uma parte infinita. \square

Corolário 3. *Seja uma sequência infinita de sequências, onde os $a_{i,j}$ pertencem todos a um conjunto finito*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_{1,1} \\ s_2 &= a_{2,1}, a_{2,2} \\ s_3 &= a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3} \\ &\vdots \\ s_i &= a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, \dots, a_{i,i} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então existe uma sequência infinita

$$s = a_1, a_2, \dots$$

tal que, para todo n , existe um N tal que s e s_N coincidem em seus primeiros n símbolos.

Demonstração. Monte uma árvore com os s_i e aplique o Lema de König. □

Observação. O corolário acima implica o Teorema de *de Bruijn–Erdős*, que é uma generalização do exercício 1.6-5. Para saber mais sobre este teorema, veja [3] e [23].

2.8. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Mostre que $\chi(L(\vec{G})) \geq \log_2 \chi(\vec{G})$.

A desigualdade acima pode ser útil na resolução do exercício 1.6-6.

2. Sejam $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ intervalos na reta.

(i) Defina o grafo G sobre $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ pondo $\{i, j\} \in E(G)$ se e somente se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Prove que $\chi(G) = \omega(G)$. Ademais, conclua que G é perfeito.

(ii) Defina o grafo H sobre $V(H) = \{1, 2, \dots, n\}$ pondo $\{i, j\} \in E(H)$ se e somente se $I_i \cap I_j = \emptyset$. Prove que $\chi(H) = \omega(H)$. Ademais, conclua que H é perfeito.

3. Fixe um grafo G . Seja $P_G(\lambda)$ o número de colorações próprias de G com no máximo λ cores ($\lambda \in \mathbb{N}$). É importante notar que $P_G(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \chi(G) \leq \lambda$. Prove que $P_G(\lambda)$ é um polinômio em λ .

$P_G(\lambda)$ é conhecido como *polinômio cromático* e foi introduzido por George David Birkhoff em 1912 na tentativa de provar o Teorema das quatro cores. Sua idéia era tentar mostrar que

se G é um grafo planar, então $P_G(4) > 0$. W. T. Tutte conseguiu mostrar que $P_G(\tau + 2) > 0$, onde τ é a razão áurea (≈ 1.618).

3. GRAFOS E NÚMERO CROMÁTICO - CONTINUAÇÃO

16/6/2009

3.1. Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. A *distância euclidiana* entre esses dois vetores é dada por $\text{dist}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$.

3.2. Um grafo G^c é o *grafo complementar* de um grafo G se possui o mesmo conjunto de vértices de G e $\{x, y\}$ é uma aresta em G^c se e somente se $\{x, y\}$ não é uma aresta em G . Um grafo G é dito *autocomplementar* se é isomorfo ao seu complemento G^c (C^5 é um exemplo de grafo autocomplementar).

3.3. Sejam $G = (V, E)$ e $e = \{x, y\} \in E$. Definimos dois novos grafos:

- (i) $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ é o grafo formado pelo mesmo conjunto de vértices de G e pela remoção da aresta e .
- (ii) $G/e = (V', (E \setminus \{e\}) \cup E')$, onde $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup z$ e E' é o conjunto de arestas $\{z, i\}$, para todo $i \in N_G(x) \cup N_G(y)$, onde $N_G(i)$ representa o conjunto de vizinhos do vértice i no grafo G (a Figura 1 ajuda no entendimento da definição).

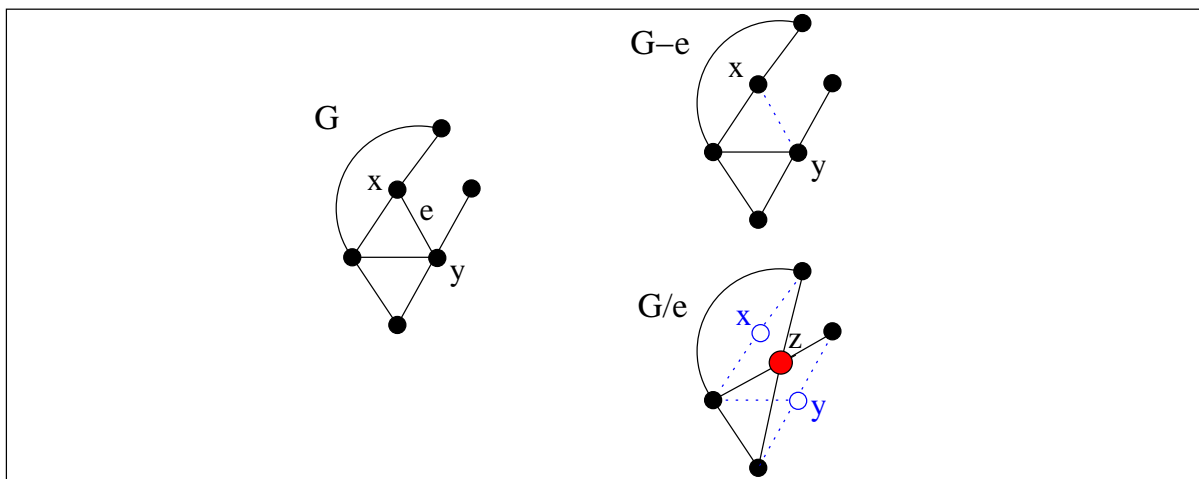


FIGURA 1. Exemplos dos grafos $G - e$ e G/e obtidos a partir de um dado grafo G .

3.4. (Ajuda para solução da questão 1.6-6) O grafo de Mycielski-Grötzsch (veja Figura 2) é um grafo G livre de triângulos tal que $\chi(G) = 4$. Ademais, é o menor grafo livre de triângulos tal que seu número cromático é maior que três. Generalize o grafo de Mycielski-Grötzsch para obter um grafo com número cromático k livre de triângulos.

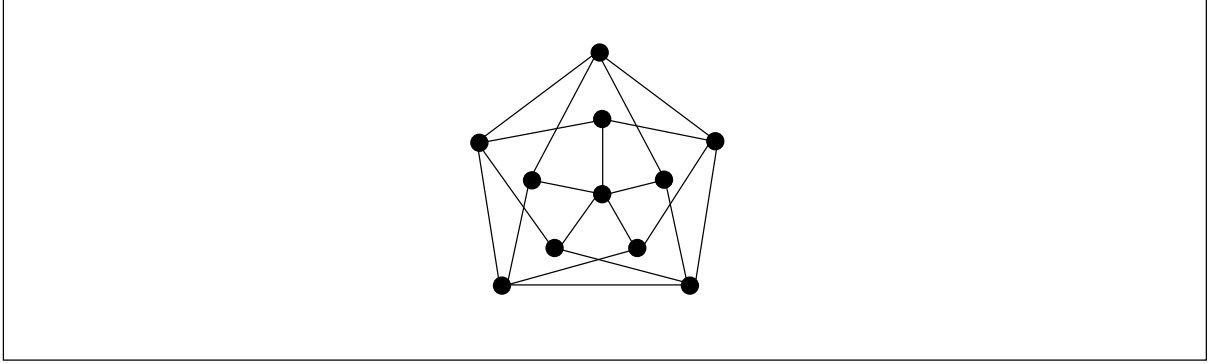


FIGURA 2. Grafo de Mycielski-Grötzsch.

3.5. (Ajuda para solução da questão 2.8-3) Mostre que $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$. Feito isso, basta aplicar a igualdade recursivamente.

3.6. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. (Exercício 1.6-6 revisitado)
 - (i) Encontre um grafo G com $\chi(G) \geq 2009$ que não contém triângulos nem circuitos de comprimento quatro e cinco (C^3 , C^4 e C^5).
 - (ii) Mostre que para todos K, L inteiros, existe um grafo G com $\chi(G) \geq K$ tal que G não contém circuitos de comprimento l para $l = 3, \dots, L$.
2. O exercício 1.6-7 fala sobre cotas para $\chi(G)$, onde $G = (\mathbb{R}^2, E)$ com $E = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \text{dist}(x, y) = 1\}$. Mostre que $4 \leq \chi(G) \leq 7$.
3. Seja $G = (\mathbb{R}^n, E)$ onde $E = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \text{dist}(x, y) = 1\}$. Quão rapidamente cresce $\chi(G)$ quando n tende a infinito?
4. Seja $G = (\mathbb{R}^n, E)$ como definido no exercício anterior.
 - (i) Mostre que $\chi(G) \leq f(n)$, para alguma função $f(n)$.
 - (ii) Sabemos que $\chi(G) \geq n + 2$. É verdade que $\chi(G)/n \geq 2009$ para todo n suficientemente grande?
5. Seja G um grafo com n vértices. Calcule o valor do polinômio cromático $P_G(\lambda)$ quando G é um dos seguintes grafos:
 - (i) Árvore.
 - (ii) Circuito.
 - (iii) Grafo completo.
 - (iv) Grafo vazio (isto é, sem arestas).

6. Seja G um grafo com n vértices. Determine o grau e o coeficiente líder (coeficiente do monômio de grau mais alto) do polinômio cromático $P_G(\lambda)$ de G .
7. Professor Nécio descobriu um grafo autocomplementar com 2009 vértices e número cromático 44. Ele achou isto um tanto contraditório. Explique por que Professor Nécio está certo em desconfiar de sua descoberta.

4. GRAFOS E NÚMERO CROMÁTICO - CONTINUAÇÃO

23/6/2009

4.1. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Mostre que todo grafo conexo com n vértices, m arestas e circuito mínimo de comprimento (número de arestas) g satisfaz

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

2. Mostre que um grafo é bipartido se e somente se todos os seus circuitos têm comprimento par. Conclua que um grafo bipartido planar com n vértices tem no máximo $2n - 4$ arestas, logo $K_{3,3}$ não é planar.
3. Mostre que um grafo planar que não possui triângulos (isto é, circuitos de comprimento três) é 4-colorível. (Na verdade, é possível mostrar com argumentos mais complicados que tal grafo é 3-colorível.)
4. Decida se os seguintes grafos, dados por seus conjuntos de vértices V e arestas E são planares ou não. Justifique a sua resposta.

(i) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$

$$E = \{12, 13, 14, 15, 18, 23, 26, 27, 34, 35, 45, 46, 47, 48, 57, 68, 78\}.$$

(ii) Grafo de Petersen

$$V = \{A, B, C, D, E, a, b, c, d, e\},$$

$$E = \{Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, AB, BC, CD, DE, EA, ac, ad, bd, be, ce\}.$$

(iii) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$

$$E = \{12, 13, 14, 15, 23, 26, 27, 34, 36, 37, 48, 58, 56, 67, 66, 78\}.$$

5. O n -cubo C^n , ou cubo de dimensão n , é o grafo de dimensão cujo conjunto de vértices é $V = \{0, 1\}^n$ (o conjunto de vetores binários de dimensão n) tais que dois vértices são adjacentes se e somente se eles diferem em uma única coordenada. Por exemplo, os vértices adjacentes a $(0, \dots, 0)$ são todos os vetores com uma única coordenada igual a 1. Decida pela não-planaridade ou planaridade de C^n para cada inteiro positivo n .
6. Mostre que os grafos não-planares K_5 , K_6 , K_7 e $K_{3,3}$ são imersíveis no toro.
7. Dados um grafo $G = (V, E)$ e conjunto $\ell(v)$ associados a cada vértice $v \in V$, uma *coloração de listas* de G utilizando as listas $(\ell(v))_{v \in V}$ é uma função $f : V \rightarrow \bigcup_v \ell(v)$ que leva cada vértice v a um elemento de $\ell(v)$ de tal forma que vértices adjacentes têm imagens distintas. O *número de escolha* $ch(G)$ de G é o menor inteiro positivo k tal que, para quaisquer listas de

tamanho k associadas aos vértices, o grafo é colorível por estas listas. Prove que a diferença entre $ch(G)$ e $\chi(G)$ pode ser arbitrariamente grande.

5. TEORIA DE RAMSEY

18/8/2009

A seguir apresentamos a teoria de Ramsey de diversas maneiras diferentes, através de alguns exemplos. De forma simples, podemos dizer que a teoria de Ramsey estuda as estruturas combinatoriais em que é impossível não existir uma certa *ordem*.

Exemplo 1.

5.1. *Conjunto convexo* é um conjunto de pontos onde para quaisquer dois pontos A e B no conjunto, o segmento de reta que liga A a B está contido no conjunto.

5.2. O *fecho convexo* de um conjunto de pontos no plano é o menor conjunto convexo que contém todos os pontos do conjunto.

Teorema 4. *Dados quaisquer cinco pontos no plano, três a três não colineares, existem quatro pontos que são vértices de um quadrilátero convexo (neste caso, dizemos que $5 \rightarrow 4$).*

Observe que $4 \nrightarrow 4$ e $3 \rightarrow 3$.

Demonstração. Seja X o conjunto dos cinco pontos no plano e $F(X)$ o fecho convexo de X . Se quatro ou cinco elementos de X são vértices de $F(X)$, não há o que fazer. Portanto, suponha que apenas três pontos são vértices de $F(X)$. Dessa forma, se traçarmos um segmento de reta r entre os dois pontos internos de $F(X)$, temos um quadrilátero convexo tendo como vértices tais pontos internos e dois dos vértices de $F(X)$. \square

Exemplo 2.

Teorema 5 (Erdős–Szekeres '35 [9]). *Uma sequência de $n^2 + 1$ números contém uma subsequência crescente¹ de $n + 1$ elementos ou uma subsequência decrescente² de $n + 1$ elementos (neste caso, dizemos que $n^2 + 1 \rightarrow n + 1$).*

Observe que $n^2 \nrightarrow n + 1$.

¹ $x_{k_1} \leq x_{k_2} \leq \dots \leq x_{k_{n+1}}$
² $x_{j_1} > x_{j_2} > \dots > x_{j_{n+1}}$

Demonstração. Seja $x_1, x_2, \dots, x_{n^2+1}$ a sequência com os n^2+1 números. Defina c_i (d_i) a quantidade máxima de elementos em uma subsequência crescente (decrecente) terminada em x_i . Suponha, por contradição, que $c_i, d_i \leq n$ para todo $1 \leq i \leq n^2 + 1$. Então, há um total de $n \times n = n^2$ pares (c_i, d_i) possíveis. Pelo princípio da casa dos pombos, há $i < j$ com $(c_i, d_i) = (c_j, d_j)$, uma vez que a sequência contém $n^2 + 1$ pontos. Se $x_i \leq x_j$ então existe uma subsequência crescente com c_j termos terminada em x_i , mas essa subsequência juntamente com x_j forma uma subsequência crescente com $c_j + 1$ termos, uma contradição. Se $x_i > x_j$ então existe uma subsequência decrescente com d_j termos terminada em x_i , mas essa subsequência juntamente com x_j forma uma subsequência decrescente com $d_j + 1$ termos, uma contradição. \square

Exemplo 3.

5.3. Dizemos agora que $n \rightarrow (r, s)$ se para qualquer coloração de arestas de um grafo completo com n vértices e duas cores (digamos, azul e vermelho), existe um subgrafo completo com r vértices onde todas as arestas são vermelhas ou um subgrafo completo com s vértices onde todas as arestas são azuis.

5.4. Denotamos $\min\{n: n \rightarrow (r, s)\}$ por $R(r, s)$. Observe que ao invés de min, deveríamos utilizar inf, uma vez que, a princípio, o conjunto em questão poderia ser vazio (no Teorema 6 vemos que tal conjunto não é vazio).

Teorema 6 (Ramsey '30 [24]). *Para todo $r, s \geq 2$, existe n tal que $n \rightarrow (r, s)$. Ademais, $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$.*

Um exemplo clássico é o caso $6 \rightarrow (3, 3)$, isto é, para qualquer coloração com duas cores de um grafo completo com seis vértices, temos um triângulo monocromático. Outra forma de pensar é que em um grupo de seis pessoas sempre existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três que não se conhecem mutuamente.

Demonstração. Claramente, $R(r, s) = 1$ se $r = 1$ ou $s = 1$. Provamos o resultado por indução em $r + s$. Supomos $r, s > 1$. Seja $n = R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$ e considere uma coloração $\chi: E(K^n) \rightarrow \{\text{vermelho}, \text{azul}\}$ das arestas de K^n . Fixe $v \in V(K^n)$.

$X = \{x \in V(K^n) \setminus \{v\} : \{v, x\} \text{ é vermelho}\}$

$Y = \{y \in V(K^n) \setminus \{v\} : \{v, y\} \text{ é azul}\}.$

Se $|X| \geq R(r-1, s)$, então, por hipótese de indução, encontramos um K^{r-1} vermelho ou um K^s azul. No caso de encontrar um K^s azul, não há o que fazer. Mas então o K^{r-1} vermelho em X juntamente com o vértice v formam um K^r vermelho, como queríamos. Analogamente, se $|Y| \geq R(r, s-1)$ estamos feitos. Pela escolha de n , temos $|X| \geq R(s-1, t)$ ou $|Y| \geq R(s, t-1)$. \square

Segue do teorema acima que $R(r, s) \leq \binom{r+s-2}{r-1}$ (exercício: verifique!). Particularmente, $R(r, r) \leq \binom{2r-2}{r-1} \leq 4^r$. Outro fato conhecido é que $R(r) = R(r, r) > 2^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \approx \sqrt{2}^r$, para $r \geq 3$. Desses dois fatos, vemos que seria interessante conhecer o valor de $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{R(r)}$, porém não sabe-se nem mesmo se tal limite existe.

Uma tabela atualizada com os valores conhecidos e limites inferiores e superiores para vários números de Ramsey pode ser vista no *survey* "Small Ramsey Numbers" de Radziszowski em <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf>.

Exemplo 4.

Teorema 7 (Schur '16 [25]). *Se colorirmos \mathbb{N}^* com k cores, há uma solução monocromática de $x + y = z$, isto é, solução onde x , y e z possuem as mesmas cores.*

Demonstração. Seja n tal que $n \rightarrow \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ vezes}}$ (veja exercício 5.5.4) e $c: \mathbb{N}^* \rightarrow \{1, \dots, k\}$ uma coloração de \mathbb{N}^* . Seja K_n o grafo completo com n vértices colorido com k cores, de modo que os vértices são rotulados de 1 a n e uma aresta $\{i, j\}$, $i < j$ recebe a cor $c(j-i)$. Pela escolha de n , existe um triângulo monocromático formado por i , j e k , com $i < j < k$. Desta forma, basta fazer $x = j - i$, $y = k - j$ e $z = k - i$. \square

5.5. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que dados quaisquer N pontos no plano, três a três não colineares, existem n pontos que são vértices de um polígono convexo com n vértices (Se sim, dizemos que $N \rightarrow n$)?
 - (i) Como visto anteriormente, quando $n = 4$, basta fazer $N = 5$.
 - (ii) Mostre que $8 \nrightarrow 5$ e $9 \rightarrow 5$.
2. Mostre que as seguintes afirmações são válidas para todo $a, b \geq 1$, onde $x \rightarrow (y, z)$ diz que qualquer sequência com x números contém uma subsequência crescente com y números ou uma subsequência decrescente com z números.
 - (i) $ab + 1 \rightarrow (a + 1, b + 1)$.

- (ii) $ab \nrightarrow (a+1, b+1)$.
3. Mostre que $R(r, s) \leq \binom{r+s-2}{r-1}$ (Dica: prove utilizando indução).
4. (Generalização de Ramsey) Mostre que para todo $k \geq 2$ existe n tal que $n \rightarrow \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ vezes}}$ (K_n possui um triângulo monocromático).
5. Investigue se $x + y = 3z$ tem a "*propriedade de Schur*"³, isto é, para qualquer k , dada uma coloração $c: \mathbb{N}^* \rightarrow \{1, \dots, k\}$, existe solução monocromática para $x + y = 3z$.
6. Investigue se $x + y = 2z$, com $x \neq y$, tem a propriedade de Schur (Observe que, nesse caso, x, z, y é uma progressão aritmética).

³A motivação para utilizar o termo "propriedade de Schur" é clara, porém, na literatura esta propriedade é conhecida como "propriedade da partição regular".

25/8/2009

Jogo da velha.

6.1. O *jogo* 3^2 , também conhecido como jogo da velha, é um jogo para duas pessoas que consiste em um quadrado particionado em 3×3 quadrados menores, onde cada jogador marca um quadrado por vez e o vencedor é o jogador que conseguir marcar uma linha primeiro que o outro. Neste jogo não existe *estratégia vencedora* (sequência de jogadas onde a vitória sempre é alcançada) para o primeiro jogador e sempre existe uma estratégia em que o segundo jogador pode garantir o empate.

6.2. Generalizações do jogo da velha para dimensões maiores são bem interessantes. Temos, por exemplo, o jogo 3^3 , onde o *tabuleiro* é o hipercubo tridimensional de lado três, onde qualquer linha do hipercubo garante a vitória. Neste caso, o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora. Outra generalização bastante conhecida é o jogo 4^3 , em que o tabuleiro é o hipercubo tridimensional de lado quatro. Dadas essas generalizações, fica claro o que vem a ser o jogo k^d .

6.3. Defina $f(k) = \inf\{d: \text{primeiro jogador ganha } k^d\}$. Por exemplo, $f(3) = 3$.

Números em Teoria de Ramsey.

6.4. Lembre-se que $\sqrt{2}^s = 2^{s/2} < R(s) \leq \binom{2s-2}{s-1} \leq 2^{2s-2} \leq 4^s$ (onde para a primeira desigualdade, supomos que $s \geq 3$). Portanto existe um "gap" bem grande entre os limites inferior e o superior para $R(s)$. Tal limite inferior foi dado por Erdős [5], através de uma prova não-construtiva, utilizando o que hoje é conhecido como método probabilístico. Vale ressaltar que até hoje não se conhece nenhum limite substancialmente melhor que o obtido por Erdős.

Teorema 8 (Erdős '47 [5]). *Para $s \geq 3$, temos que $R(s) > 2^{s/2}$.*

Demonstração. Fixe $n = \lfloor 2^{s/2} \rfloor$ e considere K^n . Pinte cada aresta do K^n com azul ou vermelho, jogando uma moeda honesta para decidir (isto é equivalente a dizer que damos uma coloração aleatória das arestas do K^n utilizando duas cores, com todas as colorações equiprováveis).

Fixe um K^s em K^n . A probabilidade deste K^s ser monocromático é $(1/2)^{\binom{s}{2}-1}$. Portanto, o número esperado de K^s 's monocromáticos em K^n é

$$\begin{aligned} \binom{n}{s} (1/2)^{\binom{s}{2}-1} &\leq \frac{n^s}{s!} 2^{\left(1 - \frac{s^2-s}{2}\right)} \\ &\leq \frac{1}{s!} 2^{(s/2+1)}. \end{aligned}$$

Se $s = 3$, é fácil ver que $\frac{2^{(s/2+1)}}{s!} < 1$. Se $s \geq 4$, então $\frac{2^{(s/2+1)}}{s!} < \frac{2^{(s/2+1)}}{2^{s-1}} = \frac{1}{2^{(\frac{s-4}{2})}} \leq 1$. Portanto, o número esperado de K^s 's monocromáticos em K^n é menor que um. Segue que existe uma coloração de K^n sem K^s monocromático. Isto mostra que $n = \lfloor 2^{s/2} \rfloor \nrightarrow (s, s)$, ou seja, $R(s) > 2^{s/2}$. \square

6.5. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Prove que no jogo k^d , ou existe estratégia vencedora para o primeiro jogador, ou existe uma estratégia para o segundo jogador que consegue garantir o empate.
2. Prove que, para $k = 2, 3, \dots$, existe d tal que o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora em k^d . Em outras palavras, prove que $f(k) < \infty$ para qualquer $k \geq 2$.
3. Mostre que $f(5) < 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}$ $\left. \vphantom{f(5)} \right\} 2009$.
4. Prove que $R(s) > 10^6 s$ se $s \geq 10^6$. Procure fazer isso com uma construção explícita.
5. Prove que $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(s)}{2^{\lfloor s/2 \rfloor}} = \infty$ e $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R(s)}{\binom{2s-2}{s-1}} = 0$.

7. TEORIA DE RAMSEY - CONTINUAÇÃO

1/9/2009

7.1. Um *hipergrafo l-uniforme* (ou *l-grafo*) é um par (V, E) tal que $E \subset \binom{V}{l} = \{U \subset V : |U| = l\}$.

Observação. Um grafo é um 2-grafo.

7.2. O *l-grafo completo de ordem n*, denotado $K_n^{(l)}$, é o l-grafo contendo n vértices e $\binom{n}{l}$ hiperarestas (ou, simplesmente, arestas).

7.3. $K_n^{(l)} \rightarrow \left(K_{s_1}^{(l)}, \dots, K_{s_r}^{(l)}\right)$ significa que se colorimos as hiperarestas de $K_n^{(l)}$ com cores $1, \dots, r$, então, necessariamente, existe um $K_{s_i}^{(l)}$ colorido monocromaticamente com a cor i , para algum i .

Teorema 9 (Teorema de Ramsey (versão generalizada)). *Para todo s_1, \dots, s_r , existe n tal que*

$$(1) \quad K_n^{(l)} \rightarrow \left(K_{s_1}^{(l)}, \dots, K_{s_r}^{(l)}\right).$$

7.4. Denotamos por $R^l(s_1, \dots, s_r)$ o menor n para o qual vale (1).

Demonstração. (Dica) Para provar o teorema basta usar indução (dupla) e observar que $R^l(s_1, \dots, s_r) \leq 1 + R^{(l-1)}(R_1, \dots, R_r)$, onde

$$R_1 = R^{(l)}(s_1 - 1, s_2, \dots, s_r)$$

$$R_2 = R^{(l)}(s_1, s_2 - 1, \dots, s_r)$$

$$\vdots$$

$$R_r = R^{(l)}(s_1, s_2, \dots, s_r - 1).$$

7.5. Já vimos os seguintes casos do Teorema 9:

- $r = 2, l = 2$ (veja o Teorema 6 da Seção 5).
- r arbitrário, $l = 2, s_i = 3$ para todo i (veja o exercício 5.5.4 da Seção 5).

7.6. Teoria de Ramsey euclidiana.

7.7. $\chi(\mathbb{R}^2)$ é o menor q tal que existe uma q -coloração dos pontos de \mathbb{R}^2 onde não existem pontos $x, y \in \mathbb{R}^2$ com mesma cor e $\text{dist}(x, y) = 1$.

7.8. Note que $\mathbb{R}^2 \rightarrow (\{0, 1\})_{\chi_2 - 1}$. Isto é, se colorimos \mathbb{R}^2 com $\chi_2 - 1$ cores, então existe a configuração $\{0, 1\}$ monocromática; mais precisamente, existe uma configuração monocromática congruente a $\{0, 1\}$.

Mais geralmente, estamos interessados na relação $\mathbb{R}^n \rightarrow (K)_r$, com a qual queremos dizer que, para qualquer coloração de \mathbb{R}^n com r cores, existe $K' \subset \mathbb{R}^n$ congruente a K com K' monocromático.

7.9. Dizemos que $K \subset \mathbb{R}^k$ é um *conjunto de Ramsey* se, para todo r , existe n tal que $\mathbb{R}^n \rightarrow (K)_r$. Ex.: $K = \{0, 1\}$ é um conjunto de Ramsey. De fato, fixado r , vemos que há $r + 1$ pontos dois-a-dois à distância 1 em \mathbb{R}^r . Logo, $\mathbb{R}^r \rightarrow \{0, 1\}$.

7.10. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Para resolver o "Problema de Klein" (exercício 5.5.1), podemos usar a versão generalizada do Teorema de Ramsey e um pouco de geometria. Abaixo temos duas possibilidades.
 - (i) Use que $5 \rightarrow 4$ (aplique o Teorema de Ramsey com $l = 4$).
 - (ii) Dada uma tripla (A, B, C) de pontos não colineares no plano, podemos distinguir dois casos. Ou a tripla é anti-horária, ou é horária (veja a Figura 3). Use esta observação e o Teorema de Ramsey para $l = 3$.

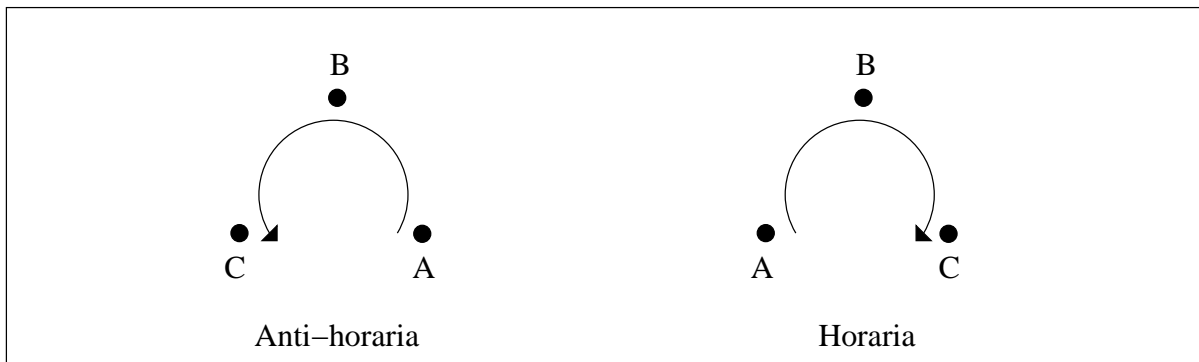


FIGURA 3. Triplas anti-horária e horária.

2. Prove que o conjunto $K = \{-1, 0, 1\}$ não é um conjunto de Ramsey.
3. Prove que o conjunto dos vértices de um triângulo equilátero é um conjunto de Ramsey.
4. Prove que o conjunto dos vértices do triângulo pitagórico de lados 3, 4, e 5 é um conjunto de Ramsey.
5. Prove que o conjunto dos vértices do triângulo de lados 2, 2, e 1 é um conjunto de Ramsey.

8. TEORIA DE RAMSEY EUCLIDIANA - CONTINUAÇÃO

8/9/2009

Teorema 10 (Teorema da Compacidade). *Seja $K \subset \mathbb{R}^k$ uma configuração finita de pontos tal que $\mathbb{R}^n \rightarrow (K)_r$. Então existe $L \subset \mathbb{R}^n$ finito tal que $L \rightarrow (K)_r$.*

Observação. Podemos usar o Teorema de Tikhonov (o produto de espaços topológicos compactos é compacto) para provar o teorema acima. Provaremos a seguinte versão mais elementar do Teorema 10.

Teorema 11. *Seja $K \subset \mathbb{R}^k$ uma configuração finita de pontos tal que $\mathbb{Q}^n \rightarrow (K)_r$. Então existe $L \subset \mathbb{Q}^n$ finito tal que $L \rightarrow (K)_r$.*

Demonstração. Usamos o Lema de König (Lema 2) para mostrar o resultado. Suponha que para todo $L \subset \mathbb{Q}^n$ finito, $L \not\rightarrow (K)_r$. Precisamos mostrar que $\mathbb{Q}^n \not\rightarrow (K)_r$. Considere q_1, q_2, \dots uma enumeração de \mathbb{Q}^n e, para todo $m \geq 1$, seja $L_m = \{q_1, \dots, q_m\}$. Fixe uma r -coloração $\chi_m: L_m \rightarrow [r]$ de L_m que prova que $L_m \not\rightarrow (K)_r$. Queremos “colar” essas (ou parte dessas) infinitas colorações para obter uma r -coloração de \mathbb{Q}^n que prova que $\mathbb{Q}^n \not\rightarrow (K)_r$. Consideremos as sequências

$$\begin{aligned} L_1 & : \quad \chi_1(q_1) \\ L_2 & : \quad \chi_2(q_1), \chi_2(q_2) \\ & \vdots \\ L_m & : \quad \chi_m(q_1), \dots, \chi_m(q_m) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Consideremos a árvore infinita associada às infinitas sequências acima. Mais precisamente, seja T_r a árvore enraizada infinita, em que todos os nós têm r filhos. Rotule as r arestas que ligam os nós aos seus r filhos de $1, \dots, r$. Cada sequência da lista acima define naturalmente um caminho da raiz de T_r a um nó interno de T_r . Consideremos a árvore infinita T dada pela união desses infinitos caminhos. Observe que qualquer caminho infinito nessa árvore corresponde a uma coloração de \mathbb{Q}^n . Esta coloração prova que $\mathbb{Q}^n \not\rightarrow (K)_r$ [prove esta asserção como exercício!]. \square

Lembre que um conjunto finito $K \subset \mathbb{R}^k$ é dito ser de Ramsey se, para todo r , existe n tal que $\mathbb{R}^n \rightarrow (K)_r$.

8.1. Se $x = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ e $y = (y_1, \dots, y_l)^T \in \mathbb{R}^l$, então temos que $x * y \in \mathbb{R}^{k+l}$ é tal que $x * y = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)^T$. Ademais, se $K \subset \mathbb{R}^k$ e $K' \subset \mathbb{R}^l$, então o produto KK' é dado por $KK' = \{x * y : x \in K, y \in K'\}$.

Exemplo. Sejam $K = \{0, 3\} \subset \mathbb{R}$ e $K' = \{0, 4\} \subset \mathbb{R}$. Então, $K * K' = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{0}{4}, \binom{3}{0}, \binom{3}{4} \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

Teorema 12 (Teorema do Produto). *Se $K_1 \subset \mathbb{R}^{k_1}$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}$ são conjunto de Ramsey finitos, então $K_1 * K_2 = \{p_1 * p_2 : p_1 \in K_1, p_2 \in K_2\}$ é Ramsey.*

Demonstração. Fixe r_1 . Como K_1 é Ramsey, existe n_1 tal que $\mathbb{R}^{n_1} \rightarrow (K_1)_{r_1}$ e, pelo Teorema 10 (Teorema da Compacidade), existe $L_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ finito tal que $L_1 \rightarrow (K_1)_{r_1}$. Seja $r_2 = r_1^{|L_1|}$. Como K_2 é Ramsey, existe n_2 tal que $\mathbb{R}^{n_2} \rightarrow (K_2)_{r_2}$ e, pelo Teorema 10, existe $L_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ finito tal que $L_2 \rightarrow (K_2)_{r_2}$. Afirmamos que $L^* = L_1 * L_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ é tal que $L^* \rightarrow (K_1 * K_2)_{r_1}$ (Exercício: escreva a prova desta afirmação em detalhes). \square

Observação. Observe por 8.1 e pelo Teorema 12 que resolvemos o exercício 7.10.4.

8.2. Nos Teoremas 10, 11 e 12, impusemos a hipótese de que as configurações de Ramsey que estão sendo consideradas são finitas. Ocorre que, na verdade, *toda configuração de Ramsey é finita*. Este é um ótimo exercício para os interessados.

8.3. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Existem x, y, z tal que o triângulo de vértices $(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ tem lados de comprimento 2, 2, 1?
2. Existem x, y, z tal que o triângulo de vértices $(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ tem lados de comprimento a, b, c arbitrários?
3. Prove que o conjunto de vértices do triângulo de lados $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}$ é Ramsey.
4. Neste exercício, voltamos a considerar o problema de Klein (exercício 5.5.1). Para cada n , seja $N(n)$ o menor N tal que $N \rightarrow n$. Prove que $N(n) \leq \min\{R^{(4)}(n, 5), R^{(3)}(n, n)\}$. Estime estas cotas para $n = 5$. Você consegue decidir se $N(5) \leq 10^{10}$?

Observação. Um argumento um pouco mais geométrico pode ser usado para provar uma cota muito melhor do que as cotas no exercício 8.3.4. Conjectura-se que $N(n) = 2^{n-2} + 1$. Uma resenha muito interessante sobre esses problemas e resultados pode ser visto em [21].

9. TEORIA DE RAMSEY EUCLIDIANA - CONTINUAÇÃO

TEORIA EXTREMAL DOS CONJUNTOS

15/9/2009

9.1. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^k$ é *esférico* se existem d, r , e K' tais que K é congruente a K' e K' está contido na esfera d -dimensional de raio r em \mathbb{R}^{d+1} :

$$K' \subset S^d(r) = \{X \in \mathbb{R}^{d+1} : \|X\| = r\}.$$

Teorema 13. A configuração $K = \{-1, 0, 1\}$ não é Ramsey.

Teorema 14 (Erdős, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer e Straus '73 [6]). *Toda configuração Ramsey é esférica.*

Observação. A teoria de Ramsey euclidiana foi iniciada pelos autores do Teorema 14. Aquele resultado aparece no primeiro artigo de uma série de três ([6], [7] e [8]), que fundou a área.

Dentre as conjecturas existentes na teoria de Ramsey euclidiana, a Conjectura 15, a seguir, é, possivelmente, a mais importante.

Conjectura 15 (Graham '94 [13]). *Toda configuração esférica finita $K \subset \mathbb{R}^k$ é Ramsey.*

Seguindo a tradição de Erdős, Ron Graham oferece US\$ 1000 pela solução de sua conjectura.

Uma conjectura mais fraca que a Conjectura 15 é a Conjectura 16.

Conjectura 16. *Quaisquer 4 pontos de um círculo formam uma configuração Ramsey.*

Teorema 17 (Frankl–Rödl [10]). *Toda configuração de 4 pontos não-coplanares em \mathbb{R}^3 é Ramsey.*

Na verdade, Frankl e Rödl [10] provaram que quaisquer $d + 1$ pontos em posição geral em \mathbb{R}^d formam uma configuração Ramsey.

Para saber mais sobre teoria de Ramsey euclidiana, inclusive provas para os Teoremas 13 e 14, veja o livro *Tópicos em Combinatória Contemporânea* [20], que pode ser encontrado na página do pesquisador Carlos Gustavo Moreira:

<http://w3.impa.br/~gugu/coloyoshi.ps>

Outro bom material de estudo pode ser encontrado no endereço eletrônico do *MSRI, Mathematical Sciences Research Institute*, <http://www.msri.org>. Nesse endereço existe o vídeo de uma palestra de Ron Graham sobre teoria de Ramsey euclidiana, juntamente com o arquivo dos transparências utilizadas na palestra.

Para uma discussão recente sobre problemas e resultados da área de teoria de Ramsey (incluindo teoria de Ramsey Euclidiana), veja Graham [14].

Teoria extremal dos conjuntos.

9.2. Uma *família intersectante* \mathcal{F} é um sistema de conjuntos tal que $|F \cap F'| \neq \emptyset$ para quaisquer F e $F' \in \mathcal{F}$.

9.3. Lembre que $\binom{[n]}{r} = \{X \subset [n] : |X| = r\}$.

Fato 18. Se $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ é uma *família intersectante*, então $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

9.4. Para todo $x \in [n]$, defina $\mathcal{F}_x = \{F \in \binom{[n]}{r} : x \in F\}$.

Teorema 19 (Erdős–Ko–Rado '61 [4]). Se $n \geq 2r$ e $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{r}$ é uma *família intersectante*, então $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1}$. Ademais, se $n > 2r$ e $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{r-1}$, então existe $x \in [n]$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$.

Demonstração. (Katona '72 [17]) Consideramos ordenações cíclicas de $[n]$; formalmente, consideramos bijeções $\phi: \mathbb{Z}_n \rightarrow [n]$. Dizemos que $F \subset [n]$ e ϕ são compatíveis se os elementos de F formam um “segmento” em ϕ . Por exemplo, se $\phi: \mathbb{Z}_7 \rightarrow [7]$ é tal que $\phi: 6, 1, 3, 7, 4, 2, 5$ (isto é, temos $\phi(0) = 6, \phi(1) = 1$, etc), então $F = \{1, 3, 6\}$ e $F' = \{1, 5, 6\}$ são compatíveis com ϕ .

Seja ϕ uma ordenação cíclica fixa de $[n]$. Afirmamos que o número de $F \in \mathcal{F}$ compatíveis com ϕ é no máximo r : este é um excelente exercício e deixamos para o leitor encontrar uma prova elegante para esse fato.

Vamos calcular o número de pares (F, ϕ) onde F é um elemento de \mathcal{F} e ϕ é uma ordenação cíclica de $[n]$. Se P é a quantidade de tais pares, então podemos calcular P de duas maneiras distintas. Temos que

$$(2) \quad \begin{aligned} P &= \sum_{\phi} (\text{quantidade de elementos de } \mathcal{F} \text{ compatíveis com } \phi) \\ &\leq n!r, \end{aligned}$$

onde o somatório é sobre todas as ordenações cíclicas de $[n]$. Sabemos também que

$$(3) \quad \begin{aligned} P &= \sum_{F \in \mathcal{F}} (\text{quantidade de ordenações cíclicas } \phi \text{ compatíveis com } F) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}} nr!(n-r)! \\ &= |\mathcal{F}|nr!(n-r)!. \end{aligned}$$

Das equações (2) e (3), temos que

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{n!r}{r!(n-r)!n} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \binom{n-1}{r-1}.$$

Deixamos a prova do “ademais” como exercício. \square

Teorema 20. *Seja $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ tal que todo $F \in \mathcal{F}$ tem cardinalidade ímpar e, para todo F e $F' \in \mathcal{F}$, temos que $|F \cap F'|$ é par. Então $|\mathcal{F}| \leq n$.*

Demonstração. Usamos álgebra linear sobre o corpo $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ dos inteiros módulo 2. Cada $F \in \mathcal{F}$ pode ser representado por $v^{(F)} = (v_i^{(F)})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{F}_2^n$ com

$$v_i^{(F)} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \notin F, \\ 1, & \text{se } i \in F. \end{cases}$$

Afirmamos que os vetores $v^{(F)}$ ($F \in \mathcal{F}$) são linearmente independentes. Daí segue que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}| &= \text{quantidade de vetores } v^{(F)} \\ &\leq \text{dimensão de } \mathbb{F}_2^n \\ &= n. \end{aligned}$$

Provaremos agora a afirmação que foi feita. Usaremos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i$ para todo $x = (x_i)$ e $y = (y_i) \in \mathbb{F}_2^n$. Suponha que $\sum_{F \in \mathcal{F}} \lambda_F v^{(F)} = 0$. Fixe $F_0 \in \mathcal{F}$. Temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v^{(F_0)}, \sum_{F \in \mathcal{F}} \lambda_F v^{(F)} \rangle \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \langle v^{(F_0)}, \lambda_F v^{(F)} \rangle \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \lambda_F \langle v^{(F_0)}, v^{(F)} \rangle \\ &= \lambda_{F_0} |F_0 \cap F| \bmod 2 = \lambda_{F_0}. \end{aligned}$$

Como F_0 foi escolhido arbitrariamente, concluimos a prova do teorema. \square

9.5. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Seja $n \geq 2r$ e $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{r}$ uma família intersectante. Se ϕ é uma ordenação cíclica de $[n]$, então prove que a quantidade de $F \in \mathcal{F}$ compatíveis com ϕ é no máximo r .

2. Seja $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ tal que todo $F \in \mathcal{F}$ tem cardinalidade *par* e $|F \cap F'|$ é *par* para todo F e $F' \in \mathcal{F}$.
 - (i) Encontre \mathcal{F} como acima tal que $|\mathcal{F}|$ é grande.
 - (ii) Obtenha em (i) um \mathcal{F} máximo: prove que não existe $\mathcal{F}' \subset 2^{[n]}$ nas mesmas condições tal que $|\mathcal{F}'| > |\mathcal{F}|$.
3. Seja $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ tal que existe um $\lambda > 0$ tal que $|F \cap F'| = \lambda$ para todo F e $F' \in \mathcal{F}$ com $F \neq F'$.
 - (i) Encontre \mathcal{F} como acima tal que $|\mathcal{F}|$ é grande.
 - (ii) Obtenha em (i) um \mathcal{F} máximo: prove que não existe $\mathcal{F}' \subset 2^{[n]}$ nas mesmas condições tal que $|\mathcal{F}'| > |\mathcal{F}|$.
4. Prove a asserção do “ademais” no Teorema 19 (Erdős–Ko–Rado).
5. Seja V o espaço dos vetores $(a_1, \dots, a_n)^T$ onde os a_i pertencem a um corpo F . Para os vetores $a = (a_1, \dots, a_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$, defina seu produto interno por $a^T b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. Ademais, seja M um subespaço de V e A uma transformação linear de V em V . Decida se as seguintes asserções são verdadeiras.
 - (i) Se A é não-singular, então sua transposta A^T também é não-singular.
 - (ii) Mais geralmente, se A é não-singular, então $A^T A$ também é não-singular.
 - (iii) Ainda mais geralmente, $A^T A$ e A têm o mesmo núcleo.
 - (iv) $M \cap M^\perp = \{0\}$ (onde M^\perp é o subespaço ortogonal a M , isto é, $M^\perp = \{a: a^T b = 0 \text{ para cada } b \in M\}$).
 - (v) $\langle M \cup M^\perp \rangle = V$ ($\langle X \rangle$ denota o espaço gerado por X).
 - (vi) $\dim M + \dim M^\perp = n$.
 - (vii) $(M^\perp)^\perp = M$.

10. TEORIA EXTREMAL DOS CONJUNTOS

22/9/2009

10.1. Uma matriz real $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é *positiva semidefinida* se, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, é verdade que $x^T B x \geq 0$. Ademais, se B é positiva semidefinida e $x^T B x = 0$ implica que $x = 0$, então B é uma matriz *positiva definida*.

Fato 21. Se A é uma matriz positiva definida e B é uma matriz positiva semidefinida, então $A + B$ é uma matriz positiva definida.

Teorema 22 (Fisher não-uniforme [15, 19]). Se $C_1, \dots, C_m \subset [n]$ é um sistema de conjuntos tal que $1 \leq \lambda \leq n$ e $|C_i \cap C_j| = \lambda$ para todo $i \neq j$, então $m \leq n$.

Demonstração. Consideramos primeiramente o caso em que existe um i tal que $|C_i| = \lambda$. Com isso, todo C_j com $j \neq i$ deve conter C_i e não pode ter interseção fora de C_i . Assim, temos que o máximo de conjuntos possíveis é $n - \lambda + 1 \leq n$.

Suponha que não existe i tal que $|C_i| = \lambda$. Seja $\gamma_i = |C_i| - \lambda > 0$, para todo $i \in [n]$. Considere os vetores característicos $x_i \in \mathbb{R}^n$ dos conjuntos C_i , isto é, $x_{ij} = 1$ se $j \in C_i$ e $x_{ij} = 0$ se $j \notin C_i$.

Seja $M = (M_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, onde as linhas da matriz são os vetores característicos x_i (assim, temos que $M_{i,j} = x_{i,j}$). Podemos escrever $A = MM^T = \lambda J + C$, onde $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz $m \times m$ com todas as entradas iguais a 1 e $C = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, pois $\langle x_i, x_j \rangle = |C_i \cap C_j|$ e, quando $i \neq j$, temos $|C_i \cap C_j| = \lambda$ e, quando $i = j$, temos $|C_i \cap C_j| = \lambda + \gamma_i$.

Afirmamos que $\text{posto}(A) \geq m$. De fato, temos que

- (i) λJ é positiva semidefinida, pois $y^T \lambda J y = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda y_i y_j = \lambda (y_1 + \dots + y_n)^2 \geq 0$;
- (ii) C é positiva definida, pois $y^T C y = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \gamma_i y_i^2 > 0$ e $y^T C y = 0$ somente se $y = 0$.

Por (i), (ii) e pelo Fato 21, $A = MM^T$ é positiva definida. Portanto, $\text{posto}(A) \geq m$; caso contrário, existiria um $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$ (uma combinação linear das colunas de A teria valor 0). Mas então, $x^T Ax = 0$, o que contradiz o fato de A ser positiva definida.

Sabemos que $\text{posto}(A) \leq n$; portanto, temos que $m \leq n$. □

10.2. Dadas funções f e g , dizemos que $f = \Omega(g)$ se existe $c > 0$ e x_0 tal que $f(x) \geq cg(x)$ para todo $x \geq x_0$.

Existe uma construção *explícita* para provar que $R_2(t) = R(t, t)\Omega(t^3)$ (veja o Teorema 23 a seguir).

Teorema 23 (Nagy '72 [22]). $\binom{t}{3} \nrightarrow (t+1, t+1)$, isto é, $K^{(t)}_3 \nrightarrow (K^{t+1}, K^{t+1})$.

Demonstração. Consideramos o grafo $K^{(t)}_3$, cujos vértices são as triplas em $[t]$. Sejam $A, B \in \binom{[t]}{3}$ dois vértices distintos de $K^{(t)}_3$. Colorimos a aresta $\{A, B\}$ com a cor vermelha se $|A \cap B| = 1$ e com a cor azul de $|A \cap B| \neq 1$.

Notamos agora que $K^{(t)}_3$ não contém um K^{t+1} vermelho. De fato, basta aplicar o Teorema 22 com $n = t$ e $\lambda = 1$. Ademais, $K^{(t)}_3$ também não contém um K^{t+1} azul pois, caso contrário, teríamos mais que t conjuntos ímpares com interseções dois a dois pares, um absurdo, pois contradiz o que o Teorema 20 estabelece. \square

TEOREMAS DE FRANKL & WILSON

Teorema 24 (Ray-Chaudhuri–Wilson não-uniforme; Deza–Frankl–Singhi '85). *Seja p um primo, com $L \subset \mathbb{Z}$, $|L| = s$ e $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\} \subset 2^{[n]}$ tal que*

- (i) $|A_i| \notin L \pmod{p}$ para todo i ;
- (ii) $|A_i \cap A_j| \in L \pmod{p}$ para todo $i \neq j$.

$$\text{Então } m \leq \sum_{j=0}^s \binom{n}{j}.$$

Demonstração. A prova desse teorema pode ser vista em [20]. \square

10.3. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Prove que $K^{(t-1)^2} \nrightarrow (K^t, K^t)$ com uma coloração explícita.

11. TEORIA EXTREMAL DOS CONJUNTOS - CONTINUAÇÃO

29/9/2009

11.1. Dados $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\} \subset 2^{[n]}$ e $L \subset \mathbb{Z}$ com $|L| = s$, dizemos que \mathcal{F} é um sistema de conjuntos *L-intersectante* se $|A_i \cap A_j| \in L$ para todo $i \neq j$. Uma versão modular para essa condição é a seguinte: $|A_i \cap A_j| \in L \pmod{p}$ para todo $i \neq j$.

11.2. Seja $m(n, k) = \max\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset 2^{[n]} \text{ e para todos } F \text{ e } F' \in \mathcal{F} \text{ distintos, } |F \cap F'| \neq k\}$.

Teorema 25 (Frankl & Rödl '87 [12]). *Existem $\varepsilon > 0$ e n_0 tal que $m(n, \lfloor n/4 \rfloor) \leq (2 - \varepsilon)^n$ para todo $n \geq n_0$.*

O Teorema 25 resolveu um problema de U\$ 500 de Erdős. Mais geralmente, temos o seguinte resultado.

Teorema 26 (Frankl & Rödl '87 [12]). *Para todo $\delta > 0$, existem $\varepsilon > 0$ e n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $m(n, \lfloor \delta n \rfloor) \leq (2 - \varepsilon)^n$.*

Corolário 27 (do Teorema 24). *Se $L \subset \mathbb{Z}$ com $|L| = s$ e $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ é L-intersectante, então*

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{j=0}^s \binom{n}{j}.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $L \subset \{0, 1, \dots, k-1\}$. Claramente, basta tomar um primo $p > k$: fazendo isso, \mathcal{F} satisfaz as hipóteses do Teorema 24 para este p e o resultado segue. □

Lema 28. *Se $n \geq 2s$, então*

$$\sum_{i=0}^s \binom{n}{i} < \binom{n}{s} \left(1 + \frac{1}{n - 2s + 1}\right) \leq 2 \binom{n}{s}.$$

Demonstração. Temos que

$$\binom{n}{k-1} \bigg/ \binom{n}{k} = \frac{k!(n)_{k-1}}{(k-1)!(n)_k} = \frac{k}{n-k+1} \leq \frac{s}{n-s+1} \leq \frac{n/2}{n/2+1} < 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^s \binom{n}{i} &\leq \binom{n}{s} \left(1 + \frac{s}{n-s+1} + \left(\frac{s}{n-s+1} \right)^2 + \dots \right) \\
&= \binom{n}{s} \frac{1}{1 - s/(n-s+1)} \\
&= \binom{n}{s} \left(1 + \frac{1}{n-2s+1} \right).
\end{aligned}$$

□

Corolário 29 (do Teorema 24). *Seja p um primo. Se $\mathcal{F} \subset \binom{[4p-1]}{2p-1}$ é tal que $|F \cap F'| \neq p-1$ para todo $F, F' \in \mathcal{F}$ com $F \neq F'$, então*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}| &\leq 2 \binom{4p-1}{2p-1} \\
&< 1,7548^{4p-1}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Tome $L = \{0, \dots, p-2\}$. Como $|F| = 2p-1 \equiv p-1 \pmod{p}$ para todo $F \in \mathcal{F}$, temos que $|F| \notin L \pmod{p}$. Sabemos também que para todo $F, F' \in \mathcal{F}$ com $F \neq F'$, temos que $|F \cap F'| \in \{0, \dots, 2p-2\} \setminus \{p-1\}$. Portanto, $|F \cap F'| \in L \pmod{p}$ para todo $F, F' \in \mathcal{F}$ distintos. Pelo Teorema 24,

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i}.$$

Pelo Lema 28,

$$|\mathcal{F}| < 2 \binom{4p-1}{2p-1}.$$

Aplicando Stirling, temos, para todo p suficientemente grande,

$$|\mathcal{F}| < 1,7548^{4p-1}.$$

□

11.3. Seja $\chi_\ell(\mathbb{R}^n)$ o menor inteiro para o qual existe uma coloração de \mathbb{R}^n tal que quaisquer 2 pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $\text{dist}(x, y) = \ell$ têm cores diferentes.

11.4. Quando $n = 2$, temos $4 \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq 7$.

11.5. Seja $\alpha(\mathcal{G}_p) = \max\{|W| : W \subset V(\mathcal{G}_p) \text{ tal que existe aresta com suas duas extremidades em } W\}$.

O Corolário 29 nos diz que $\alpha(\mathcal{G}_p)$ satisfaz a cota $\alpha(\mathcal{G}_p) \leq 2 \binom{4p-1}{p-1} < 1,76^n$.

Suponha $F, F' \subset [n]$, $|F| = |F'| = k$. Sejam $v^{(F)}$ e $v^{(F')}$ os vetores característicos de F e F' , respectivamente. Então, $|F \triangle F'| = 2(k - |F \cap F'|)$ e $\text{dist}(v^{(F)}, v^{(F')})^2 = |F \triangle F'| = 2(k - |F \cap F'|)$. Suponha agora que \mathcal{F} é como no enunciado do Corolário 29. Então para qualquer $F, F' \in \mathcal{F}$ com $F \neq F'$, temos que $v^{(F)} \in \mathbb{R}^n$, $n = 4p-1$ e $\text{dist}(v^{(F)}, v^{(F')}) \neq \sqrt{2p}$. Consideremos o grafo \mathcal{G}_p com conjunto de vértices $\{v^{(S)} : S \in \binom{[n]}{2p-1}\}$ tendo $\{v^{(S)}, v^{(S')}\}$ como aresta se $\text{dist}(v^{(S)}, v^{(S')}) = \sqrt{2p}$. Claramente, $|V(\mathcal{G}_p)| = \binom{n}{2p-1} = \binom{4p-1}{2p-1}$.

Temos a seguinte cota simples para $\chi(\mathcal{G}_p)$:

$$\chi(\mathcal{G}_p) \geq \frac{|V(\mathcal{G}_p)|}{\alpha(\mathcal{G}_p)}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{G}_p) &\geq \frac{\binom{4p-1}{2p-1}}{2\binom{4p-1}{p-1}} \\ &\geq \frac{(1/4p)2^{4p-1}}{(1,76)^{4p-1}} \\ &\geq (1,1397)^n. \end{aligned}$$

Claramente, $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi_{\sqrt{2p}}(\mathbb{R}^n) \geq \chi(\mathcal{G}_p) \geq 1,1397^{4p-1}$.

Discutimos agora uma construção de Frankl e Wilson '81 [11]. Seja $V = \binom{[n]}{p^2-1}$ com p primo e $n > 2p^2$. Definimos $G(n, p)$ como o grafo com conjunto de vértices V e se $A, B \in V$ ($A \neq B$), então $\{A, B\}$ é aresta de G se e somente se $|A \cap B| \not\equiv -1 \pmod{p}$.

Teorema 30. *O grafo $G(n, p)$ não contém mais que $2\binom{n}{p-1}$ vértices mutuamente adjacentes e não contém mais que $2\binom{n}{p-1}$ vértices mutuamente não-adjacentes. Isto é, $G(n, p)$ mostra que*

$$\binom{n}{p^2-1} \rightarrow \left(2\binom{n}{p-1} + 1, 2\binom{n}{p-1} + 1 \right).$$

11.6. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Mostre que, quando $n \rightarrow \infty$, $\chi(\mathbb{R}^n) \leq n^{n/2}$.
2. Mostre que, quando $n \rightarrow \infty$, $\chi(\mathbb{R}^n) \leq c^n$, para alguma constante c .

12. TEORIA EXTREMAL DOS CONJUNTOS - CONTINUAÇÃO

6/10/2009 e 13/10/2009

Definição 31. O número de independência $\alpha(G)$ de um grafo G é dado pela quantidade de vértices de seu maior conjunto independente, isto é, conjunto de vértices dois a dois não adjacentes.

Definição 32. A cintura $g(G)$ de um grafo G é o comprimento do menor circuito em G .

Definição 33. Denotamos por $\text{hom}(G) = \max\{\alpha(G), \omega(G)\}$ o tamanho do maior conjunto homogêneo de G .

Definição 34. Sabemos que $R_2(t) = R(t, t) = \min\{n: K^n \rightarrow (K^t, K^t)\}$. Observe que, alternativamente, $R(t, t) = \min\{n: \text{para todo } G^n, \text{hom}(G) \geq t\}$.

Seja $V = \binom{[n]}{p-1}$ com p primo e $n > 2p^2$. Definimos $G(n, p)$ como o grafo com conjunto de vértices V e, se $A, B \in V$ com $A \neq B$, então $\{A, B\}$ é aresta de G se e somente se temos que $|A \cap B| \equiv -1 \pmod{p}$.

Teorema 35 (Frankl–Wilson '81 [11]). Para $G(n, p)$ construído como acima,

$$\text{hom}(G(n, p)) \leq 2 \binom{n}{p-1}.$$

Demonstração. Tomando $L = \{p-1, 2p-1, \dots, (p-1)p-1\}$, pelo Corolário 27 e pelo Lema 28, temos que $\omega(G(n, p)) < 2 \binom{n}{p-1}$. Aplicando o Teorema 24 com $L = \{0, 1, \dots, p-2\}$ e o primo p , temos que $\alpha(G(n, p)) < 2 \binom{n}{p-1}$. \square

Pelo Teorema 35, $G(n, p)$ prova explicitamente que

$$\binom{n}{p^2-1} \nrightarrow \left(2 \binom{n}{p-1}, 2 \binom{n}{p-1} \right).$$

Corolário 36. Seja $w(t) = \log t / 4 \log \log t$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ e t suficientemente grande, podemos construir explicitamente um grafo G com mais que $t^{(1-\varepsilon)w(t)}$ vértices com $\text{hom}(G) < t$.

Observação. Este grafo G fornece explicitamente a cota $R_2(t) > t^{(1-\varepsilon)w(t)}$.

Demonstração. Basta tomar n e p apropriadamente na construção de Frankl e Wilson. Seja $n = p^3$ e p o maior primo tal que $\binom{p^3}{p-1} < t$. Para qualquer $\delta > 0$, se t é grande o suficiente, p está no intervalo $(1-\delta) \log t / 2 \log \log t$ e $(1+\delta) \log t / 2 \log \log t$. \square

Observação. Há espetaculares resultados recentes melhorando o Corolário 36.

Definição 37. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. O diâmetro de X é dado por $\text{diam}(X) = \sup\{\text{dist}(x, x') : x, x' \in X\}$.

Definição 38. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma antípoda se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in X$.

Definição 39. A bola aberta de raio r , centrada no ponto x , denotada por $B_r(x)$, é o conjunto dos pontos y em \mathbb{R}^n tais que $\text{dist}(x, y) < r$.

Definição 40. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, para todo $x \in X$, existe r tal que $B_r(x) \subset X$.

Definição 41. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se seu complementar é aberto.

Definição 42. Uma partição $S_1 \cup \dots \cup S_n$ de um conjunto S em n partes é dita *partição de Borsuk* se $\text{diam}(S_i) < \text{diam}(S)$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Definição 43. Dado S , dizemos que $f(S)$ é o menor N tal que S possui uma partição de Borsuk com N partes. Ademais, pomos $f(n) = \max_S f(S)$, onde o máximo é sobre todos os conjuntos $S \subset \mathbb{R}^n$ com diâmetro finito.

Conjectura 44 (Borsuk). *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ com diâmetro 1. Então X possui uma partição de Borsuk com $n + 1$ partes.*

A Conjectura 44 diz que $f(n) \leq n + 1$. É fácil provar que $f(n) \leq (3 + o(1))^n$ e também sabe-se que $f(n) \leq (1,23 + o(1))^n$. Em 1993, Jeff Kahn e Gil Kalai mostraram um contra-exemplo para esta conjectura.

Teorema 45 (Kahn–Kalai '93 [16]). *Para n suficientemente grande, temos que $f(n) \leq 1,2\sqrt{n}$.*

Definição 46. Considere $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 47 (Borsuk–Ulam '33). *As seguintes afirmações são válidas.*

- (i) *Se $S^n = U_0, \dots, U_n$ com $U_i \subset S^n$ aberto para todo $0 \leq i \leq n$, então existe $x \in S^n$ e $0 \leq i \leq n$ tal que $x \in U_i$ e $-x \in U_i$.*
- (ii) *Se $S^n = F_0, \dots, F_n$ com $F_i \subset S^n$ fechado para todo $0 \leq i \leq n$, então existe $x \in S^n$ e $0 \leq i \leq n$ tal que $x \in F_i$ e $-x \in F_i$.*
- (iii) *Para toda função contínua $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*
- (iv) *Não existe função antípoda $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$.*

Observação 1. Os itens (i) e (ii) do Teorema 47 também são conhecidos por Teorema de Lyusternik–Shnirelmann.

Observação 2. Segue do Teorema 47 que $f(n) > n$.

Demonstração do Teorema 45. Provamos aqui uma versão levemente mais fraca do Teorema 45 (provamos que $f(n) \geq 1,1\sqrt{n}$). Fixe um primo p . Considere

$$\Omega = \{x = (x_i)_{i=1}^{4p} \in \{-1, 1\}^{4p} : \sum_{i=1}^{4p} x_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{4p}.$$

Para cada $x \in \Omega$, definimos $F_x = \{i : x_i = -1\} \subset [4p]$. Temos que $\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq 4p} x_i y_i = 0$, para quaisquer $x, y \in \Omega$, se e somente se $2(2p - |F_x \cap F_y|) = 2p$, isto é, $|F_x \cap F_y| = p$.

Seja $X \subset \Omega$ tal que, para todos $x, y \in X$ com $x \neq y$, temos $\langle x, y \rangle \neq 0$. Desejamos saber quão grande pode ser o conjunto X . Equivalentemente, gostaríamos de saber quão grande pode ser a família de conjuntos $\mathcal{F} \subset \binom{[4p]}{2p}$ tal que, para todos $F, F' \in \mathcal{F}$ com $F \neq F'$, temos $|F \cap F'| \neq p$.

Seja $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{F}' \cap \{F, F' = [4p] \setminus F\}| \leq 1$ para todo $F \in \binom{[4p]}{2p}$. Claramente temos que $|\mathcal{F}| \leq 2|\mathcal{F}'|$. Ademais, \mathcal{F}' satisfaz as hipóteses do Teorema 24 quando $L = \{1, \dots, p-1\}$. Assim $|\mathcal{F}'| \leq \sum_{0 \leq j \leq p-1} \binom{4p}{j}$ e, portanto, $|\mathcal{F}| \leq 2|\mathcal{F}'| \leq 2 \sum_{0 \leq j \leq p-1} \binom{4p}{j} \approx 1,75^{4p}$. Com isso, o conjunto $X \subset \Omega$ definido anteriormente é tal que $|X| \leq 2 \sum_{0 \leq j \leq p-1} \binom{4p}{j}$.

Consideremos agora a função $h : \mathbb{R}^{4p} \rightarrow \mathbb{R}^{4p \times 4p}$ tal que $h(x) = xx^T = (x_i x_j)_{i,j=1}^{4p}$. Considere o conjunto $V = h(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, com $n = (4p)^2$. Temos, para $x, y \in \Omega$, que

$$\begin{aligned} \|h(x) - h(y)\|^2 &= \|(x_i x_j)_{i,j=1}^{4p} - (y_i y_j)_{i,j=1}^{4p}\|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{4p} (x_i x_j - y_i y_j)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{4p} (x_i^2 x_j^2 - 2x_i y_i x_j y_j + y_i^2 y_j^2)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{4p} x_i^2 x_j^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{4p} x_i y_i x_j y_j + \sum_{i,j=1}^{4p} y_i^2 y_j^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{4p} x_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{4p} x_j^2 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^{4p} x_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^{4p} x_j y_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{4p} y_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{4p} y_j^2 \right) \\ &= \|x\|^4 - 2\langle x, y \rangle^2 + \|y\|^4 \\ &= 2(4p)^2 - 2\langle x, y \rangle^2 \\ &\leq 2(4p)^2, \end{aligned}$$

com igualdade se e somente se $\langle x, y \rangle = 0$. Assim $\text{diam}(V) = 4p\sqrt{2}$. Ademais, $W \subset V$ tem $\text{diam}(W) = \text{diam}(V)$ se e somente se existem $x, y \in \Omega$ tais que $h(x), h(y) \in W$ e $\langle x, y \rangle = 0$. Mas vimos que se $X \subset \Omega$ não contém x, y ortogonais, então $|X| \leq 2 \sum_{0 \leq j \leq p-1} \binom{4p}{j}$. Assim qualquer partição de Borsuk de $V \subset \mathbb{R}^n$ tem pelo menos $\binom{4p}{2p}/2 \sum_{0 \leq j \leq p-1} \binom{4p}{j}$ partes. Portanto, provamos que $f(n) \geq f(V) \geq (1,1)^{\sqrt{n}}$, para n suficientemente grande. \square

Paul Erdős mostrou que, para quaisquer q, ℓ , existe um grafo G com $\chi(G) \geq q$ e $g(G) \geq \ell$ (veja exercício 3.6.1).

Definição 48. O grafo de Borsuk $B^n(\varepsilon)$ é o grafo formado pelo conjunto de vértices S^n e $\{x, y\}$ é uma aresta de $B^n(\varepsilon)$ se e somente se $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$.

Podemos observar que

- (a) $B^n(\varepsilon)$ tem circuitos curtos: $C^4 \subset B^n(\varepsilon)$;
- (a) $B^n(\varepsilon)$ não tem circuitos ímpares curtos: para todo $k \geq 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $C^{2k'+1}$ não está contido em $B^n(\varepsilon)$, para todo $k' \leq k$.

Definição 49. O grafo de Kneser $K(n, r)$ é o grafo com conjunto de vértices $V = \binom{[n+2r-1]}{r}$ e, se $A, B \in V$ com $A \neq B$, então $\{A, B\}$ é aresta de $K(n, r)$ se e somente se $|A \cap B| = \emptyset$.

Kneser conjecturou em 1955 que $\chi(K(n, r)) = n + 1$. Este resultado foi provado independentemente por Lovász [18] e Bárány [2].

12.1. Problemas e exercícios. Todos estão convidados a trabalhar nos seguintes problemas, exercícios e observações.

1. Prove que o Teorema 47 implica que $\chi(B^n(\varepsilon)) > n + 1$ (Dica: utilize o item (ii) do teorema).

13. TEORIA EXTREMAL DOS CONJUNTOS - CONTINUAÇÃO

20/10/2009

Lema 50. *Todo triângulo de lados x , x e $\sqrt{6}$, com $x \geq 2$, é Ramsey.*

Demonstração. Consideremos o triângulo $T = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\}$. Seja $r \in \mathbb{N}^*$ fixo. Tome n tal que $n \rightarrow (3)_r^2$, isto é, se colorimos os pares em $[n]$ com r cores, há $i < j < k$ tal que $\{i, j\}$, $\{j, k\}$ e $\{i, k\}$ têm a mesma cor. Para cada $P = \{a, b\}$, com $1 \leq a < b \leq n$, seja

$$y(P) = (0 \dots 0 \quad -1 \quad 0 \dots 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Temos assim um conjunto $L = \{y(P) \in \mathbb{R}^n : P \in \binom{[n]}{2}\}$ de $\binom{n}{2}$ pontos do \mathbb{R}^n . Afirmamos que $L \rightarrow (T)_r$: qualquer r -coloração de L é tal que existem três pontos y_1, y_2 e y_3 em L , todos da mesma cor, com y_1, y_2 e y_3 formando uma cópia de T . Fixe uma tal r -coloração $\chi : L \rightarrow [r]$. Defina a seguinte r -coloração dos pares em $[n]$:

$$\chi'(\{a, b\}) = \chi(y(\{a, b\})),$$

para todo $1 \leq a < b \leq n$. Pela escolha de n , existem $1 \leq i < j < k \leq n$ tal que χ' associa a mesma cor aos pares $\{i, j\}$, $\{i, k\}$ e $\{j, k\}$:

$$\begin{aligned} y(\{i, j\}) &= (\quad -1 \quad 1 \quad \quad) \stackrel{def}{=} y_1 \\ y(\{i, k\}) &= (\quad -1 \quad \quad 1 \quad) \stackrel{def}{=} y_2 \\ y(\{j, k\}) &= (\quad \quad -1 \quad 1 \quad) \stackrel{def}{=} y_3. \end{aligned}$$

Portanto, T é Ramsey (Observe que isso prova o Exercício 8.3.3).

Considere $A, B, C \in \mathbb{R}$ e a configuração $\{0, w\} \subset \mathbb{R}$ e seja $K_w = \{A, B, C\} * \{0, w\} \subset \mathbb{R}^4$. Pelo Teorema do Produto (Teorema 12), temos que K_w é Ramsey. Dado o triângulo T_x de lados x, x e $\sqrt{6}$, temos que $T_x \subset K_w$ para $w = w(x)$ adequado desde que $x \geq \sqrt{2}$, concluindo a prova do lema. \square

Lema 51. *Seja $t \geq 2$ um inteiro. O triângulo de lados $\sqrt{2t}$, $\sqrt{2t}$ e $\sqrt{8t-6}$ é Ramsey.*

Demonstração. Seja $r \in \mathbb{N}^*$ fixo. Considere o triângulo $T = \{y_1, y_2, y_3\}$ onde

$$\begin{aligned} y_1 &= (\overbrace{1, 2, \dots, t-1, t, t-1, \dots, 2, 1}^{2t-1}, 0, 0) \in \mathbb{R}^{2t+1} \\ y_2 &= (0, 1, 2, \dots, t-1, t, t-1, \dots, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^{2t+1} \\ y_3 &= (0, 0, 1, 2, \dots, t-1, t, t-1, \dots, 2, 1) \in \mathbb{R}^{2t+1}. \end{aligned}$$

Temos que $\|y_1 - y_2\| = \|y_2 - y_3\| = \sqrt{2}$ e $\|y_1 - y_3\| = \sqrt{8t-6}$. Escolha $n \rightarrow (2t+1)_r^{2t-1}$. Considere o conjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ cujos membros são os pontos $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ tal que suas coordenadas não nulas são, nessa ordem, $1, 2, \dots, t-1, t, t-1, \dots, 2, 1$. Temos $|L| = \binom{n}{2t-1}$. Portanto, $L \rightarrow (T)_r$ (É um bom exercício provar este fato). \square

Teorema 52. *Todo triângulo isósceles é Ramsey.*

Demonstração. Sabemos que $2\sqrt{2t}/\sqrt{8t-6} \rightarrow 1$. Portanto, pelo Lema 51, temos triângulos isósceles arbitrariamente obtusos que são Ramsey. Pelo Lema 50 e pelo Teorema do Produto, temos que todo triângulo isósceles é Ramsey. \square

14. TEORIA DE RAMSEY EUCLIDIANA

10/11/2009

Nesta seção provamos o seguinte resultado.

Teorema 53. *Toda configuração de Ramsey é esférica.*

Para demonstrar o Teorema 53, precisamos de dois lemas auxiliares.

Lema 54. *Uma configuração $K = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ não é esférica se e somente se existem números reais c_1, c_2, \dots, c_k não todos nulos tais que*

- (i) $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(x_i - x_0) = 0$;
- (ii) $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2) = b \neq 0$.

Demonstração. (\Leftarrow) Suponha, por absurdo, que K seja esférica. Assim, existe uma esfera de centro w e raio r que contém K . Suponha que existam c_1, c_2, \dots, c_k tais que (i) seja válida. Temos que

$$\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2 = \|x_i - w\|^2 - \|x_0 - w\|^2 + 2\langle x_i - x_0, w \rangle.$$

Assim,

$$\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2) = 2 \sum_{1 \leq i \leq k} \langle x_i - x_0, w \rangle = 2 \left\langle \sum_{1 \leq i \leq k} c_i(x_i - x_0), w \right\rangle = 0.$$

Portanto, temos que (ii) não é válida, uma contradição.

(\Rightarrow) Seja K uma configuração não esférica. Ademais, suponha K minimalmente não-esférica, isto é, todo subconjunto próprio de K é esférico. Observe que K é afim-independente, ou seja, se os vetores $x_i - x_0$, para $1 \leq i \leq k$, são linearmente independentes, então K é esférica. De fato, para cada i , seja H_i o hiperplano afim que contém os pontos equidistantes a x_0 e x_i . Mostremos que esses hiperplanos se intersectam em pelo menos um ponto.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle x_i - x_0, y - (x_i + x_0)/2 \rangle = 0$ para $1 \leq i \leq k$. Assim temos, para todo $1 \leq i \leq k$, que $\langle y, x_i - x_0 \rangle = c_i$, com c_i constante.

Sejam $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$. Assim,

¹Os resultados desta seção foram apresentados pelo aluno Eric Ossami.

$$y_1(x_{11} - x_{01}) + \dots + y_n(x_{1n} - x_{0n}) = 0$$

$$y_1(x_{21} - x_{01}) + \dots + y_n(x_{2n} - x_{0n}) = 0$$

$$\vdots$$

$$y_1(x_{n1} - x_{01}) + \dots + y_n(x_{nn} - x_{0n}) = 0$$

Como os vetores $x_i - x_0$ ($1 \leq i \leq k$) são linearmente independentes e existem $k \leq n$ equações, então esse sistema possui solução.

Como K não é esférico, existem reais c_1, \dots, c_k não todos nulos tais que (i) vale. Suponha, sem perda de generalidade, $c_k \neq 0$ e que a esfera que contém x_0, \dots, x_{k-1} tem centro w e raio r . Com isso,

$$\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(\|x_i\|^2 - \|x_0\|^2) = \sum_{1 \leq i \leq k} c_i(\|x_i - w\|^2 - \|x_0 - w\|^2) + 2 \left\langle \sum_{1 \leq i \leq k} c_i(x_i - x_0), w \right\rangle \neq 0.$$

Portanto, (ii) vale.

□

Lema 55. *Sejam c_1, \dots, c_k e b números reais, com $b \neq 0$. Existem um inteiro r e alguma r -coloração de \mathbb{R} tal que toda solução da equação $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(y_i - y_0) = b$, com $y_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq k$), não é monocromática.*

Provaremos um resultado mais geral.

Teorema 56. *Seja K um corpo de característica 0 e c_1, \dots, c_k , b elementos de K com $b \neq 0$. Existe uma $(2k)^k$ -coloração ψ de K tal que a equação $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(y_i - y'_i) = b$ não tem nenhuma solução em K , com $\psi(y_i) = \psi(y'_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$.*

É claro que o Teorema 56 implica o Lema 55. Basta tomar $y'_i = y_0$ ($1 \leq i \leq k$), assim temos que $\psi(y_i) = \psi(y_0)$, ou seja, não existe solução monocromática. Provaremos, a seguir, um lema auxiliar que será utilizado na prova do Teorema 56.

Lema 57. *Existe uma $2k$ -coloração ϕ de \mathbb{R} tal que a equação $\sum_{1 \leq i \leq k} (x_i - x'_i) = 1$ não possui solução com $\phi(x_i) = \phi(x'_i)$, para todo $1 \leq i \leq k$.*

Demonstração. Consideramos $\mathbb{R}_2 = \{\bar{a} : a \in \mathbb{R}\}$, onde $\bar{a} = \{x \in \mathbb{R} : x \equiv a \pmod{2}\}$, para definir uma coloração ϕ como no enunciado. Podemos identificar \mathbb{R}_2 com o intervalo $[0, 2)$.

Seja $r \in \mathbb{R} \mapsto \bar{r} \in \mathbb{R}_2$ a projeção canônica. Observamos que é equivalente a $\bar{r} = 2\{r/2\}$. Particionamos o intervalo $[0, 2)$ em $2k$ intervalos de comprimento $1/k$ cada. Sejam $I_i = [(i-1)/k, i/k)$, para todo $1 \leq i \leq 2k$, tais intervalos. Tome $\phi(r) = i$, onde i é tal que $\bar{r} \in I_i$. Observe que se $\phi(x) = \phi(x')$, então x e $x' \in I_i \Rightarrow |x - x'| \leq 1/k$. Mas observe que $x = 2\lfloor x/2 \rfloor + 2\{x/2\}$ e $x' = 2\lfloor x'/2 \rfloor + 2\{x'/2\}$, logo temos que $x - x' = 2(\lfloor x/2 \rfloor - \lfloor x'/2 \rfloor) + (\bar{x} - \bar{x}') \Rightarrow x - x' = 2m + \theta$, onde $x \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \theta < 1/k$.

Suponha, por absurdo, que a equação $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(y_i - y_0) = b$ possui solução com $\phi(x_i) = \phi(x'_i)$, para todo $1 \leq i \leq k$. Então, para todo i , temos que $|x_i - x'_i| = 2m_i + \theta_i$ para algum inteiro m_i e $|\theta_i| < 1/k$. Assim, $\sum_{1 \leq i \leq k} (x_i - x'_i) = 2m + \theta$, onde m é inteiro e $0 \leq |\theta| < 1$. Mas sabemos que $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(y_i - y_0) = b$ é válida, portanto $2m + \theta = 1$, uma contradição. \square

Demonstração do Teorema 56. Considere K um espaço vetorial sobre o conjunto \mathbb{Q} . Fixe uma aplicação linear $T : K \mapsto \mathbb{Q}$ tal que $T(b) = 1$. Tal aplicação linear existe pois vale a seguinte proposição da álgebra linear:

Proposição. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre K , se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U e, mais ainda, $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$, então existe uma única transformação linear $T : U \mapsto V$ tal que $T(u_i) = v_i$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Fixe uma $2k$ -coloração ϕ de \mathbb{R} como no Lema 57. Para cada $r \in K$, observe que podemos tomar $\psi(r) = (\phi(T(c_i r)))_{1 \leq i \leq k} = (\phi(T(c_1 r)), \dots, \phi(T(c_k r))) \in [2k]^k$. Portanto temos que ψ é uma $(2k)^k$ -coloração de K . Suponha que temos uma solução de $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(y_i - y'_i) = b$ em que $\psi(y_i) = \psi(y'_i)$, para todo $1 \leq i \leq k$.

Aplicando T em $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(y_i - y'_i) = b$, temos que $\sum_{1 \leq i \leq k} (T(c_i y_i) - T(c_i y'_i)) = 1$. Com isso, tome $x_i = T(c_i y_i)$ e $x'_i = T(c_i y'_i)$. Portanto, para todo $1 \leq i \leq k$, a i -ésima coordenada de $\psi(y_i)$, que é $\phi(T(c_i y_i)) = \phi(x_i)$, coincide com a i -ésima coordenada de $\psi(y'_i)$, que é $\psi(T(c_i y'_i)) = \phi(x'_i)$. Uma contradição com a escolha de ϕ . \square

Observação. Para $K = \mathbb{R}$, podemos tomar $T(y) = y/b$ ($y \in \mathbb{R}$) e usar o fato de ϕ estar definida sobre a reta \mathbb{R} .

Demonstração do Teorema 53. Seja $K = \{x_0, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}$ uma configuração Ramsey. Suponha por contradição que K não é esférica, então, pelo Lema 54, existem reais c_1, \dots, c_k não todos nulos e $b \neq 0$ satisfazendo as condições (i) e (ii) do Lema 54.

Fixe uma r -coloração ψ de \mathbb{R} tal que a equação $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(y_i - y_0) = b$ não tenha solução monocromática $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$. Pelo Lema 55, tal coloração existe. Defina uma r -coloração de \mathbb{R}^n ,

pondo $\phi(x) = \psi(\|x\|^2)$. Mostraremos que essa coloração não cria uma cópia monocromática de K . A única restrição que temos sobre n é que $K \subset \mathbb{R}$.

Suponha que $K' = \{x'_0, \dots, x'_k\} \subset \mathbb{R}$ é uma cópia monocromática de K na coloração ϕ . Sem perda de generalidade, estendemos a aplicação $\iota : x_i \mapsto x'_i$ ($0 \leq i \leq k$) a uma isometria de \mathbb{R}^n . Provemos que as identidades as condições (i) e (ii) valem para os pontos x'_i ($1 \leq i \leq k$) de K' . É claro que $\sum_{1 \leq i \leq k} c_i(x'_i - x'_0) = 0$. Assim, a condição (i) vale para os x'_i , com $1 \leq i \leq k$.

Mostraremos que a condição (ii) é válida para x'_i . Observamos que K' pode ser obtida a partir de K por uma aplicação de uma isometria que preserve a origem, seguida de uma translação. Suponha então que ι preserve a origem. É claro que $\|x'_i\|^2 = \|\iota(x_i)\|^2 = \|x_i\|^2$ para todo $1 \leq i \leq k$ e a condição (ii) vale neste caso. Seja uma translação por $z \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq k} \|x_i + z\|^2 - \|x_0 + z\|^2 &= \sum_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|^2 - \|x_0\|^2 - 2 \left\langle z, \sum_{1 \leq i \leq k} c_i(x_i - x_0) \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|^2 - \|x_0\|^2 \\ &= b \neq 0. \end{aligned}$$

Assim a condição (ii) vale para x'_i . Mas como K' é monocromático, de acordo com ϕ isto implica que, tomando $y_i = \|x_i\|^2$, para todo $1 \leq i \leq k$, temos uma solução monocromática de (ii) de acordo com ψ , uma contradição. \square

REFERÊNCIAS

- [1] K. Appel and W. Haken, *The solution of the four-color-map problem*, Sci. Amer. **237** (1977), no. 4, 108–121, 152.
- [2] I. Bárány, *A short proof of Kneser’s conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), no. 3, 325–326.
- [3] N. G. de Bruijn and P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **54** = Indagationes Math. **13** (1951), 369–373.
- [4] P. Erdős, C. Ko, and R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **12** (1961), 313–320.
- [5] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292–294.
- [6] P. Erdős, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, and E. G. Straus, *Euclidean Ramsey theorems. I*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 341–363.
- [7] ———, *Euclidean Ramsey theorems. II*, (1975), 529–557. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10.
- [8] ———, *Euclidean Ramsey theorems. III*, (1975), 559–583. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10.
- [9] P. Erdős and G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. **2** (1935), 463–470.
- [10] P. Frankl and V. Rödl, *A partition property of simplices in Euclidean space*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 1, 1–7.
- [11] P. Frankl and R. M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), no. 4, 357–368.
- [12] P. Frankl and V. Rödl, *Forbidden intersections*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), no. 1, 259–286.
- [13] R. L. Graham, *Recent trends in Euclidean Ramsey theory*, Discrete Math. **136** (1994), no. 1-3, 119–127, Trends in discrete mathematics.
- [14] R. Graham, *Old and new problems and results in Ramsey theory*, **17** (2008), 105–118.
- [15] J. R. Isbell, *An inequality for incidence matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 216–218.
- [16] J. Kahn and G. Kalai, *A counterexample to Borsuk’s conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), no. 1, 60–62.
- [17] G. Katona, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **15** (1964), 329–337.
- [18] L. Lovász, *Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), no. 3, 319–324.
- [19] K. N. Majumdar, *On some theorems in combinatorics relating to incomplete block designs*, Ann. Math. Statistics **24** (1953), 377–389.
- [20] C. G. Moreira and Y. Kohayakawa, *Tópicos em combinatória contemporânea*, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001, 23o Colóquio Brasileiro de Matemática. [23rd Brazilian Mathematics Colloquium].
- [21] W. Morris and V. Soltan, *The Erdős-Szekeres problem on points in convex position—a survey*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **37** (2000), no. 4, 437–458 (electronic).
- [22] Z. Nagy, *A certain constructive estimate of the Ramsey number*, Mat. Lapok **23** (1972), 301–302 (1974).
- [23] R. Rado, *Axiomatic treatment of rank in infinite sets*, Canadian J. Math. **1** (1949), 337–343.
- [24] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. **30** (1930), 264–286.

- [25] I. Schur, *Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{\varrho}$* , Jber. Deutsch. Math.-Verein **25** (1916), 114–117.