O Teorema do Índice de Morse para Métricas Indefinidas e para Sistemas Hamiltonianos

Daniel Victor Tausk

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**
Orientador: **Prof. Dr. Paolo Piccione**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP

–São Paulo, setembro de 2000–

O Teorema do Índice de Morse para Métricas Indefinidas e para Sistemas Hamiltonianos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Daniel Victor Tausk e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, setembro de 2000.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paolo Piccione	IME - USP
Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito	IME - USP
Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa	IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Caio José Negreiros	IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Celso Melchiades Doria	UFSC

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Paolo Piccione pela excelente orientação, pela sugestão do tema que deu origem a este trabalho e principalmente pela minha introdução no mundo da pesquisa em matemática.

Resumo

Se $(M, \mathfrak{g})$ é uma variedade Riemanniana e $\gamma\colon [a, b] \to M$ é uma geodésica então o clássico Teorema do Índice de Morse diz que o *índice geométrico* de γ (i.e., o número de pontos conjugados ao longo de γ contados com multiplicidade) coincide com o *índice de Morse* de γ (i.e., o índice da segunda variação do funcional ação $E(\mu) = \frac{1}{2}\int_a^b \mathfrak{g}(\mu', \mu')$ no ponto crítico γ). Nesta tese nós provamos uma versão do Teorema do Índice de Morse para geodésicas em variedades semi-Riemannianas, i.e., variedades equipadas com um tensor métrico $\mathfrak{g}$ de sinal indefinido. Consideramos o caso geral de geodésicas com extremos variáveis em subvariedades de M. No caso semi-Riemanniano o índice geométrico é substituído pelo *índice de Maslov*, que genericamente fornece uma contagem algébrica dos pontos conjugados ao longo da geodésica; o índice de Morse (que é em geral infinito) é substituído por uma diferença entre o índice e o co-índice de restrições adequadas da segunda variação do funcional ação em γ. Provamos também um Teorema do Índice para soluções de sistemas Hamiltonianos em variedades simpléticas equipadas de uma distribuição Lagrangeana.

Abstract

If $(M, \mathfrak{g})$ is a Riemannian manifold and $\gamma\colon [a, b] \to M$ is a geodesic then the classical Morse Index Theorem states that the *geometric index* of γ (i.e., the number of conjugate points along γ counted with multiplicity) is equal to the *Morse index* of γ (i.e., the index of the second variation of the action functional $E(\mu) = \frac{1}{2}\int_a^b \mathfrak{g}(\mu', \mu')$ at the critical point γ). In this thesis we prove a version of the Morse Index Theorem for geodesics in semi-Riemannian manifolds, i.e., manifolds endowed with an indefinite metric tensor $\mathfrak{g}$. We consider the general case of geodesics with endpoints varying in two submanifolds of M. In the semi-Riemannian case the geometric index is replaced by the *Maslov index* which gives generically an algebraic count of the conjugate points along the geodesic; the Morse index (which is infinite in general) is replaced by a difference between the index and the co-index of suitable restrictions of the second variation of the action functional at γ. We also prove an index theorem for solutions of Hamiltonian systems on symplectic manifolds endowed with a Lagrangian distribution.

Sumário

Introdução

Uma geodésica numa variedade Riemanniana $(M, \mathfrak{g})$ é uma curva diferenciável $\gamma\colon [a,b] \to M$ que é um ponto crítico do *funcional ação* (conhecido também como *funcional energia*)

$$E(\mu) = \frac{1}{2}\int_a^b \mathfrak{g}(\mu', \mu')\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

definido no espaço das curvas $\mu\colon [a,b] \to M$ ligando dois pontos fixados de M. Um tal ponto crítico γ nem sempre minimiza a ação E mas em geral é possível que existam um número finito de direções linearmente independentes pelas quais pode-se diminuir o valor de $E(\gamma)$. Esse número é precisamente o índice da *segunda variação* de E no ponto γ (também conhecida como a *forma do índice* de γ) e é chamado o *índice de Morse* da geodésica γ; recorde que, em geral, o *índice* de uma forma bilinear simétrica B é definido como a maior dimensão possível de um subespaço onde B é definida negativa.

O famoso *Teorema do Índice de Morse* relaciona o índice de Morse de uma geodésica com algumas propriedades geométricas da mesma; mais explicitamente, tal teorema diz que o índice de Morse de uma geodésica γ coincide com o *índice geométrico* de γ, i.e., o número de pontos conjugados $\gamma(t)$, $t \in \left]a,b\right[$, ao longo de γ, contados com multiplicidade. Recorde que $\gamma(t)$ é um *ponto conjugado* ao longo de γ quando existe um campo de Jacobi $\mathfrak{v}$ não nulo ao longo de γ tal que $\mathfrak{v}(a) = \mathfrak{v}(t) = 0$; um *campo de Jacobi* é uma solução da equação diferencial linear de segunda ordem:

$$\frac{\mathrm{D}^2\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t^2} = \mathcal{R}(\gamma', \mathfrak{v})\gamma', \tag{2}$$

onde $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ denota derivada covariante ao longo de γ e $\mathcal{R}$ denota o tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita. A equação (2) é conhecida como a *equação de Jacobi* e é simplesmente a *linearização* da equação geodésica $\frac{\mathrm{D}\gamma'}{\mathrm{d}t} = 0$. Recorde também que os campos de Jacobi $\mathfrak{v}$ tais que $\mathfrak{v}(a) = \mathfrak{v}(b) = 0$ constituem precisamente o *núcleo* da forma do índice; geometricamente, o ponto $\gamma(b)$ é conjugado ao longo de γ quando existe uma variação $(\gamma_s)_{s\in\left]-\varepsilon,\varepsilon\right[}$ de γ formada por geodésicas começando em $\gamma(a)$ e de modo que o extremo final $\gamma_s(b)$ seja *constante até primeira ordem*, i.e., $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_s(b)\big|_{s=0} = 0$. Para curvas parametrizadas por comprimento de arco a minimização da ação E é equivalente à minimização do comprimento de arco; obtemos então a seguinte interpretação geométrica do Teorema do Índice de Morse: observando o comportamento do segmento geodésico $\gamma|_{[a,t]}$ quando t cresce de a para b então $\gamma|_{[a,t]}$ minimiza comprimento (com respeito a curvas "vizinhas") *até que* $\gamma(t)$ *passe pelo primeiro ponto conjugado* ao longo de γ. Além dessa interpretação geométrica, a possibilidade de obter as geodésicas ligando dois pontos fixados de uma variedade como pontos críticos de um funcional permite o uso da *teoria de Morse global* (ou, mais geralmente, de técnicas de análise global) para que sejam mostrados resultados sobre existência e multiplicidade de geodésicas ligando dois pontos dados numa variedade Riemanniana; nesse contexto, o índice da segunda variação do funcional em questão tem um papel fundamental, já que o mesmo aparece nas *desigualdades de Morse* (vide [**41, 45**] e Subseção 6.4.1 deste texto).

O Teorema do Índice de Morse abriu um campo ativo de pesquisa tanto para analistas como para geômetras e o resultado original de Morse foi sucessivamente estendido em muitas direções; Beem e Ehrlich estenderam o teorema para o caso de geodésicas Lorentzianas de tipo tempo (vide [**5**]) e para geodésicas de tipo luz (vide [**4, 5**]). O caso de geodésicas com extremos variáveis em duas subvariedades foi tratado por muitos autores, incluindo Ambrose, Bolton e Kalish (vide [**2, 6, 31, 55**]); em [**46**] nós apresentamos uma prova curta e unificada dos resultados de todos esses autores (a idéia central de [**46**] também aparece no presente texto sob a forma das Proposições 6.2.27 e 6.4.13). Mencionamos tambem o trabalho de Edwards (vide [**16**]) que estendeu o teorema do índice para sistemas lineares formalmente autoadjuntos de equações diferenciais ordinárias de ordem par e também o trabalho de Smale (vide [**51**]) que provou uma versão do teorema do índice para operadores fortemente elípticos numa variedade Riemanniana.

Quando se tenta estender o teorema do índice de Morse para variedades semi-Riemannianas, i.e., variedades M equipadas com um tensor métrico $\mathfrak{g}$ não-degenerado, várias obstruções aparecem, como por exemplo:

- o índice da segunda variação do funcional ação é infinito;
- o número de pontos conjugados ao longo de um segmento geodésico pode ser infinito;
- o *operador de Jacobi*, i.e., o operador diferencial correspondente à equação (2), não é em geral auto-adjunto.

Por um *teorema do índice* entendemos qualquer resultado que relacione pontos conjugados com a segunda variação da ação ou com propriedades espectrais do operador de Jacobi. Relações entre pontos conjugados e o espectro do operador de Jacobi são estudadas em [**24, 40, 49**].

Neste texto nós provamos o primeiro teorema do índice que relaciona, em variedades semi-Riemannianas quaisquer, a segunda variação do funcional ação com os pontos conjugados ao longo de uma geodésica. Esse teorema do índice juntamente com suas aplicações ao estudo de geodésicas em variedades Lorentzianas estacionárias (vide Subseção 6.4.1) constituem as principais contribuições originais deste texto. O enunciado do teorema do índice está anunciado em [**47**] e as aplicações às variedades Lorentzianas estacionárias estão publicadas em [**19**].

O nosso teorema do índice será apresentado na Seção 6.4; no Teorema 6.4.10 consideraremos o caso de geodésicas com extremo inicial variável numa subvariedade e na Proposição 6.4.13 consideramos o caso mais geral de geodésicas com ambos os extremos variáveis. Obviamente, o caso de geodésicas com extremos fixos é obtido a partir do Teorema 6.4.10 quando nos restringimos ao caso particular que a subvariedade inicial consiste de um único ponto. Observamos que já o caso particular de geodésicas de tipo espaço em variedades Lorentzianas é muito mais complicado que o caso de geodésicas causais (i.e., de tipo tempo ou luz) tratado em [**4, 5**]; na verdade, de um certo ponto de vista, o caso de geodésicas causais não oferece grandes dificuldades adicionais sobre o caso Riemanniano (como mostramos em [**46**]; vide também Observação 6.4.15).

Olhamos agora mais de perto para o teorema do índice para geodésicas de tipo tempo ou luz em variedades Lorentzianas e explicamos o enunciado do nosso teorema; com esse objetivo, sejam $(M, \mathfrak{g})$ uma variedade semi-Riemanniana e $\gamma\colon [a,b] \to M$ uma geodésica. Denote por I a forma do índice de γ, i.e., a segunda variação do funcional ação E no ponto crítico γ; como já mencionamos, no caso Riemanniano o teorema do índice de Morse implica que I tem sempre índice finito. No caso não Riemanniano, mostra-se exatamente o contrário: o índice de I é *sempre* infinito (vide Lema 6.2.1); se γ é uma geodésica Lorentziana de tipo tempo ou luz (i.e., $\mathfrak{g}$ tem índice 1 e $\mathfrak{g}(\gamma', \gamma') \le 0$) então a restrição de I ao espaço de campos ortogonais à geodésica γ tem índice finito e em [**4, 5, 46**] mostra-se que tal índice coincide simplesmente com o índice geométrico da geodésica. Se γ é uma geodésica Lorentziana de tipo espaço (i.e., $\mathfrak{g}(\gamma', \gamma') > 0$) ou se a métrica $\mathfrak{g}$ tem índice maior que 1 então *mesmo a restrição de I ao espaço de campos ortogonais a γ tem índice infinito*. Observamos também que os pontos conjugados ao longo de uma geodésica Lorentziana de tipo espaço (ou de uma geodésica semi-Riemanniana qualquer) podem se acumular (vide [**24**]) e daí mesmo o familiar índice geométrico seria infinito[1].

Antes de explicarmos o enunciado do nosso teorema do índice, começamos discutindo um caso particular bem simples a título de motivação. Sejam $(M_1, \mathfrak{g}_1)$, $(M_2, \mathfrak{g}_2)$ variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2$ munido da métrica $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus (-\mathfrak{g}_2)$, ou seja:

$$\mathfrak{g}\big((\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2), (\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)\big) = \mathfrak{g}_1(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1) - \mathfrak{g}_2(\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2),$$

para todos $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1 \in T_{m_1}M_1$, $\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2 \in T_{m_2}M_2$ e todos $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$. Um cálculo simples mostra que a conexão de Levi-Civita ∇ de M é simplesmente a soma direta das conexões de Levi-Civita de M_1 e M_2 (mais precisamente, dos pull-backs de tais conexões pelas projeções do produto

[1] Observamos no entanto que tal situação é mais "patológica" e não ocorre por exemplo no caso real-analítico; vide Exemplo 6.1.13.

$M_1 \times M_2$ sobre as variedades M_1 e M_2). Em particular, vê-se que uma geodésica $\gamma\colon [a,b] \to M$ é simplesmente um par $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ onde γ_i é uma geodésica em M_i, $i = 1,2$; similarmente, um campo de Jacobi $\mathfrak{v}$ ao longo de γ identifica-se com um par $\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)$ onde $\mathfrak{v}_i$ é um campo de Jacobi ao longo de γ_i, $i = 1,2$. A forma do índice I de M ao longo de γ é dada por:

$$I\big((\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2), (\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)\big) = I_1(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1) - I_2(\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2),$$

onde I_i denota a forma do índice de M_i ao longo de γ_i, $i = 1,2$. Denotando então por $\mathcal{H}_i$, $i = 1,2$, o espaço de campos ao longo de γ_i que se anulam aos extremos vemos que o espaço $\mathcal{H}$ de campos ao longo de γ que se anulam aos extremos é dado pela soma direta $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$; os somandos diretos $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são I-ortogonais, sendo a restrição de I a $\mathcal{H}_1$ igual a I_1 e a restrição de I a $\mathcal{H}_2$ igual a $-I_2$. O teorema do índice de Morse clássico nos diz então que o *índice* de I em $\mathcal{H}_1$ é finito e igual ao número de pontos conjugados (contados com multiplicidade) ao longo de γ_1 em $]a,b[$; similarmente, o *co-índice* de I (i.e., o índice de $-I$) em $\mathcal{H}_2$ é finito e igual ao número de pontos conjugados (contados com multiplicidade) ao longo de γ_2 em $]a,b[$. Concluímos então que a diferença entre o índice de I em $\mathcal{H}_1$ e o co-índice de I em $\mathcal{H}_2$ é igual a uma *contagem algébrica* dos pontos conjugados ao longo de γ; veremos adiante nesta introdução que tal contagem algébrica é dada por um invariante homológico associado à geodésica chamado *índice de Maslov*.

É natural agora estudar o que ocorre quando consideramos métricas mais complicadas no produto $M_1 \times M_2$ ou mesmo quando consideramos estruturas mais complicadas do que o produto cartesiano (como fibrações e folheações); na verdade, pode-se pensar até mesmo numa variedade M munida de uma distribuição *não integrável* (que faz o papel do fibrado tangente de M_2 no caso trivial $M = M_1 \times M_2$).

Passamos agora a descrever o enunciado do nosso teorema do índice (Teorema 6.4.10); para simplificar a exposição, consideramos o caso particular de geodésicas com extremos fixos. Para cada $t \in [a,b]$ escolhemos um subespaço $\mathcal{D}_t^\gamma$ do espaço tangente $T_{\gamma(t)}M$ que seja *maximal negativo* para $\mathfrak{g}$, i.e., tal que $\mathfrak{g}$ seja definida negativa em $\mathcal{D}_t^\gamma$ e a dimensão de $\mathcal{D}_t^\gamma$ coincida com o índice de $\mathfrak{g}$; obviamente supomos também que $\mathcal{D}_t^\gamma$ depende diferenciavelmente de t. Uma tal família $\mathcal{D}^\gamma = (\mathcal{D}_t^\gamma)_{t\in[a,b]}$ será chamada uma *distribuição maximal negativa* ao longo da geodésica γ; fixada então uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}^\gamma$, dizemos que um campo $\mathfrak{v}$ ao longo de γ é um *campo de Jacobi ao longo de* $\mathcal{D}^\gamma$ quando a equação de Jacobi (2) é satisfeita "nas direções de $\mathcal{D}^\gamma$", i.e., quando:

$$\mathfrak{g}\left(\frac{\mathrm{D}^2\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t^2}, \mathcal{Y}\right) = \mathfrak{g}\big(\mathcal{R}(\gamma', \mathfrak{v})\gamma', \mathcal{Y}\big),$$

para todo campo $\mathcal{Y}$ ao longo de γ tal que $\mathcal{Y}(t) \in \mathcal{D}_t^\gamma$, para todo $t \in [a,b]$. Definimos agora espaços $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ (denotados por $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ no enunciado do Teorema 6.4.10) de campos ao longo de γ da seguinte maneira: $\mathcal{K}$ é o espaço dos campos de Jacobi ao longo de $\mathcal{D}^\gamma$ e $\mathcal{S}$ é o espaço dos campos $\mathfrak{v}$ *a valores* em $\mathcal{D}^\gamma$, i.e., tais que $\mathfrak{v}(t) \in \mathcal{D}^\gamma_t$ para todo $t \in [a, b]$ (mais precisamente, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ são constituídos apenas de campos $\mathfrak{v}$ com $\mathfrak{v}(a) = \mathfrak{v}(b) = 0$). Observamos que, se a distribuição $\mathcal{D}^\gamma$ ao longo de γ estende-se a uma distribuição $\mathcal{D}^M$ em toda a variedade M então o espaço $\mathcal{K}$ pode ser pensado como o "espaço tangente" ao conjunto das curvas ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ e que são *geodésicas ao longo de* $\mathcal{D}^M$, i.e., curvas μ cuja aceleração covariante $\frac{\mathrm{D}\mu'}{\mathrm{d}t}$ é ortogonal a $\mathcal{D}^M$.

Um cálculo simples mostra que $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ são ortogonais com respeito à forma do índice; além do mais, com uma leve hipótese adicional mostramos que o espaço de todos os campos ao longo de γ (que se anulam aos extremos) se escreve como soma direta de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$. O teorema do índice diz então que *a diferença entre o índice de I em $\mathcal{K}$ e o co-índice de I em $\mathcal{S}$ (i.e., o índice de $-I$ em $\mathcal{S}$) é igual ao índice de Maslov da geodésica γ.* O papel desempenhado aqui pelo índice de Maslov da geodésica é similar ao papel desempenhado pelo índice geométrico no teorema do índice clássico; voltaremos a essa questão mais adiante nesta introdução. No caso trivial $M = M_1 \times M_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus (-\mathfrak{g}_2)$ discutido inicialmente, fazendo $\mathcal{D}^M = TM_2$, os espaços $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ reduzem-se respectivamente aos espaços $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ (supondo que $\gamma(b)$ não é conjugado a $\gamma(a)$ ao longo de γ).

Observamos que na versão do teorema do índice para geodésicas com extremidade inicial variável numa subvariedade $\mathcal{P}$ (que é o caso considerado no Teorema 6.4.10) obtemos também uma contribuição do índice da métrica $\mathfrak{g}$ no espaço tangente $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ para o índice de I; um termo desse tipo nunca havia sido detectado por outras formulações do teorema do índice, já que tanto no caso de geodésicas Riemannianas como de geodésicas Lorentzianas causais, tal termo é obviamente nulo.

No caso de variedades Lorentzianas estacionárias o nosso teorema do índice permite escrever as relações de Morse globais para geodésicas ligando dois pontos fixados $p, q \in M$ em termos do índice de Maslov de tais geodésicas (vide Subseção 6.4.1). Variedades Lorentzianas de dimensão quatro são modelos matemáticos para os espaços-tempo da relatividade geral, sendo as geodésicas de tipo tempo as linhas de universo de corpos massivos em queda livre e as geodésicas de tipo luz as linhas de universo dos raios de luz propagando-se no vácuo, sob ação somente do campo gravitacional; variedades estacionárias correspondem a campos gravitacionais que são "invariantes no tempo" e incluem diversos espaços importantes em física como o espaço-tempo de *Schwarzschild* e de *Reissner-Nordström* (vide [**23**] para mais detalhes sobre a interpretação física). Em termos geométricos, um campo interessante de pesquisa aberto seria uma tentativa de aplicar uma versão apropriada da Teoria de Morse que, juntamente com o nosso teorema, produziria resultados globais de existência e multiplicidade de geodésicas em variedades semi-Riemannianas quaisquer.

O nosso teorema do índice será enunciado e demonstrado no contexto da teoria dos *sistemas diferenciais simpléticos*, i.e., sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias cuja matriz de coeficientes pertence à álgebra de Lie do grupo simplético. A matriz fundamental de um sistema diferencial simplético é uma curva no grupo simplético; como veremos adiante nesta introdução, esse é o ingrediente fundamental para que se possa definir uma noção de índice de Maslov. O teorema do índice para sistemas diferenciais simpléticos (Teorema 6.2.17) nos fornecerá como corolários essencialmente imediatos o teorema do índice para geodésicas semi-Riemannianas e também um teorema do índice para soluções (não periódicas) de sistemas Hamiltonianos (não necessariamente convexos) em variedades simpléticas (Teorema 6.5.14). O nome "sistema diferencial simplético" não é usual na literatura (e na verdade está sendo usado aqui pela primeira vez); tais sistemas são normalmente encontrados sob a forma de *sistemas Hamiltonianos linearizados* (vide [**13, 38, 39**]). O nosso enfoque é um pouco diferente e trabalhamos com tais sistemas como uma categoria, onde introduzimos uma noção de isomorfismo e outras construções interessantes (como a noção de sistema oposto; vide Exemplo 6.1.12). O mais interessante é que o co-índice de I no espaço $\mathcal{S}$ (que aparece na formulação do teorema do índice) pode ser computado em termos dos pontos conjugados de um sistema diferencial simplético associado ao sistema original, que será chamado o *sistema reduzido* (vide Proposição 6.2.23).

O nosso teorema do índice para sistemas Hamiltonianos (Teorema 6.5.14) vai numa direção um tanto diferente dos resultados mais típicos sobre sistemas Hamiltonianos onde são considerados sempre apenas o caso de *soluções periódicas* (vide [**13, 38, 39**]); na verdade, o caso não periódico tem sido pouco explorado na literatura, apesar de parecer uma generalização natural do problema de geodésicas ligando dois pontos fixados (observe que geodésicas também são soluções de um sistema Hamiltoniano). Um ponto de vista mais similar ao nosso é adotado por Duistermaat em [**14**] que considera um teorema do índice para sistemas Hamiltonianos que inclui também o caso de soluções não periódicas.

O teorema do índice de Morse clássico também pode ser visto como uma generalização do *Teorema de Oscilação de Sturm* (vide, por exemplo, [**11**, Capítulo 8]). Explicitamente, uma equação de Sturm é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem da forma:

$$\big(p(t)x'(t)\big)' = q(t)x(t), \tag{3}$$

onde $q\colon [a,b] \to I\!R$ é uma função contínua e $p\colon [a,b] \to I\!R$ é uma função de classe C^1 tal que $p(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$; o Teorema de Oscilação de Sturm diz que o número de zeros em $]a,b[$ de uma solução não trivial x de (3) satisfazendo a condição inicial $x(a) = 0$ coincide com o número de autovalores negativos do operador autoadjunto $x \mapsto -(px')' + qx$ definido no espaço das aplicações $x\colon [a,b] \to I\!R$ satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet $x(a) = x(b) = 0$. O operador $x \mapsto -(px')' + qx$ representa, com respeito ao produto interno padrão do espaço de Hilbert $L^2([a,b],\mathbb{R})$, a forma bilinear simétrica:

$$I(x,y) = \int_a^b p(t)x'(t)y'(t) + q(t)x(t)y(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

definida no espaço de aplicações $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo $x(a) = x(b) = 0$; diremos que a forma bilinear (4) é a *forma do índice* da equação de Sturm (3). Observe que o núcleo de I coincide justamente com o espaço (de dimensão ≤ 1) formado pelas soluções x de (3) que satisfazem $x(a) = x(b) = 0$; além do mais, o número de autovalores negativos de $x \mapsto -(px')' + qx$ coincide precisamente com o *índice* de I. A demonstração do teorema de oscilação de Sturm segue então os seguintes passos: são construídas duas curvas na *reta projetiva* $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ de modo que o "número de voltas" da primeira curva nos dê uma contagem do número de zeros de uma solução não trivial x de (3) com $x(a) = 0$; o "número de voltas" da segunda curva conta o número de autovalores negativos de $x \mapsto -(px')' + qx$. A demonstração é completada agora por um argumento topológico: uma homotopia apropriada entre essas curvas é construída, e daí concluímos que tais "números de voltas" coincidem.

O teorema do índice de Morse é portanto a generalização do teorema de oscilação de Sturm para o caso de *sistemas* de equações diferenciais lineares de segunda ordem; mais precisamente, uma *equação de Morse-Sturm* é uma equação diferencial ordinária linear da forma:

$$g(t)^{-1}\big(g(t)v'(t)\big)' = R(t)v(t), \tag{5}$$

onde para cada $t \in [a,b]$, $g(t)$ é uma forma bilinear simétrica *definida positiva* em $\mathbb{R}^n$ e $R(t)$ é um endomorfismo linear $g(t)$-simétrico de $\mathbb{R}^n$ (i.e., $g(t)\circ R(t)$ é simétrica). As equações de Sturm (3) são o caso particular de (5) onde $n = 1$, $p(t) = g(t)$ e $q(t) = g(t)R(t)$. Quando generaliza-se o teorema de oscilação para equações de Morse-Sturm, o número de zeros de uma solução não trivial de (3) com $x(a) = 0$ deve ser substituído pelo *número de pontos conjugados* da equação (5); a forma do índice (4) toma agora a forma:

$$I(v,w) = \int_a^b g(t)\big(v'(t),w'(t)\big) + g(t)\big(R(t)v(t),w(t)\big)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

A relação entre o "teorema de oscilação" para equações de Morse-Sturm e o mais conhecido teorema do índice de Morse em geometria Riemanniana é feita da seguinte maneira: dada uma geodésica $\gamma\colon [a,b] \to M$ numa variedade Riemanniana $(M,\mathfrak{g})$, escolhemos uma *trivialização paralela* do fibrado tangente TM de M ao longo de γ (i.e., um referencial paralelo ao longo de γ). Daí, campos vetoriais $\mathfrak{v}$ ao longo de γ correspondem a aplicações $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e a equação de Jacobi (2) traduz-se então numa equação de Morse-Sturm (5) (com $g(t) = g$ independente de t); observe que a forma do índice (6) corresponde precisamente à usual *segunda variação da ação* (vide, por exemplo, [**10**, §2, Capítulo 9]).

A demonstração mais usual do teorema do índice de Morse em textos de geometria Riemanniana (como em [**10**, Capítulo 11]) consiste num estudo da evolução do índice da segunda variação da ação para o segmento geodésico $\gamma|_{[a,t]}$ quando t cresce de a para b; mostra-se que tal índice é uma função *constante por partes* de t cujos saltos ocorrem precisamente nos pontos conjugados (e são iguais à sua correspondente multiplicidade). Esse esquema geral será usado também na demonstração do nosso teorema do índice (vide Seção 6.3); no nosso caso porém, se faz necessário o uso de técnicas de análise funcional consideravelmente mais sofisticadas (como a teoria de Fredholm, o teorema espectral para operadores compactos simétricos e outros assuntos discutidos no Capítulo 5) enquanto que no caso Riemanniano é possível dispensar completamente as técnicas de análise através da observação de que o índice da forma do índice fica concentrado num subespaço de dimensão finita do espaço de todas as variações da geodésica (i.e., o espaço de *campos de Jacobi por partes* com respeito a uma partição fixada do intervalo $[a,b]$).

Como seria de se esperar, uma demonstração do teorema do índice de Morse também pode ser feita no espírito da demonstração do teorema de oscilação de Sturm: essa é a idéia usada na demonstração da generalização do teorema do índice para sistemas de equações de ordem par realizada por Edwards em [**16**]; também Duistermaat (em [**14**]) usa tal técnica para demonstrar um teorema do índice para pontos críticos de um funcional ação Lagrangeano $\int_a^b L(t,q,\dot q)\,\mathrm{d}t$ mais geral[2] que (1). O Teorema do Índice provado por Duistermaat em [**14**, Teorema 4.3] é similar ao nosso Corolário 6.2.21, a menos do fato que Duistermaat considera condições de contorno mais gerais (que incluem também o caso periódico). Essas demonstrações de Edwards e Duistermaat, inspiradas na demonstração do teorema de oscilação de Sturm, requerem o desenvolvimento de *teorias de interseção* apropriadas em espaços que substituem a reta projetiva $I\!RP^1 \cong S^1$ usada no teorema de oscilação. Observamos que o uso de números de interseção na formulação (e prova) do teorema do índice de Morse permitiram a Bott em [**8**] provar a sua fórmula de iteração para geodésicas fechadas (usada posteriormente por Gromoll e Meyer em [**22**] na prova de seu famoso teorema sobre existência de infinitas geodésicas periódicas em certas variedades compactas).

Em [**8**], Bott desenvolve o que é chamado por ele próprio a *Teoria de Interseção de Sturm*, para curvas no grupo dos isomorfismos de $\mathbb{C}^{2n}$ que preservam uma forma Hermiteana de assinatura zero (i.e., o grupo $\mathrm{U}(n,n)$); Edwards em [**16**], sob a influência de Bott, desenvolve uma teoria de interseção no Grassmanniano de subespaços complexos n-dimensionais de $\mathbb{C}^{2n}$ que são anulados por uma forma Hermiteana de assinatura zero (tais Grassmannianos são chamados *U-manifolds* por Edwards). Aparentemente o uso de tais teorias de interseção em $\mathrm{U}(n,n)$ (ou nas *U-manifolds* de Edwards)

[2]Duistermaat trabalha sempre sob a hipótese de positividade de $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}$ que corresponde justamente à positividade da métrica no caso do teorema do índice de Morse usual; também Edwards considera uma hipótese de positividade desse tipo para seus sistemas.

foi abandonado e o autor deste texto desconhece o uso de tais teorias em artigos mais recentes; já Duistermaat em [**14**] utiliza o *Grassmanniano de Lagrangeanos* e o *grupo Simplético* como palco para a sua teoria de interseção: tais números de interseção definidos para curvas ℓ no Grassmanniano de Lagrangeanos (ou no grupo Simplético) são conhecidos como o *índice de Maslov* da curva ℓ.

O índice de Maslov foi introduzido algumas décadas atrás pela escola Russa no contexto de curvas em subvariedades Lagrangeanas de $I\!R^{2n}$ (munido de sua forma simplética canônica ω) e também para curvas no Grassmanniano Λ de subespaços Lagrangeanos de $I\!R^{2n}$ (recorde que $L \subset I\!R^{2n}$ é dito *Lagrangeano* quando $\dim(L) = n$ e $\omega|_{L\times L} = 0$); em [**3**], Arnol'd faz uma exposição de tais conceitos (introduzidos então recentemente por Maslov) e discute aplicações do índice de Maslov envolvidas em *condições de quantização*.

Geodésicas semi-Riemannianas ou, mais geralmente, sistemas diferenciais simpléticos produzem de maneira natural uma curva diferenciável no Grassmanniano de Lagrangeanos. A idéia básica para a definição do índice de Maslov de uma curva ℓ no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ é a seguinte: fixa-se um Lagrangeano $L_0 \subset I\!R^{2n}$ e considera-se o subconjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ de Λ formado pelos Lagrangeanos L tais que $\dim(L \cap L_0) \geq 1$, i.e., tais que L não é transversal a L_0. Quando a curva ℓ é proveniente de um sistema diferencial simplético, as interseções de ℓ com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ correspondem precisamente aos pontos conjugados do sistema.

O Grassmanniano de Lagrangeanos Λ é uma subvariedade compacta conexa real-analítica de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$ do Grassmanniano de todos os subespaços n-dimensionais de $I\!R^{2n}$; o subconjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ *não* é uma subvariedade de Λ, mas apenas um conjunto analítico (no sentido de [**54**], por exemplo) e sua parte regular $\Lambda^1(L_0)$ consiste dos subespaços Lagrangeanos L tais que $\dim(L \cap L_0) = 1$. O conjunto $\Lambda^1(L_0)$ por sua vez é uma subvariedade mergulhada de Λ de co-dimensão 1; além do mais, $\Lambda^1(L_0)$ possui uma *orientação transversa* em Λ canonicamente induzida pela forma simplética ω. O índice de Maslov $\mu_{L_0}(\ell)$ de uma curva contínua $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ com extremos fora de $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ é essencialmente um número de interseção de ℓ com o conjunto analítico compacto $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$; mais explicitamente, quando ℓ intercepta $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ apenas na sua parte regular $\Lambda^1(L_0)$ e se todas essas interseções são transversas então $\mu_{L_0}(\ell)$ coincide com o número de *interseções positivas* menos o número de *interseções negativas* de ℓ com $\Lambda^1(L_0)$. Além do mais, o índice de Maslov é definido de modo que o inteiro $\mu_{L_0}(\ell)$ seja *invariante por deformações contínuas* (i.e., *homotopias*) de ℓ, desde que os extremos $\ell(a)$, $\ell(b)$ não cruzem $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ durante a realização de tal deformação.

O índice de Maslov de curvas no Grassmanniano de Lagrangeanos de um espaço simplético é discutido em diversos textos e citamos por exemplo [**3, 14, 15, 24, 56**]; destacamos particularmente [**14**] que contém diversos resultados interessante sobre o índice de Maslov. É bem conhecido que algumas referências contém afirmações incorretas/imprecisas sobre a definição de índice de Maslov e por isso decidimos desenvolver toda a teoria desde o começo, numa linguagem mais apropriada aos nossos objetivos. Essa abordagem possui a desvantagem de não deixar clara a distinção entre resultados novos e velhos; de modo geral, os resultados apresentados no Capítulo 4 sobre o índice de Maslov não devem ser surpreendentes para especialistas da área, apesar de alguns deles não serem usualmente enunciados de maneira explícita. Na Seção 4.2 nós apresentamos uma definição completa, simples e correta para o índice de Maslov assim como demonstrações detalhadas de suas propriedades. A idéia é na verdade muito simples: mostraremos que o *primeiro grupo de homologia relativa* $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$, onde $\Lambda^0(L_0)$ denota o complementar de $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ em Λ; um sinal para tal isomorfismo é definido com o auxílio da orientação transversa de $\Lambda^1(L_0)$ em Λ. Fica então associado a cada curva ℓ em Λ com extremos fora de $\Lambda^1(L_0)$ um número inteiro $\mu_{L_0}(\ell)$ que chamaremos o *índice de Maslov de ℓ com respeito a L_0*. O cálculo do grupo $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ é muito simples também: calculamos primeiro o grupo fundamental de Λ com o auxílio da seqüência exata de homotopia de uma fibração $\mathrm{O}(n) \to \mathrm{U}(n) \to \Lambda$ (seguimos a idéia de [**3**]); o grupo $H_1(\Lambda)$ é então obtido com o auxílio do Teorema de Hurewicz e finalmente o grupo de homologia relativa desejado é calculado usando a seqüência exata de homologia do par $(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$.

Na verdade, nossa idéia é similar à usada por Edwards em [**16**] para desenvolver sua teoria de interseção para curvas em *U-manifolds*; Edwards apresenta uma descrição axiomática de sua teoria de interseção (tais axiomas são essencialmente as propriedades que aparecem no enunciado do nosso Lema 4.2.14). Para mostrar a existência de uma teoria compatível com tais axiomas Edwards faz uso de um *grupo de homotopia relativa* $\pi_1(X, A)$ apropriado; ocorre que o *primeiro conjunto* de homotopia relativa de um par (X, A) não é em geral um grupo e por isso consideramos o uso da homologia relativa mais simples e adequado.

Mencionamos que existe também uma noção diferente de índice de Maslov para curvas no grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n, I\!R)$ (vide [**13, 38**]); mais explicitamente, constrói-se uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ e o conjunto das componentes conexas do espaço de curvas $\Phi\colon [a, b] \to \mathrm{Sp}(2n, I\!R)$ tais que $\Phi(a) = \mathrm{Id}$ e $\det\big(\Phi(b) - \mathrm{Id}\big) \neq 0$ (munido da topologia compacto-aberta). Tal noção de índice de Maslov é importante no estudo de soluções periódicas de sistemas Hamiltonianos, mas não será usada neste texto. O índice de Maslov de curvas no grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n, I\!R)$ pode ser relacionado com o índice de Maslov de curvas no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ do espaço $I\!R^{4n}$ munido da forma simplética $\omega \oplus (-\omega)$ (onde ω denota a forma simplética canônica de $I\!R^{2n}$); tal relação é feita através do mergulho $\mathrm{Sp}(2n, I\!R) \ni \Phi \mapsto \mathrm{Gr}(\Phi) \in \Lambda$ (vide [**14**]).

Voltemos agora à questão das equações de Morse-Sturm; fazendo a substituição $\alpha(t) = g(t)v'(t)$ em (5) obtemos o seguinte sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} v'(t) = g(t)^{-1}\alpha(t), \\ \alpha'(t) = \big(g(t) \circ R(t)\big)v(t). \end{cases}$$

A *matriz fundamental* de (7) é a curva Φ no grupo linear geral de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $\Phi(t)\big(v(a), \alpha(a)\big) = \big(v(t), \alpha(t)\big)$ para toda solução (v, α) de (7) e todo $t \in [a, b]$; utilizando a equação (5) é fácil ver que

$$\text{(8)} \qquad g(t)\big(v(t), w'(t)\big) - g(t)\big(v'(t), w(t)\big) = \text{constante}, \quad t \in [a, b],$$

para quaisquer soluções v, w de (5). A identidade (8) nos diz que o isomorfismo $\Phi(t)$ é um *simplectomorfismo* de $\mathbb{R}^{2n}$ munido de sua forma simplética canônica; concluímos então que Φ é uma curva no grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Fixado um Lagrangeano $\ell_0 \in \Lambda$ definimos então $\ell(t) = \Phi(t)(\ell_0)$ e daí ℓ é uma curva no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ. O *índice de Maslov* da equação de Sturm (5) é definido então essencialmente como o índice de Maslov da curva ℓ (na verdade, da curva $\ell|_{[a+\varepsilon,b]}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno). Quando g é definida positiva (i.e., quando (5) é obtida de uma geodésica Riemanniana) então o índice de Maslov de (5) coincide simplesmente com o familiar *índice geométrico*, i.e., com o número de pontos conjugados da equação contados com multiplicidade (vide Exemplo 6.1.38). No caso geral (i.e., para geometria semi-Riemanniana) o índice de Maslov fornece (no caso genérico) uma *contagem algébrica* dos pontos conjugados, i.e., cada ponto conjugado fornece uma contribuição positiva ou negativa para o índice de Maslov. Recordamos que os pontos conjugados ao longo de uma geodésica semi-Riemanniana podem em geral se acumular (vide [**24**]), mas em qualquer caso o *índice de Maslov é sempre finito*. Vários argumentos sugerem que o índice de Maslov fornece a generalização correta da noção de índice geométrico para a geometria semi-Riemanniana; um tal argumento é a sua *estabilidade* (vide Proposição 6.1.39), além do nosso teorema do índice. A estabilidade do índice de Maslov é em si interessante e possui aplicações à geometria Lorentziana global e à relatividade geral. Por exemplo, em [**20**] os autores desenvolvem uma teoria de Morse para geodésicas de tipo luz numa variedade Lorentziana baseada no *princípio de Fermat* da ótica relativística; tal teoria é obtida como um limite da teoria de Morse para geodésicas de tipo tempo e por isso é crucial a estabilidade dos índices envolvidos.

Aplicações da teoria do índice de Maslov à geodésicas semi-Riemannianas assim como esboços de teorias do índice para tais geodésicas foram feitos por Helfer em [**24**]; tal artigo contém alguns resultados incorretos e outros incompletos. Uma comparação dos resultados de Helfer com os desenvolvidos neste texto podem ser encontrados em [**40**] e principalmente [**49**].

Finalizamos esta introdução com uma breve descrição do conteúdo de cada seção (e subseção) do texto. Os Capítulos 1, 3 e parte dos Capítulos 2 e 5 contém exposição de várias teorias clássicas de matemática; o texto foi escrito tendo em mente como leitor típico um aluno de pós-graduação, o que justifica um pouco o desenvolvimento de tais teorias clássicas. Mencionamos também que a demonstração do nosso teorema do índice envolve técnicas de diversas áreas (como topologia, análise e geometria) e portanto a tentativa de desenvolver um texto bastante auto-contido tem como objetivo que o texto seja acessível para um número maior de leitores.

O Capítulo 1 é bastante elementar; na sua Seção 1.1 discutimos alguns tópicos de álgebra linear. Enfatizamos a identificação entre operadores lineares $T\colon V \to W^*$ e formas bilineares $B\colon V \times W \to I\!R$; tal identificação será depois usada com muita freqüência no resto do texto (principalmente nas Seções 4.2 e 6.1) e portanto merece bastante ênfase. Discutimos também questões sobre complemento ortogonal de subespaços com respeito à formas bilineares B (não necessariamente positivas e nem mesmo simétricas); tais resultados serão úteis mais adiante, quando $B = \omega$ é uma forma simplética (que é anti-simétrica) ou quando B é uma forma bilinear simétrica indefinida (como uma métrica semi-Riemanniana).

Nas Seções 1.2, 1.3 e na Subseção 1.3.1 fazemos uma exposição de assuntos ligados a formas reais, complexificações, realificações e estruturas complexas; tais tópicos não são tão essenciais para o resto do texto, mas acreditamos que um bom entendimento intrínseco da teoria de formas simpléticas depende de tais conceitos. A Seção 1.4 cuida realmente do estudo dos espaços simpléticos; nas Subseções 1.4.1 e 1.4.2 estudamos vários resultados algébricos sobre subespaços Lagrangeanos que serão fundamentais para o posterior estudo da geometria do Grassmanniano de Lagrangeanos.

O Capítulo 2 é provavelmente o mais geométrico de todo o texto; na sua Seção 2.1 fazemos uma revisão da terminologia básica do cálculo em variedades. Nas Subseções 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 discutimos também diversos resultados sobre grupos de Lie (principalmente sobre ações de grupos de Lie em variedades) que serão fundamentais para o estudo da geometria do Grassmanniano. Na Seção 2.2 começamos o estudo de Grassmannianos propriamente dito; introduzimos uma estrutura de variedade no Grassmanniano de subespaços k-dimensionais de $I\!R^n$ da maneira usual (utilizando gráficos de operadores lineares entre somandos diretos de $I\!R^n$). Na Seção 2.3 fazemos uma identificação interessante para o espaço tangente ao Grassmanniano e explicamos uma maneira muito prática para calcular diferenciais de aplicações entre Grassmannianos (o autor não conhece outra referência onde tal identificação seja feita). Na Seção 2.4 deduzimos diversas conseqüências da transitividade da ação do grupo linear geral no Grassmanniano; além do mais, mostramos a diferenciabilidade e calculamos a diferencial de várias aplicações entre Grassmannianos. Na Seção 2.5 começamos o estudo do Grassmanniano de Lagrangeanos e mostramos que o mesmo é uma subvariedade do Grassmanniano de subespaços n-dimensionais de $I\!R^{2n}$; cartas explícitas são introduzidas no Grassmanniano de Lagrangeanos e também é identificado seu espaço tangente. Tais técnicas serão essenciais para o posterior estudo do índice de Maslov; na Subseção 2.5.1 discutimos as subvariedades $\Lambda^k(L_0)$ do Grassmanniano de Lagrangeanos e mostramos que $\Lambda^1(L_0)$ admite uma orientação transversa canônica.

No Capítulo 3 estudamos diversos tópicos de topologia álgebrica: o grupo e o grupóide fundamental são discutidos na Seção 3.1, a seqüência exata de homotopia de uma fibração é discutida na Seção 3.2 e os grupos de homologia singular são discutidos na Seção 3.3. Não é nosso objetivo fazer uma exposição completa de tais assuntos (o que seria obviamente um programa muito mais extenso); nos restringimos apenas aos tópicos mais ligados à construção do índice de Maslov. A nossa exposição sobre a seqüência exata de homotopia da fibração possui um enfoque muito prático; em [**52**] o leitor pode encontrar uma exposição mais elegante e completa do assunto. O nosso enfoque por outro lado é útil para o leitor interessado apenas em entender rapidamente as aplicações básicas à geometria diferencial.

O estudo do grupóide (e não só do grupo) fundamental é bastante importante, já que o índice de Maslov é definido não apenas para curvas fechadas; na Subseção 3.1.1 incluímos uma demonstração da estabilidade da classe de homotopia de uma curva que será necessária para a demonstração da estabilidade do índice de Maslov. A seqüência exata de homotopia da fibração é usada no cálculo do grupo fundamental do Grassmanniano de Lagrangeanos (assim como os grupos fundamentais dos grupos de Lie clássicos estudados na Subseção 3.2.1). Finalmente, os grupos de homologia singular são a peça fundamental para a nossa definição do índice de Maslov; na Subseção 3.3.1 mostramos o Teorema de Hurewicz (para os grupos $\pi_1(X)$ e $H_1(X)$) e também alguns resultados úteis na demonstração das propriedades básicas do índice de Maslov.

O Capítulo 4 é dedicado à noção do índice de Maslov. Na Seção 4.1 mostramos alguns resultados bastante elementares sobre índices e co-índices de formas bilineares simétricas; tais resultados (e principalmente os resultados da Subseção 4.1.1) são importantes para a teoria do índice de Maslov e também serão fundamentais na demonstração do Teorema do Índice. Por esse motivo muitos dos resultados da Seção 4.1 são provados também para espaços de dimensão infinita (o que os torna menos triviais). Na Seção 4.2 definimos o índice de Maslov e provamos suas propriedades básicas.

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo de diversas técnicas de análise funcional; tais técnicas são efetivamente necessárias na demonstração do Teorema do Índice e para conveniência do leitor decidimos manter a exposição essencialmente auto-contida. Uma exceção é feita a alguns resultados da Seção 5.1 (como Teorema da Aplicação Aberta, Teorema de Hahn-Banach) que são enunciados sem demonstração por serem parte de qualquer curso elementar de análise funcional. Na Subseção 5.1.1 fazemos uma recapitulação de alguns conceitos elementares sobre cálculo em espaços de Banach; de particular interesse é o Teorema 5.1.64 que fornece um critério prático para diferenciabilidade de aplicações entre espaços de Banach (o autor desconhece qualquer referência onde esse resultado possa ser encontrado). A Seção 5.2

é dedicada à teoria dos operadores compactos e ao longo de suas Subseções desenvolvemos diversos aspectos de tal teoria; a Subseção 5.2.1 é dedicada à teoria de Fredholm, a Subseção 5.2.2 é dedicada ao estudo da topologia fraca (que é também intimamente relacionada com operadores compactos) e na Subseção 5.2.3 desenvolvemos uma demonstração interessante do Teorema Espectral para operadores compactos simétricos (em espaços de Hilbert reais). Mencionamos que alguns textos de análise funcional restringem seu estudo (principalmente quanto ao teorema espectral) para espaços de Hilbert complexos (vide Observação 5.2.57); no nosso caso os espaços reais são mais importantes e na verdade os espaços complexos não serão considerados no nosso texto. Na Subseção 5.2.4 generalizamos diversos resultados da Subseção 4.1.1 para espaços de dimensão infinita; ao contrário do resto do capítulo (que apresenta resultados clássicos), diversas técnicas usadas na Subseção 5.2.4 são novas e constituem peça chave na demonstração do Teorema do Índice.

Finalmente, no Capítulo 6 estudamos os sistemas diferenciais simpléticos e o Teorema do Índice. A Seção 6.1 é dedicada à definição de sistema diferencial simplético e ao conceito de isomorfismos; na Subseção 6.1.1 introduzimos a forma do índice associada a um sistema diferencial simplético e na Subseção 6.1.2 definimos o índice de Maslov de um sistema diferencial simplético e provamos sua estabilidade. A Seção 6.2 é dedicada ao enunciado do Teorema do Índice e às construções necessárias para compreensão de tal enunciado; alguns resultados adicionais sobre isomorfismos de sistemas diferenciais simpléticos (mais ligados ao material da Seção 6.2) foram deixados para a Subseção 6.2.1. A Seção 6.3 é dedicada à prova do Teorema do Índice; começamos com um roteiro geral das idéias da demonstração e os teoremas mais técnicos são espalhados ao longo das Subseções 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3.

Finalmente, na Seção 6.4 começamos a estudar as aplicações geométricas, explicando como a teoria de sistemas diferenciais simpléticos é usada em geometria semi-Riemanniana; obtemos então o Teorema do Índice para variedades semi-Riemannianas. Na Subseção 6.4.1 mostramos como o nosso teorema do índice pode (juntamente com a teoria de Morse global) ser usado para estimar a quantidade de geodésicas ligando dois pontos numa variedade Lorentziana estacionária; os resultados desta subseção são altamente dependentes de [**21**] (um desenvolvimento autocontido se tornaria excessivamente extenso nesse caso). Finalmente, na Seção 6.5 mostramos como a teoria de sistemas diferenciais simpléticos liga-se com a teoria de sistemas Hamiltonianos em variedades simpléticas; a maior parte da seção é desenvolvida num contexto bastante abstrato, mas através dos Exemplos 6.5.5 e 6.5.15 procuramos tornar a exposição mais compreensível.

CAPÍTULO 1

Espaços Simpléticos

1.1. Revisão de Álgebra Linear

Nesta seção revemos alguns resultados simples de álgebra linear e fixamos a notação que deverá ser usada no resto do texto. Discutimos a identificação canônica entre formas bilineares e operadores lineares (a valores no espaço dual); consideramos também problemas relativos ao complemento ortogonal de subespaços com respeito a produtos possivelmente degenerados (e não simétricos).

Suporemos, nesta seção, que *todos os espaços vetoriais considerados têm dimensão finita*; o corpo de escalares K pode ser arbitrário, mas o leitor que preferir pode supor $K = I\!R$ ou $K = \mathbb{C}$. A maior parte dos resultados apresentados na seção realmente valem só em dimensão finita (note porém que a existência do isomorfismo natural (1.1.1) abaixo vale em geral); as definições e notações introduzidas fazem sentido em dimensão infinita também[1] e serão usadas nesse contexto mais geral nas seções posteriores. Uma última nota de aviso: quando estudarmos análise funcional no Capítulo 5, algumas notações introduzidas aqui serão adaptadas ao contexto; no caso de espaços vetoriais normados, só nos interessaremos por operadores lineares e bilineares *limitados* (vide Observação 5.1.2).

Sejam V, W espaços vetoriais. Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ e por $\mathcal{B}(V, W)$ respectivamente os espaços vetoriais de *operadores lineares* $T\colon V \to W$ e de *operadores* (também chamados de *formas*) *bilineares* $B\colon V \times W \to K$; por V^* denotamos o *espaço dual* $\mathcal{L}(V, K)$ de V. Abreviamos $\mathcal{L}(V, V)$ e $\mathcal{B}(V, V)$ por $\mathcal{L}(V)$ e $\mathcal{B}(V)$ respectivamente. Um operador bilinear $B\colon V \times V \to Z$ é dito *simétrico* (respectivamente, *anti-simétrico*) quando $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1)$ (respectivamente, $B(v_1, v_2) = -B(v_2, v_1)$) para todos $v_1, v_2 \in V$; denotamos por $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ (respectivamente, $\mathcal{B}_{\mathrm{ant}}(V)$) o espaço de *formas bilineares simétricas* (respectivamente, *anti-simétricas*) $B\colon V \times V \to K$.

Temos um isomorfismo natural:

$$\mathcal{L}(V, W^*) \longrightarrow \mathcal{B}(V, W) \tag{1.1.1}$$

que associa cada operador linear $T \in \mathcal{L}(V, W^*)$ à forma bilinear $\tilde{T} \in \mathcal{B}(V, W)$ dada por $\tilde{T}(v, w) = T(v)(w)$.

[1] Uma exceção a essa regra ocorre no Exemplo 1.1.7, quando definimos o transposto de um operador T com respeito a uma forma bilinear simétrica B; o mesmo ocorre na definição de um operador B-normal.

Dados outros espaços vetoriais V_1, W_1 e operadores $L \in \mathcal{L}(V_1, V)$, $M \in \mathcal{L}(W_1, W)$ temos que as formas bilineares $\tilde{T}(L\cdot, \cdot)$ e $\tilde{T}(\cdot, M\cdot)$ correspondem através de (1.1.1) aos operadores lineares $T \circ L$ e $M^* \circ T$ respectivamente, onde

$$M^* \colon W^* \longrightarrow W_1^* \tag{1.1.2}$$

denota o *operador transposto* de M dado por $M(\alpha) = \alpha \circ M$.

Tipicamente não distinguiremos um operador linear T da sua forma bilinear $\tilde{T}$ correspondente por (1.1.1); na verdade, exceto por estas considerações iniciais ou por situações onde houver possibilidade de confusão, denotaremos um operador linear e sua forma bilinear correspondente *pelo mesmo símbolo*.

OBSERVAÇÃO 1.1.1. Dados espaços vetoriais V, W, V_1, W_1 então a cada par (L, M) de operadores lineares com $L \in \mathcal{L}(V_1, V)$, $M \in \mathcal{L}(W, W_1)$ associamos um outro operador linear:

$$\mathcal{L}(L, M) \colon \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{L}(V_1, W_1)$$

dado por $\mathcal{L}(L, M) \cdot T = M \circ T \circ L$; essa definição faz de $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ um *funtor* (contravariante na primeira variável e covariante na segunda) da categoria de pares de espaços vetoriais na categoria de espaços vetoriais. Analogamente, dados operadores lineares $L \in \mathcal{L}(V_1, V)$, $M \in \mathcal{L}(W_1, W)$ obtemos um operador linear:

$$\mathcal{B}(L, M) \colon \mathcal{B}(V, W) \longrightarrow \mathcal{B}(V_1, W_1)$$

dado por $\mathcal{B}(L, M) \cdot B = B(L\cdot, M\cdot)$. Daí $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ torna-se um funtor (contravariante nas duas variáveis) da categoria de pares de espaços vetoriais na categoria de espaços vetoriais.

A naturalidade do isomorfismo (1.1.1) pode agora ser entendida no sentido técnico de *isomorfismos naturais entre funtores*, i.e., o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(V, W^*) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{L}(L, M^*)"'] & \mathcal{B}(V, W) \arrow[d, "\mathcal{B}(L, M)"] \\ \mathcal{L}(V_1, W_1^*) \arrow[r, "\cong"'] & \mathcal{B}(V_1, W_1) \end{tikzcd} \tag{1.1.3}$$

onde $L \in \mathcal{L}(V_1, V)$, $M \in \mathcal{L}(W_1, W)$ e as flechas horizontais em (1.1.3) são as versões adequadas do isomorfismo (1.1.1).

Como estamos considerando apenas espaços vetoriais de dimensão finita, podemos identificar naturalmente cada espaço V com seu *bidual* V^{**} e cada operador linear T com seu *bitransposto* T^{**}. Dado $T \in \mathcal{L}(V, W^*)$ consideramos então T^* como um elemento de $\mathcal{L}(W, V^*)$; se $\tilde{T}$ é a forma bilinear associada a T então a forma bilinear associada a T^* é a *transposta* de $\tilde{T}$ (como forma bilinear) dada por $W \times V \ni (w, v) \mapsto \tilde{T}(v, w)$. Em particular, para $V = W$, a forma bilinear $\tilde{T}$ é simétrica (respectivamente, anti-simétrica) se e somente se $T^* = T$ (respectivamente, $T^* = -T$).

OBSERVAÇÃO 1.1.2. Infelizmente, a identificação (1.1.1) não funciona muito bem a nível de matrizes (de acordo com as convenções usuais para representação matricial de operadores lineares e formas bilineares). Sejam $(v_i)_{i=1}^n$ e $(w_i)_{i=1}^m$ bases para V e W respectivamente; denote por $(v_i^*)_{i=1}^n$ e $(w_i^*)_{i=1}^m$ as correspondentes bases duais de V^* e W^*; para $T \in \mathcal{L}(V, W^*)$, a representação matricial (T_{ij}) de T satisfaz:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} T_{ij} w_i^*,$$

ou seja,

$$T_{ij} = T(v_j)(w_i) = \tilde{T}(v_j, w_i) = \tilde{T}_{ji}.$$

Assim, a matriz que representa um operador linear T é a *transposta* da matriz que representa sua forma bilinear $\tilde{T}$ correspondente; em muitos casos estaremos trabalhando com formas bilineares simétricas e não haverá risco de confusão, mas quando trabalharmos com *formas simpléticas* na Seção 1.4 (que são *anti-simétricas*) deve-se tomar cuidado para não cometer erros de sinal (vide Exemplo 1.1.4 abaixo).

DEFINIÇÃO 1.1.3. Dado $T \in \mathcal{L}(V, W)$, definimos o operador de *pull-back* associado a T

$$T^* : \mathcal{B}(W) \longrightarrow \mathcal{B}(V)$$

por $T^*(B) = B(T\cdot, T\cdot)$ para todo $B \in \mathcal{B}(W)$; quando T é um isomorfismo, podemos definir também o operador de *push-forward* associado a T

$$T_* : \mathcal{B}(V) \longrightarrow \mathcal{B}(W)$$

por $T_*(B) = B(T^{-1}\cdot, T^{-1}\cdot)$, para todo $B \in \mathcal{B}(V)$. Na notação introduzida na Observação 1.1.1 temos $T^* = \mathcal{B}(T, T)$ e $T_* = \mathcal{B}(T^{-1}, T^{-1})$.

Note que T^* denota tanto o operador pull-back associado a T quanto o operador transposto de T, mas o contexto deverá deixar claro o significado; na verdade, o operador transposto T^* pode ser pensado como o *operador de pull-back em* 1*-formas* induzido por T.

EXEMPLO 1.1.4. Usando (1.1.1) para identificar operadores lineares e formas bilineares temos que o operador pull-back é dado por:

$$T^*(B) = T^* \circ B \circ T, \tag{1.1.4}$$

para $B \in \mathcal{B}(W) \cong \mathcal{L}(W, W^*)$ e o operador push-forward é dado por:

$$T_*(B) = (T^{-1})^* \circ B \circ T^{-1}, \tag{1.1.5}$$

para $B \in \mathcal{B}(V) \cong \mathcal{L}(V, V^*)$.

As identidades (1.1.4) e (1.1.5) podem ser entendidas como fórmulas envolvendo representações matriciais, mas nesse caso devem-se usar as matrizes que representam B, $T_*(B)$ e $T^*(B)$ *vistos como operadores lineares*.

Para $B \in \mathcal{B}(V)$, o *núcleo* de B é o subespaço de V definido por:

$$\mathrm{Ker}(B) = \big\{ v \in V : B(v, w) = 0, \ \forall w \in V \big\}. \tag{1.1.6}$$

O núcleo de B coincide com o núcleo do seu operador linear associado. Dizemos que B é *não-degenerada* quando $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$. Isso é equivalente a dizer que seu operador linear associado $V \to V^*$ é injetor (ou que o mesmo é um isomorfismo, já que $\dim(V) < +\infty$).

EXEMPLO 1.1.5. Se $B \in \mathcal{B}(V)$ é uma forma bilinear não-degenerada, então B define um isomorfismo de V sobre V^*, de modo que podemos definir a forma bilinear $B_*(B)$ em V^* obtida de B fazendo o push-forward através da própria B. Por (1.1.5), tal forma em V^* coincide com $(B^{-1})^*$; na maioria das vezes estaremos interessados no caso em que B é simétrica (por exemplo, um produto interno), de modo que a forma induzida em V^* também é simétrica e coincide simplesmente com B^{-1}.

DEFINIÇÃO 1.1.6. Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ uma forma bilinear simétrica em V. Dizemos que um operador linear $T\colon V \to V$ é *B-simétrico* (respectivamente, *B-anti-simétrico*) quando a forma bilinear $B(T\cdot, \cdot)$ for simétrica (respectivamente, anti-simétrica). Dizemos que T é *B-ortogonal* quando $T^*(B) = B$, i.e., $B(T\cdot, T\cdot) = B$.

EXEMPLO 1.1.7. Dada $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e considerando B como um operador linear $B\colon V \to V^*$ temos que a B-simetria de $T \in \mathcal{L}(V)$ é equivalente a:

$$B \circ T = (B \circ T)^*. \tag{1.1.7}$$

Consideração análoga pode ser feita em relação à B-anti-simetria (acrescentando um sinal em (1.1.7)). A identidade (1.1.7) pode ser entendida em termos de matrizes: dada uma base, temos que T é B-simétrica quando o produto da matriz que representa B pela matriz que representa T for uma matriz simétrica.

Quando B é não-degenerada, podemos também definir o *operador transposto de T relativo a B* como sendo o operador $\hat{T} \in \mathcal{L}(V)$ tal que $B(Tv, w) = B(v, \hat{T}w)$ para $v, w \in V$. Daí T é B-simétrico (respectivamente, B-anti-simétrico) se e somente se $\hat{T} = T$ (respectivamente, $\hat{T} = -T$). Um operador T será B-ortogonal se e somente se for inversível e satisfizer $\hat{T} = T^{-1}$.

O nome "transposto" usado aqui justifica-se pelo fato que, identificando V e V^* através de B, o operador $\hat{T}$ corresponde ao operador transposto usual T^*, i.e., o diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{T}"] \arrow[d, "B"', "\cong"] & V \arrow[d, "\cong"', "B"] \\ V^* \arrow[r, "T^*"'] & V^* \end{tikzcd} \tag{1.1.8}$$

comuta. Explicitamente temos $\hat{T} = B^{-1} \circ T^* \circ B$. Definimos então que um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ é *B-normal* quando T comuta com $\hat{T}$.

Dado um subespaço $S \subset V$ e uma forma bilinear $B \in \mathcal{B}(V)$, definimos o *complemento ortogonal* de S relativo a B por:

$$S^\perp = \big\{ v \in V : B(v, w) = 0,\ \forall w \in S \big\}. \tag{1.1.9}$$

Observe que $S^\perp$ é simplesmente a imagem inversa $B^{-1}(S^o)$ por $B\colon V \to V^*$ do *anulador* de S em V definido por:

$$S^o = \big\{\alpha \in V^* : \alpha|_S = 0\big\}.$$

Em particular, o núcleo de B é simplesmente o complemento ortogonal $V^\perp$ relativo a B do espaço inteiro V.

No caso de uma forma bilinear genérica B, deve-se observar com cuidado a convenção na definição de $S^\perp$ em (1.1.9); se considerássemos os vetores v tais que $B(\cdot, v)$ se anula em S, obteríamos uma definição completamente diferente para $S^\perp$. Na prática porém, só usaremos essa definição quando B é simétrica ou anti-simétrica e daí as duas possíveis convenções são equivalentes.

EXEMPLO 1.1.8. Sejam dadas $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ não-degenerada, $T \in \mathcal{L}(V)$ e denote por $\hat{T}$ o operador transposto de T relativo a B. Então se $S \subset V$ é um *subespaço invariante* por T, i.e., $T(S) \subset S$ temos que o complemento ortogonal $S^\perp$ relativo a B será invariante por $\hat{T}$, i.e., $\hat{T}\big(S^\perp\big) \subset S^\perp$. Isso segue de (1.1.8) e da identidade $S^\perp = B^{-1}(S^o)$, observando que o anulador S^o é invariante por T^*.

É fácil ver que em geral não temos nem $S \cap S^\perp = \{0\}$, nem $V = S + S^\perp$ e nem mesmo $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp)$; temos porém os seguintes resultados.

PROPOSIÇÃO 1.1.9. *Se B é não-degenerada então* $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp)$.

DEMONSTRAÇÃO. Simplesmente observe que

$$\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^o),$$

e que $\dim(S^\perp) = \dim(S^o)$, já que $S^\perp = B^{-1}(S^o)$ e B é um isomorfismo. □

Se B é simétrica ou anti-simétrica, é fácil ver que $S \subset (S^\perp)^\perp$; a igualdade em geral não vale, mas temos o seguinte.

COROLÁRIO 1.1.10. *Suponha B simétrica ou anti-simétrica; se B é não-degenerada então $S = (S^\perp)^\perp$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos $S \subset (S^\perp)^\perp$ e pela Proposição 1.1.9 temos $\dim(S) = \dim\big((S^\perp)^\perp\big)$. □

PROPOSIÇÃO 1.1.11. *A restrição $B|_{S\times S}$ é não-degenerada se e somente se $V = S \oplus S^\perp$.*

DEMONSTRAÇÃO. O núcleo da restrição de B a S é $S \cap S^\perp$, donde $V = S \oplus S^\perp$ implica B não-degenerada em S; reciprocamente, se B é não-degenerada em S, temos $S \cap S^\perp = \{0\}$, donde resta mostrar que $V = S + S^\perp$. Note que a aplicação

$$S \ni x \longmapsto B(x, \cdot)|_S \in S^* \tag{1.1.10}$$

é um isomorfismo; Daí, dado $v \in V$ podemos encontrar $x \in S$ tal que $B(x, \cdot)$ e $B(v, \cdot)$ coincidem em S, donde $x - v \in S^\perp$. Isso completa a demonstração. $\square$

COROLÁRIO 1.1.12. *Suponha B simétrica ou anti-simétrica; se B é não-degenerada em V então são equivalentes:*

- *B é não-degenerada em S;*
- *B é não-degenerada em $S^\perp$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que B é não-degenerada em S. Pela Proposição 1.1.11 temos $V = S \oplus S^\perp$; pelo Corolário 1.1.10 temos $V = S^\perp \oplus (S^\perp)^\perp$, donde B é não-degenerada em $S^\perp$, pela Proposição 1.1.11. A recíproca segue analogamente, já que $(S^\perp)^\perp = S$. $\square$

EXEMPLO 1.1.13. A Proposição 1.1.11 realmente não vale quando V tem dimensão infinita; por exemplo, se $V = \ell_2(\mathbb{N})$ é o espaço das seqüências $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de números reais *quadraticamente somáveis*, i.e., $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < +\infty$, $B = \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ é o *produto Hilbertiano padrão* em V dado por $B(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i y_i$ e $S \subset V$ é o subespaço formado pelas seqüências *quase-nulas*, i.e., $x_i \neq 0$ no máximo para um número finito de índices $i \in \mathbb{N}$, então é fácil ver que $S^\perp = \{0\}$.

Ocorre aqui que a aplicação (1.1.10) é injetora mas não é sobrejetora.

OBSERVAÇÃO 1.1.14. Observe que a Proposição 1.1.11 é verdadeira se supusermos apenas que S tem dimensão finita; de fato, na demonstração apresentada, só foi importante a finitude da dimensão para concluir que (1.1.10) é um isomorfismo.

Como aplicação da Proposição 1.1.11, mostramos que toda forma bilinear simétrica é diagonalizável.

TEOREMA 1.1.15. *Suponha que o corpo de escalares K tem característica diferente de 2; dada uma forma bilinear simétrica $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$, existe uma base de V na qual B é representada por uma matriz diagonal, i.e., existe uma base $(b_i)_{i=1}^n$ de V tal que $B(b_i, b_j) = 0$ para $i \neq j$.*

DEMONSTRAÇÃO. Provamos o resultado por indução na dimensão de V. Se $\dim(V) \leq 1$ o resultado é trivial; suponha $\dim(V) = n > 1$ e que o resultado é válido para espaços de dimensão menor que n. Se tivermos $B(v, v) = 0$ para todo $v \in V$ então[2]:

$$0 = B(v + w, v + w) = 2\,B(v, w),$$

o que implica $B = 0$ (já que $\mathrm{car}(K) \neq 2$); o caso $B = 0$ é trivial, donde podemos supor que existe $b_1 \in V$ com $B(b_1, b_1) \neq 0$. Daí B é não-degenerada

[2]A fórmula $B(v, w) = \frac{1}{2}\big(B(v + w, v + w) - B(v, v) - B(w, w)\big)$, válida para formas bilineares simétricas $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ quando $\mathrm{car}(K) \neq 2$ é conhecida como a *fórmula de polarização*.

no subespaço unidimensional Kb_1 gerado por b_1 e pela Proposição 1.1.11 temos que:

$$V = Kb_1 \oplus (Kb_1)^{\perp}.$$

Pela hipótese de indução, existe uma base $(b_i)_{i=2}^n$ de $(Kb_1)^{\perp}$ que diagonaliza a restrição de B; é fácil então ver que $(b_i)_{i=1}^n$ é uma base de V que diagonaliza B. □

1.2. Estruturas Complexas e Redução de Escalares

Nesta seção verificamos um pouco o que acontece quando mudamos os escalares de um espaço vetorial do corpo real para o complexo; quando passamos do complexo para o real, estamos apenas fazendo uma restrição, que chamaremos uma redução de escalares. A passagem do real para o complexo exige a introdução de uma estrutura adicional, que será chamada uma estrutura complexa. Não supomos *a priori* que os espaços envolvidos têm dimensão finita. A maioria das demonstrações são muito elementares e portanto omitidas.

Durante esta seção, muitas vezes nos referiremos a operadores lineares como $\mathbb{R}$-lineares ou $\mathbb{C}$-lineares, apesar da redundância do termo; de fato, o corpo de escalares considerado deve ser claro a partir dos espaços vetoriais. Em todo caso, acreditamos que tal redundância facilita a leitura. De maneira análoga, falaremos às vezes em $\mathbb{R}$-bases (ou *bases sobre* $\mathbb{R}$), $\mathbb{C}$-bases (ou *bases sobre* $\mathbb{C}$), dimensão sobre $\mathbb{R}$, dimensão sobre $\mathbb{C}$ e assim por diante.

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo; denotamos por $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ o espaço vetorial real obtido de $\mathcal{V}$ pela restrição da multiplicação por escalares $\mathbb{C} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ a $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$. Note que o conjunto de vetores subjacente (assim como a soma) de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ coincidem. Dizemos que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ é a *realificação* de $\mathcal{V}$ ou que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ é obtido de $\mathcal{V}$ por *redução de escalares*.

Note que o endomorfismo $v \mapsto iv$ de $\mathcal{V}$ dado pela multiplicação pelo escalar $i = \sqrt{-1}$ é $\mathbb{C}$-linear e portanto define também um endomorfismo $\mathbb{R}$-linear de $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$; o quadrado de tal endomorfismo é igual a menos o operador identidade. Isso motiva a seguinte:

Definição 1.2.1. Seja V um espaço vetorial real. Uma *estrutura complexa* em V é um operador linear $J\colon V \to V$ tal que $J^2 = J \circ J = -\mathrm{Id}$.

É claro que uma estrutura complexa J é sempre um isomorfismo, já que $J^{-1} = -J$.

Dada uma estrutura complexa J em V, é fácil ver que existe uma única maneira de estender a multiplicação por escalares $\mathbb{R} \times V \to V$ de V a $\mathbb{C} \times V$ de modo que $J(v) = iv$ para todo $v \in V$. Explicitamente, definimos:

$$(a + bi)v = av + bJ(v), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.2.1}$$

Reciprocamente, como já haviamos observado, toda extensão a $\mathbb{C} \times V$ da multiplicação por escalares de V (tornando V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial) define uma estrutura complexa em V por $J(v) = iv$.

A partir de agora, identificaremos cada par (V, J) onde V é um espaço vetorial real e J é uma estrutura complexa em V com o espaço vetorial complexo $\mathcal{V}$ obtido a partir de (1.2.1). Observe que V é simplesmente a realificação $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ de (V, J).

EXEMPLO 1.2.2. Em $\mathbb{R}^{2n}$ temos uma estrutura complexa J definida por $J(x, y) = (-y, x)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Chamamos essa a *estrutura complexa canônica* de $\mathbb{R}^{2n}$. Identificamos então $(\mathbb{R}^{2n}, J)$ com o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ através de $(x, y) \mapsto x + iy$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$. Em termos de matrizes temos:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.2}$$

onde 0 e I denotam respectivamente a matriz zero e a matriz identidade $n \times n$.

O seguinte lema é muito simples.

LEMA 1.2.3. *Sejam V_1, V_2 espaços vetoriais reais e sejam J_1, J_2 estruturas complexas em V_1, V_2 respectivamente. Um operador $\mathbb{R}$-linear $T\colon V_1 \to V_2$ será $\mathbb{C}$-linear de (V_1, J_1) em (V_2, J_2) se e somente se $T \circ J_1 = J_2 \circ T$; em particular, se V é um espaço real e J é uma estrutura complexa em V então os endomorfismos $\mathbb{C}$-lineares de (V, J) são os endomorfismos $\mathbb{R}$-linares de V que comutam com J.* $\square$

OBSERVAÇÃO 1.2.4. Observe que se J é uma estrutura complexa em V então $-J$ também é; dizemos que $-J$ é a estrutura complexa *conjugada* de J. Note que para $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in V$, o produto de λ por v no espaço complexo $(V, -J)$ é igual ao produto de $\bar{\lambda}$ por v no espaço (V, J), onde $\bar{\lambda}$ denota o complexo conjugado de λ.

O conjunto das bases (complexas) de (V, J) e de $(V, -J)$ coincidem, mas observe que, relativamente a uma base fixada, as coordenadas de um vetor dado se *conjugam* quando trocamos J por $-J$.

Um operador $\mathbb{C}$-linear T continua $\mathbb{C}$-linear quando trocamos as estruturas complexas de seu domínio *e* de seu contra-domínio pelas estruturas complexas conjugadas correspondentes. Observe no entanto que se T é representado por uma matriz complexa Z em certas bases então sua representação matricial passa a ser a *matriz conjugada* $\overline{Z}$ quando conjugamos as estruturas complexas de seu domínio e contra-domínio (mantendo as bases inalteradas).

DEFINIÇÃO 1.2.5. Uma aplicação T entre espaços vetoriais complexos é dita *anti-linear* (ou *linear conjugada*) quando for aditiva (i.e., $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para todos x, y) e tivermos $T(\lambda x) = \bar{\lambda} T(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e todo x no domínio de T.

Uma aplicação anti-linear é sempre $\mathbb{R}$-linear (quando realificamos o domínio e o contra-domínio); além do mais, uma aplicação é anti-linear se e somente se ela se torna $\mathbb{C}$-linear quando conjugamos a estrutura complexa de seu domínio (ou de seu contra-domínio). Em particular, os endomorfismos anti-lineares de (V, J) são os endomorfismos $\mathbb{R}$-lineares de V que *anti-comutam* com J.

Temos a seguinte relação entre bases de (V, J) e de V.

PROPOSIÇÃO 1.2.6. *Seja V um espaço vetorial real e J uma estrutura complexa em V. Uma família $(b_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é uma $\mathbb{C}$-base de (V, J) se e somente se a união das famílias $(b_j)_{j\in\mathcal{J}}$ e $(J(b_j))_{j\in\mathcal{J}}$ é uma $\mathbb{R}$-base de V.* □

COROLÁRIO 1.2.7. *A dimensão (real) de V é o dobro da dimensão (complexa) de (V, J) (ambas finitas ou ambas infinitas); em particular, um espaço vetorial real de dimensão finita admite uma estrutura complexa se e somente se sua dimensão é par.*

DEMONSTRAÇÃO. Para a existência de estruturas complexas em espaços de dimensão par vide Exemplo 1.2.2. □

EXEMPLO 1.2.8. Se V é um espaço real e J é uma estrutura complexa em V então o dual do espaço complexo (V, J) consiste no espaço (complexo) dos operadores $\mathbb{R}$-lineares $\alpha\colon V \to \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha \circ J(v) = i\,\alpha(v), \quad v \in V. \tag{1.2.3}$$

É fácil ver que a identidade (1.2.3) determina a parte imaginária de α a partir de sua parte real, i.e., temos um isomorfismo

$$(V, J)^* \ni \alpha \longmapsto \Re \circ \alpha \in V^*, \tag{1.2.4}$$

onde $\Re\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é o *operador parte real*. O isomorfismo $\mathbb{R}$-linear (1.2.4) induz portanto uma única estrutura complexa em V^* que torna (1.2.4) $\mathbb{C}$-linear. É fácil ver que tal estrutura complexa é simplesmente o operador transposto J^*.

Finalizamos a seção com uma relação entre representações matriciais de vetores e operadores em bases reais e complexas. A partir de agora suporemos que V é um espaço vetorial real de dimensão $2n < +\infty$ munido de uma estrutura complexa J, de modo que (V, J) tem dimensão n.

DEFINIÇÃO 1.2.9. Uma base de V da forma

$$\big(b_1, \ldots, b_n, J(b_1), \ldots, J(b_n)\big) \tag{1.2.5}$$

é chamada uma *base adaptada a J* (ou uma *J-base*) de V; dizemos que $(b_j)_{j=1}^n$ é a base complexa de (V, J) *correspondente* à J-base (1.2.5) (vide Proposição 1.2.6).

Por exemplo, considerando a estrutura complexa canônica em $\mathbb{R}^{2n}$ (vide Exemplo 1.2.2) então a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ é uma J-base, cuja base complexa correspondente é a base canônica de $\mathbb{C}^n$; dito de outra forma, as J-bases de um espaço vetorial real são precisamente as bases nas quais a representação matricial de J é dada por (1.2.2). A existência de J-bases segue da Proposição 1.2.6.

Fixamos então uma J-base em V, correspondendo a uma base complexa $(b_j)_{j=1}^n$ de (V, J). Dado um vetor $v \in V$ com coordenadas $(z_1, \dots, z_n)$ na base de (V, J) então suas coordenadas na base real de V serão:

$$v \sim (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

onde $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in I\!R$. Se T é um operador $\mathbb{C}$-linear representado em bases complexas pela matriz $Z = A + Bi$ (A, B reais) então sua representação nas J-bases correspondentes é:

$$T \sim \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \tag{1.2.6}$$

Observação 1.2.10. Note que a fórmula (1.2.6) implica que a aplicação que associa a cada matriz $n \times n$ complexa $Z = A + Bi$ (A, B reais) a matriz dada em (1.2.6) é um *homomorfismo* injetor ($I\!R$-linear) da álgebra das matrizes complexas $n \times n$ na álgebra das matrizes reais $2n \times 2n$.

Observação 1.2.11. Em linguagem categórica, mostramos nesta seção que a categoria dos espaços vetoriais complexos e operadores $\mathbb{C}$-lineares é *isomorfa* à categoria dos pares (V, J) (V espaço real e J estrutura complexa em V) cujos morfismos são operadores $I\!R$-lineares que preservam os operadores J (no sentido do enunciado do Lema 1.2.3).

Observação 1.2.12. A operação de redução de escalares faz sentido em contexto muito mais geral; mais explicitamente, se S, R são anéis, $h\colon S \to R$ é um homomorfismo de anéis e M é um R-módulo, podemos definir uma estrutura de S-módulo em M fazendo $(s, m) \mapsto h(s) \cdot m$, para $s \in S$, $m \in M$; dizemos que esse S-módulo é obtido de M por *redução de escalares através de h*.

1.3. Complexificação e Formas Reais

Nesta seção mostramos que todo espaço vetorial real pode ser estendido de maneira canônica a um espaço vetorial complexo (imitando a relação entre $I\!R^n$ e $\mathbb{C}^n$); tal extensão será chamada uma complexificação do espaço. Mostramos também que um dado espaço complexo em geral pode ser visto como a complexificação de vários subespaços reais, os quais serão chamados formas reais do espaço. Não supomos *a priori* que os espaços envolvidos têm dimensão finita. Várias demonstrações são muito elementares e portanto omitidas.

Definição 1.3.1. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo; uma *forma real* em $\mathcal{V}$ é um subespaço real $\mathcal{V}_0$ de $\mathcal{V}$ (ou, mais precisamente, da realificação $\mathcal{V}_{I\!R}$) tal que

$$\mathcal{V}_{I\!R} = \mathcal{V}_0 \oplus i\mathcal{V}_0.$$

Dito de outra maneira, uma forma real $\mathcal{V}_0$ em $\mathcal{V}$ é um subespaço real tal que todo $v \in \mathcal{V}$ se escreve de modo único como $v = v_1 + iv_2$, com $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_0$.

A uma forma real $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ estão associadas aplicações:

$$\Re\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}_0, \quad \Im\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}_0, \quad \mathfrak{c}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \tag{1.3.1}$$

dadas por $\Re(v_1 + iv_2) = v_1$, $\Im(v_1 + iv_2) = v_2$ e $\mathfrak{c}(v_1 + iv_2) = v_1 - iv_2$, para todos $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_0$. Chamamos $\Re$, $\Im$ e $\mathfrak{c}$ respectivamente o *operador parte real*, o *operador parte imaginária* e o *operador de conjugação* relativos a $\mathcal{V}_0$. Todos esses operadores são $\mathbb{R}$-lineares; o operador $\mathfrak{c}$ é anti-linear. Para $v \in \mathcal{V}$, dizemos também que $\mathfrak{c}(v)$ é o *conjugado* de v (relativo a forma real $\mathcal{V}_0$) e escrevemos também:

$$\mathfrak{c}(v) = \bar{v}.$$

DEFINIÇÃO 1.3.2. Seja V um espaço vetorial real. Uma *complexificação* de V é um par $(V^{\mathbb{C}}, \iota)$ onde $V^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial complexo, ι é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear injetora de V em $V^{\mathbb{C}}$ (ou, mais precisamente, na realificação de $V^{\mathbb{C}}$) tal que a imagem de ι é uma forma real em $V^{\mathbb{C}}$.

A proposição seguinte é usualmente conhecida como a *propriedade universal da complexificação*.

PROPOSIÇÃO 1.3.3. *Sejam V um espaço vetorial real, $(V^{\mathbb{C}}, \iota)$ uma complexificação de V e $\mathcal{W}$ um espaço vetorial complexo. Então dada uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $f\colon V \to \mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ existe uma única aplicação $\mathbb{C}$-linear $\tilde{f}\colon V^{\mathbb{C}} \to \mathcal{W}$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} V^{\mathbb{C}} \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}"] & \\ V \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{W} \end{tikzcd} \tag{1.3.2}$$

DEMONSTRAÇÃO. A unicidade segue do fato que $\iota(V)$ *gera* $V^{\mathbb{C}}$ (como espaço complexo); para a existência defina

$$\tilde{f}(v) = f \circ \iota^{-1}(\Re(v)) + i\, f \circ \iota^{-1}(\Im(v)),$$

onde $\Re$ e $\Im$ são respectivamente o operador parte real e parte imaginária associados à forma real $\iota(V)$ de $V^{\mathbb{C}}$. $\square$

Como corolário, obtemos que a complexificação é única a menos de isomorfismos.

COROLÁRIO 1.3.4. *Se $(V_1^{\mathbb{C}}, \iota_1)$, $(V_2^{\mathbb{C}}, \iota_2)$ são complexificações de V então existe um único isomorfismo $\mathbb{C}$-linear $\phi\colon V_1^{\mathbb{C}} \to V_2^{\mathbb{C}}$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} V_1^{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\phi"] & & V_2^{\mathbb{C}} \\ & V \arrow[ul, "\iota_1"] \arrow[ur, "\iota_2"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

DEMONSTRAÇÃO. Aplicando a Proposição 1.3.3, construímos $\phi\colon V_1^{\mathbb{C}} \to V_2^{\mathbb{C}}$ e $\psi\colon V_2^{\mathbb{C}} \to V_1^{\mathbb{C}}$ tais que $\phi \circ \iota_1 = \iota_2$ e $\psi \circ \iota_2 = \iota_1$; a parte de unicidade da Proposição 1.3.3 nos dá a unicidade de ϕ. Usando novamente a unicidade (duas vezes) na Proposição 1.3.3, concluímos que $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}$ e $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}$. $\square$

Se V é um espaço vetorial real então podemos fazer da soma direta $V \oplus V$ um espaço vetorial complexo através da estrutura complexa

$$V \oplus V \ni (v, w) \mapsto (-w, v) \in V \oplus V.$$

Definindo $\iota(v) = (v, 0)$ é fácil ver que $(V \oplus V, \iota)$ é então uma complexificação de V chamada a *complexificação canônica* de V. Em vista do Corolário 1.3.4, não precisamos mais distinguir entre duas complexificações de V; *a partir de agora* então, o símbolo $V^{\mathbb{C}}$ denota a complexificação canônica de V, ou dependendo do contexto, podemos denotar por $V^{\mathbb{C}}$ alguma outra complexificação de V (isomorfa à canônica). O espaço original V é então identificado através de ι com $\iota(V)$, de modo que consideramos $V \subset V^{\mathbb{C}}$; o fato que $\iota(V)$ é uma forma real de $V^{\mathbb{C}}$ significa então que $V^{\mathbb{C}}$ se escreve como soma direta dos subespaços V e iV:

$$V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV.$$

EXEMPLO 1.3.5. Temos que $I\!R^n \subset \mathbb{C}^n$ é uma forma real e portanto $\mathbb{C}^n$ é uma complexificação de $I\!R^n$.

EXEMPLO 1.3.6. Se X é um conjunto então o espaço vetorial $\mathcal{F}(X, I\!R)$ de todas as funções de X em $I\!R$ é uma forma real do espaço $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ das funções de X em $\mathbb{C}$. O mesmo normalmente vale quando consideramos alguma classe específica de funções; por exemplo, se X é uma *variedade* então o espaço $C^k(X, I\!R)$ de *funções de classe* C^k de X em $I\!R$ é uma forma real de $C^k(X, \mathbb{C})$.

Assim, $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ e $C^k(X, \mathbb{C})$ são complexificações de $\mathcal{F}(X, I\!R)$ e $C^k(X, I\!R)$ respectivamente.

EXEMPLO 1.3.7. Na mesma linha dos Exemplos 1.3.5 e 1.3.6, temos que o espaço $M_n(I\!R)$ das matrizes reais $n \times n$ é uma forma real do espaço $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes complexas $n \times n$. Um exemplo menos trivial é o seguinte. Seja $\mathrm{u}(n)$ o subespaço de $M_n(\mathbb{C})$ formado pelas *matrizes anti-Hermiteanas*, i.e., matrizes A tais que $A^* = -A$, onde aqui A^* denota a matriz transposta-conjugada de A. Então $i\mathrm{u}(n)$ é o espaço das *matrizes Hermiteanas*, i.e., matrizes A com $A^* = A$. É fácil ver que $M_n(\mathbb{C}) = \mathrm{u}(n) \oplus i\mathrm{u}(n)$, de modo que também $\mathrm{u}(n)$ é uma forma real de $M_n(\mathbb{C})$ e $M_n(\mathbb{C})$ é uma complexificação de $\mathrm{u}(n)$.

EXEMPLO 1.3.8. Se $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial complexo e se $(b_j)_{j \in \mathcal{J}}$ é uma base complexa de $\mathcal{V}$ então o subespaço real

$$\mathcal{V}_0 = \Big\{ \sum\nolimits_{j \in \mathcal{J}'} \lambda_j b_j : \lambda_j \in I\!R, \ \mathcal{J}' \subset \mathcal{J} \text{ finito} \Big\}$$

de $\mathcal{V}_{I\!R}$ gerado pelo conjunto $\{b_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ é sempre uma forma real em $\mathcal{V}$.

Na verdade, todas as formas reais de $\mathcal{V}$ podem ser obtidas dessa maneira; de fato, se $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ é uma forma real então uma $I\!R$-base $(b_j)_{j \in \mathcal{J}}$ de $\mathcal{V}_0$ é também uma $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{V}$. Note que em particular concluímos também que a dimensão real de uma forma real $\mathcal{V}_0$ é igual à dimensão complexa de $\mathcal{V}$; dito de outra maneira, a dimensão de um espaço vetorial real é igual à dimensão (complexa) de sua complexificação.

O Exemplo 1.3.8 mostra que todo espaço vetorial complexo (não nulo) admite uma infinidade de formais reais; o Exemplo 1.3.7 mostra que é possível também que tenhamos várias formas reais "interessantes". A seguinte proposição dá uma caracterização das formas reais de um espaço complexo. Recorde que uma bijeção ϕ de um conjunto é dita *involutiva* se $\phi^2 = \phi \circ \phi = \mathrm{Id}$.

PROPOSIÇÃO 1.3.9. *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo. Então existe uma bijeção entre o conjunto das formas reais de $\mathcal{V}$ e o conjunto dos automorfismos anti-lineares involutivos de $\mathcal{V}$, de modo que:*

- *a cada forma real $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ associamos o seu operador de conjugação $\mathfrak{c}$ (vide* (1.3.1)*);*
- *a cada automorfismo anti-linear involutivo $\mathfrak{c}$ de $\mathcal{V}$ associamos o conjunto $\mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{V} : \mathfrak{c}(v) = v\}$ de seus pontos fixos.*

□

A proposição acima fornece uma comparação interessante entre as construções da Seção 1.2 e da presente seção. Na Seção 1.2 vimos que em certo sentido as operações de realificação e de adição de estrutura complexa são mutuamente inversas; enquanto a realificação é um procedimento canônico, a adição de uma estrutura complexa exige uma informação adicional: a saber, um automorfismo J com $J^2 = -\mathrm{Id}$. Na presente seção temos a situação oposta. A complexificação é uma construção canônica (a menos de isomorfismos), enquanto sua operação "inversa", i.e., a passagem a uma forma real exige a adição de informação adicional: um automorfismo anti-linear involutivo $\mathfrak{c}$.

Olhamos agora para a complexificação de maneira *funtorial*. Sejam V_1, V_2 espaços vetoriais reais. Segue da propriedade universal da complexificação (Proposição 1.3.3) que cada operador $\mathbb{R}$-linear $T\colon V_1 \to V_2$ admite uma única extensão $\mathbb{C}$-linear $T^{\mathbb{C}}\colon V_1^{\mathbb{C}} \to V_2^{\mathbb{C}}$. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} V_1^{\mathbb{C}} \arrow[r, "T^{\mathbb{C}}"] & V_2^{\mathbb{C}} \\ V_1 \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "T"'] & V_2 \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

O operador $T^{\mathbb{C}}$ é chamado a *complexificação* de T; concretamente falando, temos que $T^{\mathbb{C}}$ é dado por:

$$T^{\mathbb{C}}(v + iw) = T(v) + iT(w), \quad v, w \in V_1.$$

É imediato que:

$$(T_1 \circ T_2)^{\mathbb{C}} = T_1^{\mathbb{C}} \circ T_2^{\mathbb{C}}, \quad \mathrm{Id}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Id}, \tag{1.3.3}$$

e portanto também $\big(T^{\mathbb{C}}\big)^{-1} = (T^{-1})^{\mathbb{C}}$ quando T for um isomorfismo.

OBSERVAÇÃO 1.3.10. As identidades (1.3.3) dizem que a complexificação $V \mapsto V^{\mathbb{C}}$, $T \mapsto T^{\mathbb{C}}$ define um *funtor* da categoria dos espaços vetoriais reais (e operadores $\mathbb{R}$-lineares) na categoria dos espaços vetoriais complexos (e operadores $\mathbb{C}$-lineares).

Se $U \subset V$ é um subespaço então é fácil ver que a complexificação $\mathfrak{i}^{\mathbb{C}}$ da inclusão $\mathfrak{i}\colon U \to V$ é injetora e portanto identifica $U^{\mathbb{C}}$ com um subespaço de $V^{\mathbb{C}}$. Concretamente falando, temos que o subespaço $U^{\mathbb{C}} \subset V^{\mathbb{C}}$ é a soma (direta) dos subespaços reais U e iU de $V^{\mathbb{C}}$; também, $U^{\mathbb{C}}$ é o subespaço complexo de $V^{\mathbb{C}}$ gerado pelo subconjunto $U \subset V^{\mathbb{C}}$. Dado um operador linear $T\colon V_1 \to V_2$ então é fácil ver que[3]

$$\operatorname{Ker}\big(T^{\mathbb{C}}\big) = (\operatorname{Ker}(T))^{\mathbb{C}}, \quad \operatorname{Im}\big(T^{\mathbb{C}}\big) = (\operatorname{Im}(T))^{\mathbb{C}}. \tag{1.3.4}$$

Nem todo subespaço de $V^{\mathbb{C}}$ é a complexificação de um subespaço de V. Temos a seguinte caracterização.

LEMA 1.3.11. *Seja V um espaço vetorial real e seja $\mathcal{Z} \subset V^{\mathbb{C}}$ um subespaço vetorial complexo. Então existe um subespaço real $U \subset V$ com $\mathcal{Z} = U^{\mathbb{C}}$ se e somente se $\mathcal{Z}$ é* invariante por conjugação, *i.e.:*

$$\mathfrak{c}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z},$$

onde $\mathfrak{c}$ denota o operador de conjugação relativo à forma real $V \subset V^{\mathbb{C}}$. Quando $\mathcal{Z} = U^{\mathbb{C}}$, tal U é unicamente determinado e é dado explicitamente por $U = \mathcal{Z} \cap V$. □

Observe que, dados espaços vetoriais reais V_1, V_2, temos um operador

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) \ni T \longmapsto T^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big) \tag{1.3.5}$$

que é $\mathbb{R}$-linear injetor; na verdade temos o seguinte

LEMA 1.3.12. *A aplicação* (1.3.5) *leva $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ isomorficamente sobre uma forma real de $\mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\big(V_2^{\mathbb{C}}\big)_{\mathbb{R}} = V_2 \oplus iV_2$, é fácil ver que:

$$\mathcal{L}\Big(V_1, \big(V_2^{\mathbb{C}}\big)_{\mathbb{R}}\Big) = \mathcal{L}(V_1, V_2) \oplus i\mathcal{L}(V_1, V_2). \tag{1.3.6}$$

Da propriedade universal da complexificação (Proposição 1.3.3) segue que o *operador restrição*

$$\mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big) \ni \mathcal{S} \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}|_{V_1} \in \mathcal{L}\Big(V_1, \big(V_2^{\mathbb{C}}\big)_{\mathbb{R}}\Big) \tag{1.3.7}$$

é um isomorfismo. De (1.3.6) e (1.3.7) segue que:

$$\mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big) \cong \mathcal{L}(V_1, V_2) \oplus \mathcal{L}(V_1, V_2), \tag{1.3.8}$$

onde os dois termos na soma direta em (1.3.8) são identificados respectivamente com a imagem de (1.3.5) e com essa imagem multiplicada por i. □

---

[3]Diz-se nesse caso que a complexificação é um *funtor exato*, i.e., leva seqüências exatas curtas em seqüências exatas curtas.

Segue em particular do Lema 1.3.12 que $V^* = \mathcal{L}(V, I\!R)$ identifica-se com uma forma real de $\big(V^{\mathbb{C}}\big)^* = \mathcal{L}\big(V^{\mathbb{C}}, \mathbb{C}\big)$; dito de outra meneira, o *complexificado do dual de* V identifica-se com o *dual (complexo) do complexificado de* V (compare com o Exemplo 1.2.8).

Seguindo a mesma linha do Lema 1.3.11, o lema seguinte caracteriza a imagem de (1.3.5).

LEMA 1.3.13. *Sejam V_1, V_2 espaços vetoriais reais. Dado um operador $\mathbb{C}$-linear $\mathcal{S}\colon V_1^{\mathbb{C}} \to V_2^{\mathbb{C}}$, as seguintes condições são equivalentes:*

- *existe $T\colon V_1 \to V_2$ $I\!R$-linear tal que $\mathcal{S} = T^{\mathbb{C}}$;*
- $\mathcal{S}$ preserva formas reais*, i.e., $\mathcal{S}(V_1) \subset V_2$;*
- $\mathcal{S}$ comuta com conjugação*, i.e., $\mathfrak{c} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathfrak{c}$, onde $\mathfrak{c}$ denota os operadores de conjugação de $V_1^{\mathbb{C}}$ e $V_2^{\mathbb{C}}$ relativos às formas reais V_1 e V_2 respectivamente.*

Quando as condições acima são cumpridas temos $\mathcal{S} = T^{\mathbb{C}}$ para um único operador $T\colon V_1 \to V_2$; tal operador é dado por restrição de $\mathcal{S}$. □

EXEMPLO 1.3.14. Sejam V_1, V_2 espaços vetoriais reais de dimensão finita; daí escolhendo bases de V_1, V_2 temos que as mesmas serão bases (complexas) de $V_1^{\mathbb{C}}$ e $V_2^{\mathbb{C}}$ (vide Exemplo 1.3.8). Em termos dessas bases, temos que a representação matricial de um operador $T\colon V_1 \to V_2$ é *igual* à representação matricial de sua complexificação $T^{\mathbb{C}}$ (compare com os resultados da Seção 1.2, especificamente a fórmula (1.2.6)).

Em termos de representações matriciais então a aplicação (1.3.5) é simplesmente a inclusão das matrizes reais nas matrizes complexas e o Lema 1.3.12 torna-se trivial.

EXEMPLO 1.3.15. A forma real de $\mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big)$ definida pelo enunciado do Lema 1.3.12 corresponde a um operador de conjugação em $\mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big)$. Dado então um operador linear $\mathcal{S} \in \mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big)$ podemos considerar o seu *operador conjugado* $\overline{\mathcal{S}}$; tal operador é dado explicitamente por:

$$\overline{\mathcal{S}} = \mathfrak{c} \circ \mathcal{S} \circ \mathfrak{c}.$$

De fato, basta observar que $\mathcal{S} \mapsto \mathfrak{c} \circ \mathcal{S} \circ \mathfrak{c}$ define um automorfismo anti-linear involutivo de $\mathcal{L}\big(V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}\big)$ cujo conjunto de pontos fixos é a imagem de (1.3.5) (vide Lema 1.3.13 e Proposição 1.3.9). Note que temos a identidade:

$$\overline{\mathcal{S}(v)} = \overline{\mathcal{S}}(\bar{v}), \quad v \in V_1^{\mathbb{C}}.$$

Em termos de bases, temos que a matriz que representa $\overline{\mathcal{S}}$ é simplesmente a *matriz conjugada* da matriz que representa $\mathcal{S}$.

A teoria desta seção pode ser generalizada facilmente para o caso de *operadores multi-lineares*, operadores anti-lineares ou ainda para operadores com "multi-linearidade mista", como os operadores sesqui-lineares, que têm interesse especial:

DEFINIÇÃO 1.3.16. Dados espaços vetoriais complexos $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}$, dizemos que uma aplicação $\mathfrak{B}\colon \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}$ é *sesqui-linear* quando para cada $v_1 \in \mathcal{V}_1$, $\mathfrak{B}(v_1, \cdot)$ for anti-linear e para cada $v_2 \in \mathcal{V}_2$, $\mathfrak{B}(\cdot, v_2)$ for $\mathbb{C}$-linear.

Se $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ e se for fixada uma forma real em $\mathcal{V}$, dizemos que um operador sesqui-linear $\mathfrak{B}$ é *Hermiteano* (respectivamente, *anti-Hermiteano*) quando $\mathfrak{B}(v_1, v_2) = \overline{\mathfrak{B}(v_2, v_1)}$ (respectivamente, $\mathfrak{B}(v_1, v_2) = -\overline{\mathfrak{B}(v_2, v_1)}$), para todos $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_1$.

Uma *forma Hermiteana* num espaço complexo $\mathcal{V}$ é uma aplicação sesqui-linear Hermiteana $\mathfrak{B}\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$; quando $\mathfrak{B}$ for *positiva definida*, i.e., $\mathfrak{B}(v, v) > 0$ para todo $v \in \mathcal{V}$ não nulo, dizemos também que $\mathfrak{B}$ é um *produto Hermiteano positivo* (ou simplesmente um *produto Hermiteano*) em $\mathcal{V}$.

Na Observação 1.3.17 a seguir, mencionamos as generalizações dos resultados desta seção para operadores multi-lineares, anti-lineares e sesqui-lineares.

OBSERVAÇÃO 1.3.17. A Proposição 1.3.3 generaliza-se *mutatis mutandis* para operadores anti-lineares, multi-lineares e sesqui-lineares (ou qualquer "multi-linearidade mista" obviamente). Mais precisamente, se a aplicação f dada é $\mathbb{R}$-linear, podemos estendê-la a uma aplicação $\tilde{f}$ anti-linear; se f for $\mathbb{R}$-multi-linear, podemos tanto estendê-la a uma aplicação $\tilde{f}$ que seja $\mathbb{C}$-multi-linear quanto a uma aplicação $\tilde{f}$ sesqui-linear (se f era bilinear). No caso de operadores multi-lineares o diagrama (1.3.2) fica:

$$\begin{tikzcd}
V_1^{\mathbb{C}} \times \cdots \times V_p^{\mathbb{C}} \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}"] & \\
V_1 \times \cdots \times V_p \arrow[u, "\iota_1 \times \cdots \times \iota_r"] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{W}
\end{tikzcd}$$

Assim, do mesmo modo que definimos a complexificação $T^{\mathbb{C}}$ para um operador $\mathbb{R}$-linear, podemos definir a complexificação $B^{\mathbb{C}}$ de um operador $\mathbb{R}$-multi-linear $B\colon V_1 \times \cdots \times V_p \to V$ como sendo sua única extensão a um operador $\mathbb{C}$-multi-linear $B^{\mathbb{C}}\colon V_1^{\mathbb{C}} \times \cdots \times V_p^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$; do mesmo modo, podemos associar a um operador $\mathbb{R}$-linear $T\colon V_1 \to V_2$ sua única extensão *anti-linear* $T^{\underline{\mathbb{C}}}\colon V_1^{\mathbb{C}} \to V_2^{\mathbb{C}}$ e a um operador $\mathbb{R}$-bilinear $B\colon V_1 \times V_2 \to V$ sua única extensão *sesqui-linear* $B^{\mathbb{C}_\mathrm{s}}\colon V_1^{\mathbb{C}} \times V_2^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$.

As identidades em (1.3.4) continuam satisfeitas quando trocamos $T^{\mathbb{C}}$ por $T^{\underline{\mathbb{C}}}$ (a observação análoga *não vale* para as identidades em (1.3.3)).

O Lema 1.3.12 generaliza-se para operadores multi-lineares; mencionamos que, no caso $\dim(V) < +\infty$, essa generalização nos fornece como corolário isomorfismos naturais entre a complexificação das potências tensoriais (respectivamente, exteriores e simétricas) de V e as correspondentes potências tensoriais (respectivamente, exteriores e simétricas) de $V^{\mathbb{C}}$ (na verdade, tais isomorfismos naturais também existem se $\dim(V) = +\infty$).

Finalmente, o Lema 1.3.13 generaliza-se diretamente para o caso de $\mathcal{S}$ ser um operador anti-linear, multi-linear ou sesqui-linear; no caso anti-linear (respectivamente sesqui-linear) deve-se trocar $T^{\mathbb{C}}$ por $T^{\underline{\mathbb{C}}}$ (respectivamente, $T^{\mathbb{C}_\mathrm{s}}$) no enunciado. Para um operador $\mathbb{C}$-multi-linear $\mathcal{S}\colon V_1^{\mathbb{C}}\times\cdots\times V_p^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ (ou se $p = 2$ e $\mathcal{S}$ for sesqui-linear) a condição de *preservar formas reais* fica:

$$\mathcal{S}(V_1 \times \cdots \times V_p) \subset V,$$

e a condição de *comutar com conjugação* fica:

$$\mathcal{S}(\mathfrak{c}\cdot, \dots, \mathfrak{c}\cdot) = \mathfrak{c} \circ \mathcal{S}.$$

EXEMPLO 1.3.18. Se V é um espaço vetorial real e $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ é uma forma bilinear simétrica em V então a extensão $\mathbb{C}$-bilinear $B^{\mathbb{C}}$ de V a $V^{\mathbb{C}}$ continua simétrica; por outro lado, a extensão $B^{\mathbb{C}_\mathrm{s}}$ sesqui-linear de B será uma forma Hermiteana. Analogamente, a extensão $\mathbb{C}$-bilinear de uma forma anti-simétrica continua anti-simétrica, mas sua extensão sesqui-linear se torna anti-Hermiteana.

As noções de núcleo (vide (1.1.6)), não-degenerescência e complemento ortogonal (vide (1.1.9)) generalizam-se da maneira óbvia para formas sesqui-lineares Hermiteanas (e anti-Hermiteanas). Daí, para B simétrica (ou anti-simétrica) é fácil ver que a condição de não-degenerescência de B, $B^{\mathbb{C}}$ e $B^{\mathbb{C}_\mathrm{s}}$ são todas equivalentes entre si. Além do mais, se $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ for *definida positiva*, i.e., $B(v, v) > 0$ para todo $v \in V$ não nulo, então sua extensão sesqui-linear $B^{\mathbb{C}_\mathrm{s}}$ também será definida positiva. Note, no entanto, que a extensão $\mathbb{C}$-bilinear $B^{\mathbb{C}}$ será não-degenerada mas *não será definida positiva*[4].

Por exemplo, em $\mathbb{R}^n$ temos o *produto interno canônico* dado por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{1.3.9}$$

Sua extensão sesqui-linear define o *produto Hermiteano canônico* em $\mathbb{C}^n$:

$$\langle z, w\rangle^{\mathbb{C}_\mathrm{s}} = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j, \tag{1.3.10}$$

enquanto que a extensão $\mathbb{C}$-bilinear de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é dada por:

$$\langle z, w\rangle^{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n} z_j w_j.$$

OBSERVAÇÃO 1.3.19. No espírito da Definição 1.1.6, dados um espaço complexo $\mathcal{V}$ e uma forma Hermiteana $\mathfrak{B}$ em $\mathcal{V}$, dizemos que um operador $\mathbb{C}$-linear $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ é $\mathfrak{B}$-*Hermiteano* (respectivamente, $\mathfrak{B}$-*anti-Hermiteano*) quando $\mathfrak{B}(\mathcal{T}\cdot, \cdot)$ for uma forma Hermiteana (respectivamente, anti-Hermiteana). Definimos também que $\mathcal{T}$ é $\mathfrak{B}$-*unitário* quando $\mathfrak{B}(\mathcal{T}\cdot, \mathcal{T}\cdot) = \mathfrak{B}$. Daí, dados um espaço real V, uma forma bilinear simétrica $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$

[4] Na verdade, é fácil ver que num espaço não nulo, *não existem* formas $\mathbb{C}$-bilineares definidas positivas; de fato, se $\mathfrak{B}$ é $\mathbb{C}$-bilinear então $\mathfrak{B}(v, v) = -\mathfrak{B}(iv, iv)$.

e um operador $T \in \mathcal{L}(V)$ então T é B-simétrico (respectivamente, B-anti-simétrico) se e somente se sua complexificação $T^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}\big(V^{\mathbb{C}}\big)$ é $B^{\mathbb{C}_s}$-Hermiteana (respectivamente, $B^{\mathbb{C}_s}$-anti-Hermiteana); similarmente temos que T é B-ortogonal se e somente se sua complexificação $T^{\mathbb{C}}$ é $B^{\mathbb{C}_s}$-unitária.

Suponha agora $\dim(\mathcal{V}) < +\infty$. Se $\mathfrak{B}$ é uma forma Hermiteana não-degenerada em $\mathcal{V}$ e $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, podemos como no Exemplo 1.1.7 definir o *operador transposto de* $\mathcal{T}$ *relativo a* $\mathfrak{B}$ como sendo o operador $\hat{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ tal que $\mathfrak{B}(\mathcal{T}\cdot, \cdot) = \mathfrak{B}(\cdot, \hat{\mathcal{T}}\cdot)$. Temos um diagrama comutativo análogo a (1.1.8), mas observe que aqui o isomorfismo $\mathfrak{B}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ definido por $v \mapsto \mathfrak{B}(\cdot, v)$ é *anti-linear*; de qualquer maneira, o operador $\hat{\mathcal{T}}$ será $\mathbb{C}$-linear, mas quando consideram-se representações matriciais deve-se observar com cuidado que algumas conjugações aparecem (vide Observação 1.2.4).

A definição de operador B-normal mencionada no Exemplo 1.1.7 aplica-se também no presente contexto: dizemos que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ é $\mathfrak{B}$-*normal* quando $\mathcal{T}$ comuta com $\hat{\mathcal{T}}$.

Observação 1.3.20. A noção de complexificação generaliza-se para o que é normalmente conhecido como *extensão de escalares* (compare com a Observação 1.2.12). Dados anéis com unidade R, S e um homomorfismo de anéis com unidade $h\colon R \to S$, podemos associar a cada R-módulo M um S-módulo definido a partir do produto tensorial $S \otimes_R M$, onde S é visto como um R-módulo à direita através do produto $(s, r) \mapsto s \cdot h(r)$. Definimos então a estrutura de S-módulo em $S \otimes_R M$ por $(s_1, s_2 \otimes m) \mapsto (s_1 \cdot s_2) \otimes m$; daí temos um homomorfismo $\iota\colon M \to S \otimes_R M$ dado por $\iota(m) = 1 \otimes m$. Nesse nível de generalidade, várias complicações grandes aparecem, como por exemplo o fato que ι em geral *não será injetor*. Quando R, S são corpos porém obtemos uma teoria bastante análoga à desenvolvida nesta seção. Observe que o produto tensorial $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ é canonicamente isomorfo a $V \oplus V$, que foi a construção que adotamos para a complexificação.

1.3.1. Relação entre estruturas complexas e complexificação. O objetivo desta subseção é mostrar que existe uma correspondência natural entre as estruturas complexas de um espaço real V e certas decomposições em soma direta de sua complexificação $V^{\mathbb{C}}$.

Seja V um espaço vetorial real e seja $J\colon V \to V$ uma estrutura complexa em V; temos que $J^{\mathbb{C}}$ é um automorfismo $\mathbb{C}$-linear da complexificação $V^{\mathbb{C}}$ satisfazendo $\big(J^{\mathbb{C}}\big)^2 = -\mathrm{Id}$. É fácil ver então que $V^{\mathbb{C}}$ se escreve como soma direta dos autoespaços de $J^{\mathbb{C}}$ correspondentes aos autovalores i e $-i$; mais explicitamente definimos:

$$V^{\mathfrak{h}} = \big\{v \in V^{\mathbb{C}} : J^{\mathbb{C}}(v) = iv\big\},$$
$$V^{\mathfrak{a}} = \big\{v \in V^{\mathbb{C}} : J^{\mathbb{C}}(v) = -iv\big\}.$$

Daí $V^{\mathfrak{h}}$ e $V^{\mathfrak{a}}$ são subespaços complexos de $V^{\mathbb{C}}$ e $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathfrak{h}} \oplus V^{\mathfrak{a}}$; as projeções $\pi^{\mathfrak{h}}$ e $\pi^{\mathfrak{a}}$ nos subespaços $V^{\mathfrak{h}}$ e $V^{\mathfrak{a}}$ respectivamente são dadas por:

$$\pi^{\mathfrak{h}}(v) = \frac{v - iJ^{\mathbb{C}}(v)}{2}, \quad \pi^{\mathfrak{a}}(v) = \frac{v + iJ^{\mathbb{C}}(v)}{2}, \quad v \in V^{\mathbb{C}}. \tag{1.3.11}$$

Chamamos $V^{\mathfrak{h}}$ e $V^{\mathfrak{a}}$ respectivamente o *subespaço holomorfo* e o *subespaço anti-holomorfo* de $V^{\mathbb{C}}$ associado a J. A proposição a seguir justifica esses nomes (vide também o Exemplo 1.3.22).

PROPOSIÇÃO 1.3.21. *Sejam V um espaço vetorial real e J uma estrutura complexa em V. Então as projeções $\pi^{\mathfrak{h}}$ e $\pi^{\mathfrak{a}}$ definidas em* (1.3.11) *restritas a V definem respectivamente um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear de (V, J) sobre $V^{\mathfrak{h}}$ e um isomorfismo anti-linear de (V, J) sobre $V^{\mathfrak{a}}$.* □

A Proposição 1.3.21 nos diz então que complexificando um espaço V que já possuía uma estrutura complexa J, obtemos um espaço complexo $V^{\mathbb{C}}$ que contém uma cópia do espaço original (V, J) (o espaço holomorfo) e uma cópia de $(V, -J)$ (o espaço anti-holomorfo). Note também que:

$$V^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}\big(V^{\mathfrak{h}}\big), \quad V^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{c}\big(V^{\mathfrak{a}}\big),$$

onde $\mathfrak{c}$ denota a conjugação de $V^{\mathbb{C}}$ relativa a forma real V; temos então que os espaços holomorfo e anti-holomorfo são *mutuamente conjugados* (compare com o Lema 1.3.11).

No exemplo a seguir fazemos uma pequena digressão para mostrar como a teoria apresentada nesta subseção aparece no contexto do cálculo com funções de várias variáveis complexas; esse exemplo é *independente* do resto da seção e não será usado posteriormente.

EXEMPLO 1.3.22. A construção dos espaços holomorfo e anti-holomorfo aparece naturalmente quando se estuda cálculo com variáveis complexas, ou mais geralmente quando se estuda geometria de variedades complexas. Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$; neste exemplo, pensamos em $\mathbb{C}^n$ como o espaço real $I\!R^{2n}$ munido da estrutura complexa canônica J (vide Exemplo 1.2.2). A base real canônica de $\mathbb{C}^n \cong I\!R^{2n}$ será denotada por

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big);$$

essa é uma base adaptada a J de $I\!R^{2n}$ cuja base complexa de $\mathbb{C}^n$ correspondente é $\big(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big)$.

Consideramos a complexificação $(I\!R^{2n})^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^{2n}$. Temos então o espaço complexo $\mathbb{C}^n$, no qual denotamos a multiplicação pelo escalar i usando o operador J; no espaço complexo $\mathbb{C}^{2n}$ denotamos a multiplicação pelo escalar i da maneira usual $v \mapsto iv$. Definimos então em $\mathbb{C}^{2n}$ a complexificação $J^{\mathbb{C}}$ de J, assim como os espaços holomorfo e anti-holomorfo; pela Proposição 1.3.21, as projeções (1.3.11) fazem a base canônica (complexa) de $\mathbb{C}^n$ corresponder a bases $\big(\frac{\partial}{\partial z^j}\big)_{j=1}^n$ e $\big(\frac{\partial}{\partial \bar z^j}\big)_{j=1}^n$ do espaço holomorfo e anti-holomorfo respectivamente, dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j}\right).$$

Note que o vetor $\frac{\partial}{\partial \bar z^j}$ é o conjugado do vetor $\frac{\partial}{\partial z^j}$.

Os vetores $\frac{\partial}{\partial z^j}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar z^j}$, $j = 1, \ldots, n$, formam então uma base complexa de $\mathbb{C}^{2n}$; sua base dual é denotada normalmente por

$$\big(\mathrm{d}z^1, \ldots, \mathrm{d}z^n, \mathrm{d}\bar z^1, \ldots, \mathrm{d}\bar z^n\big).$$

Os funcionais lineares $\mathrm{d}z^j$ e $\mathrm{d}\bar z^j$ são precisamente as (únicas) extensões $\mathbb{C}$-lineares a $(\mathbb{R}^{2n})^{\mathbb{C}}$ das funções coordenadas $\mathbb{C}^n \ni z \mapsto z^j$ de $\mathbb{C}^n$ e de suas conjugadas respectivamente (a notação $\mathrm{d}z^j$ e $\mathrm{d}\bar z^j$ é compatível com o fato que o diferencial de um operador linear coincide com ele próprio).

A notação $\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j}$ para a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ é justificada pela identificação de vetores em $\mathbb{R}^{2n}$ com *operadores de derivada direcional* sobre funções diferenciáveis $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$; a complexificação de $\mathbb{R}^{2n}$ identifica-se então com o espaço de operadores de derivada direcional agindo sobre funções diferenciáveis complexas $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$; nessa notação, as *equações de Cauchy-Riemann* (que caracterizam as *funções holomorfas*) são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^j} f = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.3.12}$$

Note que f satisfaz (1.3.12) se e somente se sua diferencial em cada ponto é um operador $\mathbb{C}$-linear de $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^{2n}, J)$ em $\mathbb{C}$.

Mostramos agora que a decomposição $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathfrak{h}} \oplus V^{\mathfrak{a}}$ determina a estrutura complexa J em V.

PROPOSIÇÃO 1.3.23. *Seja V um espaço real e considere uma decomposição em soma direta da complexificação $V^{\mathbb{C}} = \mathcal{Z}_1 \oplus \mathcal{Z}_2$, onde $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ são subespaços complexos mutuamente conjugados de $V^{\mathbb{C}}$. Então existe uma única estrutura complexa J em V tal que $\mathcal{Z}_1 = V^{\mathfrak{h}}$; além do mais, para tal J temos $\mathcal{Z}_2 = V^{\mathfrak{a}}$.*

DEMONSTRAÇÃO. A unicidade segue do fato que $V^{\mathfrak{h}}$ é o gráfico de $-J$, quando consideramos o isomorfismo $V^{\mathbb{C}} \cong V \oplus V$. Para a existência, considere o único operador $\mathbb{C}$-linear em $V^{\mathbb{C}}$ que tem $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ como autoespaços correspondentes aos autovalores i e $-i$ respectivamente. É claro que tal operador tem quadrado igual a $-\mathrm{Id}$ e comuta com conjugação; do Lema 1.3.13 segue que ele é da forma $J^{\mathbb{C}}$ para algum $J\colon V \to V$. □

Seja agora T um endomorfismo $\mathbb{C}$-linear de (V, J), i.e., T é um endomorfismo $\mathbb{R}$-linear de V e $T \circ J = J \circ T$. Considere a complexificação $T^{\mathbb{C}}$ de T. É fácil ver que os espaços holomorfo e anti-holomorfo de J são invariantes por $T^{\mathbb{C}}$; além do mais, os seguintes diagramas comutam:

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{T} & V \\
{\scriptstyle \pi^{\mathfrak{h}}|_V}\big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\big\downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathfrak{h}}|_V} \\
V^{\mathfrak{h}} & \xrightarrow[T^{\mathbb{C}}]{} & V^{\mathfrak{h}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{T} & V \\
{\scriptstyle \pi^{\mathfrak{a}}|_V}\big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\big\downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathfrak{a}}|_V} \\
V^{\mathfrak{a}} & \xrightarrow[T^{\mathbb{C}}]{} & V^{\mathfrak{a}}
\end{array}
\tag{1.3.13}
$$

onde, pela Proposição 1.3.21, as flechas verticais no diagrama à esquerda são isomorfismos $\mathbb{C}$-lineares de (V, J) em $V^{\mathfrak{h}}$ e as flechas verticais no diagrama à direita são isomorfismos $\mathbb{C}$-lineares de $(V, -J)$ em $V^{\mathfrak{a}}$.

Suponha agora $\dim(V, J) = n < +\infty$; seja $(b_j)_{j=1}^n$ uma base complexa de (V, J) e seja $\big(b_j, J(b_j)\big)_{j=1}^n$ a correspondente base real (adaptada a J) de V; a última será também uma base complexa de $V^{\mathbb{C}}$ (vide Exemplo 1.3.8). Pela Proposição 1.3.21, os vetores u_j, $\bar{u}_j$, definidos por

$$
u_j = \frac{b_j - iJ(b_j)}{2} \in V^{\mathfrak{h}}, \quad \bar{u}_j = \frac{b_j + iJ(b_j)}{2} \in V^{\mathfrak{a}}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{1.3.14}
$$

formam uma base complexa de $V^{\mathbb{C}}$. Se T é representada pela matriz $Z = A + Bi$ (A, B reais) na base $(b_j)_{j=1}^n$ de (V, J) (e portanto pela matriz (1.2.6) na base real de V) então segue de (1.3.13) (vide também Observação 1.2.4) que a representação matricial de $T^{\mathbb{C}}$ na base $(u_j, \bar{u}_j)_{j=1}^n$ de $V^{\mathbb{C}}$ é dada por:

$$
T^{\mathbb{C}} \sim \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \overline{Z} \end{pmatrix}. \tag{1.3.15}
$$

Por outro lado, a representação matricial de $T^{\mathbb{C}}$ na base $\big(b_j, J(b_j)\big)_{j=1}^n$ de $V^{\mathbb{C}}$ é ainda dada pela matriz (1.2.6) (vide Exemplo 1.3.14).

Mostramos em particular que as matrizes em (1.2.6) e em (1.3.15) são *equivalentes* (ou *conjugadas*); juntamos todas essas observações na seguinte:

Proposição 1.3.24. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e seja J uma estrutura complexa em V. Se T é um endomorfismo $\mathbb{C}$-linear de (V, J) então o* traço *de T como operador em V é o dobro da parte real do traço de T como operador em (V, J) e o* determinante *de T como operador em V é o quadrado do módulo do determinante de T como operador em (V, J).*

Mais explicitamente, sejam A, B matrizes reais $n \times n$, $Z = A + Bi$ e seja C a matriz dada em (1.2.6); temos então as seguintes identidades:

$$
\mathrm{tr}(C) = 2\Re\big(\mathrm{tr}(Z)\big), \quad \det(C) = |\det(Z)|^2,
$$

onde $\mathrm{tr}(U)$, $\det(U)$ *denotam respectivamente o traço e o determinante de uma matriz U e $\Re(\lambda)$, $|\lambda|$ denotam respectivamente a parte real e o módulo de um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$.* □

Observação 1.3.25. Suponha que V é um espaço vetorial real munido de um produto interno g, i.e., g é uma forma bilinear simétria definida positiva em V. Suponha que tenhamos uma estrutura complexa $J\colon V \to V$ que é g-anti-simétrica; daí também $J^*(g) = g$, ou seja J é g-ortogonal. O operador $J^{\mathbb{C}}$ em $V^{\mathbb{C}}$ será anti-Hermiteano (e unitário) com respeito ao produto Hermiteano $g^{\mathbb{C}_s}$ em $V^{\mathbb{C}}$ (vide Observação 1.3.19). É fácil ver então que os espaços holomorfo e anti-holomorfo de J serão *ortogonais* com respeito a $g^{\mathbb{C}_s}$, ou seja:

$$g^{\mathbb{C}_s}(v,w) = 0, \quad v \in V^{\mathfrak{h}},\ w \in V^{\mathfrak{a}}.$$

O produto interno g em V e a estrutura complexa g-anti-simétrica J nos permitem definir um produto Hermiteano em (V, J) por:

$$g_{\mathrm{s}}(v,w) = g(v,w) + ig(v,Jw), \quad v,w \in V.$$

Essa é na verdade a *única* forma Hermiteana em (V, J) que possui g como parte real.

Temos as relações:

$$g^{\mathbb{C}_s}\big(\pi^{\mathfrak{h}}(v), \pi^{\mathfrak{h}}(w)\big) = \frac{g_{\mathrm{s}}(v,w)}{2}, \quad g^{\mathbb{C}_s}\big(\pi^{\mathfrak{a}}(v), \pi^{\mathfrak{a}}(w)\big) = \frac{\overline{g_{\mathrm{s}}(v,w)}}{2}, \quad v,w \in V,$$

que significam que o isomorfismo $\sqrt{2}\big(\pi^{\mathfrak{h}}|_V\big)$ corresponde o produto Hermiteano g_{s} em (V, J) ao produto Hermiteano $g^{\mathbb{C}_s}$ em $V^{\mathfrak{h}}$ e que o isomorfismo $\sqrt{2}\big(\pi^{\mathfrak{a}}|_V\big)$ corresponde o *conjugado* do produto Hermiteano g_{s} em $(V, -J)$ ao produto Hermiteano $g^{\mathbb{C}_s}$ em $V^{\mathfrak{a}}$. Em particular, note que se $(b_j)_{j=1}^n$ é uma base complexa ortonormal de (V, J) com respeito a g_{s} então os vetores $\sqrt{2}\,u_j$, $\sqrt{2}\,\bar{u}_j$, $j = 1, \ldots, n$ (vide (1.3.14)) formam uma base ortonormal de $V^{\mathbb{C}}$ com respeito a $g^{\mathbb{C}_s}$. Também os vetores b_j, $J(b_j)$, $j = 1, \ldots, n$ formam uma base ortonormal real de V com respeito a g e portanto uma base ortonormal complexa de $V^{\mathbb{C}}$ com respeito a $g^{\mathbb{C}_s}$. Concluímos então que se $Z = A + Bi$ (A, B reais) então as matrizes em (1.2.6) e em (1.3.15) são *unitariamente equivalentes*, i.e., representam o mesmo operador $\mathbb{C}$-linear em *bases ortonormais* diferentes.

1.4. Formas Simpléticas

Nesta seção estudamos os espaços vetoriais simpléticos. Definimos a noção de simplectomorfismo, que é a equivalência na categoria dos espaços simpléticos; mostramos que dois espaços simpléticos de mesma dimensão são equivalentes.

Todos os espaços vetoriais considerados nesta seção serão de *dimensão finita*.

Definição 1.4.1. Seja V um espaço vetorial real; uma *forma simplética* em V é uma forma bilinear anti-simétrica não-degenerada $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Dizemos também que (V, ω) é um *espaço simplético*.

Observação 1.4.2. Se $\omega \in \mathcal{B}_{\mathrm{ant}}(V)$ é uma forma bilinear anti-simétrica (possivelmente degenerada) em V então ω define por passagem ao quociente uma forma bilinear anti-simétrica $\bar{\omega}$ em $V/\mathrm{Ker}(\omega)$; é fácil ver que $\bar{\omega}$ é não-degenerada e portanto $(V/\mathrm{Ker}(\omega), \bar{\omega})$ será sempre um espaço simplético.

Começamos com uma forma canônica para formas bilineares anti-simétricas. A demonstração é muito semelhante à do Teorema 1.1.15.

TEOREMA 1.4.3. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão $p < +\infty$ e seja $\omega \in \mathcal{B}_{\text{ant}}(V)$ uma forma bilinear anti-simétrica em V; então existe uma base de V na qual a matriz de ω (como forma bilinear) é dada por:*

$$\omega \sim \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n & 0_{n\times r} \\ -\mathrm{I}_n & 0_n & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times n} & 0_r \end{pmatrix}, \tag{1.4.1}$$

onde $r = \dim\big(\mathrm{Ker}(\omega)\big)$, $p = 2n + r$ e $0_{\alpha\times\beta}$, 0_α, I_α denotam respectivamente a matriz zero $\alpha \times \beta$, a matriz zero $\alpha \times \alpha$ e a matriz identidade $\alpha \times \alpha$.

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar, uma vez obtida uma base em que ω assume a forma (1.4.1), é claro que os últimos r vetores dessa base formarão uma base para $\mathrm{Ker}(\omega)$, donde $r = \dim\big(\mathrm{Ker}(\omega)\big)$ e $p = 2n + r$.

Devemos então construir uma base $(b_i)_{i=1}^p$ de V tal que

$$\omega(b_i, b_{n+i}) = -\omega(b_{n+i}, b_i) = 1, \tag{1.4.2}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $\omega(b_i, b_j) = 0$ caso contrário. Fazemos indução em p. O caso $p \le 1$ é trivial; suponha $p > 1$ e que o resultado é válido para espaços de dimensão menor que p.

Se $\omega = 0$, o resultado é trivial. Suponha então que existam v, $w \in V$ com $\omega(v, w) \neq 0$; trocando v por um múltiplo escalar de v, podemos supor que $\omega(v, w) = 1$. Daí é fácil ver que ω é não-degenerada no subespaço bi-dimensional $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ gerado por v, w, donde pela Proposição 1.1.11 temos:

$$V = (\mathbb{R}v + \mathbb{R}w) \oplus (\mathbb{R}v + \mathbb{R}w)^\perp.$$

Aplicando a hipótese de indução à restrição de ω a $(\mathbb{R}v + \mathbb{R}w)^\perp$ obtemos uma base $(b_2, \ldots, b_n, b_{n+2}, \ldots, b_p)$ de $(\mathbb{R}v + \mathbb{R}w)^\perp$ que coloca a restrição de ω na forma canônica, i.e., (1.4.2) vale para $i = 2, \ldots, n$ e $\omega(b_i, b_j) = 0$ caso contrário. A base $(b_i)_{i=1}^p$ de V desejada é obtida agora fazendo $b_1 = v$ e $b_{n+1} = w$. □

COROLÁRIO 1.4.4. *Se (V, ω) é um espaço simplético então a dimensão de V é par e existe uma base $(b_i)_{i=1}^{2n}$ de V na qual a matriz de ω (como forma bilinear) é dada por:*

$$\omega \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.3}$$

onde 0 e I denotam respectivamente a matriz zero e a matriz identidade $n \times n$. □

DEFINIÇÃO 1.4.5. Dizemos que $(b_i)_{i=1}^{2n}$ é uma *base simplética* do espaço simplético (V, ω) se a matriz de ω (como forma bilinear) relativa a tal base é dada por (1.4.3). Mais explicitamente, a identidade (1.4.2) deve ser satisfeita para $i = 1, \ldots, n$ e $\omega(b_i, b_j) = 0$ caso contrário (ou seja, se $|i - j| \neq n$).

Note que a matriz do *operador linear* $\omega\colon V \to V^*$ associado a ω é dada pela *transposta* de (1.4.3), i.e., coincide com a matriz dada em (1.2.2) (vide Observação 1.1.2).

O Corolário 1.4.4 nos diz então que todo espaço simplético admite uma base simplética.

Definimos agora os subobjetos e os morfismos na categoria dos espaços simpléticos.

DEFINIÇÃO 1.4.6. Seja (V, ω) um espaço simplético. Dizemos que S é um *subespaço simplético* de (V, ω) quando $S \subset V$ for um subespaço e a restrição $\omega|_{S\times S}$ for não-degenerada; Daí $\big(S, \omega|_{S\times S}\big)$ é também um espaço simplético.

Sejam (V_1, ω_1), (V_2, ω_2) espaços simpléticos. Dizemos que um operador linear $T\colon V_1 \to V_2$ é uma *aplicação simplética* quando $T^*(\omega_2) = \omega_1$, ou seja:

$$\omega_2\big(T(v), T(w)\big) = \omega_1(v, w), \quad \forall v, w \in V_1.$$

Dizemos que T é um *simplectomorfismo* quando T for uma aplicação simplética e um isomorfismo.

Um simplectomorfismo leva bases simpléticas em bases simpléticas; além do mais, se um operador linear $T\colon V_1 \to V_2$ leva alguma base simplética de V_1 numa base simplética de V_2 então T é um simplectomorfismo.

Em termos dos operadores lineares $\omega_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_1^*)$, $\omega_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_2^*)$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ é simplética se e somente se (vide Exemplo 1.1.4):

$$T^* \circ \omega_2 \circ T = \omega_1. \tag{1.4.4}$$

OBSERVAÇÃO 1.4.7. A inclusão de um subespaço simplético é sempre uma aplicação simplética; na verdade, a menos de simplectomorfismos, toda aplicação simplética é uma inclusão. Mais precisamente, o lado direito da igualdade em (1.4.4) é um isomorfismo e portanto toda aplicação simplética $T\colon V_1 \to V_2$ é injetora; daí a imagem $T(V_1)$ é um subespaço simplético de V_2 e $T\colon V_1 \to T(V_1)$ é um simplectomorfismo. O seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
& V_2 & \\
V_1 \arrow[ur, "T"] \arrow[rr, "T", "\cong"'] & & T(V_1) \arrow[ul, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

onde ι denota a inclusão.

EXEMPLO 1.4.8. Definimos uma forma simplética em $\mathbb{R}^{2n}$ fazendo:

$$\omega\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = \langle v_1, w_2\rangle - \langle w_1, v_2\rangle, \tag{1.4.5}$$

para $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathbb{R}^n$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que ω é a *forma simplética canônica* de $\mathbb{R}^{2n}$; a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ é então uma base simplética e portanto a representação matricial de ω (como forma bilinear) na base canônica é dada por (1.4.3).

A existência de bases simpléticas num espaço simplético qualquer (Corolário 1.4.4) implica que todo espaço simplético admite um simplectomorfismo com $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ e portanto a demonstração de qualquer teorema sobre espaços simpléticos pode ser reduzida ao caso de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$.

Podemos também definir uma forma simplética canônica ω em $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ fazendo:

$$\omega\big((v_1, \alpha_1), (v_2, \alpha_2)\big) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2),$$

para $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^{n*}$. Novamente a base canônica de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ será uma base simplética.

OBSERVAÇÃO 1.4.9. Denotando a base canônica de $\mathbb{R}^{2n^*}$ (dual da base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$) por $(\mathrm{d}q_1, \ldots, \mathrm{d}q_n, \mathrm{d}p_1, \ldots, \mathrm{d}p_n)$, temos que a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ é dada por:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i.$$

Segue facilmente que:

$$\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n!)\, \mathrm{d}q_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}p_n.$$

Portanto ω^n é uma *forma volume* em $\mathbb{R}^{2n}$ e para todo simplectomorfismo T de $\mathbb{R}^{2n}$ temos:

$$T^*(\omega^n) = \omega^n = \det(T)\, \omega^n,$$

donde $\det(T) = 1$. Em geral não é verdade que todo operador com determinante igual a 1 é um simplectomorfismo; quando $n = 1$, no entanto, a forma simplética de $\mathbb{R}^2$ é também uma forma volume e portanto T é um simplectomorfismo de $\mathbb{R}^2$ se e somente se $\det(T) = 1$.

Os simplectomorfismos de um espaço simplético (V, ω) formam um grupo sob composição; note que pela Observação 1.4.7, $T \in \mathcal{L}(V)$ é um simplectomorfismo de (V, ω) se e somente se T é uma aplicação simplética, i.e., se e somente se $T^*(\omega) = \omega$. Temos a seguinte:

DEFINIÇÃO 1.4.10. Seja (V, ω) um espaço simplético. O *grupo simplético do espaço* (V, ω), denotado por $\mathrm{Sp}(V, \omega)$, é o grupo dos simplectomorfismos de (V, ω) (sob composição); denotamos por $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ o grupo simplético de $\mathbb{R}^{2n}$, munido da forma simplética canônica (1.4.5).

Um cálculo simples a partir de (1.4.4) mostra que, em termos de bases simpléticas, um operador T é um simplectomorfismo se e somente se sua representação matricial

$$T \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.4.6}$$

satisfaz as relações:

$$D^*A - B^*C = \mathrm{I}, \quad A^*C,\ B^*D \text{ simétricas}, \tag{1.4.7}$$

onde A, B, C, D são matrizes $n \times n$, I denota a matriz identidade $n \times n$ e U^* denota a transposta da matriz U. Uma matriz da forma (1.4.6) satisfazendo (1.4.7) é chamada uma *matriz simplética*.

Podemos também definir uma noção de soma direta para espaços simpléticos[5].

DEFINIÇÃO 1.4.11. Se (V_1, ω_1), (V_2, ω_2) são espaços simpléticos, definimos uma forma simplética $\omega = \omega_1 \oplus \omega_2$ em $V_1 \oplus V_2$ fazendo:

$$\omega\big((v_1, v_2), (w_1, w_2)\big) = \omega_1(v_1, w_1) + \omega_2(v_2, w_2), \quad v_1, w_1 \in V_1,\ v_2, w_2 \in V_2.$$

Dizemos que o espaço simplético $(V_1 \oplus V_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$ é a *soma direta (externa)* dos espaços simpléticos (V_1, ω_1), (V_2, ω_2)

Se (V, ω) é um espaço simplético, dizemos que dois subespaços S_1, S_2 de V são *ω-ortogonais* quando $\omega(v, w) = 0$ para todo $v \in S_1$ e todo $w \in S_2$. Se tivermos $V = S_1 \oplus S_2$ com S_1, S_2 ω-ortogonais então é fácil ver que S_1 e S_2 são subespaços simpléticos de V; dizemos aí que V é a *soma direta (interna)* dos subespaços S_1 e S_2.

Se (V, ω) é soma direta interna de subespaços simpléticos S_1 e S_2 então o isomorfismo canônico $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ entre a soma direta externa e a soma direta interna é um simplectomorfismo de $\big(S_1 \oplus S_2, (\omega|_{S_1 \times S_1}) \oplus (\omega|_{S_2 \times S_2})\big)$ em (V, ω). Logo as duas noções de soma direta são na verdade essencialmente equivalentes.

EXEMPLO 1.4.12. Se $T_1 \colon V_1 \to V_1'$ e $T_2 \colon V_2 \to V_2'$ são aplicações simpléticas então a aplicação $T = T_1 \oplus T_2$ definida por:

$$T(v_1, v_2) = (T_1(v_1), T_2(v_2)), \quad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$$

é uma aplicação simplética de $V_1 \oplus V_2$ em $V_1' \oplus V_2'$; se T_1 e T_2 são simplectomorfismos então $T_1 \oplus T_2$ também será.

Deve-se tomar cuidado com a noção de soma direta de espaços simpléticos quando se trabalha com bases simpléticas; mais explicitamente, a concatenação de uma base simplética $(b_i)_{i=1}^{2n}$ de V_1 com uma base simplética $(b_i')_{i=1}^{2m}$ de V_2 *não* é uma base simplética de $V_1 \oplus V_2$. Devemos fazer uma "intercalação" de $(b_i)_{i=1}^{2n}$ e $(b_i')_{i=1}^{2m}$:

$$(b_1, \ldots, b_n, b_1', \ldots, b_m', b_{n+1}, \ldots, b_{2n}, b_{m+1}', \ldots, b_{2m}'), \tag{1.4.8}$$

e daí obtemos uma base simplética de $V_1 \oplus V_2$. Cuidados análogos devem ser tomados quando consideram-se matrizes, i.e., a simples justaposição ao longo da diagonal principal de um elemento de $\mathrm{Sp}(2n, I\!R)$ com um elemento de $\mathrm{Sp}(2m, I\!R)$ não produz um elemento de $\mathrm{Sp}(2(n+m), I\!R)$; deve-se fazer uma permutação adequada de linhas e colunas correspondente às permutações feitas para a obtenção da base (1.4.8) a partir da concatenação de $(b_i)_{i=1}^{2n}$ e $(b_i')_{i=1}^{2m}$.

---

[5]A soma direta de espaços simpléticos definida aqui *não* é uma soma no sentido categórico, i.e., não será verdade que uma aplicação simplética definida em $V_1 \oplus V_2$ fica determinada por sua restrição a V_1 e a V_2.

1.4.1. Espaços isotrópicos e Lagrangeanos; relações com estruturas complexas. Nesta subseção consideraremos sempre um espaço simplético (V, ω), com $\dim(V) = 2n$.

DEFINIÇÃO 1.4.13. Um subespaço $S \subset V$ é dito *isotrópico* se $\omega|_{S\times S} = 0$.

Observe que S é isotrópico se e somente se S estiver contido no seu complemento ortogonal $S^\perp$ relativo a ω; pela Proposição 1.1.9 temos:

$$\dim(S) + \dim(S^\perp) = 2n, \tag{1.4.9}$$

donde a dimensão de um subespaço isotrópico é menor ou igual a n. Temos o seguinte:

LEMA 1.4.14. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um subespaço $L \subset V$:*

- *L é* isotrópico maximal, *i.e., L é isotrópico e não está propriamente contido em nenhum subespaço isotrópico;*
- *$L = L^\perp$;*
- *L é isotrópico e* $\dim(L) = n$.

DEMONSTRAÇÃO. Supondo L isotrópico maximal temos $L \subset L^\perp$ e dado $v \in L^\perp$ temos que o subespaço $L + I\!Rv$ gerado por $L \cup \{v\}$ é isotrópico e contém L, donde $v \in L$; segue que $L = L^\perp$. Supondo $L = L^\perp$ temos que L é isotrópico e segue de (1.4.9) que $\dim(L) = n$. Finalmente, se L é isotrópico e n-dimensional então L é maximal, pois não existe subespaço isotrópico de dimensão maior que n. ☐

DEFINIÇÃO 1.4.15. Um subespaço $L \subset V$ é dito *Lagrangeano* quando satisfaz uma (e portanto todas) as condições do enunciado do Lema 1.4.14.

EXEMPLO 1.4.16. Os subespaços $I\!R^n \oplus \{0\}^n$ e $\{0\}^n \oplus I\!R^n$ de $I\!R^{2n}$ são Lagrangeanos (relativamente à forma simplética canônica); mais geralmente, dado um operador $T \in \mathcal{L}(I\!R^n)$, temos que o *gráfico* de T é um subespaço Lagrangeano de $I\!R^{2n}$ (relativamente à forma simplética canônica) se e somente se T é simétrico (relativamente ao produto interno canônico).

EXEMPLO 1.4.17. A noção de subespaço isotrópico é em certo sentido "oposta" à noção de subespaço simplético (vide Definição 1.4.6); temos que $S \subset V$ é simplético se e somente se $V = S \oplus S^\perp$ (vide Proposição 1.1.11) enquanto que S é isotrópico se e somente se $S \subset S^\perp$.

Se $S \subset V$ é isotrópico então a restrição de ω a $S^\perp$ tem como núcleo o subespaço $(S^\perp)^\perp \cap S^\perp = S$ (vide Corolário 1.1.10); segue que ω define por passagem ao quociente uma forma simplética $\bar{\omega}$ em $S^\perp/S$ (vide Observação 1.4.2).

A seguinte definição relaciona formas simpléticas e estruturas complexas.

DEFINIÇÃO 1.4.18. Uma estrutura complexa $J\colon V \to V$ é dita *compatível* com ω quando $\omega(\cdot, J\cdot)$ for um produto interno em V, i.e., uma forma bilinear simétrica e definida positiva. Mais explicitamente temos:

$$\omega(Jv, w) = \omega(Jw, v), \quad v, w \in I\!R^n,$$

e $\omega(v, Jv) > 0$ para todo $v \in V$ não nulo. Denotamos o produto interno $\omega(\cdot, J\cdot)$ por g.

Uma estrutura complexa compatível J é sempre um simplectomorfismo de (V, ω). Temos:

$$g(J\cdot, \cdot) = \omega,$$

donde J é anti-simétrica em relação a g; na verdade, J é sempre ortogonal relativamente a g.

EXEMPLO 1.4.19. A estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ é compatível com a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^{2n}$. O produto interno $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ é simplesmente o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n}$.

Segue que toda forma simplética admite uma estrutura complexa compatível; basta definir J pela matriz (1.2.2) numa base simplética qualquer. Tal base será uma *base ortonormal* para o produto interno g.

Uma estrutura complexa compatível J pode ser usada para construir um subespaço Lagrangeano complementar a um Lagrangeano dado:

LEMA 1.4.20. *Se $L \subset V$ é um subespaço Lagrangeano e J é uma estrutura complexa compatível com ω então $V = L \oplus J(L)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Simplesmente observe que $J(L)$ é ortogonal a L relativamente ao produto interno $g = \omega(\cdot, J\cdot)$. □

COROLÁRIO 1.4.21. *Todo subespaço Lagrangeano admite um subespaço Lagrangeano complementar.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 1.4.20, observando que $J(L)$ também é Lagrangeano, já que J é um simplectomorfismo. □

Se J é uma estrutura complexa compatível com ω e g é o produto interno correspondente, definimos uma forma sesqui-linear g_{s} no espaço complexo (V, J) fazendo:

$$g_{\mathrm{s}}(v, w) = g(v, w) - i\omega(v, w). \tag{1.4.10}$$

É fácil ver que g_{s} é um produto Hermiteano positivo em (V, J).

Temos a seguinte relação entre operadores unitários, ortogonais e simplectomorfismos:

PROPOSIÇÃO 1.4.22. *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um endomorfismo $\mathbb{R}$-linear T de V:*

- *T é $\mathbb{C}$-linear em (V, J) e unitário relativamente a g_{s};*
- *T é ortogonal relativamente a g e é um simplectomorfismo de (V, ω).*

DEMONSTRAÇÃO. Se T é $\mathbb{C}$-linear unitário então T *preserva* g_{s} e portanto preserva sua parte real (que é g) e sua parte imaginária (que é $-\omega$) separadamente; logo T é um simplectomorfismo ortogonal.

Reciprocamente, se T é um simplectomorfismo ortogonal então:

$$T^* \circ g \circ T = g, \quad T^* \circ \omega \circ T = \omega, \quad \omega = g \circ J,$$

considerando $g, \omega \in \mathcal{L}(V, V^*)$ (vide Exemplo 1.1.4); segue facilmente que $J \circ T = T \circ J$, i.e., T é $\mathbb{C}$-linear. Como T preserva a parte real e a parte imaginária de $g_{\rm s}$ concluímos que T é unitário. □

EXEMPLO 1.4.23. Como vimos no Exemplo 1.4.19, a estrutura complexa canônica J de $I\!R^{2n}$ é compatível com a forma simplética canônica ω de $I\!R^{2n}$ e o produto interno g correspondente é o produto interno canônico de $I\!R^{2n}$. Identificando $(I\!R^{2n}, J)$ com $\mathbb{C}^n$ (vide Exemplo 1.2.2), temos que o produto Hermiteano $g_{\rm s}$ coincide com o produto Hermiteano canônico de $\mathbb{C}^n$ dado em (1.3.10).

OBSERVAÇÃO 1.4.24. Note que se (V, J) é um espaço complexo munido de um produto Hermiteano $g_{\rm s}$ então a parte real de $g_{\rm s}$ é sempre um produto interno g em V e a parte imaginária de $g_{\rm s}$ é sempre uma forma simplética em V; além do mais, definindo ω como sendo o oposto da parte imaginária de $g_{\rm s}$ segue que J é compatível com ω e $g = \omega(\cdot, J\cdot)$.

OBSERVAÇÃO 1.4.25. Se V é um espaço vetorial real, g é um produto interno em V e J é uma estrutura complexa anti-simétrica (ou, equivalentemente, ortogonal) relativamente a g então $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ define uma forma simplética em V. Daí J é uma estrutura complexa compatível com ω e além do mais $g = \omega(\cdot, J\cdot)$. Obtemos como sempre um produto Hermiteano $g_{\rm s}$ em (V, J) definido por (1.4.10) (vide também Observação 1.3.25).

Temos a seguinte relação entre subespaços Lagrangeanos e o produto Hermiteano $g_{\rm s}$.

LEMA 1.4.26. *Um subespaço $L \subset V$ é Lagrangeano se e somente se for uma forma real* preservada *por $g_{\rm s}$, i.e., $V = L \oplus J(L)$ e $g_{\rm s}(L \times L) \subset I\!R$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 1.4.20 e da observação que a parte imaginária de $g_{\rm s}$ é igual a $-\omega$. □

COROLÁRIO 1.4.27. *Dados subespaços Lagrangeanos L_1, $L_2 \subset V$ então existe um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear T de (V, J), unitário com respeito a $g_{\rm s}$, tal que $T(L_1) = L_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(b_j)_{j=1}^n$ uma base ortonormal de L_1 relativa a g; como L_1 é uma forma real de (V, J), segue que $(b_j)_{j=1}^n$ é uma base complexa de (V, J) (vide Exemplo 1.3.8). Além do mais, como $g_{\rm s}$ é real em L_1, segue que $(b_j)_{j=1}^n$ é uma base ortonormal relativa a $g_{\rm s}$. De modo análogo, consideramos uma base ortonormal $(b'_j)_{j=1}^n$ de L_2 relativa a g e concluímos que a mesma é uma base ortonormal de (V, J) relativa a $g_{\rm s}$. Segue então que o isomorfismo $\mathbb{C}$-linear T de (V, J) tal que $T(b_j) = b'_j$, $j = 1, \ldots, n$ é unitário e satisfaz $T(L_1) = L_2$. □

COROLÁRIO 1.4.28. *Dados subespaços Lagrangeanos L_1, $L_2 \subset V$, existe um simplectomorfismo $T \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ tal que $T(L_1) = L_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 1.4.27, observando que toda transformação $g_{\rm s}$-unitária é um simplectomorfismo (vide Proposição 1.4.22). □

OBSERVAÇÃO 1.4.29. Para uso posterior, mencionamos um pequeno refinamento do Corolário 1.4.27. Dados subespaços Lagrangeanos $L_1, L_2 \subset V$ e escolhidas orientações $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ nos espaços L_1, L_2 respectivamente então é possível encontrar um endomorfismo $\mathbb{C}$-linear g_{s}-unitário T de (V, J) tal que $T(L_1) = L_2$ e tal que $T|_{L_1}\colon L_1 \to L_2$ seja um isomorfismo positivamente orientado; de fato, basta na demonstração do Corolário 1.4.27 escolher as bases g-ortonormais $(b_j)_{j=1}^n$ e $(b'_j)_{j=1}^n$ de L_1 e L_2 respectivamente de modo que as mesmas sejam positivamente orientadas.

OBSERVAÇÃO 1.4.30. Dado um subespaço Lagrangeano $L_0 \subset V$ então sempre é possível encontrar uma base $(b_j)_{j=1}^{2n}$ de V que seja ao mesmo tempo simplética, adaptada a J (vide Definição 1.2.9) e tal que $(b_j)_{j=1}^n$ seja uma base de L_0. De fato, se $(b_j)_{j=1}^n$ é uma base ortonormal de L_0 com respeito a g então a base definida em (1.2.5) satisfaz as propriedades desejadas; além do mais, tal base é ortonormal com respeito a g e a base complexa $(b_j)_{j=1}^n$ de (V, J) é ortonormal com respeito a g_{s}. Obtivemos então uma base que coloca todos os objetos $(V, \omega, J, g, g_{\mathrm{s}}, L_0)$ simultaneamente nas suas respectivas formas canônicas.

Seguindo as idéias das Observações 1.4.24 e 1.4.25, é natural perguntar se dados um produto interno g e uma forma simplética ω num espaço real V, seria possível construir alguma estrutura complexa J (e um produto Hermiteano g_{s}) associado a g e a ω de maneira natural; se exigirmos $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ isso é claramente impossível, pois existe um único operador $H \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\omega = g(H\cdot, \cdot)$ e H em geral não satisfaz $H^2 = -\mathrm{Id}$. Como curiosidade, mencionamos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1.4.31. *Seja (V, ω) um espaço simplético e seja g um produto interno em V; então existe uma única estrutura complexa J em V que é anti-simétrica (ou, equivalentemente, ortogonal) com respeito a g e compatível com ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Mostramos primeiro a unicidade de J; suponha então que temos uma estrutura complexa J em V que é g-anti-simétrica e compatível com ω. Seja $H \in \mathcal{L}(V)$ o único operador tal que $\omega = g(H\cdot, \cdot)$; então H é um isomorfismo g-anti-simétrico de V. A compatibilidade de J com ω é equivalente à condição que $g(HJ\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear simétrica definida negativa em V. Identificando operadores lineares e formas bilineares da maneira usual (vide Exemplo 1.1.7), vemos que a g-anti-simetria de H, J e a g-simetria de HJ significam que:

$$g \circ J = -J^* \circ g, \quad g \circ H = -H^* \circ g, \quad g \circ H \circ J = J^* \circ H^* \circ g,$$

donde segue facilmente que $H \circ J = J \circ H$.

Considerando as complexificações $J^{\mathbb{C}}$, $H^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(V^{\mathbb{C}})$, e a única extensão sesqui-linear $g^{\mathbb{C}_{\mathrm{s}}}$ de g a $V^{\mathbb{C}}$, vemos que $g^{\mathbb{C}_{\mathrm{s}}}$ é um produto Hermiteano em $V^{\mathbb{C}}$, relativo ao qual $H^{\mathbb{C}}$ e $J^{\mathbb{C}}$ são operadores anti-Hermiteanos (vide Exemplo 1.3.18 e Observação 1.3.19); além do mais, $H^{\mathbb{C}}$ e $J^{\mathbb{C}}$ comutam e $\big(J^{\mathbb{C}}\big)^2 = -\mathrm{Id}$.

Como $H^{\mathbb{C}}$ é $g^{\mathbb{C}_s}$-anti-Hermiteano, sabe-se[6] que ele pode ser diagonalizado numa base ortonormal de $V^{\mathbb{C}}$ relativa a $g^{\mathbb{C}_s}$; seus autovalores são puramente imaginários e não nulos (pois H é inversível) e como $H^{\mathbb{C}}$ comuta com conjugação (vide Lema 1.3.13), temos que os autoespaços de $H^{\mathbb{C}}$ correspondentes a dois autovalores conjugados são mutuamente conjugados. Podemos então escrever uma decomposição $g^{\mathbb{C}_s}$-ortogonal:

$$V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{Z}_{i\lambda_j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{Z}_{-i\lambda_j},$$

com $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, r$, $\mathcal{Z}_{i\lambda}$ o autoespaço de $H^{\mathbb{C}}$ correspondente ao autovalor $i\lambda$; também $\mathcal{Z}_{-i\lambda_j}$ é conjugado a $\mathcal{Z}_{i\lambda_j}$.

Como $J^{\mathbb{C}}$ comuta com $H^{\mathbb{C}}$, segue que os autoespaços $\mathcal{Z}_{i\lambda}$ de $H^{\mathbb{C}}$ são invariantes por $J^{\mathbb{C}}$. A restrição de $J^{\mathbb{C}}$ a $\mathcal{Z}_{i\lambda_j}$ é um operador anti-Hermiteano cujo quadrado é igual a $-\mathrm{Id}$, donde essa restrição é diagonalizável tendo i e $-i$ como únicos possíveis autovalores; mas a restrição de $g^{\mathbb{C}_s}\big(J^{\mathbb{C}} \circ H^{\mathbb{C}}\cdot, \cdot\big)$ a $\mathcal{Z}_{i\lambda_j}$ (que coincide com a restrição de $i\lambda_j g^{\mathbb{C}_s}(J^{\mathbb{C}}\cdot, \cdot)$) deve ser Hermiteana definida negativa, donde o único autovalor de $J^{\mathbb{C}}$ em $\mathcal{Z}_{i\lambda_j}$ deve ser igual a i.

Concluímos que $J^{\mathbb{C}}$ deve ser igual a multiplicação pelo escalar i em $\bigoplus_j \mathcal{Z}_{i\lambda_j}$ e igual a multiplicação pelo escalar $-i$ em $\bigoplus_j \mathcal{Z}_{-i\lambda_j}$; tais condições determinam $J^{\mathbb{C}}$, o que mostra a unicidade de J. Para a existência, simplesmente considere a única estrutura complexa J em V cujo espaço holomorfo coincide com $\bigoplus_j \mathcal{Z}_{i\lambda_j}$ (vide Proposição 1.3.23). $\square$

1.4.2. Decomposições Lagrangeanas. Nesta subseção estudamos algumas propriedades das decomposições Lagrangeanas de um espaço simplético que serão fundamentais para o estudo do Grassmanniano de Lagrangeanos na Seção 2.5.

Ao longo desta subseção, (V, ω) será sempre um espaço simplético com $\dim(V) = 2n$. Começamos com uma definição.

DEFINIÇÃO 1.4.32. Uma *decomposição Lagrangeana* de (V, ω) é um par (L_0, L_1) de subespaços Lagrangeanos de V com $V = L_0 \oplus L_1$.

EXEMPLO 1.4.33. Se $\mathbb{R}^{2n}$ é munido de sua forma simplética canônica então $(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n, \{0\}^n \oplus \mathbb{R}^n)$ é uma decomposição Lagrangeana de $\mathbb{R}^{2n}$. Mais geralmente, se $L \subset V$ é um subespaço Lagrangeano e J é uma estrutura complexa compatível com ω então $(L, J(L))$ é uma decomposição Lagrangeana de V (vide Lema 1.4.20 e demonstração do Corolário 1.4.21).

[6] Na verdade, todo operador normal $\mathcal{T}$ relativo a um produto Hermiteano positivo é diagonalizável numa base ortonormal; isso se mostra por um simples argumento indutivo, observando que o complemento ortogonal de um autoespaço de $\mathcal{T}$ é ainda invariante por $\mathcal{T}$. Se $\mathcal{T}$ é Hermiteano seus autovalores serão reais e se $\mathcal{T}$ é anti-Hermiteano seus autovalores serão puramente imaginários.

Se (L_0, L_1) é uma decomposição Lagrangeana de V, definimos uma aplicação

$$\rho_{L_0,L_1}\colon L_1 \longrightarrow L_0^* \tag{1.4.11}$$

fazendo $\rho_{L_0,L_1}(v) = \omega(v,\cdot)|_{L_0}$, para todo $v \in L_1$; é fácil ver que ρ_{L_0,L_1} é um isomorfismo.

OBSERVAÇÃO 1.4.34. O isomorfismo ρ_{L_0,L_1} nos permite identificar L_1 com o dual de L_0, mas alguns cuidados devem ser tomados; o isomorfismo ρ_{L_0,L_1} de L_1 em L_0^* induz um isomorfismo $(\rho_{L_0,L_1})^*$ de $L_0^{**} \cong L_0$ em L_1^*, mas esse último não coincide com ρ_{L_1,L_0}. Temos:

$$\rho_{L_1,L_0} = -\big(\rho_{L_0,L_1}\big)^*. \tag{1.4.12}$$

Se $L \subset V$ é um subespaço Lagrangeano definimos também um isomorfismo

$$\rho_L\colon V/L \longrightarrow L^* \tag{1.4.13}$$

que leva, para cada $v \in V$, a classe $v + L \in V/L$ no funcional $\omega(v,\cdot)|_L$. Para uma decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) de V temos o seguinte diagrama comutativo de isomorfismos:

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[dd, "q"'] \arrow[dr, "\rho_{L_0,L_1}"] & \\ & L_0^* \\ V/L_0 \arrow[ur, "\rho_{L_0}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4.14}$$

onde q é a restrição a L_1 da aplicação quociente $V \to V/L_0$.

Como aplicação do isomorfismo ρ_{L_0,L_1} temos o seguinte lema.

LEMA 1.4.35. *Se $L_0 \subset V$ é um subespaço Lagrangeano então toda base $(b_i)_{i=1}^n$ de L_0 se estende a uma base simplética $(b_i)_{i=1}^{2n}$ de V; além do mais, escolhido um Lagrangeano complementar L_1 de L_0, então tal extensão pode ser escolhida de modo que $(b_i)_{i=n+1}^{2n}$ é uma base de L_1.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 1.4.21 sabemos que L_0 admite um Lagrangeano complementar L_1; escolhido um tal Lagrangeano L_1 definimos:

$$b_{n+i} = -\rho_{L_0,L_1}^{-1}(b_i^*), \quad i = 1, \dots, n,$$

onde $(b_i^*)_{i=1}^n$ é a base de L_0^* dual de $(b_i)_{i=1}^n$. □

COROLÁRIO 1.4.36. *Dadas duas decomposições Lagrangeanas (L_0, L_1) e (L_0', L_1') de V então todo isomorfismo de L_0 sobre L_0' se estende a um simplectomorfismo $T\colon V \to V$ tal que $T(L_1) = L_1'$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(b_i)_{i=1}^n$ uma base qualquer de L_0 e considere a base $(b_i')_{i=1}^n$ de L_0' obtida de $(b_i)_{i=1}^n$ através do isomorfismo dado entre L_0 e L_0'; o Lema 1.4.35 nos dá então uma base simplética $(b_i)_{i=1}^{2n}$ tal que $(b_i)_{i=n+1}^{2n}$ é uma base de L_1 e uma base simplética $(b_i')_{i=1}^{2n}$ tal que $(b_i')_{i=n+1}^{2n}$ é uma base de L_1'. O simplectomorfismo T é definido fazendo $T(b_i) = b_i'$, $i = 1, \ldots, 2n$. □

COROLÁRIO 1.4.37. *Se $L_0 \subset V$ é um subespaço Lagrangeano então todo isomorfismo de L_0 se estende a um simplectomorfismo de V.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue trivialmente do Corolário 1.4.36 e do fato que, pelo Corolário 1.4.21, todo Lagrangeano L_0 admite um Lagrangeano complementar. □

Mostramos agora como uma decomposição Lagrangeana pode ser usada para descrever todos os outros subespaços Lagrangeanos de V.

PROPOSIÇÃO 1.4.38. *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de V; se $P \subset L_1$ é um subespaço qualquer e $\mathcal{S} \in \mathcal{B}_{\rm sim}(P)$ é uma forma bilinear simétrica em P então o subespaço*

$$L = \big\{v + w\colon v \in P,\ w \in L_0,\ \mathcal{S}(v) - \rho_{L_1,L_0}(w)|_P = 0\big\} \subset V \tag{1.4.15}$$

é Lagrangeano, onde $\mathcal{S}$ é identificado com um operador linear $\mathcal{S}\colon P \to P^*$. Reciprocamente, se $L \subset V$ é um subespaço Lagrangeano qualquer então existe um único par $(P, \mathcal{S})$ com $P \subset L_1$ um subespaço, $\mathcal{S} \in \mathcal{B}_{\rm sim}(P)$ e tal que L é dado por (1.4.15)*; além do mais, P é dado por:*

$$P = \pi_1(L),$$

onde $\pi_1\colon V \to L_1$ denota a projeção com respeito à decomposição $V = L_0 \oplus L_1$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $P \subset L_1$ um subespaço e $\mathcal{S} \in \mathcal{B}_{\rm sim}(P)$; escolhendo um subespaço complementar qualquer Q de P em L_1 obtemos um isomorfismo

$$L \ni v + w \longmapsto \big(v, \rho_{L_1,L_0}(w)|_Q\big) \in P \oplus Q^*, \quad v \in L_1,\ w \in L_0,$$

que mostra que o espaço L definido em (1.4.15) tem dimensão n. O seguinte cálculo direto mostra que L é isotrópico:

$$\begin{aligned} \omega(v_1 + w_1, v_2 + w_2) &= \rho_{L_1,L_0}(w_1) \cdot v_2 - \rho_{L_1,L_0}(w_2) \cdot v_1 \\ &= \mathcal{S}(v_1, v_2) - \mathcal{S}(v_2, v_1) = 0, \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

para todos $v_1, v_2 \in L_1$, $w_1, w_2 \in L_0$ com $v_1 + w_1, v_2 + w_2 \in L$. Mostramos então que L é Lagrangeano e é fácil ver que P realmente coincide com a projeção $\pi_1(L)$.

Seja agora $L \subset V$ um subespaço Lagrangeano qualquer e defina $P = \pi_1(L)$. Se $v \in P$ e $w_1, w_2 \in L_0$ são tais que $v + w_1, v + w_2 \in L$ então $w_1 - w_2 \in L \cap L_0$; como $P \subset L + L_0$ segue que os funcionais $\rho_{L_1,L_0}(w_1)$ e

$\rho_{L_1,L_0}(w_2)$ coincidem em P. Concluímos então que, escolhendo $w \in L_0$ com $v + w \in L$ então o funcional

$$\mathcal{S}(v) = \rho_{L_1,L_0}(w)|_P \in P^*$$

não depende da escolha de w; obtemos então uma aplicação $\mathcal{S}\colon P \to P^*$. É fácil ver que $\mathcal{S}$ é linear. Usando que $\dim(L) = n$ segue facilmente que L é dado por (1.4.15); usando o fato que L é isotrópico, o cálculo (1.4.16) mostra que $\mathcal{S}$ é simétrica. A unicidade do par $(P, \mathcal{S})$ é trivial. $\square$

A técnica de extensão de base usada na demonstração do Corolário 1.4.36 também poderia ter sido usada para demonstrar o Corolário 1.4.28. O Corolário 1.4.28 diz em certo sentido que os subespaços Lagrangeanos de um espaço simplético são "indistinguíveis" do ponto de vista da estrutura simplética e o Corolário 1.4.36 implica que também as decomposições Lagrangeanas de um espaço simplético são "indistinguíveis"; a Proposição abaixo nos diz que, para pares de Lagrangeanos (L_0, L), a dimensão da interseção $L_0 \cap L$ é o único invariante do par (L_0, L).

PROPOSIÇÃO 1.4.39. *Dados subespaços Lagrangeanos L_0, L e L' de V com $\dim(L_0 \cap L) = \dim(L_0 \cap L')$ então existe um simplectomorfismo $T \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ tal que $T(L_0) = L_0$ e $T(L) = L'$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 1.4.37, existe um simplectomorfismo de V que leva L_0 sobre si próprio e leva $L_0 \cap L$ sobre $L_0 \cap L'$; podemos então supor sem perda de generalidade que $L_0 \cap L = L_0 \cap L'$.

Seja então $S = L_0 \cap L = L_0 \cap L'$; daí S é isotrópico e L_0, L, $L' \subset S^\perp$. Temos uma estrutura simplética $\bar\omega$ em $S^\perp/S$ obtida de ω por passagem ao quociente (vide Exemplo 1.4.17). Denote por $q\colon S^\perp \to S^\perp/S$ a aplicação quociente; é fácil ver que os subespaços $q(L_0)$, $q(L)$ e $q(L')$ são Lagrangeanos em $(S^\perp/S, \bar\omega)$. Além do mais, temos que $\big(q(L_0), q(L)\big)$ e $\big(q(L_0), q(L')\big)$ são decomposições Lagrangeanas de $S^\perp/S$, donde existe um simplectomorfismo $\overline{T}$ de $S^\perp/S$ que leva $q(L)$ sobre $q(L')$ e tal que $\overline{T}\big(q(L_0)\big) = q(L_0)$ (vide Corolário 1.4.36); o simplectomorfismo desejado $T \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ é obtido então a partir do Lema 1.4.40 a seguir. $\square$

LEMA 1.4.40. *Seja $L_0 \subset V$ um subespaço Lagrangeano e seja $S \subset L_0$ um subespaço qualquer. Considere a forma simplética $\bar\omega$ em $S^\perp/S$ definida a partir de ω por passagem ao quociente (vide Exemplo 1.4.17); então, dado um simplectomorfismo $\overline{T}$ de $(S^\perp/S, \bar\omega)$ tal que $\overline{T}\big(q(L_0)\big) = q(L_0)$, existe um simplectomorfismo T de (V, ω) tal que $T(S) = S$ (e logo $T(S^\perp) = S^\perp$), $T(L_0) = L_0$ e tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} S^\perp \arrow[r, "T|_{S^\perp}"] \arrow[d, "q"'] & S^\perp \arrow[d, "q"] \\ S^\perp/S \arrow[r, "\overline{T}"'] & S^\perp/S \end{tikzcd}$$

onde $q\colon S^\perp \to S^\perp/S$ *denota a aplicação quociente.*

Demonstração. Escreva $L_0 = S \oplus R$; daí $L_0^* = S^o \oplus R^o$, onde S^o, R^o denotam respectivamente os anuladores dos subespaços S, R em L_0^*. Seja L_1 um subespaço Lagrangeano complementar de L_0 em V (vide Corolário 1.4.21). Temos:

$$L_1 = \rho_{L_0,L_1}^{-1}(S^o) \oplus \rho_{L_0,L_1}^{-1}(R^o).$$

Obtemos uma decomposição $V = V_1 \oplus V_2$ de V como soma direta de subespaços ω-ortogonais (vide Definição 1.4.11) dados por:

$$V_1 = S \oplus \rho_{L_0,L_1}^{-1}(R^o), \quad V_2 = R \oplus \rho_{L_0,L_1}^{-1}(S^o).$$

Segue que V é soma direta dos subespaços simpléticos V_1 e V_2.

Note que $S^\perp = V_2 \oplus S$, donde a aplicação quociente q se restringe a um simplectomorfismo de V_2 em $S^\perp/S$; temos então um único simplectomorfismo T' de V_2 tal que o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V_2 & \xrightarrow{T'} & V_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q|_{V_2}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q|_{V_2}} \\ S^\perp/S & \xrightarrow[\overline{T}]{} & S^\perp/S \end{array}$$

comuta. Como $\overline{T}$ preserva $q(L_0) = q(R)$ temos que T' preserva R; definimos então T fazendo $T|_{V_1} = \mathrm{Id}$ e $T|_{V_2} = T'$ (vide Exemplo 1.4.12). $\square$

Observação 1.4.41. Na verdade é possível demonstrar que o simplectomorfismo T que aparece no enunciado da Proposição 1.4.39 pode ser escolhido de modo que $T|_{L_0}$ seja um isomorfismo *positivamente orientado* de L_0. De fato, se $\dim(L_0 \cap L) = \dim(L_0 \cap L') = 0$ então a Proposição 1.4.39 é na verdade uma conseqüência trivial do Corolário 1.4.36 e podemos até mesmo escolher T com $T|_{L_0} = \mathrm{Id}$. No caso geral, observamos que na última parte da demonstração do Lema 1.4.40 podemos definir T de modo que $T|_{V_1}$ seja um simplectomorfismo arbitrário de V_1 que preserva S (em vez de $T|_{V_1} = \mathrm{Id}$); como S é um subespaço Lagrangeano de V_1, o Corolário 1.4.37 implica que T pode ser escolhido de modo que $T|_S = A$, onde A é um isomorfismo qualquer de S preescrito *a priori* (e note também que $T|_R = T'|_R$ *não depende* de A). Se $\dim(S) > 0$ podemos então usar a liberdade na escolha de $T|_S = A$ para "calibrar" a orientação de $T|_{L_0}$.

CAPÍTULO 2

Geometria de Grassmannianos

2.1. Variedades e Grupos de Lie: Notações e Convenções

Nesta seção fixamos algumas convenções sobre cálculo em variedades e ações de grupos de Lie em variedades; enunciamos também alguns resultados elementares.

Neste texto, o termo "variedade" significa sempre uma variedade diferenciável real de dimensão finita, cuja topologia é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (i.e., possui uma base enumerável de abertos); o termo "diferenciável" significa sempre[1] "de classe C^∞". Abaixo fazemos uma breve descrição mais explícita sobre a terminologia usada na construção de uma estrutura de variedade.

Seja M um conjunto. Uma *carta* no conjunto M é uma função bijetora:

$$\phi\colon U \longrightarrow \tilde{U}$$

onde $U \subset M$ é qualquer subconjunto e $\tilde{U}$ é um aberto de algum espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$; em algumas situações, com pequeno abuso, permitimos também que $\tilde{U}$ seja um aberto de algum espaço vetorial real de dimensão finita arbitrário.

Dizemos que duas cartas $\phi\colon U \to \tilde{U}$ e $\psi\colon V \to \tilde{V}$ no conjunto M são *compatíveis* se $U \cap V = \emptyset$ ou se $\phi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são ambos abertos e a *função de transição*

$$\psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

for um difeomorfismo diferenciável. Um *atlas diferenciável* $\mathcal{A}$ no conjunto M é um conjunto de cartas em M, duas a duas compatíveis, cujos domínios cobrem M. Uma carta é dita *compatível* com um atlas diferenciável $\mathcal{A}$ se a mesma for compatível com todas as cartas pertencentes a $\mathcal{A}$; é fácil ver que duas cartas compatíveis com um atlas são compatíveis entre si. Portanto, todo atlas diferenciável $\mathcal{A}$ está contido num único *atlas diferenciável maximal* que é o conjunto de todas as cartas em M compatíveis com $\mathcal{A}$.

Um atlas diferenciável $\mathcal{A}$ em M induz uma única topologia τ em M tal que as cartas de $\mathcal{A}$ são homeomorfismos definidos em abertos de (M, τ); a topologia τ é definida como o conjunto das partes $A \subset M$ tais que $\phi(A \cap U)$ é aberto para toda carta $\phi\colon U \to \tilde{U}$ pertencente a (ou compatível com) $\mathcal{A}$. Uma *variedade* fica então definida como um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é

[1]Exceções a essas regras serão feitas nas Subseções 5.1.1 e 6.4.1 onde consideraremos variedades de Banach.

um conjunto, $\mathcal{A}$ é um atlas diferenciável maximal em M cuja topologia τ correspondente é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade; a partir daí, o termo *carta* (ou *sistema de coordenadas*) em M passa a significar uma *carta pertencente a* $\mathcal{A}$.

OBSERVAÇÃO 2.1.1. Alguns textos de cálculo em variedades exigem que a topologia de uma variedade seja Hausdorff e paracompacta; essa exigência é ligeiramente mais fraca do que a que adotamos, mas realmente não acrescenta nada de muito interessante. De fato, uma variedade Hausdorff que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade é automaticamente paracompacta e reciprocamente, uma variedade Hausdorff paracompacta satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade *desde que a mesma possua apenas uma quantidade enumerável de componentes conexas* (vide [**53**, Apêndice A, Teorema 1]).

Se M é uma variedade e $N \subset M$ é um subconjunto então dizemos que uma carta $\phi\colon U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ de M é uma *carta de subvariedade* para N se $\phi(U \cap N)$ é igual à interseção de $\tilde{U}$ com um subespaço vetorial de $S \subset \mathbb{R}^n$ (aqui também podemos admitir um espaço real de dimensão finita qualquer no lugar de $\mathbb{R}^n$). Daí dizemos que

$$\phi|_{U\cap N}\colon U \cap N \longrightarrow \tilde{U} \cap S$$

é a *carta induzida por* ϕ *em* N. Se para todo $x \in N$ existe uma carta de subvariedade para N cujo domínio contém x então obtemos também um atlas diferenciável para N; a topologia de N será então induzida da topologia de M e dizemos que N é uma *subvariedade mergulhada* de M. A aplicação de inclusão $\mathfrak{i}\colon N \to M$ será nesse caso um *mergulho*, i.e., uma imersão diferenciável que é também um homeomorfismo sobre sua imagem (com a topologia induzida do contra-domínio).

Uma *subvariedade imersa* N em M é uma variedade N tal que $N \subset M$ como conjunto e de modo que a inclusão $\mathfrak{i}\colon N \to M$ seja uma imersão diferenciável. Note que um mesmo subconjunto $N \subset M$ pode ter *várias* estruturas de variedade que o tornam uma subvariedade imersa de M; porém, uma vez fixada uma topologia em N, existe *no máximo uma* estrutura de variedade compatível com essa topologia que torna N uma subvariedade imersa de M (isso seguirá da Observação 2.1.2 a seguir).

Em geral, se N, M são variedades quaisquer e se $f\colon N \to M$ é uma imersão diferenciável injetora então existe uma única estrutura de variedade em $f(N)$ que torna f um difeomorfismo diferenciável sobre $f(N)$; daí $f(N)$ é uma subvariedade imersa de M. Se f for um mergulho então $f(N)$ será uma subvariedade mergulhada de M (a existência de cartas de subvariedade para $f(N)$ segue da forma local das imersões).

O termo subvariedade significará *sempre* uma subvariedade mergulhada, a menos de menção explícita em contrário.

OBSERVAÇÃO 2.1.2. Se P, M são variedades, $N \subset M$ é uma subvariedade mergulhada e $f\colon P \to M$ é uma aplicação diferenciável com $f(P) \subset N$ então existe uma única aplicação $f_0\colon P \to N$ tal que o seguinte diagrama comuta:

(2.1.1)
$$\begin{tikzcd} & M \\ P \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_0"'] & N \arrow[u, "\mathfrak{i}"'] \end{tikzcd}$$

onde $\mathfrak{i}$ denota inclusão. Dizemos que f_0 é obtida de f por *mudança de contra-domínio* e muitas vezes denotaremos f_0 pelo mesmo símbolo f; segue da diferenciabilidade de f que f_0 também é diferenciável. O mesmo resultado *não vale* em geral se N é apenas uma subvariedade imersa de M; porém, mesmo nesse caso, podemos concluir que f_0 é diferenciável se supusermos *a priori* que f_0 seja contínua (para uma discussão sobre o assunto vide [**58**, pgs. 22–28]).

Subvariedades imersas $N \subset M$ para as quais a diferenciabilidade de f implica na diferenciabilidade de f_0 em (2.1.1) são normalmente conhecidas como *subvariedades quase mergulhadas*; exemplos de tais subvariedades são as *subvariedades integrais de distribuições involutivas* (vide [**58**, Teorema 1.62] e [**57**, Teorema 1.3.6]) e as subvariedades imersas que são também subgrupos abstratos de um grupo de Lie (vide [**58**, Teorema 3.20 e Corolário (b), Teorema 3.19]).

Observação 2.1.3. Se $f\colon M \to N$ é uma submersão diferenciável então segue da forma local das submersões que para todo $y \in \mathrm{Im}(f)$ e para todo $x \in M$ com $f(x) = y$ existe uma *seção local diferenciável* de f levando y em x, i.e., existe uma aplicação diferenciável $s\colon U \to M$ definida numa vizinhança aberta U de y em N tal que $s(y) = x$ e tal que $f \circ s\colon U \to N$ é a inclusão $(f \circ s)(z) = z$, $z \in U$.

A existência de seções locais permite mostrar que submersões diferenciáveis sobrejetoras possuem a *propriedade da passagem ao quociente*, i.e., se $f\colon M \to N$ é uma submersão sobrejetora, $g\colon M \to P$ é uma aplicação diferenciável e existe $\bar{g}\colon N \to P$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ N \arrow[r, "\bar{g}"'] & P \end{tikzcd}$$

comuta então $\bar{g}$ também é diferenciável. Segue daí que se M é uma variedade, N é um conjunto e $f\colon M \to N$ é uma aplicação sobrejetora então existe *no máximo uma* estrutura de variedade em N que torna f uma submersão; essa estrutura é às vezes chamada a *estrutura diferenciável quociente*[2] em N induzida por f.

[2]Compare essa situação com a noção de *topologia quociente*; no caso topológico, porém, a topologia quociente induzida por uma aplicação sempre existe.

2.1.1. Grupos e álgebras de Lie clássicos. Nesta subseção fazemos uma breve descrição e introduzimos a notação para os grupos e álgebras de Lie clássicos que serão usados no nosso texto.

Um *grupo de Lie* é um grupo munido de uma estrutura de variedade tal que a aplicação $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$ é diferenciável; o elemento neutro de G é denotado por $1 \in G$. Por um *homomorfismo de grupos de Lie* entendemos sempre um homomorfismo (de grupos abstratos) que é também contínuo; daí ele será automaticamente diferenciável (vide [**57**, Teorema 2.11.2] e [**58**, Teorema 3.39]).

Para $g \in G$, denotamos por l_g, r_g respectivamente os difeomorfismos de G de *translação à esquerda* $l_g(x) = gx$ e de *translação à direita* $r_g(x) = xg$; por $\mathcal{I}_g = l_g \circ r_g^{-1}$ denotamos o *automorfismo interno* associado a g. Se $g \in G$ e $v \in T_xG$ é um vetor tangente a G então escrevemos:

$$gv = \mathrm{d}l_g(x) \cdot v, \quad vg = \mathrm{d}r_g(x) \cdot v;$$

para todo $X \in T_1G$ definimos campos vetoriais X^L e X^R em G fazendo:

$$X^L(g) = gX, \quad X^R(g) = Xg, \tag{2.1.2}$$

para todo $g \in G$. Dizemos que X^L (respectivamente, X^R) é o *campo vetorial invariante à esquerda* (respectivamente, *invariante à direita*) associado ao vetor $X \in T_1G$. A *álgebra de Lie* de G, denotada $\mathfrak{g}$, é definida por $\mathfrak{g} = T_1G$; o comutador de $\mathfrak{g}$ é obtido por restrição do colchete de Lie de campos vetoriais em G quando identificamos cada $X \in \mathfrak{g}$ com o campo invariante à esquerda X^L. Denotamos por $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ a *aplicação exponencial* de G, definida de modo que para cada $X \in \mathfrak{g}$, a aplicação

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(tX) \in G \tag{2.1.3}$$

é um homomorfismo de grupos de Lie cuja derivada em $t = 0$ é o vetor X; daí (2.1.3) é uma *curva integral* do campo X^L e do campo X^R, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX) = X^L(\exp(tX)) = X^R(\exp(tX)), \tag{2.1.4}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (vide [**58**, Teorema 3.31]).

Um *subgrupo de Lie* de G é uma subvariedade imersa $H \subset G$ que é também um subgrupo abstrato de G; daí H torna-se também um grupo de Lie com a multiplicação induzida por G (vide Observação 2.1.2). Um subgrupo de Lie $H \subset G$ será uma subvariedade mergulhada se e somente se H for fechado em G (vide [**57**, Teorema 2.5.4] e [**58**, Teorema 3.21]); além do mais, todo subgrupo (abstrato) fechado $H \subset G$ é um subgrupo de Lie de G (vide [**57**, Teorema 2.12.6] e [**58**, Teorema 3.42]). Se $H \subset G$ é um subgrupo de Lie então a diferencial da inclusão de H em G permite identificar a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H com uma subálgebra de $\mathfrak{g}$; explicitamente, temos (vide [**58**, Proposição 3.33]):

$$\mathfrak{h} = \big\{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in H,\ \forall t \in \mathbb{R}\big\}. \tag{2.1.5}$$

Observe que todo subgrupo discreto $H \subset G$ é um subgrupo de Lie mergulhado (e fechado) de G, com $\dim(H) = 0$; nesse caso $\mathfrak{h} = \{0\}$.

Se G^o denota a componente conexa de G que contém o elemento neutro (que coincide com a componente conexa por arcos de G que contém o elemento neutro) então é fácil ver que G^o é sempre um subgrupo normal aberto e fechado de G. Na verdade, todo subgrupo aberto de G é também fechado em G já que seu complementar é uma união de co-classes laterais desse subgrupo (que também são abertas); segue que todo subgrupo aberto de G é uma união de componentes conexas de G. A álgebra de Lie de um subgrupo aberto de G identifica-se com a álgebra de Lie de G.

OBSERVAÇÃO 2.1.4. Se G é um grupo de Lie e $\mathfrak{h}$ é um subespaço de $\mathfrak{g}$ então ficam bem definidas uma única *distribuição invariante à esquerda* $\mathcal{D}^L$ e uma única *distribuição invariante à direita* $\mathcal{D}^R$ em G tais que $\mathcal{D}^L(1) = \mathcal{D}^R(1) = \mathfrak{h}$. Temos que $\mathcal{D}^L$ (ou $\mathcal{D}^R$) é *involutiva* se e somente se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. A subvariedade integral maximal conexa de $\mathcal{D}^L$ (ou de $\mathcal{D}^R$) que passa pelo elemento neutro é um subgrupo de Lie (conexo) de G que possui $\mathfrak{h}$ como álgebra de Lie; além do mais, se $H \subset G$ é qualquer subgrupo de Lie cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$ então H^o é a subvariedade integral maximal conexa de $\mathcal{D}^L$ (ou de $\mathcal{D}^R$) passando por $1 \in G$. As outras subvariedades integrais maximais conexas de $\mathcal{D}^L$ (respectivamente, de $\mathcal{D}^R$) são as co-classes à esquerda gH^o (respectivamente, co-classes à direita, $H^o g$) de H^o (vide (2.1.11) e (2.1.15)). Demonstrações desses fatos podem ser encontradas em [**57**, Teorema 2.5.2] e [**58**, Corolário (b), Teorema 3.19]; para a terminologia de distribuições involutivas, subvariedades integrais e o *Teorema de Frobenius* o leitor pode consultar, por exemplo, [**57**, Seção 1.3] ou [**58**, pgs. 41–49].

Conclui-se então que uma curva $t \mapsto \gamma(t) \in G$ de classe C^1 tem imagem contida em alguma co-classe à esquerda de H se e somente se

$$\gamma(t)^{-1}\gamma'(t) \in \mathfrak{h},$$

para todo t; similarmente, a imagem de γ está contida em alguma co-classe à direita de H em G se e somente se

$$\gamma'(t)\gamma(t)^{-1} \in \mathfrak{h},$$

para todo t.

Fazemos agora uma pequena lista dos grupos de Lie clássicos que serão utilizados no nosso texto; explicitamos também suas álgebras de Lie. Todos esses grupos e álgebras serão constituídos por matrizes reais ou complexas (ou por operadores lineares sobre $I\!R$ ou $\mathbb{C}$). A multiplicação do grupo será sempre a multiplicação de matrizes (ou composição de operadores) e o colchete da álgebra de Lie será sempre dado por $[X, Y] = XY - YX$; a aplicação exponencial será sempre $\exp(X) = e^X = \sum_{n=0}^{+\infty}(X^n/n!)$.

Os espaços vetoriais considerados abaixo serão sempre de dimensão finita. Tipicamente, usamos letras maiúsculas para denotar o nome de um grupo de Lie e as correspondentes letras minúsculas para denotar o nome de sua álgebra de Lie.

- *O grupo linear geral*;

  Se V é um espaço vetorial real ou complexo, denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ o grupo de todos os automorfismos lineares (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, respectivamente) de V; sua álgebra de Lie $\mathrm{gl}(V)$ coincide com o espaço $\mathcal{L}(V)$ de endomorfismos lineares de V. Dizemos que $\mathrm{GL}(V)$ é o *grupo linear geral* de V. Escrevemos $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{gl}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{gl}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$. Obviamente, podemos identificar $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (respectivamente $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) com o grupo das matrizes reais (respectivamente complexas) inversíveis $n \times n$ e $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ (respectivamente $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$) com a álgebra de Lie das matrizes reais (respectivamente complexas) $n \times n$.

  Observe que se V é um espaço real e J é uma estrutura complexa em V, de modo que (V, J) é identificado com um espaço complexo, então $\mathrm{GL}(V, J)$ (respectivamente $\mathrm{gl}(V, J)$) pode ser visto como o subgrupo (respectivamente subálgebra) de $\mathrm{GL}(V)$ (respectivamente $\mathrm{gl}(V)$) formado pelos operadores que comutam com J (vide Lema 1.2.3). Obtemos desse modo uma inclusão de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ em $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ e de $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ em $\mathrm{gl}(2n, \mathbb{R})$ (vide Exemplo 1.2.2 e Observação 1.2.10).

  No caso em que V é real, denotamos por $\mathrm{GL}_+(V)$ o subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$ formado pelos operadores que *preservam orientação*, i.e., pelos operadores de determinante positivo; daí $\mathrm{GL}_+(V)$ é aberto em $\mathrm{GL}(V)$ e portanto sua álgebra de Lie coincide com a álgebra de Lie $\mathrm{gl}(V)$ de $\mathrm{GL}(V)$. Escrevemos $\mathrm{GL}_+(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ e identificamos $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ com o grupo das matrizes reais $n \times n$ com determinante positivo.

  Veremos adiante que o grupo $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ é conexo (vide Exemplo 3.2.28 e Observação 3.2.29); o grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tem duas componentes conexas: $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ e seu complementar. O grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é conexo (vide Exemplo 3.2.30 e Observação 3.2.31).

- *O grupo especial linear*;

  Se V é um espaço vetorial real ou complexo, denotamos por $\mathrm{SL}(V)$ o subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(V)$ formado pelos operadores com determinante igual a 1. Dizemos que $\mathrm{SL}(V)$ é o *grupo especial linear* de V; sua álgebra de Lie $\mathrm{sl}(V) \subset \mathrm{gl}(V)$ é formada pelos operadores de traço nulo. Escrevemos também $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{sl}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{sl}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$; daí $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ (respectivamente $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$) é o grupo das matrizes reais (respectivamente complexas) $n \times n$ com determinante igual a 1 e $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ (respectivamente, $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$) é a álgebra de Lie das matrizes reais (respectivamente complexas) $n \times n$ de traço nulo.

Como no caso do grupo linear geral, temos inclusões de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ em $\mathrm{SL}(2n,I\!R)$ e de $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ em $\mathrm{sl}(2n,I\!R)$. Os grupos $\mathrm{SL}(n,I\!R)$ e $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ são ambos conexos (vide Exemplo 3.2.32).

- *Os grupos ortogonal e especial ortogonal*;

  Se V é um espaço vetorial real munido de um produto interno g (i.e., g é uma forma bilinear simétrica definida positiva em V) então denotamos por $\mathrm{O}(V,g)$ o subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(V)$ formado pelos operadores g-ortogonais (vide Definição 1.1.6). Dizemos que $\mathrm{O}(V,g)$ é o *grupo ortogonal* de V relativo a g; o grupo *especial ortogonal* $\mathrm{SO}(V,g)$ de V relativo a g é definido por:

$$\mathrm{SO}(V,g)=\mathrm{O}(V,g)\cap\mathrm{SL}(V)=\mathrm{O}(V,g)\cap\mathrm{GL}_+(V).$$

  As álgebras de Lie de $\mathrm{O}(V,g)$ e de $\mathrm{SO}(V,g)$ coincidem, já que $\mathrm{SO}(V,g)$ é aberto em $\mathrm{O}(V,g)$; ambas são denotadas por $\mathrm{so}(V,g)$. Temos que $\mathrm{so}(V,g)$ é a subálgebra de $\mathrm{gl}(V)$ formada pelos operadores g-anti-simétricos.

  Se $V=I\!R^n$ e g é o produto interno canônico (vide (1.3.9)) então escrevemos $\mathrm{O}(I\!R^n,g)=\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(I\!R^n,g)=\mathrm{SO}(n)$ e $\mathrm{so}(I\!R^n,g)=\mathrm{so}(n)$; daí $\mathrm{O}(n)$ é o grupo das matrizes reais $n\times n$ ortogonais (i.e., tais que a transposta é igual à inversa), $\mathrm{SO}(n)$ é o subgrupo de $\mathrm{O}(n)$ formado pelas matrizes com determinante igual a 1 e $\mathrm{so}(n)$ é a álgebra de Lie de matrizes reais $n\times n$ anti-simétricas.

  Os grupos $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ são compactos pois são limitados e fechados no espaço Euclideano das matrizes reais $n\times n$; o grupo $\mathrm{SO}(n)$ é conexo e o grupo $\mathrm{O}(n)$ tem duas componentes conexas: $\mathrm{SO}(n)$ e seu complementar (vide Exemplo 3.2.27).

- *Os grupos unitário e especial unitário*;

  Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo munido de um produto Hermiteano positivo g_{s} (vide Definição 1.3.16). O *grupo unitário* de $\mathcal{V}$ relativo a g_{s}, denotado por $\mathrm{U}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})$, é o subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ formado pelos operadores g_{s}-unitários (vide Observação 1.3.19); o *grupo especial unitário* de $\mathcal{V}$ relativo a g_{s} é definido por:

$$\mathrm{SU}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})=\mathrm{U}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})\cap\mathrm{SL}(\mathcal{V}).$$

  A álgebra de Lie $\mathrm{u}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})$ de $\mathrm{U}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})$ é a subálgebra de $\mathrm{gl}(\mathcal{V})$ formada pelos operadores g_{s}-anti-Hermiteanos e a álgebra de Lie $\mathrm{su}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})$ de $\mathrm{SU}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})$ é a subálgebra de $\mathrm{u}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})$ formada pelos operadores de traço nulo.

  Se V é um espaço vetorial e J é uma estrutura complexa em V de modo que (V,J) identifica-se com um espaço complexo $\mathcal{V}$ então, dado um produto Hermiteano g_{s} em (V,J), escrevemos também $\mathrm{U}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})=\mathrm{U}(V,J,g_{\mathrm{s}})$, $\mathrm{SU}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})=\mathrm{SU}(V,J,g_{\mathrm{s}})$, $\mathrm{u}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})=\mathrm{u}(V,J,g_{\mathrm{s}})$ e $\mathrm{su}(\mathcal{V},g_{\mathrm{s}})=\mathrm{su}(V,J,g_{\mathrm{s}})$.

Se $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ e g_{s} é o produto Hermiteano canônico (vide (1.3.10)) então escrevemos $\mathrm{U}(\mathbb{C}^n, g_{\mathrm{s}}) = \mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(\mathbb{C}^n, g_{\mathrm{s}}) = \mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{u}(\mathbb{C}^n, g_{\mathrm{s}}) = \mathrm{u}(n)$ e $\mathrm{su}(\mathbb{C}^n, g_{\mathrm{s}}) = \mathrm{su}(n)$; daí $\mathrm{U}(n)$ é o grupo das matrizes complexas $n \times n$ unitárias (i.e., tais que a transposta conjugada é igual à inversa), $\mathrm{SU}(n)$ é o subgrupo de $\mathrm{U}(n)$ formado pelas matrizes de determinante 1, $\mathrm{u}(n)$ é a álgebra de Lie das matrizes complexas $n \times n$ anti-Hermiteanas (i.e., tais que a transposta conjugada é igual à oposta) e $\mathrm{su}(n)$ é a subálgebra de $\mathrm{u}(n)$ formada pelas matrizes de traço nulo.

Os grupos $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ são compactos pois são limitados e fechados no espaço Euclideano das matrizes complexas $n \times n$; esses grupos são também conexos (vide Exemplos 3.2.25 e 3.2.26).

- *O grupo simplético*;

  Seja (V, ω) um espaço simplético; na Definição 1.4.10 introduzimos o grupo simplético $\mathrm{Sp}(V, \omega)$. Temos que $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(V)$; sua álgebra de Lie $\mathrm{sp}(V, \omega)$ consiste nos endomorfismos lineares X de V tais que $\omega(X\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear simétrica, ou seja:

$$\omega(X(v), w) = \omega(X(w), v), \quad v, w \in V. \tag{2.1.6}$$

Em termos do operador linear $\omega\colon V \to V^*$ a fórmula (2.1.6) é equivalente à identidade:

$$\omega \circ X = -X^* \circ \omega. \tag{2.1.7}$$

Se ω é a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^{2n}$, escrevemos $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega) = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega) = \mathrm{sp}(2n, \mathbb{R})$. As representações matriciais dos elementos de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ numa base simplética (ou, equivalentemente, os elementos de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$) são descritas em (1.4.6) e (1.4.7). A partir de (2.1.7) é fácil ver que as representações matriciais dos elementos de $\mathrm{sp}(V, \omega)$ numa base simplética (ou, equivalentemente, os elementos de $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{R})$) são da forma:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}, \quad B, C \text{ simétricas,} \tag{2.1.8}$$

onde A^* denota a matriz transposta de A. Veremos adiante que o grupo simplético é conexo (vide Exemplo 3.2.36).

2.1.2. Variedades homogêneas e ações de grupos de Lie. Nesta subseção enunciamos alguns resultados sobre ações de grupos de Lie em variedades; estudamos também as variedades homogêneas, i.e., variedades que são dadas por quocientes de grupos de Lie.

Se G é um grupo e M é um conjunto, uma *ação* (à esquerda) de G em M é uma aplicação

$$G \times M \ni (g, m) \longmapsto g \cdot m \in M \tag{2.1.9}$$

tal que $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m$ e $1 \cdot m = m$, para todos $g_1, g_2 \in G$ e $m \in M$, onde $1 \in G$ denota o elemento neutro. Para cada elemento $m \in M$ obtemos uma aplicação

$$\beta_m \colon G \longrightarrow M \tag{2.1.10}$$

dada por $\beta_m(g) = g \cdot m$ e para cada $g \in G$ obtemos uma bijeção

$$\gamma_g \colon M \longrightarrow M$$

de M dada por $\gamma_g(m) = g \cdot m$; daí $g \mapsto \gamma_g$ é um homomorfismo de G no grupo das bijeções de M. Muitas vezes usaremos o próprio símbolo g para denotar a bijeção γ_g de M.

Para cada $m \in M$, definimos a *órbita* de m relativa à ação de G por:

$$G(m) = \big\{g \cdot m : g \in G\big\};$$

as órbitas da ação de G em M constituem uma partição de M. Definimos também o *subgrupo de isotropia* do elemento $m \in M$ por:

$$G_m = \big\{g \in G : g \cdot m = m\big\};$$

é fácil ver que G_m é de fato um subgrupo de G.

Dizemos que a ação de G em M é *transitiva* quando $G(m) = M$ para algum (e logo para todo) $m \in M$; dizemos que a ação de G em M é *livre* (ou *sem pontos fixos*) quando $G_m = \{1\}$ para todo $m \in M$. Dizemos também que a ação é *efetiva* quando o homomorfismo $g \mapsto \gamma_g$ é injetor, i.e., quando $\bigcap_{m \in M} G_m = \{1\}$.

Se H é um subgrupo de G denotaremos por G/H o conjunto das *co-classes à esquerda* de H em G:

$$G/H = \big\{gH : g \in G\big\},$$

onde

$$gH = \big\{gh : h \in H\big\} \tag{2.1.11}$$

é a co-classe à esquerda do elemento $g \in G$. Temos uma ação natural de G em G/H dada por:

$$G \times G/H \ni (g_1, g_2 H) \longmapsto (g_1 g_2)H \in G/H; \tag{2.1.12}$$

tal ação é chamada a *ação por translação à esquerda* de G nas co-classes à esquerda de H. A ação (2.1.12) é sempre transitiva.

Se G age em M e se G_m denota o subgrupo de isotropia do elemento $m \in M$ então a aplicação β_m passa ao quociente e define uma bijeção:

$$\bar{\beta}_m \colon G/G_m \longrightarrow G(m) \tag{2.1.13}$$

dada por $\bar{\beta}_m(gG_m) = g \cdot m$. Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\beta_m"] & \\ G/G_m \arrow[r, "\cong", "\bar{\beta}_m"'] & G(m) \end{tikzcd}$$

onde $q\colon G \to G/G_m$ denota a aplicação quociente.

DEFINIÇÃO 2.1.5. Dadas ações de um grupo G em conjuntos M e N, dizemos que uma aplicação $\phi\colon M \to N$ é *G-equivariante* (ou simplesmente *equivariante*) quando vale a identidade:

$$\phi(g \cdot m) = g \cdot \phi(m),$$

para todos $g \in G$ e $m \in M$. Se ϕ é equivariante e bijetora dizemos que ϕ é um *isomorfismo equivariante*; nesse caso ϕ^{-1} é automaticamente equivariante.

A bijeção (2.1.13) é um isomorfismo equivariante, quando consideramos a ação de G em G/G_m por translação à esquerda e a ação de G em $G(m)$ obtida pela restrição da ação de G em M.

OBSERVAÇÃO 2.1.6. Define-se também uma *ação à direita* de G em M como sendo uma aplicação

$$M \times G \ni (m, g) \longmapsto m \cdot g \in M \tag{2.1.14}$$

satisfazendo $(m \cdot g_1) \cdot g_2 = m \cdot (g_1 g_2)$ e $m \cdot 1 = m$, para todos $g_1, g_2 \in G$ e $m \in M$. Uma teoria totalmente análoga à de ações à esquerda pode ser desenvolvida para ações à direita; de fato, a uma ação à direita (2.1.14) pode-se sempre associar uma ação à esquerda definida por $(g, m) \mapsto m \cdot g^{-1}$. Observe que na teoria de ações à direita, para que a bijeção (2.1.13) seja bem definida deve-se entender o quociente G/H como o conjunto de *co-classes à direita* Hg, $g \in G$, onde:

$$Hg = \big\{hg : h \in H\big\}. \tag{2.1.15}$$

Suponha agora que G é um grupo de Lie e que M é uma variedade; nesse contexto suporemos sempre que a aplicação (2.1.9) é diferenciável. Se H é um subgrupo fechado de G então existe uma única estrutura de variedade no conjunto G/H tal que a aplicação quociente:

$$q\colon G \longrightarrow G/H$$

é uma submersão diferenciável (vide Observação 2.1.3, [**57**, Teorema 2.9.4, Teorema 2.9.5] e [**58**, Teorema 3.58]). O núcleo da diferencial $dq(1)$ é precisamente a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H, de modo que o espaço tangente a G/H no ponto $1H$ pode ser identificado com o espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Note que como q é aberta e sobrejetora segue que G/H possui a *topologia quociente* da topologia de G.

Observe que para todo $m \in M$ o grupo de isotropia G_m é um subgrupo fechado de G, donde temos uma estrutura de variedade em G/G_m; daí mostra-se que a aplicação $gG_m \mapsto g \cdot m$ é uma imersão diferenciável (vide [**58**, Demonstração do Teorema 3.62]), donde obtemos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.1.7. *Se um grupo de Lie G age diferenciavelmente numa variedade M então para cada $m \in M$ a órbita $G(m)$ possui uma única estrutura de variedade que torna* (2.1.13) *um difeomorfismo diferenciável;*

com essa estrutura $G(m)$ torna-se uma subvariedade imersa de M e o espaço tangente $T_mG(m)$ coincide com a imagem da aplicação:

$$\mathrm{d}\beta_m(1)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow T_mM,$$

onde β_m é definida em (2.1.10). □

OBSERVAÇÃO 2.1.8. Escolhido outro ponto $m' \in G(m)$, de modo que $G(m) = G(m')$, então é fácil ver que a estrutura de variedade induzida em $G(m)$ por $\bar{\beta}_{m'}$ coincide com a estrutura induzida por $\bar{\beta}_m$.

Temos também o seguinte:

COROLÁRIO 2.1.9. *Se G age transitivamente em M então para cada $m \in M$ a aplicação* (2.1.13) *é um difeomorfismo diferenciável de G/G_m sobre M; em particular, a aplicação β_m dada em* (2.1.10) *é uma submersão sobrejetora.*

DEMONSTRAÇÃO. Vide [**58**, Teorema 3.62]. □

No caso de ações transitivas, quando identificamos G/G_m com M através do difeomorfismo (2.1.13), muitas vezes dizemos que m é o *ponto base* usado para tal identificação; diz-se então que M (ou G/G_m) é uma *variedade homogênea*.

COROLÁRIO 2.1.10. *Sejam M, N variedades; suponha que sejam dadas ações diferenciáveis de um grupo de Lie G em M e em N. Se a ação de G em M é transitiva então toda aplicação equivariante $\phi\colon M \to N$ é diferenciável.*

DEMONSTRAÇÃO. Escolha $m \in M$; a equivariância de ϕ nos dá o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\beta_m"'] \arrow[dr, "\beta_{\phi(m)}"] & \\ M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

a conclusão segue do Corolário 2.1.9 e da Observação 2.1.3. □

Em muitos casos teremos interesse em saber quando uma órbita de uma ação de um grupo de Lie é uma subvariedade mergulhada. Temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.1.11. Seja X um espaço topológico; um subconjunto $S \subset X$ é dito *localmente fechado* quando S se escreve como a interseção de um aberto com um fechado de X. Equivalentemente, S é localmente fechado em X quando S é aberto relativamente ao seu fecho $\overline{S}$.

É fácil mostrar que S é localmente fechado em X se e somente se todo ponto $p \in S$ admite uma vizinhança V em X tal que $V \cap S$ é fechado em V; daí se X é Hausdorff então todo subespaço localmente compacto $S \subset X$ é localmente fechado. Quando X é localmente compacto Hausdorff vale a recíproca, i.e., todo subconjunto localmente fechado é localmente compacto na topologia induzida (vide [**34**, §8, Capítulo 8]; nessa referência os resultados são enunciados para espaços métricos mas esse fato não é usado de maneira essencial na demonstração).

Se M é uma variedade, toda subvariedade mergulhada de M é um subconjunto localmente fechado; subvariedades imersas podem não ser localmente fechadas. Temos o seguinte:

TEOREMA 2.1.12. *Se um grupo de Lie G age diferenciavelmente na variedade M então, dado $m \in M$, a órbita $G(m)$ é uma subvariedade mergulhada de M se e somente se $G(m)$ é um subconjunto localmente fechado de M.*

DEMONSTRAÇÃO. Vide [**57**, Teorema 2.9.7]. □

Finalizamos a seção com um resultado relacionando fibrações e variedades homogêneas.

DEFINIÇÃO 2.1.13. Dadas variedades F, E, B e uma aplicação diferenciável $p\colon E \to B$, dizemos que p é uma *fibração diferenciável com fibra típica* F se para todo $b \in B$ existe um difeomorfismo

$$\alpha\colon p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$$

tal que $\pi_1 \circ \alpha = p|_{p^{-1}(U)}$, onde $U \subset B$ é uma vizinhança aberta de b em B e π_1 é a primeira projeção do produto $U \times F$. Dizemos nesse caso que α é uma *trivialização local* de p em torno de b e também que a fibração p é *trivial* sobre o aberto $U \subset B$. As variedades E, B são chamadas respectivamente o *espaço total* e a *base* da fibração p; para cada $b \in B$ o subconjunto $E_b = p^{-1}(b) \subset E$ é chamado a *fibra* sobre b.

TEOREMA 2.1.14. *Seja G um grupo de Lie e sejam H, K subgrupos fechados de G com $K \subset H$; então a aplicação*

$$p\colon G/K \longrightarrow G/H$$

definida por $p(gK) = gH$ é uma fibração diferenciável com fibra típica H/K.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Observação 2.1.3 que p é diferenciável. Seja $gH \in G/H$ e seja $s\colon U \to G$ uma seção local diferenciável da submersão $q\colon G \to G/H$ definida numa vizinhança aberta $U \subset G/H$ de gH; daí $q \circ s$ é a inclusão de U em G/H. Definimos uma trivialização local de p:

$$\alpha\colon p^{-1}(U) \longrightarrow U \times H/K$$

fazendo $\alpha(xK) = (xH, s(xH)^{-1}xK)$. A conclusão segue[3]. □

COROLÁRIO 2.1.15. *Nas hipóteses do Corolário 2.1.9 temos que a aplicação β_m dada em (2.1.10) é uma fibração diferenciável com fibra típica G_m.* □

[3]A diferenciabilidade de α depende do fato que H/K é uma subvariedade mergulhada de G/K (vide Observação 2.1.2). Segue da Proposição 2.1.7 que H/K é uma subvariedade imersa de G/K, já que H/K é a órbita de $1K \in G/K$ pela ação de H por translação à esquerda em G/K. O fato que H/K é na verdade uma subvariedade mergulhada segue do Teorema 2.1.12 observando que H/K é fechado em G/K ou também do fato que a topologia co-induzida pela aplicação quociente $H \to H/K$ coincide com a topologia induzida pela inclusão $H/K \to G/K$.

COROLÁRIO 2.1.16. *Seja $f\colon G \to G'$ um homomorfismo de grupos de Lie e sejam $H \subset G$, $H' \subset G'$ subgrupos fechados tais que $f(H) \subset H'$; considere a aplicação:*

$$\bar{f}\colon G/H \longrightarrow G'/H'$$

induzida de f por passagem ao quociente, i.e., $\bar{f}(gH) = f(g)H'$ para todo $g \in G$. Daí, se $\bar{f}$ é sobrejetora então $\bar{f}$ é uma fibração diferenciável com fibra típica $f^{-1}(H')/H$.

DEMONSTRAÇÃO. Considere a ação de G em G'/H' dada por

$$G \times G'/H' \ni (g, g'H') \longmapsto (f(g)g')H' \in G'/H'.$$

A órbita do elemento $1H' \in G'/H'$ é a imagem de $\bar{f}$ e seu subgrupo de isotropia é $f^{-1}(H')$; como $\bar{f}$ é sobrejetora, segue do Corolário 2.1.9 que a aplicação $\hat{f}\colon G/f^{-1}(H') \to G'/H'$ induzida de f por passagem ao quociente é um difeomorfismo. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & G/H \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\ G/f^{-1}(H') \arrow[rr, "\cong", "\hat{f}"'] & & G'/H' \end{tikzcd}$$

onde p é induzida da identidade de G por passagem ao quociente; segue do Teorema 2.1.14 que p é uma fibração diferenciável com fibra típica $f^{-1}(H')/H$. Isso completa a demonstração. □

Um *recobrimento diferenciável* é uma fibração diferenciável cuja fibra típica F é uma variedade discreta (de dimensão zero). Temos então o seguinte:

COROLÁRIO 2.1.17. *Nas hipóteses do Corolário 2.1.16, se H e $f^{-1}(H')$ tem a mesma dimensão então $\bar{f}$ é um recobrimento diferenciável.* □

OBSERVAÇÃO 2.1.18. Dada uma fibração diferenciável $p\colon E \to B$ com fibra típica F então toda curva $\gamma\colon [a,b] \to B$ de classe C^k $(0 \le k \le +\infty)$ admite um *levantamento* $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to E$ (i.e., $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$) ainda de classe C^k:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ {[a,b]} \arrow[ur, dotted, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & B \end{tikzcd}$$

Esse fato pode ser demonstrado seguindo o seguinte roteiro:

- escolha uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ do intervalo $[a,b]$ tal que para todo $i = 1, \ldots, k-1$ o segmento $\gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$ de γ tem imagem contida num aberto $U_i \subset B$ sobre o qual a fibração é trivial (vide idéia da prova do Teorema 3.1.23);

- observe que uma trivialização α_i da fibração p sobre o aberto U_i induz uma correspondência biunívoca entre os levantamentos de $\gamma|_{[t_{i-1},t_{i+1}]}$ e as aplicações $f\colon [t_{i-1},t_{i+1}] \to F$;

- construa $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to E$ indutivamente: supondo um levantamento $\tilde{\gamma}_i$ de $\gamma|_{[a,t_i]}$ construído, construa um levantamento $\tilde{\gamma}_{i+1}$ de $\gamma|_{[a,t_{i+1}]}$ de modo que $\tilde{\gamma}_{i+1}$ coincida com $\tilde{\gamma}_i$ no intervalo $[a, t_{i-1}+\varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$ (use a trivialização local α_i e uma carta local em F).

2.1.3. A linearização da ação de um grupo de Lie numa variedade. Nesta subseção consideramos sempre um grupo de Lie G agindo diferenciavelmente (à esquerda) numa variedade M; mostramos que a tal ação corresponde um anti-homomorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G na álgebra de Lie dos campos vetoriais diferenciáveis em M.

Seja $X \in \mathfrak{g}$; definimos um campo vetorial diferenciável X^* em M fazendo:

$$X^*(m) = \mathrm{d}\beta_m(1) \cdot X, \quad m \in M,$$

onde β_m é definida em (2.1.10).

Recorde que se $f\colon N_1 \to N_2$ é uma aplicação diferenciável então um campo vetorial Y_1 em N_1 é dito *f-relacionado* com um campo vetorial Y_2 em N_2 quando:

$$Y_2(f(n)) = \mathrm{d}f_n(Y_1(n)), \quad \forall n \in N_1.$$

OBSERVAÇÃO 2.1.19. Se Y_1, Z_1 são campos diferenciáveis em N_1, f-relacionados com campos diferenciáveis Y_2, Z_2 em N_2 respectivamente então o colchete de Lie $[Y_1, Z_1]$ é f-relacionado com $[Y_2, Z_2]$ (vide [**58**, Proposição 1.55]).

Recordando que X^R denota o campo invariante à direita correspondente ao elemento $X \in \mathfrak{g}$ (vide (2.1.2)) e diferenciando a identidade $\beta_{g\cdot m} = \beta_m \circ r_g$ no ponto $1 \in G$ obtemos que:

$$X^*(g \cdot m) = \mathrm{d}\beta_m(g) \cdot X^R(g), \quad \forall m \in M. \tag{2.1.16}$$

A identidade (2.1.16) nos diz que para todo $m \in M$ o campo X^* em M é β_m-relacionado com o campo invariante à direita X^R em G.

OBSERVAÇÃO 2.1.20. Se G age à esquerda em M então em geral *não* é possível construir um campo em M que seja β_m-relacionado com o campo invariante à esquerda X^L em G. Observe também que em geral o campo X^* não é invariante pela ação de G em M; na verdade, em geral não é possível construir um campo G-invariante em M com um certo valor prescrito num ponto $m \in M$.

Como corolário de (2.1.16) obtemos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.1.21. *Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ então:*

$$[X, Y]^* = -[X^*, Y^*],$$

onde o colchete do lado esquerdo é o colchete da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e o colchete do lado direito é o colchete de Lie de campos vetoriais.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $m \in M$; como os campos X^*, Y^* são β_m-relacionados respectivamente com os campos invariantes à direita X^R, Y^R, segue da Observação 2.1.19 que $[X^*, Y^*]$ é β_m-relacionado com $\big[X^R, Y^R\big]$. Mostraremos logo a seguir que

$$\big[X^R, Y^R\big] = -[X, Y]^R; \tag{2.1.17}$$

daí os campos $[X^*, Y^*]$ e $-[X, Y]^*$ são ambos β_m-relacionados com $\big[X^R, Y^R\big]$ e portanto coincidem sobre $\mathrm{Im}(\beta_m) = G(m)$. Como $m \in M$ é arbitrário, a demonstração fica concluída, a menos da prova da identidade (2.1.17). Para mostrar (2.1.17), considere a aplicação de inversão $\mathrm{inv}\colon G \to G$ dada por $\mathrm{inv}(g) = g^{-1}$; temos que $\mathrm{d}(\mathrm{inv})(1) = -\mathrm{Id}$ e daí vê-se facilmente que X^R é inv-relacionado com o campo invariante à esquerda $-X^L$. Pela Observação 2.1.19 vemos que $\big[X^R, Y^R\big]$ é inv-relacionado com $\big[X^L, Y^L\big] = [X, Y]^L$; mas $-[X, Y]^R$ também é inv-relacionado com $[X, Y]^L$. A conclusão segue agora do fato que a aplicação inv é sobrejetora. □

A aplicação $X \mapsto X^*$ é chamada a *linearização* da ação de G em M; a Proposição 2.1.21 nos diz que tal aplicação é um *anti-homomorfismo* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ na álgebra de Lie dos campos vetoriais diferenciáveis em M

OBSERVAÇÃO 2.1.22. Note que de (2.1.16) e (2.1.4) segue facilmente que para todo $m \in M$ a aplicação

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(tX) \cdot m \in M$$

é uma curva integral de X^*, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tX) \cdot m) = X^*(\exp(tX) \cdot m),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Mais geralmente, dada qualquer aplicação

$$I \ni t \longmapsto X(t) \in \mathfrak{g}$$

definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, obtemos um *campo vetorial dependente do tempo invariante à direita* em G dado por:

$$I \times G \ni (t, g) \longmapsto X(t)^R(g) = X(t)g \in T_gG; \tag{2.1.18}$$

obtemos também um campo vetorial dependente do tempo em M fazendo:

$$I \times M \ni (t, m) \longmapsto X(t)^*(m) \in T_mM. \tag{2.1.19}$$

Segue também de (2.1.16) que, para qualquer $m \in M$, a aplicação β_m leva curvas integrais de (2.1.18) em curvas integrais de (2.1.19); mais explicitamente, se $t \mapsto \gamma(t) \in G$ satisfaz

$$\gamma'(t) = X(t)\gamma(t),$$

para todo t então:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma(t) \cdot m) = X(t)^*(\gamma(t) \cdot m),$$

para todo t.

2.2. Estrutura de Variedade do Grassmanniano

Nesta seção descreveremos uma estrutura de variedade diferenciável no conjunto dos subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$.

Se n, k são inteiros com $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, denotaremos por $G_k(n)$ o conjunto de todos os subespaços (vetoriais) de dimensão k de $\mathbb{R}^n$; dizemos que $G_k(n)$ é o *Grassmanniano* de subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$.

Considere uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, onde W_0 é um subespaço k-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Obviamente $\dim(W_1) = n - k$. Para cada operador linear $T \colon W_0 \to W_1$ o *gráfico de* T dado por:

$$\mathrm{Gr}(T) = \big\{ v + T(v) : v \in W_0 \big\}$$

é um elemento de $G_k(n)$. Além do mais, um elemento $W \in G_k(n)$ é da forma $\mathrm{Gr}(T)$ para algum T se e somente se W é um complementar de W_1, i.e., se e somente se W pertence ao conjunto:

$$G_k^0(n, W_1) = \big\{ \, W \in G_k(n) : W \cap W_1 = \{0\} \, \big\} \subset G_k(n).$$

O operador T é unicamente determinado por W. Podemos então definir uma *bijeção*:

$$\phi_{W_0,W_1} \colon G_k^0(n, W_1) \longrightarrow \mathcal{L}(W_0, W_1), \tag{2.2.1}$$

fazendo $\phi_{W_0,W_1}(W) = T$ quando $W = \mathrm{Gr}(T)$.

Concretamente falando, se denotamos por π_0 e π_1 respectivamente as projeções sobre W_0 e W_1 na decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, temos que o operador $T = \phi_{W_0,W_1}(W)$ é dado por:

$$T = (\pi_1|_W) \circ (\pi_0|_W)^{-1}.$$

A condição que W seja um complementar de W_1 é justamente equivalente a condição que $\pi_0|_W$ seja um isomorfismo sobre W_0.

Queremos mostrar agora que as cartas ϕ_{W_0,W_1} formam um *atlas diferenciável* para o conjunto $G_k(n)$, quando (W_0, W_1) percorre o conjunto de todas as decomposições em soma direta de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(W_0) = k$. Devemos estudar então as funções de transição entre essas cartas. A seguinte definição será útil.

DEFINIÇÃO 2.2.1. Dados subespaços $W_0, W_0' \subset \mathbb{R}^n$ e dado um complementar comum $W_1 \subset \mathbb{R}^n$, i.e., $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0' \oplus W_1$ então temos um isomorfismo:

$$\eta = \eta_{W_0,W_0'}^{W_1} \colon W_0 \longrightarrow W_0',$$

obtido pela restrição a W_0 da projeção sobre W_0' relativa à decomposição $\mathbb{R}^n = W_0' \oplus W_1$. Dizemos que $\eta_{W_0,W_0'}^{W_1}$ é o *isomorfismo de* W_0 *sobre* W_0' *determinado pelo complementar comum* W_1.

O inverso de $\eta^{W_1}_{W_0,W_0'}$ é simplesmente $\eta^{W_1}_{W_0',W_0}$; temos o seguinte diagrama comutativo de isomorfismos:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n/W_1 & \\ W_0 \arrow[ur, "q|_{W_0}"] \arrow[rr, "\eta^{W_1}_{W_0,W_0'}"'] & & W_0' \arrow[ul, "q|_{W_0'}"'] \end{tikzcd}$$

onde $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/W_1$ denota a aplicação quociente.

Consideramos agora cartas ϕ_{W_0,W_1} e ϕ_{W_0',W_1} em $G_k(n)$, onde $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0' \oplus W_1$ e $\dim(W_0) = \dim(W_0') = k$; é fácil então obter a seguinte fórmula para a função de transição:

$$\phi_{W_0',W_1} \circ (\phi_{W_0,W_1})^{-1}(T) = (\pi_1'|_{W_0} + T) \circ \eta^{W_1}_{W_0',W_0}, \tag{2.2.2}$$

onde π_1' denota a projeção sobre W_1 relativa à decomposição $\mathbb{R}^n = W_0' \oplus W_1$.

Escrevemos agora $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0 \oplus W_1'$, com $\dim(W_0) = k$. Obtemos:

$$\phi_{W_0,W_1'} \circ (\phi_{W_0,W_1})^{-1}(T) = \eta^{W_0}_{W_1,W_1'} \circ T \circ \big(\mathrm{Id} + (\pi_0'|_{W_1}) \circ T\big)^{-1}, \tag{2.2.3}$$

onde π_0' denota a projeção sobre W_0 relativa à decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1'$ e Id denota o operador identidade de W_0. O domínio da função de transição (2.2.3) consiste nos operadores $T \in \mathcal{L}(W_0, W_1)$ tais que $\mathrm{Gr}(T) \in G^0_k(n, W_1')$. É fácil ver que isso equivale exatamente à inversibilidade de $\mathrm{Id} + (\pi_0'|_{W_1}) \circ T$. Acabamos de mostrar a seguinte.

PROPOSIÇÃO 2.2.2. *O conjunto das cartas ϕ_{W_0,W_1} em $G_k(n)$, onde o par (W_0, W_1) percorre todas as decomposições em soma direta de $\mathbb{R}^n$ tais que $\dim(W_0) = k$, é um atlas diferenciável para $G_k(n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ admite um complementar, os domínios das cartas ϕ_{W_0,W_1} cobrem $G_k(n)$. As funções de transição (2.2.2) e (2.2.3) são aplicações diferenciáveis definidas em abertos de $\mathcal{L}(W_0, W_1)$. A compatibilidade entre duas cartas arbitrárias ϕ_{W_0,W_1} e $\phi_{W_0',W_1'}$ segue então por transitividade: escolhemos $W \in G^0_k(n, W_1) \cap G^0_k(n, W_1')$ e daí ϕ_{W_0,W_1} é compatível com ϕ_{W,W_1}, que por sua vez é compatível com $\phi_{W,W_1'}$ e essa última é compatível com $\phi_{W_0',W_1'}$ (vide também Observações 2.2.3 e 2.2.5 adiante). □

OBSERVAÇÃO 2.2.3. Sobre o argumento de transitividade mencionado na demonstração da Proposição 2.2.2, observamos que em geral a compatibilidade entre cartas num conjunto não é transitiva. Porém, se ψ_0, ψ_1, ψ_2 são cartas tais que ψ_0 é compatível com ψ_1, ψ_1 é compatível com ψ_2 e o domínio de ψ_0 *coincide* com o domínio de ψ_1 então ψ_0 é compatível com ψ_2.

OBSERVAÇÃO 2.2.4. Na verdade, as fórmulas (2.2.2) e (2.2.3) mostram que as cartas ϕ_{W_0,W_1} formam um atlas *real-analítico* para $G_k(n)$.

Observação 2.2.5. Dada uma coleção finita $V_1, \ldots, V_r$ de subespaços k-dimensionais de $I\!R^n$, podemos encontrar um complementar comum W em $I\!R^n$ para todos os subespaços V_i. De fato, se $k < n$, podemos escolher $v_1 \in I\!R^n$ com $v_1 \notin \bigcup_i V_i$. Consideramos agora os subespaços $V_i \oplus I\!R v_1$ de dimensão $k+1$ e construímos indutivamente vetores $v_2, \ldots, v_{n-k}$ que formam um base para o complementar comum W. Esse argumento mostra que todo subconjunto finito[4] de $G_k(n)$ está contido no domínio de uma carta da forma ϕ_{W_0,W_1}.

Obtemos afinal que o Grassmanniano $G_k(n)$ é uma variedade.

Teorema 2.2.6. *O atlas diferenciável considerado no enunciado da Proposição 2.2.2 faz de $G_k(n)$ uma variedade diferenciável de dimensão $k(n-k)$.*

Demonstração. Resta provar que a topologia definida pelo atlas em questão é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. A propriedade de Hausdorff segue do fato que todo par de pontos pertence simultaneamente ao domínio de uma carta (Observação 2.2.5). O segundo axioma da enumerabilidade segue do fato que, considerando apenas cartas ϕ_{W_0,W_1} onde W_0 e W_1 são gerados por elementos da base canônica de $I\!R^n$, obtemos um atlas finito para $G_k(n)$. □

Observação 2.2.7. Segue da definição da topologia associada a um atlas diferenciável que os subconjuntos $G_k^0(n, W_1) \subset G_k(n)$ são abertos; além do mais, como as cartas (2.2.1) são sobrejetoras, segue que $G_k^0(n, W_1)$ é homeomorfo (e difeomorfo) ao espaço Euclideano $\mathcal{L}(W_0, W_1)$.

Exemplo 2.2.8. O Grassmanniano $G_1(n)$ das retas de $I\!R^n$ passando pela origem é também conhecido como o *espaço projetivo real* $I\!RP^{n-1}$. Fazendo $W_0 = \{0\}^{n-1} \oplus I\!R$ e $W_1 = I\!R^{n-1} \oplus \{0\}$, a carta ϕ_{W_0,W_1} nos fornece o que é normalmente conhecido em geometria projetiva como *coordenadas homogêneas*. O espaço $I\!RP^{n-1}$ também pode ser descrito como o quociente da esfera S^{n-1} obtido identificando pontos antípodas. A *reta projetiva* $I\!RP^1$ é difeomorfa ao círculo S^1; de fato, considerando $S^1 \subset \mathbb{C}$, a aplicação $z \mapsto z^2$ é um recobrimento de S^1 sobre si mesmo que identifica pontos antípodas.

Observação 2.2.9. A teoria desta seção pode ser repetida de maneira idêntica para definir uma estrutura de variedade no Grassmanniano de subespaços complexos k-dimensionais de $\mathbb{C}^n$. As fórmulas de transição (2.2.2) e (2.2.3) são *holomorfas* e mostram que tal Grassmanniano é uma *variedade complexa* de dimensão (complexa) $k(n-k)$. Não faremos uso do Grassmanniano complexo neste texto, mas observe que poderíamos até mesmo considerar um *corpo arbitrário* no lugar de $I\!R$ ou $\mathbb{C}$; nesse caso, as funções de transição seriam *funções racionais*.

[4]Na verdade o mesmo argumento funciona no caso de uma coleção enumerável de espaços V_i. Apenas observe que a união enumerável de subespaços próprios de $I\!R^n$ ainda deve ser um subconjunto próprio de $I\!R^n$, pois o mesmo é um conjunto de medida nula (ou porque tal conjunto tem interior vazio, o que segue do *Teorema de Baire*).

2.3. O Espaço Tangente ao Grassmanniano

Na Seção 2.2 descrevemos uma estrutura de variedade para o Grassmanniano $G_k(n)$ de subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$. Portanto, para cada $W \in G_k(n)$ fica bem definido o espaço tangente $T_W G_k(n)$. Nesta seção mostraremos que tal espaço tangente pode ser naturalmente identificado com o espaço $\mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W)$ de operadores lineares de W no quociente $\mathbb{R}^n/W$; mostraremos também como tal identificação permite calcular de maneira simples a derivada de uma curva em $G_k(n)$.

Começamos com uma motivação informal. Seja $t \mapsto W(t)$ uma curva em $G_k(n)$, i.e., para cada instante t temos um subespaço k-dimensional $W(t)$ de $\mathbb{R}^n$. Como podemos pensar na *derivada* $W'(t_0)$ de maneira intuitiva? Considere uma curva $t \mapsto w(t)$ em $\mathbb{R}^n$ com $w(t) \in W(t)$ para cada t. Em certo sentido, a derivada $w'(t_0)$ deve codificar parte da informação contida na derivada $W'(t_0)$ da família de espaços $W(t)$.

Para cada t, escreva $W(t) = \operatorname{Ker} A(t)$, onde $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$; diferenciando a identidade $A(t)w(t) = 0$ em $t = t_0$ obtemos:

$$A'(t_0)w(t_0) + A(t_0)w'(t_0) = 0.$$

Essa identidade mostra que o valor de $w'(t_0)$ é totalmente determinado por $w(t_0)$, *módulo elementos de* $W(t_0)$. Mais precisamente, para cada $w_0 \in W(t_0)$ podemos associar uma classe $w_0' + W(t_0) \in \mathbb{R}^n/W(t_0)$, fazendo $w_0' = w'(t_0)$, onde $w(t) \in W(t)$ é *qualquer* curva satisfazendo $w(t_0) = w_0$; a classe $w_0' + W(t_0)$ fica então bem definida, i.e., independe da extensão $w(t)$ de w_0 escolhida. A aplicação $w_0 \mapsto w_0' + W(t_0)$ é um operador linear de $W(t_0)$ em $\mathbb{R}^n/W(t_0)$ e podemos entendê-la como a *derivada da curva de espaços* $W(t)$ *em* $t = t_0$.

Passemos às considerações formais.

Proposição 2.3.1. *Seja $W \in G_k(n)$ e seja $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço complementar de W em $\mathbb{R}^n$. Seja $q_1 \colon W_1 \to \mathbb{R}^n/W$ a restrição a W_1 da aplicação quociente sobre $\mathbb{R}^n/W$. Temos um isomorfismo:*

$$\mathcal{L}(\mathrm{Id}, q_1) \circ \mathrm{d}\phi_{W,W_1}(W) \colon T_W G_k(n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W), \tag{2.3.1}$$

onde

$$\mathcal{L}(\mathrm{Id}, q_1) \colon \mathcal{L}(W, W_1) \longrightarrow \mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W) \tag{2.3.2}$$

denota o operador de composição à esquerda $T \mapsto q_1 \circ T$.

O isomorfismo (2.3.1) *não depende da escolha do complementar W_1.*

Demonstração. Como q_1 é um isomorfismo e ϕ_{W,W_1} é uma carta em torno de W, obviamente (2.3.1) é um isomorfismo. A única afirmação não trivial do enunciado é a independência de (2.3.1) em relação a W_1. Seja então W_1' um outro complementar de W em $\mathbb{R}^n$; observe que $\phi_{W,W_1}(W) = \phi_{W,W_1'}(W) = 0$. Diferenciando a função de transição (2.2.3) em $T = 0$ vemos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & T_W G_k(n) \arrow[dl, "\mathrm{d}\phi_{W,W_1}(W)"'] \arrow[dr, "\mathrm{d}\phi_{W,W_1'}(W)"] & \\ \mathcal{L}(W,W_1) \arrow[rr, "\mathcal{L}\left(\mathrm{Id},\eta^W_{W_1,W_1'}\right)"'] & & \mathcal{L}(W,W_1') \end{tikzcd}$$

A conclusão segue facilmente[5] agora da observação que

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[rr, "\eta^W_{W_1,W_1'}"] \arrow[dr, "q_1"'] & & W_1' \arrow[dl, "q_1'"] \\ & \mathbb{R}^n/W & \end{tikzcd} \tag{2.3.3}$$

também comuta, onde q_1' denota a restrição a W_1' da aplicação quociente sobre $\mathbb{R}^n/W$. $\square$

Em vista da Proposição 2.3.1, identificaremos *de agora em diante* o espaço tangente $T_W G_k(n)$ com $\mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W)$. A proposição a seguir justifica a motivação informal dada para tal identificação no início da seção.

PROPOSIÇÃO 2.3.2. *Sejam $W : I \to G_k(n)$ e $w : I \to \mathbb{R}^n$ curvas definidas num intervalo $I \ni t_0$, ambas deriváveis em t_0. Suponha que $w(t) \in W(t)$ para todo $t \in I$. Vale a identidade:*

$$W'(t_0) \cdot w(t_0) = w'(t_0) + W(t_0) \in \mathbb{R}^n/W(t_0),$$

onde identificamos $W'(t_0)$ com um elemento de $\mathcal{L}\big(W(t_0), \mathbb{R}^n/W(t_0)\big)$ através do isomorfismo (2.3.1)*.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $W_0 = W(t_0)$ e escolha um complementar W_1 de W_0 em $\mathbb{R}^n$. Escreva $T(t) = \phi_{W_0,W_1}(W(t))$, de modo que para cada $t \in I$ numa vizinhança de t_0 temos $W(t) = \mathrm{Gr}\big(T(t)\big)$. Denotando por π_0 a projeção sobre W_0 relativa à decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, escreva $u = \pi_0 \circ w$. Como $w(t) \in W(t)$ temos:

$$w(t) = u(t) + T(t) \cdot u(t), \tag{2.3.4}$$

para $t \in I$ numa vizinhança de t_0. Usando o isomorfismo (2.3.1), vemos que $W'(t_0) \in T_{W_0} G_k(n)$ identifica-se com:

$$\mathcal{L}(\mathrm{Id}, q_1) \circ \mathrm{d}\phi_{W_0,W_1}(W_0) \cdot W'(t_0) = q_1 \circ T'(t_0) \in \mathcal{L}(W_0, \mathbb{R}^n/W_0),$$

onde q_1 e $\mathcal{L}(\mathrm{Id}, q_1)$ são definidos como no enunciado da Proposição 2.3.1. Resta mostrar então que:

$$q_1 \circ T'(t_0) \cdot w(t_0) = w'(t_0) + W_0 \in \mathbb{R}^n/W_0.$$

[5] A notação usada em (2.3.2) tem motivação funtorial (vide Observação 1.1.1); desse ponto de vista, a conclusão da proposição segue aplicando o funtor $\mathcal{L}(W, \cdot)$ no diagrama (2.3.3).

Diferenciando (2.3.4) em $t = t_0$ e observando que $T(t_0) = 0$, $u(t_0) = w(t_0)$ vem:

$$w'(t_0) = u'(t_0) + T'(t_0) \cdot w(t_0),$$

onde $u'(t_0) \in W_0$. A conclusão segue. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.3.3. Dados uma curva $W\colon I \to G_k(n)$, $t_0 \in I$, e um vetor $w_0 \in W_0 = W(t_0)$, sempre podemos obter uma curva $t \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^n$, definida numa vizinhança de t_0 em I, com $w(t) \in W(t)$ para todo t, $w(t_0) = w_0$ e de modo que w possua a mesma regularidade de W. De fato, para t em torno de t_0 escrevemos W na forma $W(t) = \mathrm{Gr}\big(T(t)\big)$ usando uma carta local ϕ_{W_0,W_1} e daí definimos $w(t) = w_0 + T(t) \cdot w_0$.

Isso significa na prática que a Proposição 2.3.2 *sempre* pode ser usada para calcular diferenciais de aplicações definidas (ou a valores) em Grassmannianos. De fato, o cálculo de uma diferencial sempre pode ser reduzido ao cálculo de vetores tangentes de curvas e para tal sempre poderemos aplicar a Proposição 2.3.2 (para exemplos, vide as provas do Lema 2.3.4 e das Proposições 2.4.12 e 2.4.13). Não será mais necessário portanto utilizar a fórmula explícita (2.3.1) para o isomorfismo que identifica $T_W G_k(n)$ e $\mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W)$.

Calculamos abaixo a diferencial de uma carta ϕ_{W_0,W_1} num ponto W de seu domínio em termos da identificação $T_W G_k(n) \cong \mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W)$.

LEMA 2.3.4. *Considere uma decomposição em soma direta* $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$ *com* $\dim(W_0) = k$ *e seja* $W \in G_k^0(n, W_1)$*; então a diferencial da carta* ϕ_{W_0,W_1} *no ponto* W *é o operador*

$$\mathcal{L}\big(\eta^{W_1}_{W_0,W}, q_1^{-1}\big)\colon \mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W) \longrightarrow \mathcal{L}(W_0, W_1),$$

ou seja,

$$\mathrm{d}\phi_{W_0,W_1}(W) \cdot Z = q_1^{-1} \circ Z \circ \eta^{W_1}_{W_0,W}, \quad Z \in \mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W) \cong T_W G_k(n),$$

onde q_1 *denota a restrição a* W_1 *da aplicação quociente sobre* $\mathbb{R}^n/W$ *e* $\eta^{W_1}_{W_0,W}$ *denota o isomorfismo de* W_0 *sobre* W *determinado pelo complementar comum* W_1 *(vide Definição 2.2.1).*

DEMONSTRAÇÃO. Esta é uma aplicação direta da técnica descrita na Observação 2.3.3.

Seja $t \mapsto \mathfrak{W}(t)$ uma curva diferenciável em $G_k(n)$ com $\mathfrak{W}(0) = W$, $\mathfrak{W}'(0) = Z$; escreva $T(t) = \phi_{W_0,W_1}(\mathfrak{W}(t))$, de modo que $\mathfrak{W}(t) = \mathrm{Gr}\big(T(t)\big)$ para todo t. Note que $T'(0) = \mathrm{d}\phi_{W_0,W_1}(W) \cdot Z$. Seja $w \in W$; como $W = \mathrm{Gr}\big(T(0)\big)$, podemos escrever $w = w_0 + T(0) \cdot w_0$ com $w_0 \in W_0$. Daí $t \mapsto w(t) = w_0 + T(t) \cdot w_0$ é uma curva em $\mathbb{R}^n$ com $w(t) \in \mathfrak{W}(t)$ para cada t e $w(0) = w$; pela Proposição 2.3.2 temos:

$$\mathfrak{W}'(0) \cdot w = Z \cdot w = w'(0) + W = T'(0) \cdot w_0 + W \in \mathbb{R}^n/W.$$

Observando que $w_0 = \eta^{W_1}_{W,W_0}(w)$ concluímos que:

$$Z = q_1 \circ T'(0) \circ \eta^{W_1}_{W,W_0}.$$

Isso completa a demonstração. □

2.4. O Grassmanniano como Variedade Homogênea

Nesta seção mostraremos que a ação natural do grupo linear de $\mathbb{R}^n$ em $G_k(n)$ é diferenciável. Tal ação é transitiva, mesmo quando restrita ao grupo ortogonal especial; seguirá que o Grassmanniano é um quociente desse grupo e é portanto uma variedade *compacta e conexa*.

Cada isomorfismo linear $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^n$ define uma bijeção de $G_k(n)$ que associa a cada $W \in G_k(n)$ sua imagem direta $A(W)$ por A; essa bijeção também será denotada por A. Obtemos então uma ação (à esquerda) de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ em $G_k(n)$. Começamos mostrando sua diferenciabilidade.

PROPOSIÇÃO 2.4.1. *A ação natural* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times G_k(n) \to G_k(n)$ *é diferenciável.*

DEMONSTRAÇÃO. Simplesmente calculamos a representação dessa aplicação em coordenadas locais de $G_k(n)$.

Sejam $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $W_0 \in G_k(n)$. Seja $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ um complementar comum de W_0 e $A(W_0)$ (vide Observação 2.2.5); daí ϕ_{W_0,W_1} é uma carta cujo domínio contém W_0 e $A(W_0)$. Para B numa vizinhança de A e W numa vizinhança de W_0 calculamos $\phi_{W_0,W_1}(B(W))$; escrevendo $T = \phi_{W_0,W_1}(W)$ temos:

$$\phi_{W_0,W_1}(B(W)) = (B_{10} + B_{11} \circ T) \circ (B_{00} + B_{01} \circ T)^{-1}, \tag{2.4.1}$$

onde B_{ij} denota a componente $\pi_i \circ (B|_{W_j})$ de B e π_i denota a projeção sobre W_i relativa à decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, $i, j = 0, 1$. Obviamente (2.4.1) é uma função diferenciável do par (B, T). □

A ação de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ em $G_k(n)$ é transitiva; na verdade temos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.4.2. *A ação natural de* $\mathrm{SO}(n)$ *em* $G_k(n)$ *(obtida por restrição da ação de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$*) é transitiva.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam W, $W' \in G_k(n)$. Podemos encontrar bases ortonormais $(b_i)_{i=1}^n$ e $(b'_i)_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$ tais que $(b_i)_{i=1}^k$ e $(b'_i)_{i=1}^k$ sejam bases de W e W' respectivamente; trocando b_1 por $-b_1$ se necessário, podemos supor que as duas bases definem a mesma orientação. Basta agora escolher $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que $A(b_i) = b'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. □

COROLÁRIO 2.4.3. *O Grassmanniano* $G_k(n)$ *é difeomorfo aos quocientes* $\mathrm{O}(n)/\big(\mathrm{O}(k)\times\mathrm{O}(n-k)\big)$ *e* $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{S}\big(\mathrm{O}(k)\times\mathrm{O}(n-k)\big)$, *onde* $\mathrm{S}\big(\mathrm{O}(k)\times\mathrm{O}(n-k)\big)$ *denota a interseção* $\mathrm{SO}(n) \cap \big(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)\big)$*; em particular* $G_k(n)$ *é uma variedade compacta e conexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 2.1.9 e da Proposição 2.4.2, observando que relativamente à ação de $\mathrm{O}(n)$ a isotropia do ponto $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k} \in G_k(n)$ consiste no subgrupo formado pelos operadores ortogonais que deixam $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}$ e $\{0\}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ invariantes; esse subgrupo é claramente isomorfo a $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$. Argumento análogo se aplica no caso de $\mathrm{SO}(n)$. □

OBSERVAÇÃO 2.4.4. Obviamente, poderíamos também ter incluído no enunciado do Corolário 2.4.3 uma representação de $G_k(n)$ como quociente de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; mas observe que nesse caso o subgrupo de isotropia de $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}$ *não* é isomorfo a $\mathrm{GL}(k) \times \mathrm{GL}(n-k)$, mas sim ao subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ formado pelas matrizes cujo bloco inferior esquerdo de tamanho $(n-k) \times k$ é nulo.

OBSERVAÇÃO 2.4.5. Na verdade, a ação de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ em $G_k(n)$ é real-analítica, pois obviamente (2.4.1) é uma função real-analítica do par (B,T) (vide também Observação 2.2.4). No caso do Grassmanniano complexo, temos uma ação natural do grupo linear $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^n$; daí, (2.4.1) mostra que tal ação é holomorfa (vide também Observação 2.2.9). Uma generalização óbvia do argumento da demonstração da Proposição 2.4.2 mostra que a ação do grupo especial unitário $\mathrm{SU}(n)$ no Grassmanniano complexo é transitiva; de modo análogo ao Corolário 2.4.3, concluimos que o Grassmanniano complexo é compacto, conexo e difeomorfo aos quocientes $\mathrm{U}(n)/\big(\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)\big)$ e $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{S}\big(\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)\big)$, onde $\mathrm{S}\big(\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)\big)$ denota a interseção $\mathrm{SU}(n) \cap \big(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k)\big)$.

Temos mais alguns corolários interessantes da representação de $G_k(n)$ como quociente de grupos de Lie.

PROPOSIÇÃO 2.4.6. *Numa vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de cada ponto de $G_k(n)$ podemos definir uma aplicação diferenciável $A\colon \mathcal{U} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que*

$$A(W)\big(\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}\big) = W,$$

para todo $W \in \mathcal{U}$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue das Proposições 2.4.1, 2.4.2 e do Corolário 2.1.9 que a aplicação

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ni B \longmapsto B\big(\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}\big) \in G_k(n) \tag{2.4.2}$$

é uma submersão sobrejetora; a aplicação mencionada no enunciado é simplesmente uma seção local diferenciável de tal submersão (vide Observação 2.1.3). □

COROLÁRIO 2.4.7. *Numa vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de cada ponto de $G_k(n)$ existem aplicações diferenciáveis*

$$Z_{\mathrm{ker}}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}) \quad e \quad Z_{\mathrm{im}}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$$

tais que $W = \mathrm{Ker}\big(Z_{\mathrm{ker}}(W)\big) = \mathrm{Im}\big(Z_{\mathrm{im}}(W)\big)$ para todo $W \in \mathcal{U}$.

DEMONSTRAÇÃO. Defina A como na Proposição 2.4.6 e tome $Z_{\mathrm{ker}}(W) = \pi \circ A(W)^{-1}$ e $Z_{\mathrm{im}}(W) = A(W) \circ i$, onde $i\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ e $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ denotam respectivamente a inclusão nas k primeiras coordenadas e a projeção nas $n-k$ últimas coordenadas de $\mathbb{R}^n$. □

COROLÁRIO 2.4.8. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço qualquer e seja $r \in \mathbb{Z}$ um inteiro não negativo; então o conjunto dos espaços $W \in G_k(n)$ tais que $\dim(W \cap S) \le r$ é aberto em $G_k(n)$.*

Demonstração. Seja $W_0 \in G_k(n)$ tal que $\dim(W_0 \cap S) \le r$ e seja Z_{ker} uma aplicação como no enunciado do Corolário 2.4.7 definida numa vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de W_0 em $G_k(n)$; para cada $W \in \mathcal{U}$ temos:

$$W \cap S = \mathrm{Ker}\big(Z_{\mathrm{ker}}(W)|_S\big),$$

donde $\dim(W \cap S) \le r$ se e somente se o operador $Z_{\mathrm{ker}}(W)|_S \in \mathcal{L}(S, \mathbb{R}^{n-k})$ tem posto maior ou igual a $\dim(S) - r$; essa condição define um subconjunto aberto de $\mathcal{L}(S, \mathbb{R}^{n-k})$ e a conclusão segue. □

Observação 2.4.9. Se $W\colon [a,b] \to G_k(n)$ é uma aplicação de classe C^p $(0 \le p \le +\infty)$ então existe uma aplicação $A\colon [a,b] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de classe C^p tal que $A(t)\big(\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}\big) = W(t)$ para todo $t \in [a,b]$; isso segue da Observação 2.1.18, observando que a aplicação (2.4.2) é uma fibração diferenciável (vide Proposição 2.4.2 e Corolário 2.1.15).

Considere a ação do grupo de Lie $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ no espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dada por:

$$(A, B, T) \longmapsto B \circ T \circ A^{-1}, \tag{2.4.3}$$

para $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; um argumento elementar de álgebra linear mostra que as órbitas da ação (2.4.3) são os conjuntos:

$$\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \big\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : T \text{ é uma matriz de posto } r\big\},$$

com $r = 0, 1, \ldots, \min\{m, n\}$. É fácil ver também que os conjuntos

$$\bigcup_{i \ge r} \mathcal{L}^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i \le r} \mathcal{L}^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

são respectivamente um aberto e um fechado de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; segue que cada $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é localmente fechado em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (vide Definição 2.1.11). Obtemos então o seguinte:

Lema 2.4.10. *O conjunto $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para cada $r = 0, 1, \ldots, \min\{m, n\}$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.1.12. □

Obtemos diretamente também a seguinte:

Proposição 2.4.11. *Dados inteiros não negativos m, n e r com $r \le \min\{m, n\}$ então as aplicações*

$$\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni T \longmapsto \mathrm{Im}(T) \in G_r(m) \tag{2.4.4}$$

$$\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni T \longmapsto \mathrm{Ker}(T) \in G_{n-r}(n) \tag{2.4.5}$$

são diferenciáveis.

Demonstração. O produto $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (vide (2.4.3)) e age também em $G_r(m)$, fazendo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ agir trivialmente e $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ agir da maneira natural; a aplicação (2.4.4) é equivariante e portanto sua diferenciabilidade segue do Corolário 2.1.10

e da Proposição 2.4.1. A diferenciabilidade de (2.4.5) segue de maneira similar. □

Nas próximas duas proposições calculamos a diferencial da ação natural de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ em $G_k(n)$.

PROPOSIÇÃO 2.4.12. *Para* $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *considere o difeomorfismo (que é também denotado por* A*) de* $G_k(n)$ *dado por* $W \mapsto A(W)$*. Para* $W \in G_k(n)$ *a diferencial* $\mathrm{d}A(W)$ *de* A *no ponto* W *é o operador*

$$\mathcal{L}\big((A|_W)^{-1}, \bar{A}\big) \colon \mathcal{L}(W, \mathbb{R}^n/W) \longrightarrow \mathcal{L}\big(A(W), \mathbb{R}^n/A(W)\big)$$

dado por $Z \mapsto \bar{A} \circ Z \circ (A|_W)^{-1}$*, onde*

$$\bar{A} \colon \mathbb{R}^n/W \longrightarrow \mathbb{R}^n/A(W)$$

é induzido de A *por passagem ao quociente.*

DEMONSTRAÇÃO. Esta é uma aplicação direta da técnica descrita na Observação 2.3.3.

Seja $t \mapsto W(t)$ uma curva diferenciável em $G_k(n)$ com $W(0) = W$ e $W'(0) = Z$; seja $t \mapsto w(t)$ uma curva em $\mathbb{R}^n$ com $w(t) \in W(t)$ para cada t. Daí $t \mapsto A(w(t))$ é uma curva em $\mathbb{R}^n$ com $A(w(t)) \in A(W(t))$ para cada t e pela Proposição 2.3.2 temos:

$$(A \circ W)'(0) \cdot A(w(0)) = A(w'(0)) + A(W) \in \mathbb{R}^n/A(W). \tag{2.4.6}$$

Novamente pela Proposição 2.3.2 temos:

$$W'(0) \cdot w(0) = w'(0) + W \in \mathbb{R}^n/W. \tag{2.4.7}$$

De (2.4.6) e (2.4.7) a conclusão segue. □

PROPOSIÇÃO 2.4.13. *Para* $W \in G_k(n)$ *a diferencial da aplicação*

$$\beta_W \colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow G_k(n)$$

dada por $\beta_W(A) = A(W)$ *é:*

$$\mathrm{d}\beta_W(A) \cdot X = q \circ X \circ A^{-1}|_{A(W)},$$

para todos $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$*,* $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*, onde* $q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/A(W)$ *denota a aplicação quociente.*

DEMONSTRAÇÃO. Aplicamos a ténica descrita na Observação 2.3.3. Seja $t \mapsto A(t)$ uma curva diferenciável em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ com $A(0) = A$ e $A'(0) = X$; seja $w_0 \in W$. Daí $t \mapsto A(t)(w_0)$ é uma curva em $\mathbb{R}^n$ com $A(t)(w_0) \in \beta_W(A(t))$ para todo t. Pela Proposição 2.3.2 temos:

$$(\beta_W \circ A)'(0) \cdot A(w_0) = X(w_0) + A(W) \in \mathbb{R}^n/A(W).$$

A conclusão segue. □

2.5. O Grassmanniano de Lagrangeanos

Nesta seção mostraremos que o conjunto Λ de todos os subespaços Lagrangeanos de um espaço simplético $2n$-dimensional (V,ω) é uma subvariedade do Grassmanniano de todos os subespaços n-dimensionais de V; chamaremos Λ o Grassmanniano de Lagrangeanos de (V,ω). Estudaremos cartas em Λ, seu espaço tangente e a ação do grupo simplético $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ em Λ; mostraremos que o espaço tangente $T_L\Lambda$ a Λ num ponto L identifica-se com o espaço $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$ de formas bilineares simétricas em L (Proposição 2.5.6). Veremos também que, como o Grassmanniano total, o Grassmanniano de Lagrangeanos é uma variedade homogênea.

Faremos uso sistemático dos resultados sobre Grassmannianos mostrados nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4 bem como dos resultados sobre espaços simpléticos mostrados na Seção 1.4 (principalmente Subseção 1.4.2).

Começamos observando que a teoria sobre Grassmannianos de subespaços de $\mathbb{R}^n$ desenvolvida nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4 pode ser generalizada da maneira óbvia quando substituímos $\mathbb{R}^n$ por um espaço vetorial real V de dimensão finita arbitrário; mencionamos brevemente abaixo as adaptações (principalmente de notação) que devem ser feitas.

Denotaremos então por $G_k(V)$ o conjunto dos subespaços k-dimensionais de V, $0 \le k \le \dim(V)$; tal conjunto possui uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $k(\dim(V)-k)$, com as cartas descritas na Seção 2.2. Se $W_1 \subset V$ é um subespaço de co-dimensão k denotaremos por $G_k^0(V,W_1)$ (ou simplesmente $G_k^0(W_1)$ quando V estiver subentendido) o subconjunto de $G_k(V)$ formado pelos espaços transversais a W_1:

$$G_k^0(V,W_1) = G_k^0(W_1) = \big\{W \in G_k(V) : V = W \oplus W_1\big\}.$$

Daí se $V = W_0 \oplus W_1$ então $G_k^0(W_1)$ é o domínio da carta ϕ_{W_0,W_1}. Para $W \in G_k(V)$ consideraremos sempre a seguinte identificação do espaço tangente $T_W G_k(V)$:

$$T_W G_k(V) \cong \mathcal{L}(W, V/W),$$

construída exatamente como na Seção 2.3. Na Seção 2.4, deve-se substituir sempre o grupo linear geral $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^n$ pelo grupo linear geral $\mathrm{GL}(V)$ de V; na Proposição 2.4.2 e no Corolário 2.4.3 deve-se substituir o grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ e o grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n)$ de $\mathbb{R}^n$ pelos correspondentes grupos $\mathrm{O}(V,g)$ e $\mathrm{SO}(V,g)$ associados a uma escolha arbitrária de um produto interno g em V (na verdade, não faremos uso da Proposição 2.4.2 e do Corolário 2.4.3 nesse contexto). No enunciado da Proposição 2.4.6 o subespaço $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser substituído por um subespaço k-dimensional qualquer de V.

A partir de agora, nesta seção, consideraremos fixado um espaço simplético (V,ω) com $\dim(V) = 2n$. Denotamos por $\Lambda(V,\omega)$ (ou simplesmente Λ) o conjunto de todos os subespaços Lagrangeanos de V:

$$\Lambda(V,\omega) = \Lambda = \big\{L \subset V : L \text{ é Lagrangeano}\big\}.$$

Dizemos que Λ é o *Grassmanniano de Lagrangeanos* do espaço simplético (V,ω); obviamente $\Lambda \subset G_n(V)$. Começamos descrevendo cartas de subvariedade para Λ.

LEMA 2.5.1. *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana para V; então um subespaço $L \in G_n^0(L_1)$ é Lagrangeano se e somente se a forma bilinear:*

$$\rho_{L_0,L_1} \circ \phi_{L_0,L_1}(L) \in \mathcal{L}(L_0, L_0^*) \cong \mathcal{B}(L_0) \tag{2.5.1}$$

é simétrica.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\dim(L) = n$ então L é Lagrangeano se e somente se L é isotrópico. Seja $T = \phi_{L_0,L_1}(L)$ de modo que $T \in \mathcal{L}(L_0, L_1)$ e $L = \mathrm{Gr}(T)$; temos:

$$\omega\big(v + T(v), w + T(w)\big) = \omega(T(v), w) - \omega(T(w), v),$$

para todos $v, w \in L_0$. A conclusão segue observando que a forma bilinear (2.5.1) coincide com $\omega(T\cdot,\cdot)|_{L_0\times L_0}$. □

Se $L_1 \subset V$ é um subespaço Lagrangeano, denotamos por $\Lambda^0(L_1)$ o conjunto de todos os subespaços Lagrangeanos de V transversais a L_1:

$$\Lambda^0(L_1) = \Lambda \cap G_n^0(L_1). \tag{2.5.2}$$

Segue do Lema 2.5.1 que, para cada decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) de V temos uma bijeção:

$$\varphi_{L_0,L_1} \colon \Lambda^0(L_1) \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0) \tag{2.5.3}$$

dada por $\varphi_{L_0,L_1}(L) = \rho_{L_0,L_1} \circ \phi_{L_0,L_1}(L)$. Obtemos então o seguinte:

COROLÁRIO 2.5.2. *O Grassmanniano de Lagrangeanos Λ é uma subvariedade mergulhada de $G_n(V)$ com dimensão $\dim(\Lambda) = \frac{1}{2}n(n+1)$; as cartas φ_{L_0,L_1} definidas em (2.5.3) formam um atlas diferenciável para Λ, quando (L_0, L_1) percorre todas as decomposições Lagrangeanas de V.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 2.5.1 que, dada uma decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) de V a carta

$$G_n^0(L_1) \ni W \longmapsto \rho_{L_0,L_1} \circ \phi_{L_0,L_1}(W) \in \mathcal{B}(L_0) \tag{2.5.4}$$

de $G_n(V)$ é uma carta de subvariedade para Λ que induz a carta (2.5.3) em Λ; além do mais, $\dim\big(\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)\big) = \frac{1}{2}n(n+1)$. O resultado segue observando que, pelo Corolário 1.4.21, os domínios das cartas (2.5.4) de $G_n(V)$ cobrem Λ, quando (L_0, L_1) percorre todas as decomposições Lagrangeanas de V. □

OBSERVAÇÃO 2.5.3. Segue de (2.5.2) e da Observação 2.2.7 que o subconjunto $\Lambda^0(L_1)$ é aberto em Λ; além do mais, como a carta (2.5.3) é sobrejetora vemos que $\Lambda^0(L_1)$ é homeomorfo (e difeomorfo) ao espaço Euclideano $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$.

Às vezes é útil ter uma fórmula explícita para as funções de transição entre as cartas (2.5.3) do Grassmanniano de Lagrangeanos; temos o seguinte:

LEMA 2.5.4. *Dadas decomposições Lagrangeanas* (L_0, L_1) *e* (L_0', L_1) *de* V *então:*

$$\varphi_{L_0',L_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) = \varphi_{L_0',L_1}(L_0) + \big(\eta^{L_1}_{L_0',L_0}\big)^*(B) \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(L_0'), \tag{2.5.5}$$

para toda $B \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(L_0)$*, onde* $\eta^{L_1}_{L_0',L_0}$ *denota o isomorfismo de* L_0' *sobre* L_0 *determinado pelo complementar comum* L_1 *(vide Definições 2.2.1 e 1.1.3); se* (L_0, L_1') *é também uma decomposição Lagrangeana de* V *então vale:*

$$\varphi_{L_0,L_1'} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) = B \circ \big(\mathrm{Id} + (\pi_0'|_{L_1}) \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B\big)^{-1}, \tag{2.5.6}$$

para toda $B \in \varphi_{L_0,L_1}(\Lambda^0(L_1')) \subset \mathcal{B}_{\text{sim}}(L_0)$*, onde* π_0' *denota a projeção sobre* L_0 *relativa à decomposição* $V = L_0 \oplus L_1'$.

DEMONSTRAÇÃO. Usando (2.2.2) é fácil ver que:

$$\varphi_{L_0',L_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) = \rho_{L_0',L_1} \circ (\pi_1'|_{L_0} + \rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B) \circ \eta^{L_1}_{L_0',L_0}, \tag{2.5.7}$$

onde π_1' denota a projeção sobre L_1 relativa à decomposição $V = L_0' \oplus L_1$; também é fácil mostrar que:

$$\rho_{L_0',L_1} \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} = \big(\eta^{L_1}_{L_0',L_0}\big)^* \colon L_0^* \longrightarrow L_0'^* \tag{2.5.8}$$

e substituindo em (2.5.7) obtemos (vide também (1.1.4)):

$$\varphi_{L_0',L_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) = \rho_{L_0',L_1} \circ (\pi_1'|_{L_0}) \circ \eta^{L_1}_{L_0',L_0} + \big(\eta^{L_1}_{L_0',L_0}\big)^*(B). \tag{2.5.9}$$

Fazendo $B = 0$ em (2.5.9) concluímos que

$$\varphi_{L_0',L_1}(L_0) = \rho_{L_0',L_1} \circ (\pi_1'|_{L_0}) \circ \eta^{L_1}_{L_0',L_0},$$

o que completa a demonstração de (2.5.5).

Usando agora (2.2.3) é fácil ver que:

$$\begin{aligned}&\varphi_{L_0,L_1'} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) = \\ &\qquad \rho_{L_0,L_1'} \circ \eta^{L_0}_{L_1,L_1'} \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B \circ \big(\mathrm{Id} + (\pi_0'|_{L_1}) \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B\big)^{-1};\end{aligned}$$

mas é também fácil mostrar que:

$$\rho_{L_0,L_1'} \circ \eta^{L_0}_{L_1,L_1'} \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} = \mathrm{Id} \colon L_0^* \longrightarrow L_0^*,$$

o que completa a demonstração. □

No seguinte lema mostramos uma fórmula interessante envolvendo as cartas (2.5.3).

LEMA 2.5.5. *Sejam* L_0*,* L_1 *e* L *subespaços Lagrangeanos de* V *dois a dois complementares; valem as seguinte identidades:*

$$\varphi_{L_0,L_1}(L) = -\varphi_{L_0,L}(L_1), \tag{2.5.10}$$

$$\varphi_{L_0,L_1}(L) = -(\rho_{L_1,L_0})^*\big(\varphi_{L_1,L_0}(L)^{-1}\big); \tag{2.5.11}$$

Demonstração. Seja $T = \phi_{L_0,L_1}(L)$; daí $T \in \mathcal{L}(L_0, L_1)$ e $L = \mathrm{Gr}(T)$. Note que $\mathrm{Ker}(T) = L_0 \cap L = \{0\}$ e portanto T é inversível; logo:

$$L_1 = \big\{v + (-v - T(v)) : v \in L_0\big\}$$

e portanto:

$$\phi_{L_0,L}(L_1)\colon L_0 \ni v \longmapsto -v - T(v) \in L.$$

Calculamos agora, para quaisquer $v, w \in L_0$:

$$\varphi_{L_0,L}(L_1) \cdot (v, w) = \omega(-v - T(v), w) = -\omega(T(v), w) = -\varphi_{L_0,L_1}(L) \cdot (v, w),$$

o que completa a demonstração de (2.5.10). Para mostrar (2.5.11) observe que $\phi_{L_1,L_0}(L) = T^{-1}$; daí:

$$\varphi_{L_1,L_0}(L) = \rho_{L_1,L_0} \circ T^{-1}, \quad \varphi_{L_0,L_1}(L) = \rho_{L_0,L_1} \circ T,$$

donde:

$$\varphi_{L_0,L_1}(L) = \rho_{L_0,L_1} \circ \varphi_{L_1,L_0}(L)^{-1} \circ \rho_{L_1,L_0}.$$

A conclusão segue de (1.4.12) e (1.1.4). □

Vamos agora identificar o espaço tangente $T_L\Lambda$ ao Grassmanniano de Lagrangeanos.

Proposição 2.5.6. *Seja $L \in \Lambda$; então o isomorfismo*

$$\mathcal{L}(\mathrm{Id}, \rho_L)\colon \mathcal{L}(L, V/L) \longrightarrow \mathcal{L}(L, L^*) \cong \mathcal{B}(L) \tag{2.5.12}$$

dado por $Z \mapsto \rho_L \circ Z$ leva $T_L\Lambda \subset T_L G_n(V) \cong \mathcal{L}(L, V/L)$ sobre o subespaço $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L) \subset \mathcal{B}(L)$.

Demonstração. Seja L_1 um subespaço Lagrangeano complementar a L (vide Corolário 1.4.21). Como na demonstração do Corolário 2.5.2, a carta

$$G_n^0(L_1) \ni W \longmapsto \rho_{L,L_1} \circ \phi_{L,L_1}(W) \in \mathcal{B}(L) \tag{2.5.13}$$

de $G_n(V)$ é uma carta de subvariedade para Λ que induz a carta φ_{L,L_1} em Λ; daí a diferencial de (2.5.13) no ponto L é um isomorfismo que leva $T_L\Lambda$ sobre $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$. Pelo Lema 2.3.4, a diferencial de ϕ_{L,L_1} no ponto L é $\mathcal{L}\big(\mathrm{Id}, q_1^{-1}\big)$, onde q_1 denota a restrição a L_1 da aplicação quociente sobre V/L; segue do diagrama (1.4.14) que a diferencial de (2.5.13) no ponto L coincide com o isomorfismo (2.5.12). □

Em vista da Proposição 2.5.6, identificaremos *de agora em diante* o espaço tangente $T_L\Lambda$ com $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$. A seguir demonstramos versões do Lema 2.3.4 e das Proposições 2.4.12 e 2.4.13 para o Grassmanniano de Lagrangeanos; nessas demonstrações deve-se manter em mente o isomorfismo (2.5.12) que identifica $T_L\Lambda$ e $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$.

Lema 2.5.7. *Considere uma decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) de V e seja $L \in \Lambda^0(L_1)$; então a diferencial da carta φ_{L_0,L_1} no ponto L é o operador push-forward:*

$$\big(\eta^{L_1}_{L,L_0}\big)_*\colon \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L) \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0),$$

onde $\eta^{L_1}_{L,L_0}$ *denota o isomorfismo de* L *sobre* L_0 *determinado pelo complementar comum* L_1 *(vide Definição 2.2.1).*

DEMONSTRAÇÃO. Diferenciando a igualdade

$$\varphi_{L_0,L_1} = \mathcal{L}(\mathrm{Id}, \rho_{L_0,L_1}) \circ \big(\phi_{L_0,L_1}\big)|_{\Lambda^0(L_1)}$$

no ponto L, usando o Lema 2.3.4 e levando em conta a identificação $T_L\Lambda \cong \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$ através de (2.5.12) obtemos:

$$\mathrm{d}\varphi_{L_0,L_1}(L) = \mathcal{L}\big(\eta^{L_1}_{L_0,L}, \rho_{L_0,L_1} \circ q_1^{-1} \circ \rho_L^{-1}\big)|_{\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)} \colon \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L) \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0),$$

onde q_1 denota a restrição a L_1 da aplicação quociente sobre V/L; mas é fácil ver que[6]:

$$\rho_{L_0,L_1} \circ q_1^{-1} \circ \rho_L^{-1} = \big(\eta^{L_1}_{L_0,L}\big)^*.$$

Isso completa a demonstração (vide também (1.1.5)). □

Obviamente a ação natural de $\mathrm{GL}(V)$ no Grassmanniano $G_n(V)$ se restringe a uma ação do grupo simplético $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ; temos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.5.8. *A ação natural de* $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ *em* Λ *é diferenciável.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente da Proposição 2.4.1 (vide também Observação 2.1.2). □

Calculamos então a diferencial da ação de $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ em Λ.

PROPOSIÇÃO 2.5.9. *Para* $A \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ *considere o difeomorfismo (que é também denotado por* A*) de* Λ *dado por* $L \mapsto A(L)$*. Para* $L \in \Lambda$ *a diferencial* $\mathrm{d}A(L)$ *de* A *no ponto* L *é o operador push-forward:*

$$(A|_L)_* \colon \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L) \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(A(L)).$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando a Proposição 2.4.12 e tendo em mente as identificações $T_L\Lambda \cong \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$ e $T_{A(L)}\Lambda \cong \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(A(L))$, vemos que a diferencial $\mathrm{d}A(L)$ é obtida pela restrição a $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$ da aplicação θ definida pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(L) \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{B}(A(L)) \\
\mathcal{L}(L, V/L) \arrow[u, "\mathcal{L}(\mathrm{Id},\rho_L)"] \arrow[r, "\mathcal{L}\left((A|_L)^{-1},\bar{A}\right)"'] & \mathcal{L}\big(A(L), V/A(L)\big) \arrow[u, "\mathcal{L}\left(\mathrm{Id},\rho_{A(L)}\right)"']
\end{tikzcd}$$

onde $\bar{A}\colon V/L \to V/A(L)$ é induzido de A por passagem ao quociente. Daí:

$$\theta = \mathcal{L}\big((A|_L)^{-1}, \rho_{A(L)} \circ \bar{A} \circ \rho_L^{-1}\big);$$

mas é fácil ver que:

$$\rho_{A(L)} \circ \bar{A} \circ \rho_L^{-1} = (A|_L)^{*-1},$$

[6]Use o diagrama (1.4.14) com L no lugar de L_0 e (2.5.8) com L_0 no lugar de L_0' e L no lugar de L_0.

o que completa a demonstração (vide também (1.1.5)). □

PROPOSIÇÃO 2.5.10. *Para* $L \in \Lambda$ *a diferencial da aplicação*

$$\beta_L \colon \mathrm{Sp}(V, \omega) \longrightarrow \Lambda$$

dada por $\beta_L(A) = A(L)$ *é:*

$$\mathrm{d}\beta_L(A) \cdot X = \omega(X \circ A^{-1} \cdot, \cdot)|_{A(L) \times A(L)},$$

para todos $A \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, $X \in T_A\mathrm{Sp}(V, \omega) = \mathrm{sp}(V, \omega) \cdot A$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue facilmente da Proposição 2.4.13 levando em conta a identificação $T_{A(L)}\Lambda \cong \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(A(L))$ através da restrição do isomorfismo $\mathcal{L}\big(\mathrm{Id}, \rho_{A(L)}\big)$. □

Mostraremos agora que o Grassmanniano de Lagrangeanos se escreve como um quociente do grupo unitário. Seja então J uma estrutura complexa compatível com a forma simplética ω; considere o produto interno correspondente $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ em V e o produto Hermiteano g_{s} em (V, J) definido em (1.4.10). Usando a notação introduzida na Subseção 2.1.1, a Proposição 1.4.22 nos diz que:

$$\mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}}) = \mathrm{O}(V, g) \cap \mathrm{Sp}(V, \omega).$$

Fixamos agora um subespaço Lagrangeano $L_0 \subset V$; pelo Lema 1.4.26, L_0 é uma forma real de (V, J) onde g_{s} é real. Daí g_{s} é a única extensão sesquilinear do produto interno $g|_{L_0 \times L_0}$ em L_0. Como L_0 é uma forma real de (V, J), temos que (V, J) é uma complexificação de L_0 e daí todo endomorfismo $\mathbb{R}$-linear $T \in \mathcal{L}(L_0)$ se estende de modo único a um endomorfismo $\mathbb{C}$-linear $T^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(V, J)$. Da Observação 1.3.19 segue que $T \in \mathcal{L}(L_0)$ é g-ortogonal se e somente se $T^{\mathbb{C}}$ é g_{s}-unitário; obtemos então um homomorfismo injetor de grupos de Lie:

$$\mathrm{O}\big(L_0, g|_{L_0 \times L_0}\big) \ni T \longmapsto T^{\mathbb{C}} \in \mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}}) \tag{2.5.14}$$

cuja imagem é formada exatamente pelos elementos de $\mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}})$ que deixam L_0 invariante (vide Lema 1.3.13). O Corolário 1.4.27 nos diz que o subgrupo $\mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}})$ de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ age transitivamente em Λ; do Corolário 2.1.9 segue então a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.5.11. *Fixado* $L_0 \in \Lambda$ *e uma estrutura complexa* J *compatível com* ω, *então a aplicação*

$$\mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}}) \ni A \longmapsto A(L_0) \in \Lambda$$

induz por passagem ao quociente um difeomorfismo

$$\mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}})/\mathrm{O}\big(L_0, g|_{L_0 \times L_0}\big) \cong \Lambda,$$

onde $\mathrm{O}\big(L_0, g|_{L_0 \times L_0}\big)$ *é identificado com um subgrupo fechado de* $\mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}})$ *através de* (2.5.14). □

Obviamente a escolha de uma base simplética em V induz um difeomorfismo entre o Grassmanniano de Lagrangeanos de (V,ω) e o Grassmanniano de Lagrangeanos de $I\!R^{2n}$ munido de sua forma simplética canônica; obtemos então o seguinte (vide Exemplo 1.4.23):

COROLÁRIO 2.5.12. *O Grassmanniano de Lagrangeanos* Λ *é difeomorfo ao quociente* $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$*; em particular* Λ *é uma variedade compacta e conexa.* □

2.5.1. As subvariedades $\mathbf{\Lambda^k(L_0)}$. Nesta subseção consideramos fixado um espaço simplético (V,ω) com $\dim(V)=2n$ e um subespaço Lagrangeano $L_0\subset V$; definimos:

$$\Lambda^k(L_0)=\big\{L\in\Lambda:\dim(L\cap L_0)=k\big\},$$

para $k=0,1,\ldots,n$. Note que a definição acima é compatível com a definição de $\Lambda^0(L_0)$ dada em (2.5.2). Nosso objetivo é mostrar que $\Lambda^k(L_0)$ é uma subvariedade de Λ e também calcular o espaço tangente dessa subvariedade; mostraremos que $\Lambda^1(L_0)$ tem co-dimensão 1 e possui uma orientação transversa canonicamente induzida por ω.

Denotamos por $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$ o subgrupo fechado do grupo simplético $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ formado pelos simplectomorfismos que preservam L_0:

$$\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)=\big\{A\in\mathrm{Sp}(V,\omega):A(L_0)=L_0\big\}. \tag{2.5.15}$$

É fácil ver que a álgebra de Lie $\mathrm{sp}(V,\omega,L_0)$ de $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$ é dada por (vide (2.1.5)):

$$\mathrm{sp}(V,\omega,L_0)=\big\{X\in\mathrm{sp}(V,\omega):X(L_0)\subset L_0\big\}.$$

No próximo lema calculamos essa álgebra de Lie mais explicitamente:

LEMA 2.5.13. *A álgebra de Lie* $\mathrm{sp}(V,\omega,L_0)$ *consiste dos endomorfismos lineares* $X\in\mathcal{L}(V)$ *tais que* $\omega(X\cdot,\cdot)$ *é uma forma bilinear simétrica que se anula em vetores de* L_0.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da caracterização de $\mathrm{sp}(V,\omega)$ dada na Subseção 2.1.1 (vide (2.1.6)), observando que $\omega(X\cdot,\cdot)|_{L_0\times L_0}=0$ se e somente se $X(L_0)$ está contido no complemento ortogonal $L_0^\perp$ de L_0 relativo a ω; mas $L_0^\perp=L_0$. □

É claro que a ação de $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$ em Λ deixa cada subconjunto $\Lambda^k(L_0)$ invariante; além do mais, da Proposição 1.4.39 segue que $\Lambda^k(L_0)$ é uma órbita da ação de $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$. Nossa estratégia é utilizar o Teorema 2.1.12 para concluir que $\Lambda^k(L_0)$ é uma subvariedade mergulhada de Λ; devemos mostrar então que $\Lambda^k(L_0)$ é um subconjunto localmente fechado de Λ (vide Definição 2.1.11).

Para cada $k=0,1,\ldots,n$ definimos:

$$\Lambda^{\ge k}(L_0)=\bigcup_{i=k}^n\Lambda^i(L_0),\quad \Lambda^{\le k}(L_0)=\bigcup_{i=0}^k\Lambda^i(L_0).$$

Temos o seguinte lema:

LEMA 2.5.14. *Para todo $k = 0, 1, \ldots, n$ o subconjunto $\Lambda^{\le k}(L_0)$ é aberto e o subconjunto $\Lambda^{\ge k}(L_0)$ é fechado em Λ.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 2.4.8 que o conjunto dos espaços $W \in G_n(V)$ tais que $\dim(W \cap L_0) \le k$ é aberto em $G_n(V)$; como Λ tem a topologia induzida de $G_n(V)$ segue que $\Lambda^{\le k}(L_0)$ é aberto em Λ. Como $\Lambda^{\ge k}(L_0)$ é o complementar de $\Lambda^{\le k-1}(L_0)$ a conclusão segue. $\square$

COROLÁRIO 2.5.15. *Para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ o subconjunto $\Lambda^k(L_0)$ é localmente fechado em Λ.*

DEMONSTRAÇÃO. Observe que $\Lambda^k(L_0) = \Lambda^{\le k}(L_0) \cap \Lambda^{\ge k}(L_0)$. $\square$

Como corolário, obtemos o resultado principal da subseção.

TEOREMA 2.5.16. *Para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ temos que $\Lambda^k(L_0)$ é uma subvariedade mergulhada de co-dimensão $\frac{1}{2}k(k+1)$ em Λ; seu espaço tangente é dado por:*

$$T_L\Lambda^k(L_0) = \big\{B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L) : B|_{(L_0\cap L)\times(L_0\cap L)} = 0\big\}, \tag{2.5.16}$$

para todo $L \in \Lambda^k(L_0)$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Proposição 1.4.39 que $\Lambda^k(L_0)$ é uma órbita da ação de $\mathrm{Sp}(V, \omega, L_0)$ em Λ; do Teorema 2.1.12 e do Corolário 2.5.15 segue que $\Lambda^k(L_0)$ é uma subvariedade mergulhada de Λ. Resta demonstrar (2.5.16), pois daí

$$T_L\Lambda \cong \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L) \ni B \longmapsto B|_{(L_0\cap L)\times(L_0\cap L)} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0 \cap L) \tag{2.5.17}$$

é um operador linear sobrejetor cujo núcleo é $T_L\Lambda^k(L_0)$ e a afirmação sobre a co-dimensão de $\Lambda^k(L_0)$ em Λ seguirá.

Das Proposições 2.1.7, 2.5.10 e do Lema 2.5.13 segue que:

$$T_L\Lambda^k(L_0) = \big\{B|_{L\times L} : B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V),\ B|_{L_0\times L_0} = 0\big\},$$

para todo $L \in \Lambda^k(L_0)$. Resta ver então que toda forma bilinear simétrica $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$ que se anula em vetores de $L \cap L_0$ se estende a uma forma bilinear simétrica em V que se anula em vetores de L_0. Para isso, considere uma base (não necessariamente simplética) $(b_i)_{i=1}^{2n}$ de V tal que $(b_i)_{i=1}^{n}$ é uma base de L_0 e $(b_i)_{i=n-k+1}^{2n-k}$ é uma base de L; defina a extensão de B fazendo $B(b_i, b_j) = 0$ se i ou j estão fora de $\{n-k+1, \ldots, 2n-k\}$. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.5.17. Usando a Observação 1.4.41 vemos que na verdade $\Lambda^k(L_0)$ é uma órbita do grupo de Lie $\mathrm{Sp}_+(V, \omega, L_0)$ formado pelos simplectomorfismos T de (V, ω) que se restringem a um isomorfismo positivamente orientado de L_0; veremos no Exemplo 3.2.36 que $\mathrm{Sp}_+(V, \omega, L_0)$ é difeomorfo ao produto $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$ e é portanto um grupo conexo. Segue então que as variedades $\Lambda^k(L_0)$ também são conexas.

OBSERVAÇÃO 2.5.18. Segue do Teorema 2.5.16 que $\Lambda^0(L_0)$ é um aberto denso em Λ; de fato, seu complementar $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ é união finita de subvariedades de codimensão positiva, todas portanto tendo medida nula. Segue na verdade que dada uma seqüência $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subespaços Lagrangeanos de V então o conjunto

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Lambda^0(L_i) = \big\{L \in \Lambda : L \cap L_i = \{0\},\ \forall i \in \mathbb{N}\big\}$$

é denso em Λ, pois seu complementar é união enumerável de conjuntos de medida nula. A mesma conclusão pode ser obtida usando o *Teorema de Baire* no lugar dos argumentos envolvendo medida.

Estamos agora em condições de definir uma orientação transversa para $\Lambda^1(L_0)$ em Λ. Recorde que se M é uma variedade e N é uma subvariedade de M então uma *orientação transversa* para N em M é uma orientação no *fibrado normal* $\mathfrak{i}^*(TM)/TN$, onde $\mathfrak{i}$ denota a inclusão de N em M; mais explicitamente, uma orientação transversa para N em M é uma escolha de orientação no espaço T_nM/T_nN que depende continuamente de $n \in N$[7].

Observe que para cada $L \in \Lambda^k(L_0)$ a aplicação (2.5.17) passa ao quociente e define um isomorfismo:

$$T_L\Lambda/T_L\Lambda^k(L_0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0 \cap L). \tag{2.5.18}$$

DEFINIÇÃO 2.5.19. Para cada $L \in \Lambda^1(L_0)$ definimos uma orientação no quociente $T_L\Lambda/T_L\Lambda^1(L_0)$ da seguinte forma:

- orientamos o espaço unidimensional $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0 \cap L)$ declarando que $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0 \cap L)$ é uma base positivamente orientada se $B(v, v) > 0$ para algum (e logo para todo) $v \in L_0 \cap L$ não nulo;
- consideramos a única orientação em $T_L\Lambda/T_L\Lambda^1(L_0)$ que torna o isomorfismo (2.5.18) positivamente orientado.

PROPOSIÇÃO 2.5.20. *A orientação escolhida na Definição 2.5.19 para o espaço $T_L\Lambda/T_L\Lambda^1(L_0)$ faz de $\Lambda^1(L_0)$ uma subvariedade transversalmente orientada em Λ; essa orientação transversa é invariante pela ação de $\mathrm{Sp}(V, \omega, L_0)$, ou seja, para todo $A \in \mathrm{Sp}(V, \omega, L_0)$ e para todo $L \in \Lambda^1(L_0)$ o isomorfismo*

$$T_L\Lambda/T_L\Lambda^1(L_0) \longrightarrow T_{A(L)}\Lambda/T_{A(L)}\Lambda^1(L_0)$$

induzido de $\mathrm{d}A(L)$ por passagem ao quociente é positivamente orientado.

---

[7]A dependência contínua em questão significa que numa vizinhança aberta $U \subset N$ de cada ponto de N existem aplicações contínuas $X_i\colon U \to TM$, $i = 1, \ldots, r$, tais que $(X_i(n) + T_nN)_{i=1}^r$ é uma *base positivamente orientada* de T_nM/T_nN para todo $n \in U$. Na verdade, se existem aplicações contínuas X_i com tal propriedade então podemos substituí-las por aplicações diferenciáveis X_i que satisfazem a mesma condição.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Proposição 2.5.9 que a diferencial $\mathrm{d}A(L)$ coincide com o operador de push-forward $(A|_L)_*$; portanto o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{CD} T_L\Lambda @>{\mathrm{d}A(L)}>> T_{A(L)}\Lambda \\ @VVV @VVV \\ \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L\cap L_0) @>>{(A|_{L\cap L_0})_*}> \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(A(L)\cap L_0) \end{CD} \tag{2.5.19}$$

onde as flechas verticais são operadores de restrição de formas bilineares. Como o push-forward de uma forma definida positiva é ainda definida positiva, segue facilmente do diagrama (2.5.19) que a orientação dada na Definição 2.5.19 é $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$-invariante. A dependência contínua de tal orientação em relação a $L\in\Lambda^1(L_0)$ segue da sua $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$-invariância e do fato que a ação de $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$ em $\Lambda^1(L_0)$ é transitiva[8]. □

OBSERVAÇÃO 2.5.21. Se $A\in\mathrm{Sp}(V,\omega)$ é um simplectomorfismo com $A(L_0)=L_0'$ então segue como na demonstração da Proposição 2.5.20 que o isomorfismo

$$T_L\Lambda/T_L\Lambda^1(L_0)\longrightarrow T_{A(L)}\Lambda/T_{A(L)}\Lambda^1(L_0')$$

induzido de $\mathrm{d}A(L)$ por passagem ao quociente é positivamente orientado para todo $L\in\Lambda^1(L_0)$; para ver isso basta trocar L_0 por L_0' na coluna à direita do diagrama (2.5.19).

[8]A orientação transversa em questão pode ser vista como uma seção $\mathcal{O}$ do fibrado ($\mathbb{Z}_2$-principal) sobre $\Lambda^1(L_0)$ cuja fibra sobre o ponto $L\in\Lambda^1(L_0)$ é o conjunto formado pelas duas orientações possíveis em $T_L\Lambda/T_L\Lambda^1(L_0)$; desse ponto de vista, a $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$-invariância dessa orientação transversa significa que a aplicação $\mathcal{O}$ é $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$-equivariante. A diferenciabilidade de $\mathcal{O}$ segue então do Corolário 2.1.10.

CAPÍTULO 3

Tópicos de Topologia Algébrica

3.1. O Grupóide e o Grupo Fundamental

Fazemos nesta seção uma breve exposição da definição e das propriedades elementares do grupóide e do grupo fundamental de um espaço topológico X. Denotaremos sempre por I o intervalo fechado unitário $[0,1]$ e por $\mathcal{C}(Y,Z)$ o conjunto das aplicações contínuas $f\colon Y \to Z$ entre dois espaços topológicos quaisquer Y, Z; uma *curva* $\gamma\colon [a,b] \to X$ significará sempre uma aplicação *contínua* do intervalo $[a,b]$ no espaço topológico X (onde $a < b$).

Começamos com uma definição geral.

Definição 3.1.1. Se Y, Z são espaços topológicos, dizemos que duas aplicações $f,g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ são *homotópicas* quando existe uma função contínua

$$H\colon I \times Y \longrightarrow Z$$

tal que $H(0,y) = f(y)$ e $H(1,y) = g(y)$ para todo $y \in Y$; dizemos então que H é uma *homotopia* entre f e g e escrevemos $H\colon f \cong g$. Para $s \in I$, denotamos por $H_s\colon Y \to Z$ a função $H_s(y) = H(s,y)$.

Intuitivamente então, uma homotopia $H\colon f \cong g$ é uma *família a um parâmetro* $(H_s)_{s\in I}$ em $\mathcal{C}(Y,Z)$ que deforma continuamente $H_0 = f$ até $H_1 = g$.

No nosso contexto, a seguinte definição é mais interessante.

Definição 3.1.2. Sejam $\gamma,\mu\colon [a,b] \to X$ curvas num espaço topológico X; dizemos que γ *é homotópica a* μ *com extremos fixos* quando existe uma homotopia $H\colon \gamma \cong \mu$ tal que $H(s,a) = \gamma(a) = \mu(a)$ e $H(s,b) = \gamma(b) = \mu(b)$ para todo $s \in I$; dizemos então que H é uma *homotopia com extremos fixos* entre γ e μ.

É claro que duas curvas $\gamma,\mu\colon [a,b] \to X$ só podem ser homotópicas com extremos fixos se elas possuem os mesmo extremos, i.e., se $\gamma(a) = \mu(a)$ e $\gamma(b) = \mu(b)$; numa homotopia H com extremos fixos as curvas intermediárias H_s devem possuir os mesmos extremos que γ e μ.

É fácil ver que as relações "f é homotópica a g" e "γ é homotópica a μ com extremos fixos" são relações de equivalência em $\mathcal{C}(Y,Z)$ e em $\mathcal{C}([a,b],X)$ respectivamente.

Até o final desta seção, consideramos fixo um espaço topológico X. Denotamos por $\Omega(X)$ o conjunto das curvas $\gamma\colon I \to X$, ou seja:

$$\Omega(X) = \mathcal{C}(I,X).$$

Para $\gamma \in \Omega(X)$ denotamos por $[\gamma]$ a *classe de equivalência de curvas homotópicas a* γ *com extremos fixos*; denotamos então por $\overline{\Omega}(X)$ o conjunto quociente:

$$\overline{\Omega}(X) = \big\{[\gamma] : \gamma \in \Omega(X)\big\}.$$

Se γ, $\mu \in \Omega(X)$ são tais que $\gamma(1) = \mu(0)$ definimos a *concatenação* de γ e μ fazendo:

$$(\gamma \cdot \mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \mu(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Desse modo, $(\gamma, \mu) \mapsto \gamma \cdot \mu$ define uma *operação binária parcial* no conjunto $\Omega(X)$. Para $\gamma \in \Omega(X)$ definimos $\gamma^{-1} \in \Omega(X)$ fazendo:

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t), \quad t \in I.$$

Para cada ponto $x \in X$ denotamos por $\mathfrak{o}_x \in \Omega(X)$ a curva constante igual a x:

$$\mathfrak{o}_x(t) = x, \quad t \in I.$$

Não é difícil mostrar que se $\gamma(1) = \mu(0)$, $[\gamma] = [\gamma_1]$ e $[\mu] = [\mu_1]$ então $\gamma_1(1) = \mu_1(0)$ e:

$$[\gamma \cdot \mu] = [\gamma_1 \cdot \mu_1], \quad \big[\gamma^{-1}\big] = \big[\gamma_1^{-1}\big].$$

Essas identidades mostram que as operações $(\gamma, \mu) \mapsto \gamma \cdot \mu$ e $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ *passam ao quociente* e definem operações no conjunto $\overline{\Omega}(X)$; definimos então:

$$[\gamma] \cdot [\mu] = [\gamma \cdot \mu], \quad [\gamma]^{-1} = \big[\gamma^{-1}\big].$$

A classe de homotopia $[\gamma]$ de uma curva γ é invariante por reparametrização:

LEMA 3.1.3. *Seja* $\gamma \in \Omega(X)$ *uma curva e considere uma* reparametrização $\gamma \circ \sigma$ *de* γ, *onde* $\sigma \colon I \to I$ *é uma aplicação contínua. Então, se* $\sigma(0) = 0$ *e* $\sigma(1) = 1$ *temos que* $[\gamma] = [\gamma \circ \sigma]$; *se* $\sigma(0) = \sigma(1)$ *então* $\gamma \circ \sigma$ *é homotópica com extremos fixos a uma curva constante, i.e.,* $[\gamma \circ \sigma] = \big[\mathfrak{o}_{\gamma(\sigma(0))}\big]$.

DEMONSTRAÇÃO. Defina $H(s,t) = \gamma\big((1-s)t + s\,\sigma(t)\big)$ para provar a primeira afirmação e $H(s,t) = \gamma\big((1-s)\sigma(t) + s\,\sigma(0)\big)$ para provar a segunda. □

OBSERVAÇÃO 3.1.4. Em alguns casos desejaremos considerar classes de homotopia de curvas $\gamma \colon [a,b] \to X$ que estão definidas num intervalo fechado arbitrário $[a,b]$ (e não no intervalo unitário I); nesse caso, entenderemos por $[\gamma] \in \overline{\Omega}(X)$ a classe de homotopia com extremos fixos da *reparametrização afim* de γ dada por:

$$I \ni t \longmapsto \gamma\big((b-a)t + a\big) \in X; \tag{3.1.1}$$

segue do Lema 3.1.3 que (3.1.1) é homotópica com extremos fixos a qualquer reparametrização $\gamma \circ \sigma$ de γ, onde $\sigma \colon I \to [a,b]$ é uma aplicação contínua tal que $\sigma(0) = a$ e $\sigma(1) = b$.

Também, se $\gamma\colon [a,b] \to X$ e $\mu\colon [a',b'] \to X$ são curvas tais que $\gamma(b) = \mu(a')$ então definimos a *concatenação* $\gamma \cdot \mu$ de γ com μ como sendo a concatenação das correspondentes reparametrizações afins de γ e μ definidas no intervalo unitário I.

COROLÁRIO 3.1.5. *Dadas* γ, μ, $\kappa \in \Omega(X)$ *com* $\gamma(1) = \mu(0)$ *e* $\mu(1) = \kappa(0)$ *então:*

$$\big([\gamma] \cdot [\mu]\big) \cdot [\kappa] = [\gamma] \cdot \big([\mu] \cdot [\kappa]\big). \tag{3.1.2}$$

Além do mais, para $\gamma \in \Omega(X)$ *vale:*

$$[\gamma] \cdot [\mathfrak{o}_{\gamma(1)}] = [\gamma], \quad [\mathfrak{o}_{\gamma(0)}] \cdot [\gamma] = [\gamma] \tag{3.1.3}$$

e também:

$$[\gamma] \cdot [\gamma]^{-1} = [\mathfrak{o}_{\gamma(0)}], \quad [\gamma]^{-1} \cdot [\gamma] = [\mathfrak{o}_{\gamma(1)}]. \tag{3.1.4}$$

DEMONSTRAÇÃO. A identidade (3.1.2) segue da observação que $(\gamma \cdot \mu) \cdot \kappa$ é uma reparametrização de $\gamma \cdot (\mu \cdot \kappa)$ através de uma aplicação contínua $\sigma\colon I \to I$ com $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = 1$; analogamente, as identidades em (3.1.3) seguem observando que $\gamma \cdot \mathfrak{o}_{\gamma(1)}$ e $\mathfrak{o}_{\gamma(0)} \cdot \gamma$ são reparametrizações de γ através de uma aplicação σ com $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = 1$. A primeira identidade em (3.1.4) segue do fato que $\gamma \cdot \gamma^{-1} = \gamma \circ \sigma$ onde $\sigma\colon I \to I$ satisfaz $\sigma(0) = \sigma(1) = 0$; a segunda identidade em (3.1.4) segue de forma análoga. □

A identidade (3.1.2) nos diz que a concatenação é *associativa* em $\overline{\Omega}(X)$, quando todos os produtos envolvidos estão bem definidos; as identidades em (3.1.3) dizem que, em certo sentido, as classes $[\mathfrak{o}_x]$, $x \in X$, funcionam como *elementos neutros* para a operação de concatenação e as identidades em (3.1.4) dizem que a classe $[\gamma]^{-1}$ funciona como um *elemento inverso* para $[\gamma]$ relativo a concatenação.

Fixado um ponto $x_0 \in X$, denotamos por $\Omega_{x_0}(X)$ o conjunto dos *laços em* X *com ponto base* x_0:

$$\Omega_{x_0}(X) = \big\{\gamma \in \Omega(X) : \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\big\}.$$

Consideramos também a imagem de $\Omega_{x_0}(X)$ no conjunto quociente $\overline{\Omega}(X)$, denotada por:

$$\pi_1(X, x_0) = \big\{[\gamma] : \gamma \in \Omega_{x_0}(X)\big\}.$$

A operação binária (parcialmente definida) de concatenação em $\overline{\Omega}(X)$ se restringe então a uma operação binária (totalmente definida) em $\pi_1(X, x_0)$; do Corolário 3.1.5 segue o seguinte:

TEOREMA 3.1.6. *O conjunto* $\pi_1(X, x_0)$ *munido da operação de concatenação é um grupo.* □

Temos agora a definição principal desta seção.

DEFINIÇÃO 3.1.7. O conjunto $\overline{\Omega}(X)$ munido da operação binária (parcialmente definida) de concatenação é chamado o *grupóide fundamental* do espaço topológico X. Para cada $x_0 \in X$ o grupo $\pi_1(X, x_0)$ (sob concatenação) é chamado o *grupo fundamental de X com ponto base x_0*.

OBSERVAÇÃO 3.1.8. Um *grupóide* é normalmente definido como uma categoria pequena (i.e., cuja classe de objetos é um conjunto) na qual todo morfismo é um isomorfismo; não será importante nesse texto a noção abstrata de grupóide, mas o Corolário 3.1.5 mostra que o grupóide fundamental de um espaço X é realmente um grupóide no sentido abstrato.

OBSERVAÇÃO 3.1.9. Se $X_0 \subset X$ é a componente conexa por arcos de X contendo x_0 então $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_0, x_0)$, já que todo laço em X com ponto base x_0 tem imagem contida em X_0, assim como toda homotopia entre tais laços tem imagem contida em X_0.

O grupóide e o grupo fundamental podem ser vistos como funtores; temos o seguinte:

LEMA 3.1.10. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação contínua; para $\gamma \in \Omega(X)$, a classe de homotopia $[f \circ \gamma]$ depende apenas da classe de homotopia $[\gamma]$ de γ e portanto fica bem definida a aplicação*

$$f_*\colon \overline{\Omega}(X) \longrightarrow \overline{\Omega}(Y)$$

dada por $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Para $\gamma, \mu \in \Omega(X)$ com $\gamma(1) = \mu(0)$ e para todo $x_0 \in X$ valem as identidades:

$$f_*([\gamma] \cdot [\mu]) = f_*([\gamma]) \cdot f_*([\mu]), \quad f_*\big([\gamma]^{-1}\big) = f_*([\gamma])^{-1}, \quad f_*([\mathfrak{o}_{x_0}]) = [\mathfrak{o}_{f(x_0)}].$$

Em particular, se $f(x_0) = y_0$ então f_* se restringe a uma aplicação

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

que é um homomorfismo de grupos. □

É claro que dadas $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ então:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*,$$

e que se Id denota a identidade de X então Id_* é a identidade de $\overline{\Omega}(X)$; segue que se $f\colon X \to Y$ é um homeomorfismo então f_* é uma bijeção e induz um isomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(Y, f(x_0))$. A aplicação f_* é dita *induzida* por f no grupóide (ou no grupo) fundamental.

A seguinte proposição relaciona os grupos fundamentais relativos a pontos base diferentes.

PROPOSIÇÃO 3.1.11. *Dados $x_0, x_1 \in X$ e fixada uma curva $\lambda\colon I \to X$ com $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda(1) = x_1$ obtemos um isomorfismo:*

$$\lambda_\#\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

definido por $\lambda_\#([\gamma]) = [\lambda]^{-1} \cdot [\gamma] \cdot [\lambda]$, para toda $\gamma \in \Omega_{x_0}(X)$. □

COROLÁRIO 3.1.12. *Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por arcos de X então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.* □

O seguinte diagrama comutativo relaciona os homomorfismos f_* e $\lambda_\#$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \lambda_\# \big\downarrow & & \big\downarrow (f\circ\lambda)_\# \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow[f_*]{} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

onde $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $x_0, x_1 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ e $\lambda \in \Omega(X)$ é uma curva de x_0 a x_1.

Observação 3.1.13. Apesar de $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ serem isomorfos quando x_0 e x_1 estão na mesma componente conexa por arcos de X, tal isomorfismo *não* é canônico; mais explicitamente, se $\lambda_0, \lambda_1 \in \Omega(X)$ são duas curvas de x_0 a x_1 então:

$$(\lambda_1)_\#^{-1} \circ (\lambda_0)_\# = \mathcal{I}_{[\lambda]},$$

onde $\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_0^{-1}$ e $\mathcal{I}_{[\lambda]}$ denota o operador de conjugação pelo elemento $[\lambda]$ em $\pi_1(X, x_0)$. Quando $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, no entanto, segue que $(\lambda_0)_\# = (\lambda_1)_\#$ e portanto os grupos fundamentais com pontos base na mesma componente conexa por arcos podem ser todos canonicamente identificados.

Definição 3.1.14. Dizemos que o espaço topológico X é *simplesmente conexo* quando X for conexo por arcos e $\pi_1(X, x_0)$ for o grupo trivial $\{[\mathfrak{o}_{x_0}]\}$ para algum (e portanto para todo) $x_0 \in X$.

Observe que se X é simplesmente conexo então $[\gamma] = [\mu]$ sempre que $\gamma(0) = \mu(0)$ e $\gamma(1) = \mu(1)$; de fato, nesse caso $[\gamma] \cdot [\mu]^{-1} = [\mathfrak{o}_{\gamma(0)}]$.

Exemplo 3.1.15. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito *estrelado* no ponto $x_0 \in X$ se para todo $x \in X$ o segmento

$$[x_0, x] = \big\{(1-t)x_0 + tx : t \in I\big\}$$

está contido em X; dizemos que X é *convexo* quando for estrelado em qualquer um de seus pontos. Se X é estrelado em x_0 então X é simplesmente conexo; de fato, X é obviamente conexo por arcos e dado um laço $\gamma \in \Omega_{x_0}(X)$ definimos uma homotopia

$$I \times I \ni (s, t) \mapsto (1-s)\gamma(t) + s\,x_0 \in X$$

entre γ e $\mathfrak{o}_{x_0}$.

Observação 3.1.16. Dois laços $\gamma \in \Omega_{x_0}(X)$ e $\mu \in \Omega_{x_1}(X)$ são ditos *livremente homotópicos* se existe uma homotopia $H\colon \gamma \cong \mu$ tal que para todo $s \in I$ a curva H_s é um laço em X, i.e., $H(s, 0) = H(s, 1)$; dizemos nesse caso que H é uma *homotopia livre* entre os laços γ e μ. Defina $\lambda(s) = H(s, 0)$; temos a identidade:

$$\lambda_\#([\gamma]) = [\mu]. \tag{3.1.5}$$

A identidade (3.1.5) segue do fato que, como o quadrado $I \times I$ é convexo, a classe de homotopia em $\overline{\Omega}(I \times I)$ do laço que percorre a fronteira de $I \times I$

(no sentido anti-horário) é trivial e portanto sua imagem por H_* também o é; mas essa imagem é precisamente a diferença entre os dois lados de (3.1.5).

Em particular, se $\gamma, \mu \in \Omega_{x_0}(X)$ são livremente homotópicos então $[\gamma], [\mu] \in \pi_1(X, x_0)$ são *conjugados*; segue que $\gamma \in \Omega_{x_0}(X)$ é tal que $[\gamma] = [\mathfrak{o}_{x_0}]$ se e somente se γ é livremente homotópico a um laço constante. Mostramos então que *um espaço conexo por arcos X é simplesmente conexo se e somente se todo laço em X é livremente homotópico a um laço constante.*

EXEMPLO 3.1.17. Um espaço topológico X é dito *contrátil* se a aplicação identidade de X é homotópica a uma aplicação constante, i.e., se existe uma aplicação contínua $H\colon I \times X \to X$ e $x_0 \in X$ tal que $H(0, x) = x$ e $H(1, x) = x_0$ para todo $x \in X$. Por exemplo, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é estrelado em x_0 então X é contrátil; basta considerar a homotopia $H(s, x) = (1 - s)x + s\,x_0$.

É fácil ver que todo espaço contrátil X é conexo por arcos. Além do mais, se X é contrátil então X é simplesmente conexo; de fato, se $H\colon \mathrm{Id} \cong x_0$ é uma homotopia e $\gamma \in \Omega(X)$ é um laço então $(s, t) \mapsto H(s, \gamma(t))$ é uma homotopia livre entre γ e o laço constante $\mathfrak{o}_{x_0}$ (vide Observação 3.1.16).

3.1.1. Estabilidade da classe de homotopia de uma curva. Mostraremos nesta subseção que, sob hipóteses razoáveis para o espaço X, temos $[\gamma] = [\mu]$ sempre que γ for uma curva "próxima" a μ; começamos com a definição de "proximidade".

DEFINIÇÃO 3.1.18. Sejam Y, Z espaços topológicos; para cada $K \subset Y$ compacto e cada $U \subset Z$ aberto definimos:

$$\mathcal{V}(K; U) = \big\{ f \in \mathcal{C}(Y, Z) : f(K) \subset U \big\}.$$

A *topologia compacto-aberta* em $\mathcal{C}(Y, Z)$ é a topologia gerada pelos conjuntos $\mathcal{V}(K; U)$ com $K \subset Y$ compacto e $U \subset Y$ aberto; mais explicitamente, um aberto da topologia compacto-aberta é uma união arbitrária de interseções da forma:

$$\mathcal{V}(K_1; U_1) \cap \ldots \cap \mathcal{V}(K_n; U_n)$$

com cada $K_i \subset Y$ compacto e cada $U_i \subset Z$ aberto, $i = 1, \ldots, n$.

OBSERVAÇÃO 3.1.19. Quando a topologia de Z é proveniente de uma métrica d, a topologia compacto-aberta em $\mathcal{C}(Y, Z)$ é também chamada a *topologia da convergência uniforme sobre compactos*; nesse caso, não é difícil mostrar que obtêm-se um sistema fundamental de vizinhanças (abertas) para uma função $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ considerando:

$$\mathcal{V}(f; K, \varepsilon) = \Big\{ g \in \mathcal{C}(Y, Z) : \sup_{y \in K} d\big(f(y), g(y)\big) < \varepsilon \Big\},$$

onde $K \subset Y$ é um compacto qualquer e $\varepsilon > 0$. Nessa topologia, a convergência de uma seqüência $f_n \to f$ (ou de uma rede) é equivalente à convergência uniforme sobre cada compacto (vide [**35**, Proposição 19, §8, Capítulo 9]).

No contexto da topologia diferencial, se Y e Z são variedades (possivelmente com bordo), a topologia compacto-aberta em $\mathcal{C}(Y, Z)$ é também conhecida como a *topologia* C^0 ou como a *topologia* C^0*-fraca de Whitney* (vide [**26**]).

OBSERVAÇÃO 3.1.20. A toda aplicação $f\colon X \times Y \to Z$, contínua na segunda variável, corresponde uma aplicação:

$$\tilde{f}\colon X \longrightarrow \mathcal{C}(Y, Z);$$

uma propriedade interessante (e fácil de mostrar) da topologia compacto-aberta em $\mathcal{C}(Y, Z)$ é que, se Y é Hausdorff, a continuidade de $\tilde{f}$ é equivalente à continuidade de $f|_{X\times K}$ para todo compacto $K \subset Y$ (vide [**35**, Proposição 21, §8, Capítulo 9]). Em particular, se Y é localmente compacto Hausdorff, a continuidade de f e a continuidade de $\tilde{f}$ são equivalentes.

Definimos agora as condições de "plausibilidade" sobre o espaço X que nos permitirão mostrar a estabilidade da classe de homotopia.

DEFINIÇÃO 3.1.21. Dizemos que o espaço X é *localmente conexo por arcos* se todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças abertas e conexas por arcos, i.e., se dado $x \in X$ e uma vizinhança V de x em X, existe um aberto conexo por arcos $U \subset X$ com $x \in U \subset V$.

Dizemos que X é *semi-localmente simplesmente conexo* quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que todo laço em V é contrátil em X, i.e., dada $\gamma \in \Omega(X)$ com $\gamma(0) = \gamma(1)$ e $\mathrm{Im}(\gamma) \subset V$ então γ é homotópica (em X) com extremos fixos a uma curva constante.

EXEMPLO 3.1.22. Se todo ponto de X tem uma vizinhança simplesmente conexa então X é semi-localmente simplesmente conexo; em particular, toda variedade diferenciável (ou mesmo topológica) é localmente conexa por arcos e semi-localmente simplesmente conexa.

Mostramos agora o teorema principal da subseção.

TEOREMA 3.1.23. *Seja X um espaço topológico localmente conexo por arcos e semi-localmente simplesmente conexo; dada uma curva $\gamma\colon I \to X$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de γ no espaço $\mathcal{C}(I, X)$ munido da topologia compacto-aberta, de modo que para toda $\mu \in \mathcal{U}$, se $\mu(0) = \gamma(0)$ e $\mu(1) = \gamma(1)$ então $[\gamma] = [\mu]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, onde cada $U_\alpha \subset X$ é aberto e de modo que todo laço em U_α é contrátil em X; daí as imagens inversas $\gamma^{-1}(U_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, formam uma cobertura aberta do compacto I, a qual possui um *número de Lebesgue* $\delta > 0$, i.e., todo subconjunto de I com diâmetro menor que δ está contido em algum $\gamma^{-1}(U_\alpha)$ (vide [**34**, Capítulo 8, §7]).

Seja $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ uma partição de I com $t_{r+1} - t_r < \delta$ para todo $r = 0, \ldots, k-1$ e seja $\alpha_r \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma([t_r, t_{r+1}]) \subset U_{\alpha_r}$. Para cada $r = 1, \ldots, k-1$, o ponto $\gamma(t_r) \in U_{\alpha_{r-1}} \cap U_{\alpha_r}$ possui uma vizinhança aberta e conexa por arcos V_r contida na interseção $U_{\alpha_{r-1}} \cap U_{\alpha_r}$; defina a vizinhança $\mathcal{U}$ de γ em $\mathcal{C}(I, X)$ por:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{r=0}^{k-1} \mathcal{V}([t_r, t_{r+1}]; U_{\alpha_r}) \ \cap \ \bigcap_{r=1}^{k-1} \mathcal{V}(\{t_r\}; V_r).$$

Daí $\gamma \in \mathcal{U}$. Seja $\mu \in \mathcal{U}$ tal que $\mu(0) = \gamma(0)$ e $\mu(1) = \gamma(1)$; devemos mostrar que $[\gamma] = [\mu]$.

Para cada $r = 1, \dots, k-1$ escolha uma curva $\lambda_r \in \Omega(V_r)$ com $\lambda_r(0) = \gamma(t_r)$ e $\lambda_r(1) = \mu(t_r)$; faça $\lambda_0 = \mathfrak{o}_{\gamma(0)}$ e $\lambda_k = \mathfrak{o}_{\gamma(1)}$. Para $r = 0, \dots, k-1$, temos (vide Observação 3.1.4):

$$\big[\mu|_{[t_r, t_{r+1}]}\big] = [\lambda_r]^{-1} \cdot \big[\gamma|_{[t_r, t_{r+1}]}\big] \cdot [\lambda_{r+1}], \tag{3.1.6}$$

pois o lado direito de (3.1.6) concatenado com o inverso do lado esquerdo de (3.1.6) é a classe de homotopia de um laço em U_{α_r}; além do mais:

$$\begin{aligned} [\mu] &= \big[\mu|_{[t_0, t_1]}\big] \cdot \cdots \cdot \big[\mu|_{[t_{k-1}, t_k]}\big], \\ [\gamma] &= \big[\gamma|_{[t_0, t_1]}\big] \cdot \cdots \cdot \big[\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}\big]. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

A conclusão segue agora de (3.1.7) juntando por concatenação de curvas em ambos os lados as identidades em (3.1.6) para $r = 0, \dots, k-1$. □

Exemplo 3.1.24. Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n-dimensional. Segue do Teorema 3.1.23 (ou de sua demonstração) que toda curva $\gamma \colon I \to S^n$ é homotópica com extremos fixos a uma curva de classe C^1 por partes; se $n \geq 2$, uma tal curva não pode ser sobrejetora, já que sua imagem tem medida nula em S^n. Daí se $n \geq 2$ e $\gamma \colon I \to S^n$ é um laço de classe C^1 por partes, existe $x \in S^n$ tal que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset S^n \setminus \{x\}$; mas por projeção estereográfica vemos que $S^n \setminus \{x\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e portanto é simplesmente conexo (vide Exemplo 3.1.15). Dessas considerações segue que a esfera S^n é simplesmente conexa para $n \geq 2$. O círculo S^1 *não* é simplesmente conexo (vide Exemplo 3.2.24).

Precisaremos também de uma versão do Teorema 3.1.23 para o caso de homotopias com extremos livres num conjunto dado.

Definição 3.1.25. Seja $A \subset X$ um subconjunto e sejam dadas curvas $\gamma, \mu \colon [a, b] \to X$; dizemos que γ e μ são *homotópicas com extremos livres em* A se existe uma homotopia $H \colon \gamma \cong \mu$ tal que $H_s(a), H_s(b) \in A$ para todo $s \in I$; nesse caso dizemos que H é uma *homotopia com extremos livres em* A entre γ e μ.

Obviamente, γ e μ só podem ser homotópicas com extremos livres em A se γ e μ tiverem extremos em A, i.e., se $\gamma(\{a, b\}), \mu(\{a, b\}) \subset A$. A relação de "homotopia com extremos livres em A" é uma relação de equivalência no conjunto das curvas $\gamma \in \mathcal{C}([a, b], X)$ tais que $\gamma(\{a, b\}) \subset A$; obviamente se duas curvas com extremos em A forem homotópicas com extremos fixos então elas serão homotópicas com extremos livres em A.

Observação 3.1.26. Se $\gamma \in \Omega(X)$ é uma curva com extremos em A e se $\lambda \in \Omega(A)$ é tal que $\gamma(1) = \lambda(0)$ então a concatenação $\gamma \cdot \lambda$ é homotópica a γ

com extremos livres em A. De fato, para cada $s \in I$, denote por $\lambda_s \in \Omega(A)$ a curva $\lambda_s(t) = \lambda((1-s)t)$. Daí $H_s = \gamma \cdot \lambda_s$ define uma homotopia com extremos livres em A entre $\gamma \cdot \lambda$ e $\gamma \cdot \mathfrak{o}_{\lambda(0)}$; a conclusão segue do fato que $\gamma \cdot \mathfrak{o}_{\lambda(0)}$ é homotópica a γ com extremos fixos. De modo análogo mostra-se que se $\lambda \in \Omega(A)$ é tal que $\lambda(1) = \gamma(0)$ então $\lambda \cdot \gamma$ é homotópica a γ com extremos livres em A.

Temos a seguinte versão do Teorema 3.1.23 para homotopia com extremos livres em A:

TEOREMA 3.1.27. *Seja X um espaço topológico localmente conexo por arcos e semi-localmente simplesmente conexo; seja $A \subset X$ um subespaço localmente conexo por arcos. Dada uma curva $\gamma\colon I \to X$ com extremos em A então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de γ no espaço $\mathcal{C}(I,X)$ munido da topologia compacto-aberta, de modo que para toda $\mu \in \mathcal{U}$ com extremos em A temos que γ e μ são homotópicas com extremos livres em A.*

DEMONSTRAÇÃO. Mencionamos apenas as adaptações a serem feitas na demonstração do Teorema 3.1.23. Uma vez construídos os abertos U_{α_r} e V_r, escolhemos também vizinhanças abertas V_0 e V_k de $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_k)$ respectivamente de modo que $V_0 \cap A$ e $V_k \cap A$ sejam conexos por arcos e estejam contidos respectivamente em U_{α_0} e em $U_{\alpha_{k-1}}$. Daí definimos $\mathcal{U}$ fazendo:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{r=0}^{k-1} \mathcal{V}([t_r, t_{r+1}]; U_{\alpha_r}) \ \cap \ \bigcap_{r=0}^{k} \mathcal{V}(\{t_r\}; V_r).$$

Seja $\mu \in \mathcal{U}$ uma curva com extremos em A; devemos mostrar que γ e μ são homotópicas com extremos livres em A. As curvas λ_0 e λ_k são agora escolhidas de modo que $\lambda_r(0) = \gamma(t_r)$, $\lambda_r(1) = \mu(t_r)$ e $\mathrm{Im}(\lambda_r) \subset V_r \cap A$, $r = 0, k$. A identidade (3.1.6) ainda é válida para $r = 0, \ldots, k-1$. Usando o mesmo argumento de antes obtemos agora que:

$$[\mu] = [\lambda_0]^{-1} \cdot [\gamma] \cdot [\lambda_k];$$

a conclusão segue da Observação 3.1.26. □

3.2. A Seqüência Exata de Homotopia de uma Fibração

Fazemos nesta seção uma breve exposição da definição dos grupos de homotopia (absoluta e relativa) de um espaço topológico; descrevemos a seqüência exata de homotopia de um par (X, A) e como corolário obtemos a seqüência exata de homotopia de uma fibração $p\colon E \to B$.

Como na Seção 3.1, denotamos por I o intervalo unitário $[0,1]$ e por $\mathcal{C}(Y,Z)$ o conjunto das aplicações contínuas de Y em Z; por "curva" entende-se sempre *curva contínua*.

Chamamos I^n o *cubo unitário* n-dimensional; denotamos por ∂I^n o *bordo* de I^n, ou seja:

$$\partial I^n = \big\{ t \in I^n : t_i \in \{0,1\} \text{ para algum } i = 1, \ldots, n \big\}.$$

Se $n = 0$ definimos $I^0 = \{0\}$ e $\partial I^0 = \emptyset$.

Denote por $I\!R^\infty$ o espaço de todas as seqüências $(t_i)_{i\geq 1}$ de números reais; identificamos I^n com o subconjunto

$$I^n \cong \big\{(t_1,\ldots,t_n,0,0,\ldots) : 0 \leq t_i \leq 1,\ i=1,\ldots,n\big\} \subset I\!R^\infty$$

de $I\!R^\infty$ de modo que para $n \geq 1$ o cubo I^{n-1} fica identificado com a face

$$I^{n-1} \cong \big\{t \in I^n : t_n = 0\big\} \subset I^n$$

de I^n; chamamos essa a *face inicial* de I^n. Denotamos por J^{n-1} a união das outras faces de I^n, ou seja:

$$J^{n-1} = \big\{t \in I^n : t_n = 1 \text{ ou } t_i \in \{0,1\} \text{ para algum } i = 1,\ldots,n-1\big\}.$$

Fixemos de agora em diante um espaço topológico X; para cada $x_0 \in X$, denotamos por $\Omega^n_{x_0}(X)$ o conjunto:

$$\Omega^n_{x_0}(X) = \big\{\ \phi \in \mathcal{C}(I^n, X) : \phi(\partial I^n) \subset \{x_0\}\ \big\}.$$

Se $n = 0$, identificamos uma aplicação $\phi\colon I^0 \to X$ com o ponto $\phi(0) \in X$ e daí $\Omega^0_{x_0}(X)$ identifica-se com o conjunto X (note que $\Omega^0_{x_0}(X)$ realmente não depende de x_0). O conjunto $\Omega^1_{x_0}(X)$ é o espaço de laços com ponto base x_0 introduzido na Seção 3.1.

Dizemos que (X,A) é um *par de espaços topológicos* se X é um espaço topológico e $A \subset X$ é um subespaço. Se (X,A) é um par de espaços topológicos, $x_0 \in A$ e $n \geq 1$ denotamos por $\Omega^n_{x_0}(X,A)$ o conjunto:

$$\Omega^n_{x_0}(X,A) = \big\{\ \phi \in \mathcal{C}(I^n, X) : \phi(I^{n-1}) \subset A,\ \phi(J^{n-1}) \subset \{x_0\}\ \big\}.$$

Observe que para $\phi \in \Omega^n_{x_0}(X,A)$ temos $\phi(\partial I^n) \subset A$; também:

$$\Omega^n_{x_0}(X) = \Omega^n_{x_0}(X,\{x_0\}), \quad n \geq 1. \tag{3.2.1}$$

Se $n = 1$, o cubo I^n é o intervalo I, a face inicial I^{n-1} é o ponto $\{0\}$ e $J^{n-1} = \{1\}$; o conjunto $\Omega^1_{x_0}(X,A)$ é portanto simplesmente o conjunto das curvas $\gamma\colon I \to X$ tais que $\gamma(0) \in A$ e $\gamma(1) = x_0$.

Definição 3.2.1. Se X é um espaço topológico, $x_0 \in X$ e $n \geq 0$ dizemos que $\phi, \psi \in \Omega^n_{x_0}(X)$ são *homotópicas em* $\Omega^n_{x_0}(X)$ quando existe uma homotopia $H\colon \phi \cong \psi$ tal que $H_s \in \Omega^n_{x_0}(X)$ para cada $s \in I$; a relação de homotopia em $\Omega^n_{x_0}(X)$ é uma relação de equivalência e para cada $\phi \in \Omega^n_{x_0}(X)$ denotamos por $[\phi]$ sua classe de equivalência. O conjunto quociente é denotado por:

$$\pi_n(X,x_0) = \big\{[\phi] : \phi \in \Omega^n_{x_0}(X)\big\}.$$

Dizemos que $[\phi]$ é a *classe de homotopia definida por* ϕ *em* $\pi_n(X,x_0)$.

Analogamente, se (X,A) é um par de espaços topológicos, $x_0 \in A$ e $n \geq 1$ dizemos que $\phi, \psi \in \Omega^n_{x_0}(X,A)$ são *homotópicas em* $\Omega^n_{x_0}(X,A)$ quando existe uma homotopia $H\colon \phi \cong \psi$ tal que $H_s \in \Omega^n_{x_0}(X,A)$ para todo $s \in I$; temos então uma relação de equivalência em $\Omega^n_{x_0}(X,A)$ e denotamos as classes de equivalência também por $[\phi]$. O conjunto quociente é denotado por:

$$\pi_n(X,A,x_0) = \big\{[\phi] : \phi \in \Omega^n_{x_0}(X,A)\big\}.$$

Dizemos que $[\phi]$ é a *classe de homotopia definida por* ϕ *em* $\pi_n(X, A, x_0)$.

Observe que o conjunto $\pi_0(X, x_0)$ não depende de x_0 e identifica-se com o *conjunto das componentes conexas por arcos* de X; para cada $x \in X$, $[x]$ denota então a componente conexa por arcos de $x \in X$.

Segue de (3.2.1) que:

$$\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0), \quad n \geq 1. \tag{3.2.2}$$

Dados $\phi, \psi \in \Omega^n_{x_0}(X)$ com $n \geq 1$ ou dados $\phi, \psi \in \Omega^n_{x_0}(X, A)$ com $n \geq 2$ definimos a *concatenação* de ϕ com ψ por:

$$(\phi \cdot \psi)(t) = \begin{cases} \phi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{3.2.3}$$

para todo $t = (t_1, \ldots, t_n) \in I^n$. Observe que a definição (3.2.3) *não faz sentido* em geral para $\phi, \psi \in \Omega^0_{x_0}(X)$ ou para $\phi, \psi \in \Omega^1_{x_0}(X, A)$.

Temos então que a concatenação é uma operação binária em $\Omega^n_{x_0}(X)$ para $n \geq 1$ e em $\Omega^n_{x_0}(X, A)$ para $n \geq 2$; é fácil ver que essa operação binária passa ao quociente e define operações nos conjuntos $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, A, x_0)$ de classes de homotopia:

$$[\phi] \cdot [\psi] = [\phi \cdot \psi].$$

Generalizando o Teorema 3.1.6, temos o seguinte:

TEOREMA 3.2.2. *Para* $n \geq 1$ *o conjunto* $\pi_n(X, x_0)$ *é um grupo (sob concatenação) e para* $n \geq 2$ *o conjunto* $\pi_n(X, A, x_0)$ *também é um grupo (sob concatenação); em qualquer caso o elemento neutro é a classe* $[\mathfrak{o}_{x_0}]$ *da aplicação constante* $\mathfrak{o}_{x_0} \colon I^n \to X$*:*

$$\mathfrak{o}_{x_0}(t) = x_0, \quad t \in I^n, \tag{3.2.4}$$

e o elemento inverso de $[\phi]$ *é a classe de homotopia* $\left[\phi^{-1}\right]$ *da aplicação* $\phi^{-1} \colon I^n \to X$ *dada por:*

$$\phi^{-1}(t) = \phi(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n), \quad t \in I^n.$$

DEFINIÇÃO 3.2.3. Um *conjunto pontilhado* é um par (C, c_0) onde C é um conjunto arbitrário e $c_0 \in C$ é um elemento. Dizemos que c_0 é o *elemento distinguido* do conjunto pontilhado (C, c_0). Uma *aplicação de conjuntos pontilhados* $f \colon (C, c_0) \to (C', c'_0)$ é uma função arbitrária $f \colon C \to C'$ tal que $f(c_0) = c'_0$; nesse caso definimos o *núcleo* de f por:

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(c'_0), \tag{3.2.5}$$

e a *imagem* de f da maneira usual. Se $\mathrm{Ker}(f) = C$ dizemos que f é a *aplicação nula* de (C, c_0) em (C', c'_0). Um conjunto pontilhado (C, c_0) com $C = \{c_0\}$ é chamado um *conjunto pontilhado nulo*. Tanto o conjunto pontilhado nulo como a aplicação nula entre conjuntos pontilhados serão denotados por 0, quando não houver possibilidade de confusão[1].

[1]Os conjuntos pontilhados e as aplicações de conjuntos pontilhados formam uma categoria; se (C, c_0) é tal que $C = \{c_0\}$ então (C, c_0) é um *objeto nulo* nessa categoria, i.e.,

Se G é um grupo, identificamos sempre G com o conjunto pontilhado $(G, 1)$, onde $1 \in G$ é o elemento neutro; com essa convenção os homomorfismos de grupos são aplicações de conjuntos pontilhados e a definição de núcleo (3.2.5) coincide com a definição usual de núcleo de um homomorfismo.

DEFINIÇÃO 3.2.4. Para $n \geq 1$ o grupo $\pi_n(X, x_0)$ é chamado o *n-ésimo grupo de homotopia (absoluta)* do espaço X com ponto base $x_0 \in X$; para $n \geq 2$ o grupo $\pi_n(X, A, x_0)$ é chamado o *n-ésimo grupo de homotopia relativa* do par (X, A) com ponto base $x_0 \in A$. Chamamos $\pi_0(X, x_0)$ e $\pi_1(X, A, x_0)$ respectivamente o *zero-ésimo conjunto de homotopia* de X com ponto base $x_0 \in X$ e o *primeiro conjunto de homotopia relativa* do par (X, A) com ponto base $x_0 \in A$; *todos* os conjuntos e grupos de homotopia (absoluta ou relativa) são vistos como conjuntos pontilhados, sendo a classe $[\mathfrak{o}_{x_0}]$ (vide (3.2.4)) o elemento distinguido.

OBSERVAÇÃO 3.2.5. Argumentando como no Exemplo 3.1.9, conclui-se que se X_0 é a componente conexa por arcos de x_0 em X então $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X_0, x_0)$ para todo $n \geq 1$; se $x_0 \in A \subset X_0$ então também $\pi_n(X, A, x_0) = \pi_n(X_0, A, x_0)$ para todo $n \geq 1$. Se $x_0 \in A \subset X$ e se A_0 denota a componente conexa por arcos de x_0 em A então $\pi_n(X, A, x_0) = \pi_n(X_0, A_0, x_0)$ para todo $n \geq 2$.

EXEMPLO 3.2.6. Se $X \subset I\!R^d$ é estrelado num ponto $x_0 \in X$ então $\pi_n(X, x_0) = 0$ para todo $n \geq 0$; de fato, dado $\phi \in \Omega^n_{x_0}(X)$ definimos uma homotopia $H \colon \phi \cong \mathfrak{o}_{x_0}$ fazendo:

$$H(s, t) = (1 - s)\phi(t) + s\, x_0, \quad s \in I,\ t \in I^n.$$

EXEMPLO 3.2.7. Para $n \geq 1$, se $\phi \in \Omega^n_{x_0}(X, A)$ é tal que $\mathrm{Im}(\phi) \subset A$ então $[\phi] = [\mathfrak{o}_{x_0}]$ em $\pi_n(X, A, x_0)$; de fato, uma homotopia $H \colon \phi \cong \mathfrak{o}_{x_0}$ em $\Omega^n_{x_0}(X, A)$ pode ser definida por:

$$H(s, t) = \phi\big(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1 - (1 - s)(1 - t_n)\big), \quad t \in I^n,\ s \in I.$$

Em particular temos $\pi_n(X, X, x_0) = 0$.

DEFINIÇÃO 3.2.8. Sejam X, Y espaços topológicos e sejam dados $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$; seja $f \colon X \to Y$ uma aplicação contínua tal que $f(x_0) = y_0$. Dizemos então que f *preserva pontos base* e escrevemos:

$$f \colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0).$$

Daí, para $n \geq 0$, f induz uma aplicação de conjuntos pontilhados

$$f_* \colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0) \tag{3.2.6}$$

definida por $f_*([\phi]) = [f \circ \phi]$.

Dados pares (X, A), (Y, B) de espaços topológicos, então uma *aplicação de pares*

$$f \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

dado um outro objeto (C', c'_0) qualquer existe um único morfismo de (C, c_0) em (C', c'_0) e um único morfismo de (C', c'_0) em (C, c_0).

é uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$. Se forem escolhidos pontos $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ então dizemos que f *preserva pontos base* se $f(x_0) = y_0$; nesse caso escrevemos:

$$f\colon (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0).$$

Para $n \geq 1$, uma tal aplicação induz uma aplicação f_* de conjuntos pontilhados:

$$f_*\colon \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0) \tag{3.2.7}$$

definida por $f_*([\phi]) = [f \circ \phi]$.

É fácil verificar que as aplicações f_* são bem definidas, i.e., não dependem dos representantes escolhidos nas classes de homotopia. Dadas aplicações

$$f\colon (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0), \quad g\colon (Y, B, y_0) \longrightarrow (Z, C, z_0)$$

então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$; se Id denota a identidade de (X, A, x_0) então Id_* é a identidade de $\pi_n(X, A, x_0)$. Segue que se $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ é um *homeomorfismo de trincas*, i.e., $f\colon X \to Y$ é um homeomorfismo, $f(A) = B$ e $f(x_0) = y_0$, então f_* é uma bijeção. Considerações análogas podem ser feitas no caso dos grupos de homotopia absoluta $\pi_n(X, x_0)$. Temos também a seguinte:

Proposição 3.2.9. *Dada $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ então, para $n \geq 1$, a aplicação f_* dada em* (3.2.6) *é um* homomorfismo *de grupos; também, se*

$$f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$$

então, para $n \geq 2$, a aplicação f_* dada em (3.2.7) *é um homomorfismo de grupos.* □

Exemplo 3.2.10. Se $X = X_1 \times X_2$ é um produto cartesiano de espaços X_1, X_2 e se $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$, $i = 1, 2$, denotam as projeções então uma aplicação contínua $\phi\colon I^n \to X$ fica totalmente determinada por suas duas coordenadas

$$\mathrm{pr}_1 \circ \phi = \phi_1\colon I^n \longrightarrow X^1, \quad \mathrm{pr}_2 \circ \phi = \phi_2\colon I^n \longrightarrow X^2,$$

donde é fácil ver que, dado $x = (x_1, x_2) \in X$ e $n \geq 0$ temos uma bijeção

$$\pi_n(X, x) \xrightarrow[\cong]{\big((\mathrm{pr}_1)_*, (\mathrm{pr}_2)_*\big)} \pi_n(X_1, x_1) \times \pi_n(X_2, x_2)$$

que é também um isomorfismo de grupos se $n \geq 1$. Mais geralmente, dados $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, $x \in A = A_1 \times A_2$ então para $n \geq 1$ temos uma bijeção

$$\pi_n(X, A, x) \xrightarrow[\cong]{\big((\mathrm{pr}_1)_*, (\mathrm{pr}_2)_*\big)} \pi_n(X_1, A_1, x_1) \times \pi_n(X_2, A_2, x_2)$$

que é também um isomorfismo de grupos se $n \geq 2$. Observações análogas valém para produtos de uma família arbitrária (possivelmente infinita) de espaços topológicos.

Dado um par (X, A) e $x_0 \in A$ temos aplicações:

$$\mathfrak{i}\colon (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0), \quad \mathfrak{q}\colon (X, \{x_0\}, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0),$$

induzidas pela inclusão de A em X e pela identidade de X respectivamente; de acordo com a Definição 3.2.8 e levando em conta (3.2.2) obtemos aplicações de conjuntos pontilhados:

$$\mathfrak{i}_*\colon \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0), \quad \mathfrak{q}_*\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0); \tag{3.2.8}$$

explicitamente temos $\mathfrak{i}_*([\phi]) = [\phi]$ e $\mathfrak{q}_*([\phi]) = [\phi]$. Para $n \geq 1$ definimos o *operador de conexão* correspondente à trinca (X, A, x_0):

$$\partial_*\colon \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0) \tag{3.2.9}$$

fazendo $\partial_*([\phi]) = [\phi|_{I^{n-1}}]$; é fácil ver que a aplicação ∂_* é bem definida, i.e., não depende do representante escolhido na classe de homotopia. Além do mais, ∂_* é sempre uma aplicação de conjuntos pontilhados e é um homomorfismo de grupos se $n \geq 2$.

Definição 3.2.11. Uma seqüência

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+2}} (C_{i+1}, c_{i+1}) \xrightarrow{f_{i+1}} (C_i, c_i) \xrightarrow{f_i} (C_{i-1}, c_{i-1}) \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots$$

de conjuntos pontilhados e aplicações de conjuntos pontilhados é dita *exata em* (C_i, c_i) se $\mathrm{Ker}(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i+1})$; a seqüência é dita *exata* se for exata em (C_i, c_i) para todo i.

Temos agora condições de demonstrar um dos resultados principais da seção:

Teorema 3.2.12. *Se (X, A) é um par de espaços topológicos e se $x_0 \in A$ então a seqüência*

(3.2.10)

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\mathfrak{q}_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*}$$

$$\cdots \xrightarrow{\mathfrak{q}_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*} \pi_0(X, x_0)$$

é exata, onde para cada n as aplicações de conjuntos pontilhados $\mathfrak{i}_*$, $\mathfrak{q}_*$ e ∂_* são dadas em (3.2.8) *e* (3.2.9).

Demonstração. A prova é feita através de uma divisão em casos e de construções explícitas de homotopias.

- *Exatidão em $\pi_n(X, x_0)$;*

  O fato que $\mathrm{Im}(\mathfrak{i}_*) \subset \mathrm{Ker}(\mathfrak{q}_*)$ segue do Exemplo 3.2.7. Seja então $\phi \in \Omega^n_{x_0}(X)$ tal que existe uma homotopia $H\colon \phi \cong \mathfrak{o}_{x_0}$ em $\Omega^n_{x_0}(X, A)$. Defina $K\colon I \times I^n \to X$ fazendo:

  $$K_s(t) = K(s, t) = \begin{cases} H_{2t_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0), & 0 \leq 2t_n \leq s, \\ H_s\Big(t_1, \ldots, t_{n-1}, \frac{2t_n - s}{2 - s}\Big), & s \leq 2t_n \leq 2; \end{cases}$$

  é fácil ver que $\psi = K_1 \in \Omega^n_{x_0}(A)$ e que $K\colon \phi \cong \psi$ é uma homotopia em $\Omega^n_{x_0}(X)$. Segue que $[\phi] = \mathfrak{i}_*([\psi])$.

- *Exatidão em* $\pi_n(X, A, x_0)$;
  A inclusão $\mathrm{Im}(\mathfrak{q}_*) \subset \mathrm{Ker}(\partial_*)$ é trivial. Seja então $\phi \in \Omega^n_{x_0}(X, A)$ tal que existe uma homotopia $H\colon \phi|_{I^{n-1}} \cong \mathfrak{o}_{x_0}$ em $\Omega^{n-1}_{x_0}(A)$. Defina $K\colon I \times I^n \to X$ fazendo:

$$K_s(t) = K(s,t) = \begin{cases} H_{s-2t_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}), & 0 \le 2t_n \le s, \\ \phi\Big(t_1, \ldots, t_{n-1}, \frac{2t_n - s}{2-s}\Big), & s \le 2t_n \le 2; \end{cases}$$

  é fácil ver que $\psi = K_1 \in \Omega^n_{x_0}(X)$ e que $K\colon \phi \cong \psi$ é uma homotopia em $\Omega^n_{x_0}(X, A)$. Segue que $[\phi] = \mathfrak{q}_*([\psi])$.

- *Exatidão em* $\pi_n(A, x_0)$; Mostremos primeiro que $\mathrm{Im}(\partial_*) \subset \mathrm{Ker}(\mathfrak{i}_*)$. Para isso seja $\phi \in \Omega^{n+1}_{x_0}(X, A)$. Defina $H\colon I \times I^n \to X$ fazendo:

$$H_s(t) = H(s,t) = \phi(t,s), \quad s \in I, \ t \in I^n;$$

  é fácil ver que $H\colon \phi|_{I^n} \cong \mathfrak{o}_{x_0}$ é uma homotopia em $\Omega^n_{x_0}(X)$, de modo que $(\mathfrak{i}_* \circ \partial_*)([\phi]) = [\mathfrak{o}_{x_0}]$.
  Seja agora $\psi \in \Omega^n_{x_0}(A)$ tal que existe uma homotopia $K\colon \psi \cong \mathfrak{o}_{x_0}$ em $\Omega^n_{x_0}(X)$. Defina então:

$$\phi(t) = K_{t_{n+1}}(t_1, \ldots, t_n), \quad t \in I^{n+1};$$

  daí $\phi \in \Omega^{n+1}_{x_0}(X, A)$ e $\partial_*([\phi]) = [\psi]$.

$\square$

A seqüência exata (3.2.10) é conhecida como a *seqüência exata longa de homotopia* do par (X, A) relativa ao ponto base x_0. A propriedade de exatidão de (3.2.10) em $\pi_1(X, A, x_0)$ pode ser ligeiramente refinada na seguinte:

PROPOSIÇÃO 3.2.13. *A aplicação*

$$\pi_1(X, A, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \ni ([\gamma], [\mu]) \longmapsto [\gamma \cdot \mu] \in \pi_1(X, A, x_0) \tag{3.2.11}$$

define uma ação à direita do grupo $\pi_1(X, x_0)$ *no conjunto* $\pi_1(X, A, x_0)$*; a órbita do elemento distinguido* $[\mathfrak{o}_{x_0}] \in \pi_1(X, A, x_0)$ *é o núcleo do operador de conexão*

$$\partial_*\colon \pi_1(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_0(A, x_0)$$

e o subgrupo de isotropia de $[\mathfrak{o}_{x_0}]$ *é a imagem do homomorfismo*

$$\mathfrak{i}_*\colon \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0);$$

em particular, a aplicação

$$\mathfrak{q}_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \tag{3.2.12}$$

induz por passagem ao quociente uma bijeção entre o conjunto de co-classes à direita $\pi_1(X, x_0)/\mathrm{Im}(\mathfrak{i}_*)$ *e o conjunto* $\mathrm{Ker}(\partial_*)$.

Demonstração. É fácil ver que (3.2.11) define de fato uma ação à direita (vide Corolário 3.1.5). As outras afirmações seguem da seqüência exata longa do par (X, A) e da teoria elementar de ações de grupos em conjuntos, observando que a aplicação de *ação sobre o elemento* $[\mathfrak{o}_{x_0}]$:

$$\beta_{[\mathfrak{o}_{x_0}]} \colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0)$$

dada por $\beta_{[\mathfrak{o}_{x_0}]}([\mu]) = [\mathfrak{o}_{x_0} \cdot \mu]$ coincide com (3.2.12). □

Passamos agora ao estudo de fibrações.

Definição 3.2.14. Sejam F, E, B espaços topológicos; uma aplicação contínua $p \colon E \to B$ é dita um *fibração localmente trivial* com *fibra típica* F se para todo $b \in B$ existe uma vizinhança aberta U de b em B e um homeomorfismo

$$\alpha \colon p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F \tag{3.2.13}$$

tal que $\mathrm{pr}_1 \circ \alpha = p|_{p^{-1}(U)}$, onde pr_1 denota a primeira projeção do produto $U \times F$; dizemos então que α é uma *trivialização local* de p em torno de b e também que a fibração p é *trivial* sobre o aberto $U \subset B$. Chamamos E o *espaço total* e B a *base* da fibração p; para cada $b \in B$ o subconjunto $E_b = p^{-1}(b) \subset E$ é chamado a *fibra* sobre b.

Obviamente qualquer trivialização local de p em torno de b induz um homeomorfismo da fibra $E_b = p^{-1}(b)$ sobre a fibra típica F. Temos o seguinte:

Lema 3.2.15. *Seja $p \colon E \to B$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F; então dados $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ com $p(e_0) = b_0$ a aplicação*

$$p_* \colon \pi_n(E, E_{b_0}, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, \{b_0\}, b_0) = \pi_n(B, b_0) \tag{3.2.14}$$

é bijetora para todo $n \geq 1$.

A prova do Lema 3.2.15 é baseada no seguinte lema técnico.

Lema 3.2.16. *Seja $p \colon E \to B$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F; então, para $n \geq 1$, dadas aplicações contínuas $\phi \colon I^n \to B$ e $\psi \colon J^{n-1} \to E$ com $p \circ \psi = \phi|_{J^{n-1}}$ existe uma aplicação contínua $\tilde{\phi} \colon I^n \to E$ tal que $\tilde{\phi}|_{J^{n-1}} = \psi$ e tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"'] & B \end{tikzcd}$$

Demonstração. A demonstração é dividida em vários passos.

(1) *Existe uma retração $r \colon I^n \to J^{n-1}$, i.e., r é contínua e $r|_{J^{n-1}} = \mathrm{Id}$;*
fixe $\bar{t} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -1\right) \in \mathbb{R}^n$; para cada $t \in I^n$ defina $r(t)$ como sendo o único ponto de J^{n-1} que pertence à reta passando por $\bar{t}$ e t.

(2) *O lema vale se existe uma trivialização* (3.2.13) *de* p *com* $\mathrm{Im}(\phi) \subset U$;
seja $\psi_0 \colon J^{n-1} \to F$ tal que

$$\alpha(\psi(t)) = (\phi(t), \psi_0(t)), \quad t \in J^{n-1};$$

basta então tomar

$$\tilde{\phi}(t) = \alpha^{-1}\big(\phi(t), \psi_0(r(t))\big), \quad t \in I^n.$$

(3) *O lema vale se* $n = 1$;
seja $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_k = 1$ uma partição de I tal que para $i = 0, \ldots, k-1$, $\phi([u_i, u_{i+1}])$ está contido num aberto de B sobre o qual a fibração p é trivial (vide idéia da demonstração do Teorema 3.1.23); usando o passo (2) defina então $\tilde{\phi}$ no intervalo $[u_i, u_{i+1}]$ começando com $i = k-1$ e seguindo indutivamente até $i = 0$.

(4) *O lema vale em geral*;
provamos o caso geral por indução em n; a base da indução é o passo (3). Suponha então que o lema vale para cubos de dimensão menor que n. Considere uma partição

$$0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_k = 1 \tag{3.2.15}$$

do intervalo I; seja $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1})$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n-1$, o conjunto $\mathfrak{a}_i$ é igual a um dos intervalos $[u_j, u_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k-1$ da partição (3.2.15) ou então $\mathfrak{a}_i$ é igual a um dos pontos $\{u_j\}$, $j = 1, \ldots, k-1$; defina:

$$I_{\mathfrak{a}} = I_{\mathfrak{a}_1} \times \cdots \times I_{\mathfrak{a}_{n-1}} \subset I^{n-1}.$$

Se $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ é o número de índices i tais que $\mathfrak{a}_i$ é um intervalo (com mais de um ponto) então diremos que $I_{\mathfrak{a}}$ é um *bloco de dimensão* r. A partição (3.2.15) poderia ter sido escolhida de modo que cada $\phi(I_{\mathfrak{a}} \times [u_j, u_{j+1}])$ estivesse contido num aberto de B sobre o qual a fibração é trivial (vide idéia da demonstração do Teorema 3.1.23).

Usando a hipótese de indução (ou o passo (3)) definimos a aplicação $\tilde{\phi}$ sobre os subconjuntos $I_{\mathfrak{a}} \times I$ de I^n tais que $I_{\mathfrak{a}}$ é um bloco de dimensão zero; novamente usando a hipótese de indução, definimos $\tilde{\phi}$ sobre cada $I_{\mathfrak{a}} \times I$ onde $I_{\mathfrak{a}}$ é um bloco de dimensão um. Procedemos então indutivamente até que $\tilde{\phi}$ esteja definida sobre cada $I_{\mathfrak{a}} \times I$ tal que $I_{\mathfrak{a}}$ é um bloco de dimensão $r \le n-2$.

Fixe agora $\mathfrak{a}$ tal que $I_{\mathfrak{a}}$ é um bloco de dimensão $n-1$; usando o passo (2) definimos $\tilde{\phi}$ em $I_{\mathfrak{a}} \times [u_j, u_{j+1}]$ começando com $j = k-1$ e seguindo indutivamente até $j = 0$. Isso completa a demonstração

□

A aplicação $\tilde{\phi}$ no enunciado do Lema 3.2.16 é chamada um *levantamento* de ϕ com relação a p.

Demonstração do Lema 3.2.15. Dada $[\phi] \in \pi_n(B, b_0)$, obtemos pelo Lema 3.2.16 um levantamento $\tilde{\phi}\colon I^n \to E$ de ϕ com relação a p tal que $\tilde{\phi}$ é constante igual a e_0 em J^{n-1}; logo $\big[\tilde{\phi}\big] \in \pi_n(E, E_{b_0}, e_0)$ e $p_*\big(\big[\tilde{\phi}\big]\big) = [\phi]$. Demonstramos então que p_* é sobrejetora.

Sejam agora $[\psi_1], [\psi_2] \in \pi_n(E, E_{b_0}, e_0)$ tais que $p_*([\psi_1]) = p_*([\psi_2])$; existe então uma homotopia

$$H\colon I \times I^n = I^{n+1} \longrightarrow B$$

tal que $H_0 = p \circ \psi_1$, $H_1 = p \circ \psi_2$ e $H_s \in \Omega^n_{b_0}(B)$ para todo $s \in I$. Observe que:

$$J^n = \big(I \times J^{n-1}\big) \cup (\{0\} \times I^n) \cup (\{1\} \times I^n);$$

podemos então definir uma aplicação contínua

$$\psi\colon J^n \longrightarrow E$$

fazendo $\psi(0, t) = \psi_1(t)$, $\psi(1, t) = \psi_2(t)$ para $t \in I^n$, e $\psi(s, t) = e_0$ para $s \in I$, $t \in J^{n-1}$. Segue então do Lema 3.2.16 que existe uma aplicação contínua

$$\tilde{H}\colon I \times I^n = I^{n+1} \longrightarrow E$$

tal que $p \circ \tilde{H} = H$ e $\tilde{H}|_{J^n} = \psi$; é fácil ver então que $\tilde{H}\colon \psi_1 \cong \psi_2$ é uma homotopia em $\Omega^n_{e_0}(E, E_{b_0})$ e portanto $[\psi_1] = [\psi_2] \in \pi_n(E, E_{b_0}, e_0)$. Isso completa a demonstração. $\square$

A idéia agora é usar a bijeção (3.2.14) para "substituir" $\pi_n(E, E_{b_0}, e_0)$ por $\pi_n(B, b_0)$ na seqüência exata longa de homotopia do par (E, E_{b_0}), obtendo uma nova seqüência exata. Seja então $p\colon E \to B$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F; escolha $b_0 \in B$, $f_0 \in F$, um homeomorfismo $\mathfrak{h}\colon E_{b_0} \to F$ e seja $e_0 \in E_{b_0}$ tal que $\mathfrak{h}(e_0) = f_0$. Definimos então aplicações ι_* e δ_* de modo que os seguintes diagramas comutam:

(3.2.16)
$$\begin{tikzcd}
 & \pi_n\big(E_{b_0}, e_0\big) \arrow[dl, "\mathfrak{h}_*"', "\cong"] \arrow[dr, "\mathfrak{i}_*"] & \\
\pi_n(F, f_0) \arrow[rr, "\iota_*"'] & & \pi_n(E, e_0)
\end{tikzcd}$$

(3.2.17)
$$\begin{tikzcd}
\pi_n\big(E, E_{b_0}, e_0\big) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "p_*"', "\cong"] & \pi_{n-1}\big(E_{b_0}, e_0\big) \arrow[d, "\mathfrak{h}_*", "\cong"'] \\
\pi_n(B, b_0) \arrow[r, "\delta_*"'] & \pi_{n-1}(F, f_0)
\end{tikzcd}$$

onde $\mathfrak{i}_*$ é induzida por inclusão e ∂_* é o operador de conexão correspondente à trinca (E, E_{b_0}, e_0). Obtemos então o seguinte:

COROLÁRIO 3.2.17. *Seja $p\colon E \to B$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F; escolhendo $b_0 \in B$, $f_0 \in F$, um homeomorfismo $\mathfrak{h}\colon E_{b_0} \to F$ e tomando $e_0 \in E_{b_0}$ tal que $\mathfrak{h}(e_0) = f_0$ obtemos uma seqüência exata*

(3.2.18)

$$\cdots \xrightarrow{\delta_*} \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\delta_*} \pi_{n-1}(F, f_0) \xrightarrow{\iota_*}$$
$$\cdots \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\delta_*} \pi_0(F, f_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0)$$

onde ι_* e δ_* são definidos pelos diagramas comutativos (3.2.16) *e* (3.2.17) *respectivamente.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente da seqüência exata longa do par (E, E_{b_0}) e das definições de ι_* e δ_*, exceto pela exatidão em $\pi_0(E, e_0)$ que segue facilmente usando o Lema 3.2.16 com $n = 1$. □

A seqüência exata (3.2.18) é conhecida como a *seqüência exata longa de homotopia* da fibração p.

DEFINIÇÃO 3.2.18. Uma aplicação $p\colon E \to B$ é dita um *recobrimento* se p for uma fibração localmente trivial com uma fibra típica F que possui a topologia discreta.

Temos o seguinte:

COROLÁRIO 3.2.19. *Se $p\colon E \to B$ é um recobrimento então, dados $e_0 \in E$, $b_0 \in B$ com $p(e_0) = b_0$ a aplicação*

$$p_*\colon \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$$

é um isomorfismo para todo $n \geq 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente da seqüência exata longa da fibração p notando que, se F é discreto, então $\pi_n(F, f_0) = 0$ para todo $n \geq 1$. □

OBSERVAÇÃO 3.2.20. Seja $p\colon E \to B$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F; escolha $b_0 \in B$ e um homeomorfismo $\mathfrak{h}\colon E_{b_0} \to F$. Olhamos mais de perto para o operador δ_* definido pelo diagrama (3.2.17) quando $n = 1$.

Para cada $f \in F$, denote por δ_*^f o operador definido pelo diagrama (3.2.17) quando fazemos $n = 1$ e trocamos f_0 por f e e_0 por $\mathfrak{h}^{-1}(f)$ nesse diagrama. Temos a seguinte fórmula explícita:

$$\delta_*^f([\gamma]) = \big[\mathfrak{h}\big(\tilde{\gamma}(0)\big)\big] \in \pi_0(F, f), \quad \gamma \in \Omega^1_{b_0}(B), \tag{3.2.19}$$

onde $\tilde{\gamma}\colon I \to E$ é um levantamento qualquer de γ (i.e., $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$) com $\tilde{\gamma}(1) = \mathfrak{h}^{-1}(f)$ (a existência do levantamento $\tilde{\gamma}$ segue do Lema 3.2.16 com $n = 1$).

A partir de (3.2.19) é fácil ver que δ_*^f depende apenas da componente conexa por arcos $[f]$ de f em F; de fato, se $f_1, f_2 \in F$ e se $\lambda\colon I \to F$ é uma curva com $\lambda(0) = f_1$, $\lambda(1) = f_2$ então, dado um levantamento $\tilde{\gamma}$ de γ com

$\tilde{\gamma}(1) = \mathfrak{h}^{-1}(f_1)$ segue que $\tilde{\mu} = \tilde{\gamma} \cdot (\mathfrak{h}^{-1} \circ \lambda)$ é um levantamento de $\mu = \gamma \cdot \mathfrak{o}_{b_0}$ com $\tilde{\mu}(1) = \mathfrak{h}^{-1}(f_2)$ e portanto:

$$\delta_*^{f_1}([\gamma]) = \big[\mathfrak{h}\big(\tilde{\gamma}(0)\big)\big] = \big[\mathfrak{h}\big(\tilde{\mu}(0)\big)\big] = \delta_*^{f_2}([\mu]) = \delta_*^{f_2}([\gamma]).$$

Denotando simplesmente por $\pi_0(F)$ o conjunto das componentes conexas por arcos de F (sem ponto distinguido) obtemos uma aplicação

$$\pi_1(B, b_0) \times \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(F) \tag{3.2.20}$$

dada por $([\gamma], [f]) \mapsto \delta_*^f([\gamma])$. Segue facilmente de (3.2.19) que (3.2.20) define uma ação à esquerda do grupo $\pi_1(B, b_0)$ no conjunto $\pi_0(F)$.

Fixamos agora $f_0 \in F$ e fazemos $e_0 = \mathfrak{h}^{-1}(f_0)$; da seqüência exata longa da fibração p segue que a seqüência

$$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\delta_* = \delta_*^{f_0}} \pi_0(F, f_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_0(E, e_0)$$

é exata. Isso significa que a órbita do ponto $[f_0] \in \pi_0(F)$ relativamente à ação (3.2.20) é igual ao núcleo de ι_* e que o subgrupo de isotropia de $[f_0]$ é igual à imagem de p_*; portanto o operador δ_* induz por passagem ao quociente uma bijeção entre o conjunto de co-classes à esquerda $\pi_1(B, b_0)/\mathrm{Im}(p_*)$ e o conjunto $\mathrm{Ker}(\iota_*)$.

Exemplo 3.2.21. Seja $p\colon E \to B$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F discreta, i.e., p é um recobrimento. Escolha $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$ e um homeomorfismo $\mathfrak{h}\colon E_{b_0} \to F$ (na verdade, nesse contexto qualquer bijeção $\mathfrak{h}$ será um homeomorfismo); ponha $f_0 = \mathfrak{h}(e_0)$.

Como $\pi_1(F, f_0) = 0$, segue da seqüência exata longa da fibração que a aplicação

$$p_*\colon \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

é injetora; identificamos então $\pi_1(E, e_0)$ com a imagem de p_*. Note que o conjunto $\pi_0(F, f_0)$ pode ser identificado com F. Supondo E conexo por arcos temos $\pi_0(E, e_0) = 0$ e segue da Observação 3.2.20 que a aplicação δ_* induz uma bijeção:

$$\pi_1(B, b_0)/\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{\cong} F. \tag{3.2.21}$$

Infelizmente, como F é apenas um conjunto, a bijeção (3.2.21) não traz nenhuma informação sobre as estruturas de grupo de $\pi_1(E, e_0)$ e $\pi_1(B, b_0)$. Suponha agora então que seja dada uma estrutura de grupo em F e também uma ação contínua à direita

$$E \times F \ni (e, f) \longmapsto e \bullet f \in E \tag{3.2.22}$$

de F em E (como F é discreto, a continuidade de (3.2.22) significa simplesmente continuidade na primeira variável); suponha também que a ação (3.2.22) é livre (i.e., sem pontos fixos) e que suas órbitas são as fibras de p. Se $f_0 = 1$ é o elemento neutro de F e o homeomorfismo $\mathfrak{h}\colon E_{b_0} \to F$ é o inverso da bijeção

$$\beta_{e_0}\colon F \ni f \longmapsto e_0 \bullet f \in E_{b_0},$$

mostraremos a seguir que a aplicação

$$\delta_*\colon \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \pi_0(F, f_0) \cong F \tag{3.2.23}$$

é um *homomorfismo* de grupos; seguirá então que $\mathrm{Im}(p_*) \cong \pi_1(E, e_0)$ é um *subgrupo normal* de $\pi_1(B, b_0)$ e que a bijeção (3.2.21) é um *isomorfismo* de grupos.

Mostremos então que (3.2.23) é um homomorfismo. Para isso sejam $\gamma, \mu \in \Omega^1_{b_0}(B)$ e sejam $\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}\colon I \to E$ levantamentos de γ e μ respectivamente com $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\mu}(1) = e_0$; usando (3.2.19) e identificando $\pi_0(F, f_0)$ com F obtemos:

$$\delta_*([\gamma]) = \mathfrak{h}\big(\tilde{\gamma}(0)\big), \quad \delta_*([\mu]) = \mathfrak{h}\big(\tilde{\mu}(0)\big).$$

Defina $\hat{\gamma}\colon I \to E$ fazendo:

$$\hat{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t) \bullet \mathfrak{h}\big(\tilde{\mu}(0)\big), \quad t \in I;$$

daí $\tilde{\kappa} = \hat{\gamma} \cdot \tilde{\mu}$ é um levantamento de $\kappa = \gamma \cdot \mu$ com $\tilde{\kappa}(1) = e_0$ e, usando novamente (3.2.19) obtemos:

$$\delta_*([\gamma] \cdot [\mu]) = \mathfrak{h}\big(\tilde{\kappa}(0)\big) = \mathfrak{h}\big(\hat{\gamma}(0)\big) = \mathfrak{h}(\tilde{\gamma}(0))\, \mathfrak{h}\big(\tilde{\mu}(0)\big) = \delta_*([\gamma])\delta_*([\mu]),$$

o que conclui o argumento.

Observação 3.2.22. Os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_2(X, A, x_0)$ em geral podem não ser abelianos, mas mostra-se que $\pi_n(X, x_0)$ é sempre abeliano para $n \geq 2$ e $\pi_n(X, A, x_0)$ é sempre abeliano para $n \geq 3$ (vide [**30**, Proposição 2.1 e Proposição 3.1, Capítulo 4]).

Observação 3.2.23. Generalizando a Proposição 3.1.11, dado $n \geq 1$, é possível associar a cada curva $\lambda\colon I \to X$ com $\lambda(0) = x_0$, $\lambda(1) = x_1$ um isomorfismo

$$\lambda_\#\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1);$$

em particular, se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por arcos de X então $\pi_n(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_n(X, x_1)$. O isomorfismo $\lambda_\#$ é definido fazendo

$$\lambda_\#([\phi]) = [\psi],$$

onde ψ é construído a partir de uma homotopia $H\colon \phi \cong \psi$ tal que $H_s(t) = \lambda(t)$ para todo $t \in \partial I^n$ e todo $s \in I$ (para detalhes, vide [**30**, Teorema 14.1, Capítulo 4]). A partir daí é possível, como no Exemplo 3.1.17, mostrar que se X é contrátil então $\pi_n(X, x_0) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Se $\mathrm{Im}(\lambda) \subset A \subset X$ então, dado $n \geq 1$, podemos também definir uma bijeção de conjuntos pontilhados

$$\lambda_\#\colon \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_1),$$

que é um isomorfismo de grupos para $n \geq 2$; vide [**30**, Exercícios do Capítulo 4].

3.2.1. Aplicações à teoria de grupos de Lie clássicos. Nesta subseção mostramos como a seqüência exata longa de homotopia de uma fibração pode ser usada para calcular o grupo fundamental e as componentes conexas dos grupos de Lie clássicos introduzidos na Subseção 2.1.1. Todos os espaços considerados nesta subseção serão variedades diferenciáveis e portanto conectividade e conectividade por arcos serão sempre equivalentes. Assumimos familiaridade com os conceitos e notações introduzidos nas Subseções 2.1.1 e 2.1.2; em particular, o Teorema 2.1.14 e os Corolários 2.1.9, 2.1.15, 2.1.16 e 2.1.17 serão usados constantemente sem mais comentários.

Os grupos de homotopia relativa não serão necessários nesta subseção; da Seção 3.2 o leitor deve manter em mente principalmente os Exemplos 3.2.6, 3.2.10 e 3.2.21 (e o Corolário 3.2.17 obviamente). Para simplificar a notação, *omitiremos o ponto base* x_0 quando nos referirmos a um grupo (ou conjunto) de homotopia $\pi_n(X, x_0)$, sempre que o ponto base não for relevante na discussão em questão; escrevemos nesse caso apenas $\pi_n(X)$ (vide também Corolário 3.1.12 e Observação 3.2.23).

Começamos com um exemplo bem simples.

Exemplo 3.2.24. Denote por $S^1 \subset \mathbb{C}$ o círculo unitário; daí a aplicação $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi i t}$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos de Lie cujo núcleo é $\mathrm{Ker}(p) = \mathbb{Z}$. Segue que p é um recobrimento. Além do mais, a ação por translação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ é livre e suas órbitas são as fibras de p; segue do Exemplo 3.2.21 que temos um isomorfismo

$$\delta_*\colon \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dado por $\delta_*([\gamma]) = \tilde{\gamma}(0)$, onde $\tilde{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}$ é uma curva tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\tilde{\gamma}(1) = 0$. Em particular a classe de homotopia do laço $\gamma\colon I \to S^1$ dado por

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad t \in I, \tag{3.2.24}$$

é um gerador de $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.2.25. Mostremos que o grupo $\mathrm{SU}(n)$ é (conexo e) simplesmente conexo para todo $n \geq 1$. Primeiramente observe que a ação canônica de $\mathrm{SU}(n+1)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ se restringe a uma ação de $\mathrm{SU}(n+1)$ na esfera unitária S^{2n+1}; é fácil ver que tal ação é transitiva e que o subgrupo de isotropia do ponto $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{C}^{n+1}$ identifica-se com $\mathrm{SU}(n)$. Segue que o quociente $\mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)$ é difeomorfo à esfera S^{2n+1}; obtemos então uma fibração

$$p\colon \mathrm{SU}(n+1) \longrightarrow S^{2n+1},$$

com fibra típica $\mathrm{SU}(n)$. Como a esfera S^{2n+1} é simplesmente conexa (vide Exemplo 3.1.24), a seqüência exata de homotopia da fibração p nos dá:

$$\pi_0(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{SU}(n+1)) \longrightarrow 0 \tag{3.2.25}$$

$$\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SU}(n+1)) \longrightarrow 0 \tag{3.2.26}$$

Como $\mathrm{SU}(1) = \{1\}$ é obviamente simplesmente conexo, segue agora por indução em n da exatidão de (3.2.25) que $\mathrm{SU}(n)$ é conexo e da exatidão de (3.2.26) que $\mathrm{SU}(n)$ é simplesmente conexo para todo $n \geq 1$.

EXEMPLO 3.2.26. Mostremos que o grupo unitário $\mathrm{U}(n)$ é conexo e que $\pi_1(\mathrm{U}(n)) \cong \mathbb{Z}$, para todo $n \geq 1$. Considere a *aplicação determinante*

$$\det\colon \mathrm{U}(n) \longrightarrow S^1;$$

temos que det é um homomorfismo sobrejetor de grupos de Lie e é portanto uma fibração com fibra típica $\mathrm{Ker}(\det) = \mathrm{SU}(n)$. Levando em conta que $\mathrm{SU}(n)$ é simplesmente conexo (vide Exemplo 3.2.25) obtemos as seguintes seqüências exatas a partir da fibração det:

$$0 \longrightarrow \pi_0(\mathrm{U}(n)) \longrightarrow 0 \tag{3.2.27}$$

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathrm{U}(n), 1) \xrightarrow{\det_*} \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow 0 \tag{3.2.28}$$

De (3.2.27) concluímos que $\mathrm{U}(n)$ é conexo e de (3.2.28) obtemos que a aplicação

$$\det_*\colon \pi_1(\mathrm{U}(n), 1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \tag{3.2.29}$$

é um isomorfismo.

EXEMPLO 3.2.27. Mostremos que o grupo ortogonal especial $\mathrm{SO}(n)$ é conexo para $n \geq 1$. A ação canônica de $\mathrm{SO}(n+1)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ se restringe a uma ação de $\mathrm{SO}(n+1)$ na esfera unitária S^n; é fácil ver que essa ação é transitiva e que o subgrupo de isotropia do ponto $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ identifica-se com $\mathrm{SO}(n)$. Segue que o quociente $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ é difeomorfo à esfera S^n e portanto obtemos uma fibração

$$p\colon \mathrm{SO}(n+1) \longrightarrow S^n, \tag{3.2.30}$$

com fibra típica $\mathrm{SO}(n)$; temos então uma seqüência exata:

$$\pi_0(\mathrm{SO}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{SO}(n+1)) \longrightarrow 0$$

donde segue por indução em n que $\mathrm{SO}(n)$ é conexo para todo $n \geq 1$, já que obviamente $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ é conexo. A aplicação determinante induz um isomorfismo entre o quociente $\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n)$ e o grupo $\{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$, donde $\mathrm{O}(n)$ tem exatamente duas componentes conexas: $\mathrm{SO}(n)$ e seu complementar.

EXEMPLO 3.2.28. Mostremos que o grupo $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ é conexo. Se $(b_i)_{i=1}^n$ é uma base qualquer de $\mathbb{R}^n$ então é fácil ver que existe uma única base ortonormal $(u_i)_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$ tal que para cada $k = 1, \ldots, n$ os vetores $(b_i)_{i=1}^k$ e $(u_i)_{i=1}^k$ formam uma base do mesmo subespaço k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ e definem a *mesma orientação* nesse subespaço. Pode-se escrever uma fórmula explícita para os vetores $(u_i)_{i=1}^n$ em termos dos vetores $(b_i)_{i=1}^n$; tal fórmula é conhecida como o *processo de ortonormalização de Gram-Schmidt*.

Para cada matriz inversível $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, denote por $r(A)$ a matriz obtida de A pela aplicação do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em suas colunas; daí r é uma aplicação diferenciável de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathrm{O}(n)$ (mas *não* é um homomorfismo). Observe que se $A \in \mathrm{O}(n)$ então $r(A) = A$;

dizemos por isso que r é uma *retração*. Denote por T_+ o subgrupo de $\mathrm{GL}(n, I\!R)$ formado pelas matrizes triangulares superiores com entradas positivas na diagonal, ou seja

$$\mathrm{T}_+ = \big\{(a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, I\!R) : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j,\ a_{ii} > 0,\ i, j = 1, \ldots, n\big\}.$$

Daí é fácil ver que obtemos um difeomorfismo

$$\mathrm{GL}(n, I\!R) \ni A \longmapsto \big(r(A), r(A)^{-1}A\big) \in \mathrm{O}(n) \times \mathrm{T}_+. \tag{3.2.31}$$

Temos que (3.2.31) se restringe a um difeomorfismo de $\mathrm{GL}_+(n, I\!R)$ sobre $\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{T}_+$. Segue do Exemplo 3.2.27 que $\mathrm{GL}_+(n, I\!R)$ é conexo e que $\mathrm{GL}(n, I\!R)$ possui duas componentes conexas: $\mathrm{GL}_+(n, I\!R)$ e seu complementar.

Observação 3.2.29. É possível na verdade mostrar que $\mathrm{GL}_+(n, I\!R)$ é conexo por um método completamente elementar, usando o fato que toda matriz inversível se escreve como produto de matrizes correspondentes à *operações elementares de escalonamento*. Daí a aplicação r definida a partir do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt nos fornece outra demonstração de que $\mathrm{SO}(n)$ é conexo.

Exemplo 3.2.30. Mostremos que o grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é conexo e que

$$\pi_1(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}.$$

Usamos a mesma idéia do Exemplo 3.2.28; observe que podemos também definir uma versão do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para bases de $\mathbb{C}^n$. Obtemos então um difeomorfismo:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \ni A \longmapsto \big(r(A), r(A)^{-1}A\big) \in \mathrm{U}(n) \times \mathrm{T}_+(\mathbb{C}),$$

onde $\mathrm{T}_+(\mathbb{C})$ denota o subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ formado pelas matrizes triangulares superiores com entradas reais positivas na diagonal:

$$\mathrm{T}_+(\mathbb{C}) = \big\{(a_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j,\\ a_{ii} \in I\!R \text{ e } a_{ii} > 0,\ i, j = 1, \ldots, n\big\}.$$

Daí segue do Exemplo 3.2.26 que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é conexo e que $\pi_1(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ para $n \geq 1$; mais explicitamente, temos que a inclusão $\mathfrak{i}\colon \mathrm{U}(n) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ induz um isomorfismo

$$\mathfrak{i}_*\colon \pi_1(\mathrm{U}(n), 1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), 1).$$

Observação 3.2.31. A conectividade de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ também pode ser mostrada por um método mais elementar, usando escalonamento de matrizes. Daí o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt nos fornece outra demonstração de que $\mathrm{U}(n)$ é conexo (vide Observação 3.2.29).

Exemplo 3.2.32. Consideramos agora os grupos $\mathrm{SL}(n, I\!R)$ e $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Temos um isomorfismo de grupos de Lie:

$$\mathrm{SL}(n, I\!R) \times I\!R^+ \ni (T, c) \longmapsto cT \in \mathrm{GL}_+(n, I\!R),$$

onde $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ é visto como um grupo multiplicativo; segue então do Exemplo 3.2.28 que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é conexo e que a inclusão $\mathfrak{i}\colon \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ induz um isomorfismo:

$$\mathfrak{i}_*\colon \pi_1(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), 1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}), 1).$$

O grupo $\pi_1(\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}))$ será calculado no Exemplo 3.2.35 a seguir.

Passamos ao caso complexo. Para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ definimos uma matriz diagonal:

$$\sigma(z) = \begin{pmatrix} z & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C});$$

obtemos então um difeomorfismo (mas *não* um isomorfismo):

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^+ \times S^1 \ni (T, c, z) \longmapsto \sigma(cz)T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Segue então do Exemplo 3.2.30 que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ é conexo e que:

$$\pi_1(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})) \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \pi_1(\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})),$$

donde vemos que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ é simplesmente conexo.

Para calcular o grupo fundamental do grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n)$ precisamos do seguinte lema.

LEMA 3.2.33. *Se $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denota a esfera unitária então, para todo $x_0 \in S^n$, temos $\pi_k(S^n, x_0) = 0$ para $0 \le k < n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\phi \in \Omega^k_{x_0}(S^n)$. Se ϕ não é sobrejetora então existe $x \in S^n$ com $\mathrm{Im}(\phi) \subset S^n\setminus\{x\}$; mas $S^n\setminus\{x\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ por projeção estereográfica e daí $[\phi] = [\mathfrak{o}_{x_0}]$. Resta então mostrar que qualquer $\phi \in \Omega^k_{x_0}(S^n)$ é homotópica em $\Omega^k_{x_0}(S^n)$ a uma aplicação que não é sobrejetora.

Seja dado $\varepsilon > 0$; sabe-se que existe uma aplicação diferenciável[2] $\psi\colon I^k \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\|\phi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in I^k$ (vide [**36**, Teorema 10, §5, Capítulo 7]). Seja $\xi\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ uma aplicação diferenciável tal que $\xi(s) = 0$ para $|s| \le \varepsilon$ e $\xi(s) = 1$ para $|s| \ge 2\varepsilon$. Defina $\rho\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ fazendo

$$\rho(x) = \xi(\|x - x_0\|)(x - x_0) + x_0, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1};$$

daí ρ é diferenciável em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\rho(x) = x_0$ para $\|x - x_0\| \le \varepsilon$ e $\|\rho(x) - x\| \le 2\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Segue que $\rho \circ \psi\colon I^k \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação diferenciável tal que $(\rho \circ \psi)(\partial I^k) \subset \{x_0\}$ e $\|(\rho \circ \psi)(t) - \phi(t)\| \le 3\varepsilon$ para todo $t \in I^k$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ com $3\varepsilon < 1$ então fica bem definida uma homotopia $H\colon \phi \cong \theta$ em $\Omega^k_{x_0}(S^n)$ fazendo:

$$H_s(t) = \frac{(1 - s)\phi(t) + s(\rho \circ \psi)(t)}{\|(1 - s)\phi(t) + s(\rho \circ \psi)(t)\|}, \quad t \in I^k,\ s \in I,$$

[2] A diferenciabilidade de uma aplicação ψ definida num subconjunto não necessariamente aberto de $\mathbb{R}^k$ significa que a aplicação ψ admite uma extensão diferenciável a um aberto contendo seu domínio.

onde $\theta(t) = (\rho \circ \psi)(t)/\|(\rho \circ \psi)(t)\|$, $t \in I^k$, é uma aplicação diferenciável; como $k < n$, segue que θ não pode ser sobrejetora, já que sua imagem tem medida nula em S^n (vide [**36**, §2, Capítulo 6]). $\square$

EXEMPLO 3.2.34. O grupo $\mathrm{SO}(1)$ é trivial e portanto simplesmente conexo; o grupo $\mathrm{SO}(2)$ é isomorfo ao círculo unitário S^1 (vide Exemplo 3.2.27) e portanto:

$$\pi_1(\mathrm{SO}(2)) \cong \mathbb{Z}.$$

Para $n \geq 3$ o Lema 3.2.33 nos diz que $\pi_2(S^n) = 0$, donde a seqüência exata de homotopia da fibração (3.2.30) fica:

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SO}(n), 1) \xrightarrow[\cong]{\mathfrak{i}_*} \pi_1(SO(n+1), 1) \longrightarrow 0$$

onde $\mathfrak{i}_*$ é induzida pela inclusão $\mathfrak{i}\colon \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n+1)$; segue que $\pi_1(\mathrm{SO}(n))$ é isomorfo a $\pi_1(\mathrm{SO}(n+1))$. A seguir mostraremos que $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, donde seguirá então que

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \cong \mathbb{Z}_2, \quad n \geq 3.$$

Considere o produto interno g na álgebra de Lie $\mathrm{su}(2)$ definido por

$$g(X, Y) = \mathrm{tr}(XY^*), \quad X, Y \in \mathrm{su}(2),$$

onde aqui Y^* denota a transposta conjugada da matriz Y e $\mathrm{tr}(U)$ denota o traço de uma matriz U; considere a *representação adjunta* de $\mathrm{SU}(2)$:

$$\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(\mathrm{su}(2), g) \tag{3.2.32}$$

dada por $\mathrm{Ad}(A) \cdot X = AXA^{-1}$ para $A \in \mathrm{SU}(2)$, $X \in \mathrm{su}(2)$; é fácil ver que o endomorfismo linear $\mathrm{Ad}(A)$ de $\mathrm{su}(2)$ é realmente g-ortogonal para todo $A \in \mathrm{SU}(2)$ e que (3.2.32) é um homomorfismo de grupos de Lie. Obviamente $\mathrm{SO}(\mathrm{su}(2), g)$ é isomorfo a $\mathrm{SO}(3)$.

Um cálculo direto mostra que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ e como o domínio e o contra-domínio de (3.2.32) tem a mesma dimensão segue que a imagem de (3.2.32) é um subgrupo aberto de $\mathrm{SO}(\mathrm{su}(2), g)$; como $\mathrm{SO}(\mathrm{su}(2), g)$ é conexo (vide Exemplo 3.2.27), concluímos que (3.2.32) é sobrejetora e é portanto um recobrimento. Como $\mathrm{SU}(2)$ é simplesmente conexo (vide Exemplo 3.2.25), segue do Exemplo 3.2.21 que $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, tendo em mente a ação de $\mathbb{Z}_2 \cong \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ em $\mathrm{SU}(2)$ por translação. O elemento não trivial de $\pi_1(\mathrm{SO}(3), 1)$ coincide com a classe de homotopia de qualquer laço da forma $\mathrm{Ad} \circ \gamma$, onde $\gamma\colon I \to \mathrm{SU}(2)$ é uma curva ligando Id a $-\mathrm{Id}$.

EXEMPLO 3.2.35. O difeomorfismo (3.2.31) mostra que a inclusão $\mathfrak{i}$ de $\mathrm{SO}(n)$ em $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$ induz um isomorfismo

$$\mathfrak{i}_*\colon \pi_1(\mathrm{SO}(n), 1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}), 1). \tag{3.2.33}$$

Segue do Exemplo 3.2.34 que $\pi_1(\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}))$ é trivial para $n = 1$, isomorfo a $\mathbb{Z}$ para $n = 2$ e isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ para $n \geq 3$.

Exemplo 3.2.36. Mostremos que o grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ é conexo para todo $n \ge 1$. Seja ω a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ (vide (1.4.5)) e seja Λ_+ o *Grassmanniano de Lagrangeanos orientados* do espaço simplético $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$, ou seja:

$$\Lambda_+ = \{(L,\mathcal{O}) : L \subset \mathbb{R}^{2n} \text{ Lagrangeano e } \mathcal{O} \text{ orientação em } L\}.$$

Obtemos então uma ação do grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ no conjunto Λ_+ fazendo $T\cdot(L,\mathcal{O}) = (T(L),\mathcal{O}')$, onde $\mathcal{O}'$ é a orientação em $T(L)$ que torna $T|_L\colon L \to T(L)$ um isomorfismo positivamente orientado. Pela Observação 1.4.29 temos que a restrição dessa ação ao grupo unitário $\mathrm{U}(n)$ é transitiva. Considere o Lagrangeano $L_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n$ e seja $\mathcal{O}$ a orientação em L_0 correspondente à base canônica de $\mathbb{R}^n$; daí o subgrupo de isotropia de $(L_0,\mathcal{O})$ relativo à ação de $\mathrm{U}(n)$ é $\mathrm{SO}(n)$. O subgrupo de isotropia de $(L_0,\mathcal{O})$ relativo à ação de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ será denotado por $\mathrm{Sp}_+(2n,\mathbb{R},L_0)$. Em (1.4.6) e (1.4.7) demos uma descrição explícita das representações matriciais dos elementos de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$; a partir daí é fácil ver que $\mathrm{Sp}_+(2n,\mathbb{R},L_0)$ consiste das matrizes da forma:

$$T = \begin{pmatrix} A & A\circ S \\ 0 & A^{*-1}\end{pmatrix},\quad A \in \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}),\ S \text{ matriz simétrica } n\times n, \tag{3.2.34}$$

onde A^* denota a transposta da matriz A. Segue que temos um difeomorfismo:

$$\mathrm{Sp}_+(2n,\mathbb{R},L_0) \ni T \longmapsto (A,S) \in \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}) \times \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2.35}$$

onde A e S são definidas por (3.2.34). Temos o seguinte diagrama comutativo de bijeções:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n) \arrow[rr, "\bar{\mathfrak{i}}"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{Sp}_+(2n,\mathbb{R},L_0) \arrow[dl, "\beta_2"] \\ & \Lambda_+ & \end{tikzcd}$$

onde as aplicações β_1 e β_2 são induzidas respectivamente pelas ações de $\mathrm{U}(n)$ e de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ em Λ_+ e $\bar{\mathfrak{i}}$ é induzida da inclusão $\mathfrak{i}\colon \mathrm{U}(n) \to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ por passagem ao quociente; temos que $\bar{\mathfrak{i}}$ é um difeomorfismo. Obtemos então uma fibração

$$p\colon \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{Sp}_+(2n,\mathbb{R},L_0) \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n) \tag{3.2.36}$$

cuja fibra típica é $\mathrm{Sp}_+(2n,\mathbb{R},L_0) \cong \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}) \times \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Exemplo 3.2.28 essa fibra típica é conexa e pelo Exemplo 3.2.26 a base $\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)$ é conexa. Segue agora facilmente da seqüência exata de homotopia da fibração p que o grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ é conexo.

Exemplo 3.2.37. Vamos agora mostrar que o grupo fundamental do grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$. A partir da seqüência exata de homotopia da fibração (3.2.36) e do difeomorfismo (3.2.35) obtemos uma seqüência exata:

$$\pi_1(\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})) \xrightarrow{p_*} \pi_1\big(\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)\big) \longrightarrow 0 \tag{3.2.37}$$

onde ι_* é induzida pela aplicação $\iota\colon \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ dada por:

$$\iota(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}, \quad A \in \mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R}).$$

Mostremos em primeiro lugar que a aplicação ι_* é nula; temos o seguinte diagrama comutativo (vide (3.2.29) e (3.2.33)):

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[rr, bend left, "0"] & \pi_1(\mathrm{U}(n)) \arrow[r, "\det_*", "\cong"'] \arrow[d] & \pi_1(S^1) \\
\pi_1(\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})) \arrow[r, "\iota_*"'] & \pi_1(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})) &
\end{tikzcd} \tag{3.2.38}$$

onde as flechas sem identificação são induzidas por inclusão[3] . Uma análise simples do diagrama (3.2.38) mostra que $\iota_* = 0$.

A seqüência exata (3.2.37) implica agora que p_* é um isomorfismo de $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}))$ sobre o grupo $\pi_1\big(\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)\big)$; calculemos esse grupo. Considere a aplicação quociente:

$$q\colon \mathrm{U}(n) \longrightarrow \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n);$$

temos que q é uma fibração. Obtemos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & \pi_1(\mathrm{U}(n)) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "\det_*", "\cong"'] & \pi_1\big(\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)\big) \arrow[r] & 0 \\
& \pi_1(S^1) & &
\end{tikzcd} \tag{3.2.39}$$

A linha horizontal superior em (3.2.39) é parte da seqüência exata de homotopia da fibração q; segue que q_* é um isomorfismo. Finalmente, denotando por $\mathfrak{i}$ a inclusão de $\mathrm{U}(n)$ em $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ obtemos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})) \arrow[dr, "p_*", "\cong"'] & \\
\pi_1(\mathrm{U}(n)) \arrow[ur, "\mathfrak{i}_*"] \arrow[rr, "\cong", "q_*"'] & & \pi_1\big(\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)\big)
\end{tikzcd}$$

donde segue que $\mathfrak{i}_*$ é um isomorfismo:

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathrm{U}(n),1) \xrightarrow[\cong]{\mathfrak{i}_*} \pi_1(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}),1).$$

[3]A inclusão de $\mathrm{U}(n)$ em $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ depende da identificação de matrizes complexas $n \times n$ com matrizes reais $2n \times 2n$; vide Observação 1.2.10.

3.3. Os Grupos de Homologia Singular

Nesta seção fazemos uma breve exposição da definição dos grupos de homologia singular (absoluta e relativa) de um espaço topológico X; descrevemos a seqüência exata de homologia de um par de espaços topológicos.

Para cada $p \geq 0$ denotaremos por $(e_i)_{i=1}^p$ a base canônica de $I\!R^p$ e por $e_0 = 0$ o vetor nulo de $I\!R^p$; por $I\!R^0$ entendemos o espaço nulo $\{0\}$. Note que temos uma pequena ambiguidade de notação aqui, já que se $q \geq p \geq i$ então e_i denota tanto um vetor de $I\!R^p$ quanto um vetor de $I\!R^q$; essa ambiguidade não causará problemas e o leitor pode, se achar conveniente, considerar identificações $I\!R^0 \subset I\!R^1 \subset I\!R^2 \subset \cdots \subset I\!R^\infty$.

Dado $p \geq 0$, o *p-ésimo simplexo padrão* é definido como a envoltória convexa Δ_p do conjunto $\{e_i\}_{i=0}^p$ em $I\!R^p$; mais explicitamente:

$$\Delta_p = \Big\{ \sum\nolimits_{i=0}^p t_i e_i : \sum\nolimits_{i=0}^p t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, p \Big\}.$$

Observe que Δ_0 é simplesmente o ponto $\{0\}$ e Δ_1 é o intervalo unitário $I = [0, 1]$.

Na definição a seguir recordamos a terminologia que precisaremos sobre grupos abelianos livres.

Definição 3.3.1. Se G é um grupo abeliano então uma *base*[4] de G é uma família $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tal que todo $g \in G$ se escreve de modo único na forma $g = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} n_\alpha b_\alpha$, sendo cada $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ e $n_\alpha = 0$ exceto para um número finito de índices $\alpha \in \mathcal{A}$; se G' é outro grupo abeliano então um homomorfismo $f \colon G \to G'$ fica totalmente determinado quando especificamos seu valor nos elementos de uma base de G. Um grupo abeliano que admite uma base é chamado *livre*.

Se $\mathcal{A}$ é um conjunto qualquer, o *grupo abeliano livre* $G_{\mathcal{A}}$ gerado por $\mathcal{A}$ é o grupo de todas as funções quase-nulas $N \colon \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, i.e., $N(\alpha) = 0$ exceto para um número finito de índices $\alpha \in \mathcal{A}$; a operação é definida da maneira óbvia $(N_1 + N_2)(\alpha) = N_1(\alpha) + N_2(\alpha)$. Identificamos então cada $\alpha \in \mathcal{A}$ com a função $N_\alpha \in G_{\mathcal{A}}$ tal que $N_\alpha(\alpha) = 1$ e $N_\alpha(\beta) = 0$ para $\beta \in \mathcal{A}$, $\beta \neq \alpha$; daí $G_{\mathcal{A}}$ é de fato um grupo abeliano livre e $\mathcal{A} \subset G_{\mathcal{A}}$ é uma base para $G_{\mathcal{A}}$.

Definição 3.3.2. Para $p \geq 0$, um *p-simplexo singular* no espaço topológico X é uma aplicação contínua arbitrária

$$T \colon \Delta_p \longrightarrow X.$$

Denotamos por $\mathfrak{S}_p(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de todos os p-simplexos singulares em X; os elemento de $\mathfrak{S}_p(X)$ são chamados *p-cadeias singulares* em X.

Se $p = 0$ identificamos os p-simplexos singulares em X com os pontos de X e daí $\mathfrak{S}_0(X)$ é o grupo abeliano livre gerado por X. Se $p < 0$ convencionamos $\mathfrak{S}_p(X) = 0$.

[4]Na verdade um grupo abeliano é o mesmo que um $\mathbb{Z}$-*módulo* e daí a terminologia explicada aqui é compatível com a terminologia usual na teoria de módulos.

Cada p-cadeia singular $c \in \mathfrak{S}_p(X)$ pode ser escrita como:

$$c = \sum_{\substack{T \ p\text{-simplexo} \\ \text{singular}}} n_T \cdot T,$$

onde $n_T \in \mathbb{Z}$ e $n_T = 0$ exceto para um número finito de p-simplexos singulares T; os coeficientes n_T são unicamente determinados por c.

Dados um espaço vetorial real de dimensão finita V e dados $v_0, \ldots, v_p \in V$ denotaremos por $\ell(v_0, \ldots, v_p)$ o p-simplexo singular em V definido por:

$$\ell(v_0, \ldots, v_p) \cdot \sum_{i=0}^{p} t_i e_i = \sum_{i=0}^{p} t_i v_i, \tag{3.3.1}$$

sempre que cada $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{p} t_i = 1$; note que $\ell(v_0, \ldots, v_p)$ é a *única aplicação afim* que leva e_i em v_i para cada $i = 0, \ldots, p$.

Para cada $p \in \mathbb{Z}$ vamos agora definir um homomorfismo

$$\partial_p \colon \mathfrak{S}_p(X) \longrightarrow \mathfrak{S}_{p-1}(X).$$

Se $p \leq 0$ fazemos $\partial_p = 0$. Para $p > 0$, como $\mathfrak{S}_p(X)$ é livre, basta definir ∂_p sobre uma base de $\mathfrak{S}_p(X)$; definimos então $\partial_p(T)$ sempre que T for um p-simplexo singular em X fazendo:

$$\partial_p(T) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, T \circ \ell(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_p), \tag{3.3.2}$$

onde $\widehat{e_i}$ indica que o termo e_i foi omitido da seqüência. A expressão que aparece ao lado da somatória em (3.3.2) é chamada a *face oposta ao i-ésimo vértice* (ou a *i-ésima face*) do p-simplexo singular T; se $c \in \mathfrak{S}_p(X)$ é uma p-cadeia singular então dizemos que $\partial_p(c)$ é o *bordo* de c. Observe, por exemplo, que se $T \colon [0,1] \to X$ é um 1-simplexo singular então seu bordo é dado por $\partial_1(T) = T(1) - T(0)$.

Obtivemos então uma seqüência de grupos abelianos e homomorfismos:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} \mathfrak{S}_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \mathfrak{S}_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \tag{3.3.3}$$

A seqüência (3.3.3) tem a propriedade que a composta de duas flechas consecutivas é nula:

LEMA 3.3.3. *Para $p \in \mathbb{Z}$ temos $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $p \leq 1$ o resultado é trivial; se $p \geq 2$ basta mostrar que $\partial_{p-1}(\partial_p(T)) = 0$ para todo p-simplexo singular T. Observando que

$$\ell(v_0, \ldots, v_q) \circ \ell(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_q) = \ell(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_q)$$

calculamos então:

$$\begin{aligned} \partial_{p-1}(\partial_p(T)) = {} & \sum_{j<i} (-1)^{j+i} \, T \circ \ell(e_0, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_p) \\ & + \sum_{j>i} (-1)^{j+i-1} \, T \circ \ell(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, e_p) = 0. \end{aligned}$$

□

Temos a seguinte definição geral.

DEFINIÇÃO 3.3.4. Um *complexo de cadeia* é uma família $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_p, \delta_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ onde cada $\mathfrak{C}_p$ é um grupo abeliano e cada $\delta_p \colon \mathfrak{C}_p \to \mathfrak{C}_{p-1}$ é um homomorfismo, de modo que $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$; o homomorfismo δ_p é chamado o *p-ésimo operador bordo* do complexo de cadeia $\mathfrak{C}$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ definimos:

$$Z_p(\mathfrak{C}) = \mathrm{Ker}(\delta_p), \quad B_p(\mathfrak{C}) = \mathrm{Im}(\delta_{p+1}),$$

e dizemos que $Z_p(\mathfrak{C})$, $B_p(\mathfrak{C})$ são respectivamente o *grupo dos p-ciclos* e o *grupo dos p-bordos* do complexo $\mathfrak{C}$. É claro que $B_p(\mathfrak{C}) \subset Z_p(\mathfrak{C})$ e portanto podemos definir para cada $p \in \mathbb{Z}$:

$$H_p(\mathfrak{C}) = Z_p(\mathfrak{C})/B_p(\mathfrak{C});$$

dizemos que $H_p(\mathfrak{C})$ é o *p-ésimo grupo de homologia* do complexo $\mathfrak{C}$.

Se $c \in Z_p(\mathfrak{C})$ é um p-ciclo denotamos por $c + B_p(\mathfrak{C})$ sua classe de equivalência em $H_p(\mathfrak{C})$; dizemos que $c + B_p(\mathfrak{C})$ é a *classe de homologia* determinada por c. Se $c_1, c_2 \in Z_p(\mathfrak{C})$ determinam a mesma classe de homologia (ou seja, se $c_1 - c_2 \in B_p(\mathfrak{C})$) dizemos que c_1 e c_2 são ciclos *homólogos*.

O Lema 3.3.3 nos diz então que $\mathfrak{S}(X) = (\mathfrak{S}_p(X), \partial_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ é um complexo de cadeia; dizemos que $\mathfrak{S}(X)$ é o *complexo singular* do espaço topológico X. Escrevemos:

$$Z_p(\mathfrak{S}(X)) = Z_p(X), \quad B_p(\mathfrak{S}(X)) = B_p(X), \quad H_p(\mathfrak{S}(X)) = H_p(X);$$

chamamos $Z_p(X)$, $B_p(X)$ e $H_p(X)$ respectivamente o *grupo dos p-ciclos singulares*, *o grupo dos p-bordos singulares* e o *p-ésimo grupo de homologia singular* do espaço X. Obviamente $H_p(X) = 0$ para $p < 0$ e $H_0(X) = \mathfrak{S}_0(X)/B_0(X)$.

Defina um homomorfismo

$$\varepsilon \colon \mathfrak{S}_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{3.3.4}$$

fazendo $\varepsilon(x) = 1$ para todo 0-simplexo singular x em X. É fácil ver que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$; de fato, basta ver que $\varepsilon(\partial_1(T)) = 0$ para todo 1-simplexo singular T em X. Obtemos então um complexo de cadeia:

$$\begin{gathered} \cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} \mathfrak{S}_p(X) \xrightarrow{\partial_p} \mathfrak{S}_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \\ \cdots \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{S}_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{gathered} \tag{3.3.5}$$

DEFINIÇÃO 3.3.5. O homomorfismo (3.3.4) é chamado o *aumento* do complexo singular $\mathfrak{S}(X)$; o complexo de cadeia em (3.3.5), denotado por $(\mathfrak{S}(X), \varepsilon)$, é chamado o *complexo singular aumentado* do espaço X. Os grupos de p-ciclos, p-bordos e o p-ésimo grupo de homologia de $(\mathfrak{S}(X), \varepsilon)$ são denotados por $\tilde{Z}_p(X)$, $\tilde{B}_p(X)$ e $\tilde{H}_p(X)$ respectivamente; dizemos que $\tilde{H}_p(X)$ é o *p-ésimo grupo de homologia singular reduzida* de X.

É claro que para $p \geq 1$ temos:

$$\tilde{Z}_p(X) = Z_p(X), \quad \tilde{B}_p(X) = B_p(X), \quad \tilde{H}_p(X) = H_p(X).$$

A partir de agora, por simplicidade, não indicaremos mais o índice p no operador ∂_p e escrevemos simplesmente:

$$\partial_p = \partial, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

EXEMPLO 3.3.6. Se X é o espaço vazio então obviamente $\mathfrak{S}_p(X) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$ e portanto $H_p(X) = 0$ para todo p e $\tilde{H}_p(X) = 0$ para todo $p \neq -1$; por outro lado, temos $\tilde{H}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$.

Se X é não vazio então qualquer 0-simplexo singular $x_0 \in X$ é tal que $\varepsilon(x_0) = 1$ e portanto ε é sobrejetor; daí $\tilde{H}_{-1}(X) = 0$. Quanto à relação entre $H_0(X)$ e $\tilde{H}_0(X)$ é fácil ver que podemos identificar $\tilde{H}_0(X)$ com um subgrupo de $H_0(X)$ e que:

$$H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \big[\mathbb{Z} \cdot (x_0 + B_0(X))\big] \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z},$$

onde $\mathbb{Z} \cdot (x_0 + B_0(X))$ é o subgrupo (cíclico infinito) gerado pela classe de homologia de x_0 em $H_0(X)$.

EXEMPLO 3.3.7. Se $X \neq \emptyset$ é conexo por arcos então quaisquer dois 0-simplexos singulares $x_0, x_1 \in X$ são homólogos; de fato, se $T\colon [0,1] \to X$ é uma curva ligando x_0 a x_1 então T é um 1-simplexo singular e $\partial T = x_1 - x_0 \in B_0(X)$. Logo a classe de homologia de qualquer $x_0 \in X$ gera $H_0(X)$ e como $\varepsilon(x_0) = 1$ segue que nenhum múltiplo não nulo de x_0 é um bordo; portanto:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad \tilde{H}_0(X) = 0.$$

EXEMPLO 3.3.8. Se X não é conexo por arcos podemos escrever $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, onde cada X_α é uma componente conexa por arcos de X. Daí todo simplexo singular em X tem imagem contida em alguma componente X_α e portanto:

$$\mathfrak{S}_p(X) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathfrak{S}_p(X_\alpha),$$

donde segue que:

$$H_p(X) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} H_p(X_\alpha).$$

Em particular, segue do Exemplo 3.3.7 que:

$$H_0(X) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}.$$

Compare esse resultado com a Observação 3.2.5.

EXEMPLO 3.3.9. Suponha que $X \subset I\!R^n$ é um conjunto estrelado no ponto $w \in X$. Para cada p-simplexo singular T em X definimos um $(p+1)$-simplexo singular $[T, w]$ em X de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} I \times \Delta_p \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ \Delta_{p+1} \arrow[r, "{[T,w]}"'] & X \end{tikzcd}$$

comuta, onde σ e τ são definidos por:

$$\sigma(s,t) = (1-s)t + s\, e_{p+1}, \quad \tau(s,t) = (1-s)T(t) + sw, \quad t \in \Delta_p,\ s \in I;$$

geometricamente, o $(p+1)$-simplexo singular $[T, w]$ coincide com T na face $\Delta_p \subset \Delta_{p+1}$, leva o vértice e_{p+1} sobre w e é afim no segmento ligando t a e_{p+1} para todo $t \in \Delta_p$.

A aplicação $T \mapsto [T, w]$ se estende a um homomorfismo

$$\mathfrak{S}_p(X) \ni c \longmapsto [c, w] \in \mathfrak{S}_{p+1}(X).$$

É fácil ver que para toda p-cadeia singular $c \in \mathfrak{S}_p(X)$ temos:

$$\partial[c, w] = \begin{cases} [\partial c, w] + (-1)^{p+1} c, & p \geq 1 \\ \varepsilon(c)w - c, & p = 0; \end{cases} \tag{3.3.6}$$

de fato, basta considerar o caso que $c = T$ é um p-simplexo singular e aí (3.3.6) segue de uma análise elementar da definição de $[T, w]$ e da definição do operador bordo. Em particular temos $\partial[c, w] = (-1)^{p+1}c$ para todo $c \in \tilde{Z}_p(X)$ e portanto $c \in \tilde{B}_p(X)$; concluímos que, se X é estrelado então:

$$\tilde{H}_p(X) = 0, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

DEFINIÇÃO 3.3.10. Sejam $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_p, \delta_p)$, $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}'_p, \delta'_p)$ complexos de cadeia; uma *aplicação de cadeia* $\phi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ é uma seqüência de homomorfismos $\phi_p\colon \mathfrak{C}_p \to \mathfrak{C}'_p$, $p \in \mathbb{Z}$, tal que para todo p o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}_p \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "\phi_p"'] & \mathfrak{C}_{p-1} \arrow[d, "\phi_{p-1}"] \\ \mathfrak{C}'_p \arrow[r, "\delta'_p"'] & \mathfrak{C}'_{p-1} \end{tikzcd}$$

comuta; escrevemos em geral apenas ϕ em vez de ϕ_p. É fácil ver que se ϕ é uma aplicação de cadeia então $\phi(Z_p(\mathfrak{C})) \subset Z_p(\mathfrak{C}')$ e $\phi(B_p(\mathfrak{C})) \subset B_p(\mathfrak{C}')$ de modo que ϕ induz por passagem ao quociente um homomorfismo

$$\phi_*\colon H_p(\mathfrak{C}) \longrightarrow H_p(\mathfrak{C}');$$

dizemos que ϕ_* é a *aplicação induzida em homologia* pela aplicação de cadeia ϕ.

É claro que se $\phi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ e $\psi\colon \mathfrak{C}' \to \mathfrak{C}''$ são aplicações de cadeia então $(\psi\circ\phi)_* = \psi_*\circ\phi_*$ e que se Id é a identidade de $\mathfrak{C}$ (i.e., Id_p é a identidade de $\mathfrak{C}_p$ para cada p) então Id_* é a identidade de $H_p(\mathfrak{C})$ para cada p; segue que se ϕ é um *isomorfismo de cadeias*, ou seja, cada ϕ_p é um isomorfismo de grupos, então ϕ_* é um isomorfismo entre os grupos de homologia e $(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$.

Se X, Y são espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ é uma aplicação contínua então definimos para cada $p \in \mathbb{Z}$ um homomorfismo

$$f_\#\colon \mathfrak{S}_p(X) \longrightarrow \mathfrak{S}_p(Y)$$

fazendo $f_\#(T) = f \circ T$ para cada p-simplexo singular T em X. É fácil ver que $f_\#$ é uma aplicação de cadeia; dizemos que $f_\#$ é a *aplicação de cadeia induzida* por f. É claro que dadas aplicações contínuas $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ então $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ e que se Id é a identidade de X então $\mathrm{Id}_\#$ é a identidade de $\mathfrak{S}(X)$; em particular, se f é um homeomorfismo então $f_\#$ é um isomorfismo de cadeia e $(f^{-1})_\# = (f_\#)^{-1}$. Temos que a aplicação de cadeia $f_\#$ induz um homomorfismo

$$f_*\colon H_p(X) \longrightarrow H_p(Y)$$

entre os grupos de homologia singular de X e Y que será denotado simplesmente por f_*.

Observação 3.3.11. Se A é um subespaço de X então podemos identificar o conjunto dos p-simplexos singulares em A com um subconjunto do conjunto dos p-simplexos singulares de X; daí $\mathfrak{S}_p(A)$ identifica-se com um subgrupo de $\mathfrak{S}_p(X)$. Se $\mathfrak{i}\colon A \to X$ denota a inclusão então $\mathfrak{i}_\#$ é simplesmente a inclusão de $\mathfrak{S}_p(A)$ em $\mathfrak{S}_p(X)$. Observe porém que a aplicação induzida em homologia $\mathfrak{i}_*$ em geral *não* é injetora e não existe nenhuma identificação de $H_p(A)$ com um subgrupo de $H_p(X)$.

Recorde que (X, A) é dito um par de espaços topológicos quando X é um espaço topológico e $A \subset X$ é um subespaço. Definimos então o *complexo singular* $\mathfrak{S}(X, A)$ do par (X, A) fazendo:

$$\mathfrak{S}_p(X, A) = \mathfrak{S}_p(X)/\mathfrak{S}_p(A);$$

o operador bordo de $\mathfrak{S}(X, A)$ é definido a partir do operador bordo de $\mathfrak{S}(X)$ por passagem ao quociente. É claro que $\mathfrak{S}(X, A)$ é então um complexo de cadeia; escrevemos:

$$H_p(\mathfrak{S}(X, A)) = H_p(X, A).$$

Chamamos $H_p(X, A)$ o *p-ésimo grupo de homologia relativa* do par (X, A).

Se $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação de pares então a aplicação de cadeia $f_\#$ passa ao quociente e define uma aplicação de cadeia

$$f_\#\colon \mathfrak{S}(X, A) \longrightarrow \mathfrak{S}(Y, B)$$

que será também denotada por $f_\#$; daí $f_\#$ induz um homomorfismo entre os grupos de homologia relativa que é denotado por f_*. É claro que se $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ e $g\colon (Y, B) \to (Z, C)$ são aplicações de pares então $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ e que se Id é a identidade de X então $\mathrm{Id}_\#$ é a identidade de $\mathfrak{S}(X, A)$; também, se $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ é um homeomorfismo de pares, i.e., f é um homeomorfismo de X sobre Y com $f(A) = B$ então $f_\#$ é um isomorfismo de cadeia.

OBSERVAÇÃO 3.3.12. O leitor pode pensar intuitivamente nos grupos de homologia relativa $H_p(X, A)$ como sendo os grupos de homologia reduzida $\tilde{H}_p(X/A)$ do espaço X/A obtido de X colapsando todos os pontos de A num único ponto. Isso é de fato um teorema, no caso que $A \subset X$ é fechado e é um *retrato por deformação* (vide Observação 3.3.27 adiante) de um aberto de X; a demonstração, porém, requer mais desenvolvimento da teoria (vide [**42**, Exercício 2, §39, Capítulo 4]).

EXEMPLO 3.3.13. Se A é o conjunto vazio então $\mathfrak{S}(X, A) = \mathfrak{S}(X)$ e portanto $H_p(X, A) = H_p(X)$ para todo $p \in \mathbb{Z}$; por isso, em geral não distinguimos o par $(X, \emptyset)$ do espaço X.

EXEMPLO 3.3.14. A aplicação identidade de X induz uma aplicação de pares

$$\mathfrak{q}\colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A); \tag{3.3.7}$$

daí $\mathfrak{q}_\#\colon \mathfrak{S}(X) \to \mathfrak{S}(X, A)$ é simplesmente a aplicação quociente. Definimos:

$$Z_p(X, A) = \mathfrak{q}_\#^{-1}\big(Z_p(\mathfrak{S}(X, A))\big), \quad B_p(X, A) = \mathfrak{q}_\#^{-1}\big(B_p(\mathfrak{S}(X, A))\big);$$

chamamos $Z_p(X, A)$ e $B_p(X, A)$ respectivamente o *grupo dos p-ciclos relativos* e o *grupo dos p-bordos relativos* do par (X, A). Mais explicitamente temos:

$$\begin{aligned} Z_p(X, A) &= \big\{c \in \mathfrak{S}_p(X) : \partial c \in \mathfrak{S}_{p-1}(A)\big\} = \partial^{-1}(\mathfrak{S}_{p-1}(A)),\\ B_p(X, A) &= \big\{\partial c + d : c \in \mathfrak{S}_{p+1}(X),\ d \in \mathfrak{S}_p(A)\big\} = B_p(X) + \mathfrak{S}_p(A); \end{aligned}$$

Note que:

$$Z_p(\mathfrak{S}(X, A)) = Z_p(X, A)/\mathfrak{S}_p(A), \quad B_p(\mathfrak{S}(X, A)) = B_p(X, A)/\mathfrak{S}_p(A);$$

segue da teoria elementar sobre quocientes de grupos que:

$$H_p(X, A) = H_p(\mathfrak{S}(X, A)) \cong Z_p(X, A)/B_p(X, A). \tag{3.3.8}$$

Dado $c \in Z_p(X, A)$, a classe de equivalência $c + B_p(X, A) \in H_p(X, A)$ é chamada a *classe de homologia determinada por c em* $H_p(X, A)$; se $c_1, c_2 \in Z_p(X, A)$ determinam a mesma classe de homologia em $H_p(X, A)$, i.e., se $c_1 - c_2 \in B_p(X, A)$ dizemos que c_1 e c_2 são *homólogos em* $\mathfrak{S}(X, A)$.

EXEMPLO 3.3.15. Se X é conexo por arcos e $A \neq \emptyset$ então como no Exemplo 3.3.7 concluímos que quaisquer dois 0-simplexos de X são homólogos entre si em $\mathfrak{S}(X, A)$; mas nesse caso todo ponto de A é um 0-simplexo singular homólogo a zero em $\mathfrak{S}(X, A)$, donde:

$$H_0(X, A) = 0.$$

Se X não é conexo por arcos então escrevemos $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$, onde cada X_α é uma componente conexa por arcos de X; escrevendo $A_\alpha = A \cap X_\alpha$

obtemos como no Exemplo 3.3.8:

$$\mathfrak{S}_p(X, A) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathfrak{S}_p(X_\alpha, A_\alpha);$$

daí segue diretamente que:

$$H_p(X, A) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} H_p(X_\alpha, A_\alpha).$$

No caso $p = 0$ obtemos em particular que:

$$H_0(X, A) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}'} \mathbb{Z},$$

onde $\mathcal{A}'$ é o conjunto dos índices $\alpha \in \mathcal{A}$ tais que $A_\alpha = \emptyset$.

Nosso objetivo agora é construir uma seqüência exata (recorde Definição 3.2.11) que relaciona os grupos de homologia $H_p(X)$, $H_p(A)$ e os grupos de homologia relativa $H_p(X, A)$.

Definição 3.3.16. Dados complexos de cadeia $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, dizemos que

$$0 \longrightarrow \mathfrak{C} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{D} \xrightarrow{\psi} \mathcal{E} \longrightarrow 0 \tag{3.3.9}$$

é uma *seqüência exata curta* de complexos de cadeia se ϕ e ψ são aplicações de cadeia e para cada $p \in \mathbb{Z}$ a seqüência de grupos abelianos e homomorfismos

$$0 \longrightarrow \mathfrak{C}_p \xrightarrow{\phi} \mathfrak{D}_p \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}_p \longrightarrow 0$$

é exata.

Temos o seguinte resultado da álgebra homológica.

Lema 3.3.17 (o lema Zig-Zag). *Dada uma seqüência exata curta* (3.3.9) *de complexos de cadeia existe uma seqüência exata de grupos abelianos e homomorfismos:*

$$\cdots \xrightarrow{\delta_*} H_p(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\phi_*} H_p(\mathfrak{D}) \xrightarrow{\psi_*} H_p(\mathcal{E}) \xrightarrow{\delta_*} H_{p-1}(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\phi_*} \cdots \tag{3.3.10}$$

onde ϕ_* e ψ_* são induzidas por ϕ e ψ respectivamente e o homomorfismo δ_* é definido por:

$$\delta_*\big(e + B_p(\mathcal{E})\big) = c + B_{p-1}(\mathfrak{C}), \quad e \in Z_p(\mathcal{E}), \tag{3.3.11}$$

onde $c \in \mathfrak{C}_{p-1}$ é escolhido de modo que $\phi(c) = \delta d$ e $d \in \mathfrak{D}_p$ é escolhido de modo que $\psi(d) = e$; a definição (3.3.11) *não depende das escolhas arbitrárias envolvidas.*

Demonstração. A prova é bastante elementar e baseia-se apenas numa análise exaustiva de casos e por isso será omitida; detalhes podem ser encontrados em [**42**, §24, Capítulo 3]. □

A seqüência exata (3.3.10) é conhecida como a *seqüência exata longa de homologia* correspondente à seqüência exata curta (3.3.9) de complexos de cadeia.

Voltando às considerações topológicas, se (X, A) é um par de espaços topológicos, temos uma seqüência exata curta de complexos de cadeia:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}(A) \xrightarrow{\mathfrak{i}_\#} \mathfrak{S}(X) \xrightarrow{\mathfrak{q}_\#} \mathfrak{S}(X, A) \longrightarrow 0 \tag{3.3.12}$$

onde $\mathfrak{i}_\#$ é induzida pela inclusão $\mathfrak{i}\colon A \to X$ e $\mathfrak{q}_\#$ é induzida por (3.3.7). Segue então diretamente do Lema Zig-Zag a seguinte:

PROPOSIÇÃO 3.3.18. *Dado um par de espaços topológicos* (X, A) *então existe uma seqüência exata*

(3.3.13)
$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_p(A) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*} H_p(X) \xrightarrow{\mathfrak{q}_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*} \cdots$$

onde $\mathfrak{i}_*$ *é induzida pela inclusão* $\mathfrak{i}\colon A \to X$, $\mathfrak{q}_*$ *é induzida por* (3.3.7) *e o homomorfismo* ∂_* *é definido por:*

$$\partial_*\big(c + B_p(X, A)\big) = \partial c + B_{p-1}(A), \quad c \in Z_p(X, A);$$

tal definição não depende das escolhas envolvidas. Se $A \neq \emptyset$ *temos também uma seqüência exata*

(3.3.14)
$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_p(A) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*} \tilde{H}_p(X) \xrightarrow{\mathfrak{q}_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{p-1}(A) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*} \cdots$$

cujas flechas são obtidas por restrição das flechas correspondentes na seqüência (3.3.13).

DEMONSTRAÇÃO. A seqüência (3.3.13) é obtida aplicando o Lema Zig-Zag à seqüência exata curta (3.3.12). Se $A \neq \emptyset$, substituímos $\mathfrak{S}(A)$ e $\mathfrak{S}(X)$ em (3.3.12) pelos correspondentes complexos aumentados; daí aplicamos o Lema Zig-Zag e obtemos a seqüência (3.3.14). □

A seqüência exata (3.3.13) é conhecida como a *seqüência exata longa em homologia* do par (X, A); a seqüência (3.3.14) é chamada a *seqüência exata longa em homologia reduzida* do par (X, A).

EXEMPLO 3.3.19. Se $A \neq \emptyset$ é homeomorfo a um subconjunto estrelado de $\mathbb{R}^n$ então $\tilde{H}_p(A) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$ (vide Exemplo 3.3.9); daí a seqüência exata longa em homologia reduzida do par (X, A) implica que a aplicação

$$\mathfrak{q}_*\colon \tilde{H}_p(X) \longrightarrow H_p(X, A)$$

é um isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Queremos agora demonstrar a *invariância homotópica da homologia singular*; mais explicitamente, queremos mostrar que se duas aplicações contínuas são homotópicas então elas induzem os mesmos homomorfismos nos grupos de homologia. Começamos com uma definição algébrica.

DEFINIÇÃO 3.3.20. Sejam $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_p, \delta_p)$, $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}'_p, \delta'_p)$ complexos de cadeia. Dadas aplicações de cadeia $\phi, \psi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ então uma *homotopia de cadeia* entre ϕ e ψ é uma seqüência $(D_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos $D_p\colon \mathfrak{C}_p \to \mathfrak{C}'_{p+1}$ tal que

$$\phi_p - \psi_p = \delta'_{p+1} \circ D_p + D_{p-1} \circ \delta_p, \tag{3.3.15}$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$; escrevemos nesse caso $D\colon \phi \cong \psi$ e dizemos que ϕ e ψ são *homotópicas*.

O lema seguinte é uma conseqüência trivial da fórmula (3.3.15).

LEMA 3.3.21. *Se duas aplicações de cadeia ϕ e ψ são homotópicas então ϕ e ψ induzem os mesmos homomorfismos em homologia, i.e., $\phi_* = \psi_*$.* □

Nosso objetivo agora é mostrar que se duas aplicações contínuas f, g são homotópicas (recorde Definição 3.1.1) então as aplicações de cadeia $f_\#$ e $g_\#$ são homotópicas. Para isso, considere as aplicações:

$$i_X\colon X \to I \times X, \quad j_X\colon X \to I \times X \tag{3.3.16}$$

definidas por $i_X(x) = (0, x)$ e $j_X(x) = (1, x)$ para todo $x \in X$, onde $I = [0, 1]$. Vamos mostrar primeiro que as aplicações de cadeia $(i_X)_\#$ e $(j_X)_\#$ são homotópicas:

LEMA 3.3.22. *Para todo espaço topológico X existe uma homotopia de cadeia $D_X\colon (i_X)_\# \cong (j_X)_\#$ onde i_X e j_X são dadas em* (3.3.16)*; além do mais, a regra $X \mapsto D_X$ pode ser escolhida de maneira* natural*, i.e., de modo que dada uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ então o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_p(X) & \xrightarrow{(D_X)_p} & \mathfrak{S}_{p+1}(I \times X) \\ {\scriptstyle (f_\#)_p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle ((\mathrm{Id}\times f)_\#)_p} \\ \mathfrak{S}_p(Y) & \xrightarrow[(D_Y)_p]{} & \mathfrak{S}_{p+1}(I \times Y) \end{array} \tag{3.3.17}$$

comuta para todo $p \in \mathbb{Z}$, onde $\mathrm{Id} \times f$ *é dada por $(t, x) \mapsto (t, f(x))$.*

DEMONSTRAÇÃO. Devemos para todo espaço topológico X e para todo $p \in \mathbb{Z}$ definir um homomorfismo

$$(D_X)_p\colon \mathfrak{S}_p(X) \longrightarrow \mathfrak{S}_{p+1}(I \times X);$$

para $p < 0$ obviamente fazemos $(D_X)_p = 0$. Para $p \geq 0$ denote por Id_p a aplicação identidade do espaço Δ_p; daí Id_p é um p-simplexo singular em Δ_p e portanto $\mathrm{Id}_p \in \mathfrak{S}_p(\Delta_p)$. O fato que a construção que procuramos de D_X deverá fazer o diagrama (3.3.17) comutar nos sugere a definição:

$$(D_X)_p(T) = ((\mathrm{Id} \times T)_\#)_p \circ (D_{\Delta_p})_p(\mathrm{Id}_p), \tag{3.3.18}$$

para todo p-simplexo singular $T\colon \Delta_p \to X$ (note que $T_\#(\mathrm{Id}_p) = T$); devemos então procurar a definição correta de

$$(D_{\Delta_p})_p(\mathrm{Id}_p) = a_p \in \mathfrak{S}_{p+1}(I \times \Delta_p), \tag{3.3.19}$$

para cada $p \geq 0$. Tendo em mente a definição de homotopia de cadeia (vide (3.3.15)), a nossa definição de a_p deverá ser feita de tal modo que a identidade

$$\partial a_p = (i_{\Delta_p})_\#(\mathrm{Id}_p) - (j_{\Delta_p})_\#(\mathrm{Id}_p) - (D_{\Delta_p})_{p-1} \circ \partial(\mathrm{Id}_p) \tag{3.3.20}$$

seja satisfeita para todo $p \geq 0$ (omitimos alguns índices para simplificar a notação); note que (3.3.20) equivale a:

$$\partial a_p = i_{\Delta_p} - j_{\Delta_p} - (D_{\Delta_p})_{p-1} \circ \partial(\mathrm{Id}_p). \tag{3.3.21}$$

Começamos construindo $a_0 \in \mathfrak{S}_1(I \times \Delta_0)$ satisfazendo (3.3.21), ou seja, a_0 deve satisfazer $\partial a_0 = i_{\Delta_0} - j_{\Delta_0}$; calculamos:

$$\varepsilon(i_{\Delta_0} - j_{\Delta_0}) = 0.$$

Como $\tilde{H}_0(I \times \Delta_0) = 0$ (vide Exemplo 3.3.9) vemos que é de fato possível obter a_0 com a propriedade desejada.

Procedemos agora por indução; seja $r \geq 1$. Suponha que $a_p \in \mathfrak{S}_{p+1}(I \times \Delta_p)$ tenha sido construído para $p = 0, \ldots, r-1$ de modo que a condição (3.3.21) seja satisfeita, sendo $(D_X)_p$ definido em (3.3.18) para todo espaço topológico X; é fácil ver então que o diagrama (3.3.17) comuta. Um cálculo simples usando (3.3.17), (3.3.19) e (3.3.21) mostra que:

$$\big((i_X)_\#\big)_p - \big((j_X)_\#\big)_p = \partial \circ (D_X)_p + (D_X)_{p-1} \circ \partial, \tag{3.3.22}$$

para $p = 0, \ldots, r-1$.

Devemos agora construir a_r satisfazendo (3.3.21) (com $p = r$). Segue de (3.3.22) fazendo $X = \Delta_r$ e $p = r - 1$ que:

(3.3.23)
$$\begin{aligned}
\partial \circ (D_{\Delta_r})_{r-1} \circ \partial(\mathrm{Id}_r)& \\
&= (i_{\Delta_r})_\# \circ \partial(\mathrm{Id}_r) - (j_{\Delta_r})_\# \circ \partial(\mathrm{Id}_r) - (D_{\Delta_r})_{r-2} \circ \partial \circ \partial(\mathrm{Id}_r) \\
&= \partial(i_{\Delta_r} - j_{\Delta_r});
\end{aligned}$$

usando (3.3.23) vemos diretamente que

$$i_{\Delta_r} - j_{\Delta_r} - (D_{\Delta_r})_{r-1} \circ \partial(\mathrm{Id}_r) \in Z_r(I \times \Delta_r). \tag{3.3.24}$$

Como $H_r(I \times \Delta_r) = 0$ (vide Exemplo 3.3.9) segue que (3.3.24) é um r-bordo; logo é possível escolher a_r satisfazendo (3.3.21) (com $p = r$). □

É fácil agora mostrar a invariância homotópica da homologia singular.

PROPOSIÇÃO 3.3.23. *Se duas aplicações $f, g\colon X \to Y$ são homotópicas (recorde Definição 3.1.1) então as aplicações de cadeia $f_\#$ e $g_\#$ são homotópicas.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $H\colon f \cong g$ uma homotopia entre f e g; pelo Lema 3.3.22 existe uma homotopia de cadeia $D_X\colon i_X \cong j_X$. É fácil ver então que considerando para cada $p \in \mathbb{Z}$ o homomorfismo

$$(H_\#)_{p+1} \circ (D_X)_p\colon \mathfrak{S}_p(X) \longrightarrow \mathfrak{S}_{p+1}(Y)$$

obtemos uma homotopia de cadeia entre $f_\#$ e $g_\#$. □

COROLÁRIO 3.3.24. *Se $f, g\colon X \to Y$ são homotópicas então $f_* = g_*$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Proposição 3.3.23 e do Lema 3.3.21. □

OBSERVAÇÃO 3.3.25. Uma outra propriedade importante dos grupos de homologia singular é a *propriedade de excisão*: se (X, A) é um par de espaços topológicos e se $U \subset A$ é um subconjunto cujo fecho está contido no interior de A então a inclusão $\mathfrak{i}\colon (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ induz um isomorfismo:

$$\mathfrak{i}_*\colon H_p(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_p(X, A)$$

para todo $p \in \mathbb{Z}$; diz-se então que o par $(X \setminus U, A \setminus U)$ é obtido de (X, A) por *excisão* do subconjunto U. Não teremos uso para o princípio de excisão no nosso texto; uma demonstração de tal princípio pode ser encontrada em [**42**, Teorema 31.7]. Observamos que não há um análogo do princípio de excisão em teoria de homotopia.

OBSERVAÇÃO 3.3.26. Se G é um grupo abeliano qualquer então para todo par (X, A) é possível definir um complexo de cadeia $\mathfrak{S}(X, A; G)$ a partir de $\mathfrak{S}(X, A)$ por *tensorização (sobre $\mathbb{Z}$) com o grupo G*; explicitamente:

$$\mathfrak{S}_p(X, A; G) = \mathfrak{S}_p(X, A) \otimes G$$

e o operador bordo em $\mathfrak{S}(X, A; G)$ é $\partial \otimes \mathrm{Id}_G$. Os grupos de homologia do complexo $\mathfrak{S}(X, A; G)$ são denotados usualmente por $H_p(X, A; G)$ e são chamados os *grupos de homologia singular do par (X, A) com coeficientes em G*. Observamos que se G tem uma estrutura de R-módulo (onde R é um anel qualquer) então também os grupos de homologia $H_p(X, A; G)$ terão uma estrutura natural de R-módulo; em particular, se R é um corpo então $H_p(X, A; G)$ torna-se um *R-espaço vetorial*. Os grupos de homologia $H_p(X, A; G)$ são determinados pelos grupos $H_p(X, A)$; esse é o conteúdo do *Teorema dos Coeficientes Universais* (vide [**42**, Teorema 55.1]) que nos dá uma seqüência exata curta:

(3.3.25)
$$0 \longrightarrow H_p(X, A) \otimes G \longrightarrow H_p(X, A; G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\big(H_{p-1}(X, A), G\big) \longrightarrow 0$$

Além do mais, a seqüência exata curta (3.3.25) cinde e portanto temos um isomorfismo (não canônico):

$$H_p(X, A; G) \cong \big(H_p(X, A) \otimes G\big) \oplus \mathrm{Tor}\big(H_{p-1}(X, A), G\big).$$

O *funtor Tor* que aparece em (3.3.25) é um *funtor derivado* do produto tensorial e sua construção é um tanto envolvida; observamos no entanto que se G, H são grupos abelianos e se G não tem torsão (i.e., se os elementos não nulos de G têm ordem infinita) então:

$$\mathrm{Tor}(G, H) \cong \mathrm{Tor}(H, G) = 0.$$

Os grupos de homologia singular com coeficientes arbitrários serão mencionados novamente na Subseção 6.4.1 onde estudaremos a Teoria de Morse Global.

OBSERVAÇÃO 3.3.27. Se X, Y são espaços topológicos então uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ é dita uma *equivalência homotópica* se existe uma aplicação contínua $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f$ é homotópica à aplicação identidade de X e $f \circ g$ é homotópica à aplicação identidade de Y; dizemos nesse caso que f e g são *homotopicamente inversas* e que os espaços X e Y têm *o mesmo tipo de homotopia*. Segue diretamente do Corolário 3.3.24 que se f, g são homotopicamente inversas então as aplicações induzidas em homologia singular f_* e g_* são isomorfismos mutuamente inversos e em particular *espaços com o mesmo tipo de homotopia tem grupos de homologia isomorfos*; usando o teorema de coeficientes universais (vide Observação 3.3.26) mostra-se na verdade que se X e Y tem o mesmo tipo de homotopia então os grupos $H_p(X;G)$ e $H_p(Y;G)$ são isomorfos para todo $p \in \mathbb{Z}$ e *para todo grupo de coeficientes G*.

Equivalências homotópicas particularmente interessantes são os retratos por deformação. Se $A \subset X$ então dizemos que uma aplicação contínua $r\colon X \to A$ é uma *retração* (e que A é um *retrato* de X) se $r(x) = x$ para todo $x \in A$; dizemos que a retração r é uma *retração por deformação* (e que A é um *retrato por deformação* de X) se existe uma homotopia $K\colon I \times X \to X$ tal que:

$$K(0,x) = x, \quad K(1,x) = r(x), \quad K(s,a) = a,$$

para todos $x \in X$, $s \in I$, $a \in A$. Se $r\colon X \to A$ é uma retração por deformação então é fácil ver que a inclusão $\mathfrak{i}\colon A \to X$ é uma inversa homotópica para r e em particular *se A é um retrato por deformação de X então a inclusão de A em X induz um isomorfismo em homologia singular* (com coeficientes arbitrários).

3.3.1. O homomorfismo de Hurewicz. Nesta subseção mostraremos que o primeiro grupo de homologia singular $H_1(X)$ de um espaço topológico X pode ser calculado a partir de seu grupo fundamental; mais especificamente, se X é conexo por arcos mostraremos que $H_1(X)$ é o grupo abelianizado de $\pi_1(X)$.

Durante toda a subseção suporemos familiaridade com as notações e conceitos introduzidos na Seção 3.1. Consideraremos sempre fixado um espaço topológico X.

Observando que o intervalo unitário $I = [0,1]$ coincide com o primeiro simplexo padrão Δ_1 vemos que toda curva $\gamma \in \Omega(X)$ é um 1-simplexo singular em X; daí $\gamma \in \mathfrak{S}_1(X)$. Diremos que duas 1-cadeias singulares $c, d \in \mathfrak{S}_1(X)$ são *homólogas* quando $c - d \in B_1(X)$; essa terminologia será usada mesmo quando c e d não forem ciclos (note no entanto que uma 1-cadeia singular c só define uma classe de homologia em $H_1(X)$ se $c \in Z_1(X)$). Começamos com alguns lemas.

Lema 3.3.28. *Seja $\gamma \in \Omega(X)$ e seja $\sigma\colon I \to I$ uma aplicação contínua. Se $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = 1$ então $\gamma \circ \sigma$ é homóloga a γ; se $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(1) = 0$ então $\gamma \circ \sigma$ é homóloga a $-\gamma$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = 1$. Considere os 1-simplexos singulares σ e $\ell(0,1)$ em I (recorde (3.3.1)). Claramente $\partial\big(\sigma - \ell(0,1)\big) = 0$, i.e., $\sigma - \ell(0,1) \in Z_1(I)$; como $H_1(I) = 0$ (vide Exemplo 3.3.9) segue que $\sigma - \ell(0,1) \in B_1(I)$. Considere a aplicação de cadeia

$$\gamma_\#\colon \mathfrak{S}(I) \longrightarrow \mathfrak{S}(X);$$

temos então que $\gamma_\#(\sigma - \ell(0,1)) \in B_1(X)$. Mas

$$\gamma_\#\big(\sigma - \ell(0,1)\big) = \gamma\circ\sigma - \gamma \in B_1(X),$$

donde γ é homóloga a $\gamma\circ\sigma$. O caso $\sigma(0)=1$, $\sigma(1)=0$ segue analogamente observando que $\sigma + \ell(0,1) \in Z_1(I)$. □

OBSERVAÇÃO 3.3.29. Em alguns casos desejaremos considerar 1-cadeias singulares determinadas por curvas $\gamma\colon [a,b] \to X$ que estão definidas num intervalo fechado arbitrário $[a,b]$ (e não no intervalo unitário I); nesse caso, com um certo abuso, denotaremos por $\gamma \in \mathfrak{S}_1(X)$ o 1-simplexo singular $\gamma\circ\ell(a,b)\colon I \to X$; segue do Lema 3.3.28 que $\gamma\circ\ell(a,b)$ é homóloga a qualquer reparametrização $\gamma\circ\sigma$ de γ, onde $\sigma\colon I \to [a,b]$ é uma aplicação contínua tal que $\sigma(0)=a$ e $\sigma(1)=b$ (vide também Observação 3.1.4).

LEMA 3.3.30. *Se $\gamma,\mu \in \Omega(X)$ são tais que $\gamma(1)=\mu(0)$ então $\gamma\cdot\mu$ é homóloga a $\gamma+\mu$; além do mais, para toda $\gamma \in \Omega(X)$ temos que γ^{-1} é homóloga a $-\gamma$ e para todo $x_0 \in X$, $\mathfrak{o}_{x_0}$ é homóloga a zero.*

DEMONSTRAÇÃO. A idéia é basicamente a mesma que foi usada na demonstração do Lema 3.3.28. Temos que $\ell\big(0,\tfrac12\big) + \ell\big(\tfrac12,1\big) - \ell(0,1) \in Z_1(I) = B_1(I)$; considerando a aplicação de cadeia $(\gamma\cdot\mu)_\#$ obtemos:

$$(\gamma\cdot\mu)_\#\big(\ell(0,\tfrac12) + \ell(\tfrac12,1) - \ell(0,1)\big) = \gamma+\mu-\gamma\cdot\mu \in B_1(X),$$

donde $\gamma\cdot\mu$ é homóloga a $\gamma+\mu$. O fato que γ^{-1} é homóloga a $-\gamma$ segue do Lema 3.3.28; finalmente, se $T\colon \Delta_2 \to X$ denota a aplicação constante igual a x_0 obtemos $\partial T = \mathfrak{o}_{x_0} \in B_1(X)$. □

LEMA 3.3.31. *Seja $K\colon I\times I \to X$ uma aplicação contínua; considerando as curvas*

$$\gamma_1 = K\circ\ell\big((0,0),(1,0)\big), \quad \gamma_2 = K\circ\ell\big((1,0),(1,1)\big),$$
$$\gamma_3 = K\circ\ell\big((1,1),(0,1)\big), \quad \gamma_4 = K\circ\ell\big((0,1),(0,0)\big),$$

obtemos que $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ é homóloga a zero.

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $H_1(I\times I)=0$ (vide Exemplo 3.3.9); além do mais:

$$\begin{aligned}\ell\big((0,0),(1,0)\big) + \ell\big((1,0),(1,1)\big) + \ell\big((1,1),(0,1)\big)\\ + \ell\big((0,1),(0,0)\big) \in Z_1(I\times I) = B_1(I\times I).\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

A conclusão segue aplicando $K_\#$ a (3.3.26). □

Relacionamos agora a classe de homotopia e a classe de homologia de uma curva $\gamma \in \Omega(X)$.

COROLÁRIO 3.3.32. *Se $\gamma,\mu \in \Omega(X)$ são homotópicas com extremos fixos então γ é homóloga a μ.*

Demonstração. Basta aplicar o Lema 3.3.31 a uma homotopia com extremos fixos $K\colon \gamma \cong \mu$, levando em conta o Lema 3.3.30. $\square$

Observação 3.3.33. Seja $A \subset X$ um subconjunto; se $\gamma\colon I \to X$ é uma curva com extremos em A, i.e., $\gamma(0), \gamma(1) \in A$ então $\partial\gamma \in \mathfrak{S}_0(A)$ e portanto $\gamma \in Z_1(X, A)$ define uma classe de homologia $\gamma + B_1(X, A)$ em $H_1(X, A)$. Segue do Lema 3.3.31 (tendo em mente também o Lema 3.3.30) que se γ e μ são homotópicas com extremos livres em A (recorde Definição 3.1.25) então γ e μ definem a mesma classe de homologia em $H_1(X, A)$.

Observação 3.3.34. Se γ e μ são laços livremente homotópicos em X (vide Observação 3.1.16) então segue facilmente do Lema 3.3.31 (tendo em mente também o Lema 3.3.30) que γ é homólogo a μ.

Definimos uma aplicação

$$\Theta\colon \overline{\Omega}(X) \longrightarrow \mathfrak{S}_1(X)/B_1(X) \tag{3.3.27}$$

fazendo $\Theta([\gamma]) = \gamma + B_1(X)$ para cada $\gamma \in \Omega(X)$; segue do Corolário 3.3.32 que Θ é bem definida, i.e., não depende do representante escolhido na classe de homotopia $[\gamma] \in \overline{\Omega}(X)$. O Lema 3.3.30 nos diz então que:

(3.3.28)
$$\Theta([\gamma]\cdot[\mu]) = \Theta([\gamma]) + \Theta([\mu]), \quad \Theta\big([\gamma]^{-1}\big) = -\Theta([\gamma]), \quad \Theta([\mathfrak{o}_{x_0}]) = 0,$$

para todas $\gamma, \mu \in \Omega(X)$ com $\gamma(1) = \mu(0)$ e todo $x_0 \in X$. Se $\gamma \in \Omega(X)$ é um laço então $\gamma \in Z_1(X)$; fixado $x_0 \in X$, vemos que Θ se restringe a uma aplicação (também denotada por Θ):

$$\Theta\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X). \tag{3.3.29}$$

Segue de (3.3.28) que (3.3.29) é um homomorfismo de grupos; esse homomorfismo é conhecido como o *homomorfismo de Hurewicz*. O homomorfismo de Hurewicz é *natural* no sentido que, dada uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ com $f(x_0) = y_0$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "f_*"'] & H_1(X) \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "\Theta"'] & H_1(Y)
\end{tikzcd}$$

Se $\lambda\colon I \to X$ é uma curva ligando os pontos x_0 e x_1 então o homomorfismo de Hurewicz relaciona-se bem com o isomorfismo $\lambda_\#$ entre os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ (vide Proposição 3.1.11); mais explicitamente, segue de (3.3.28) que temos o seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[dd, "\lambda_\#"'] \arrow[dr, "\Theta"] & \\
& H_1(X) \\
\pi_1(X,x_1) \arrow[ur, "\Theta"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.3.30}
$$

Mostramos agora o teorema principal da subseção; recordamos primeiramente algumas definições da teoria dos grupos.

DEFINIÇÃO 3.3.35. Se G é um grupo então o *subgrupo de comutadores* de G, denotado por G', é o subgrupo gerado pelos elementos da forma $ghg^{-1}h^{-1}$ com $g, h \in G$; daí G' é sempre um subgrupo normal de G (na verdade, G' é invariante por todos os automorfismos de G) e portanto G/G' é um grupo. Dizemos que G/G' é o *grupo abelianizado* de G.

O grupo G/G' é sempre abeliano; na verdade se H é um subgrupo normal de G então G/H é abeliano se e somente se H contém G'.

TEOREMA 3.3.36. *Se X é conexo por arcos então para qualquer $x_0 \in X$ o homomorfismo de Hurewicz* (3.3.29) *é sobrejetor e tem como núcleo o subgrupo de comutadores de $\pi_1(X, x_0)$; em particular o primeiro grupo de homologia singular $H_1(X)$ é isomorfo ao grupo abelianizado de $\pi_1(X, x_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como o quociente $\pi_1(X, x_0)/\mathrm{Ker}(\Theta) \cong \mathrm{Im}(\Theta)$ é abeliano segue que $\mathrm{Ker}(\Theta)$ contém o subgrupo de comutadores $\pi_1(X, x_0)'$ e portanto Θ define por passagem ao quociente um homomorfismo:

$$\overline{\Theta}\colon \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)' \longrightarrow H_1(X);$$

nossa estratégia é mostrar que $\overline{\Theta}$ é um isomorfismo.

Para cada $x \in X$ escolha uma curva $\eta_x \in \Omega(X)$ tal que $\eta_x(0) = x_0$ e $\eta_x(1) = x$; vamos agora definir um homomorfismo

$$\Psi\colon \mathfrak{S}_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)';$$

como $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'$ é abeliano e os 1-simplexos singulares de X formam uma base de $\mathfrak{S}_1(X)$ como grupo abeliano livre, Ψ fica bem definido se fizermos

$$\Psi(\gamma) = q\big([\eta_{\gamma(0)}] \cdot [\gamma] \cdot [\eta_{\gamma(1)}]^{-1}\big), \quad \gamma \in \Omega(X),$$

onde q denota a aplicação quociente

$$q\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'.$$

Vamos mostrar que $B_1(X)$ está contido no núcleo de Ψ; para isso, basta mostrar que $\psi(\partial T)$ é o elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'$ para todo 2-simplexo singular T em X. Escrevemos:

$$\partial T = \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2, \tag{3.3.31}$$

onde $\gamma_0 = T \circ \ell(e_1, e_2)$, $\gamma_1 = T \circ \ell(e_0, e_2)$ e $\gamma_2 = T \circ \ell(e_0, e_1)$. Aplicando Ψ a ambos os lados de (3.3.31) obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi(\partial T) &= \Psi(\gamma_0)\Psi(\gamma_1)^{-1}\Psi(\gamma_2) \\ &= q\big([\eta_{T(e_1)}] \cdot [\gamma_0] \cdot [\gamma_1]^{-1} \cdot [\gamma_2] \cdot [\eta_{T(e_1)}]^{-1}\big). \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Escrevendo $[\rho] = [\ell(e_1, e_2)] \cdot [\ell(e_2, e_0)] \cdot [\ell(e_0, e_1)] \in \overline{\Omega}(\Delta_2)$ então (3.3.32) implica que:

$$\Psi(\partial T) = q\big([\eta_{T(e_1)}] \cdot T_*([\rho]) \cdot [\eta_{T(e_1)}]^{-1}\big);$$

como $[\rho] \in \pi_1(\Delta_2, e_1)$ temos que $[\rho] = [\mathfrak{o}_{e_1}]$ (vide Exemplo 3.1.15), donde $\Psi(\partial T) = q([\mathfrak{o}_{x_0}])$.

Concluímos então que $B_1(X) \subset \mathrm{Ker}(\Psi)$ donde Ψ passa ao quociente e define um homomorfismo

$$\overline{\Psi}\colon \mathfrak{S}_1(X)/B_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'.$$

A estratégia agora é mostrar que a restrição $\overline{\Psi}|_{H_1(X)}$ é um inverso para $\overline{\Theta}$. Calculemos $\overline{\Theta} \circ \Psi$; para $\gamma \in \Omega(X)$ temos:

$$\begin{aligned} (\overline{\Theta} \circ \Psi)(\gamma) &= \Theta([\eta_{\gamma(0)}]) + \Theta([\gamma]) - \Theta([\eta_{\gamma(1)}]) \\ &= \eta_{\gamma(0)} + \gamma - \eta_{\gamma(1)} + B_1(X). \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

Defina um homomorfismo $\phi\colon \mathfrak{S}_0(X) \to \mathfrak{S}_1(X)$ fazendo $\phi(x) = \eta_x$ para todo 0-simplexo singular $x \in X$; daí (3.3.33) implica que:

$$\overline{\Theta} \circ \Psi = p \circ (\mathrm{Id} - \phi \circ \partial), \tag{3.3.34}$$

onde $p\colon \mathfrak{S}_1(X) \to \mathfrak{S}_1(X)/B_1(X)$ denota a aplicação quociente e Id denota a aplicação identidade de $\mathfrak{S}_1(X)$. Restringindo ambos os lados de (3.3.34) a $Z_1(X)$ e passando ao quociente obtemos:

$$\overline{\Theta} \circ \overline{\Psi}|_{H_1(X)} = \mathrm{Id}.$$

Calculemos agora $\overline{\Psi} \circ \overline{\Theta}$; para todo laço $\gamma \in \Omega_{x_0}(X)$ temos:

$$(\overline{\Psi} \circ \overline{\Theta})\big(q([\gamma])\big) = \Psi(\gamma) = q([\eta_{x_0}])q([\gamma])q([\eta_{x_0}])^{-1} = q([\gamma]),$$

observando que $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'$ é abeliano. Segue que:

$$\big(\overline{\Psi}|_{H_1(X)}\big) \circ \overline{\Theta} = \mathrm{Id},$$

o que completa a demonstração. $\square$

Observação 3.3.37. Se X é conexo por arcos e $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, segue do Teorema 3.3.36 que o homomorfismo de Hurewicz é um isomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ sobre $H_1(X)$; isso "explica" porque os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ com pontos base diferentes podem ser canonicamente identificados quando o grupo fundamental do espaço é abeliano (compare com a Observação 3.1.13 e com o diagrama (3.3.30)).

CAPÍTULO 4

O Índice de Maslov

4.1. O Índice de uma Forma Bilinear Simétrica

Definimos nesta seção o índice e o co-índice de uma forma bilinear simétrica; em dimensão finita esses são os números de entradas negativas e positivas de uma matriz diagonalizada de acordo com o Teorema de Inércia de Sylvester. Demonstramos algumas propriedades simples desses números.

Nesta seção, V denotará sempre um espaço vetorial *real* (nem sempre de dimensão finita). Recorde que $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ denota o espaço das formas bilineares simétricas $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Começamos com uma definição.

Definição 4.1.1. Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$; dizemos que B é

- *definida positiva* quando $B(v,v) > 0$ para todo $v \in V$ não nulo;
- *semi-definida positiva* quando $B(v,v) \geq 0$ para todo $v \in V$;
- *definida negativa* quando $B(v,v) < 0$ para todo $v \in V$ não nulo;
- *semi-definida negativa* quando $B(v,v) \leq 0$ para todo $v \in V$.

Dizemos que um subespaço $W \subset V$ é *positivo* com respeito a B (ou também que W é B-*positivo*) quando $B|_{W\times W}$ for definida positiva; de modo similar, dizemos que W é *negativo* com respeito a B (ou B-*negativo*) quando $B|_{W\times W}$ for definida negativa.

O *índice* de B, denotado por $n_-(B)$, é definido por:

$$n_-(B) = \sup\big\{\dim(W) : W \text{ subespaço } B\text{-negativo de } V\big\}. \tag{4.1.1}$$

O índice de B pode ser um número inteiro não-negativo ou $+\infty$. O *co-índice* de B, denotado por $n_+(B)$, é definido como sendo o índice de $-B$, ou seja:

$$n_+(B) = n_-(-B).$$

Se ao menos um dos números $n_+(B)$, $n_-(B)$ é finito definimos a *assinatura* de B por:

$$\mathrm{sgn}(B) = n_+(B) - n_-(B).$$

Obviamente o co-índice de B também poderia ser definido como o supremo das dimensões dos subespaços B-positivos de V. Se $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e $W \subset V$ é um subespaço então obviamente:

$$n_-(B|_{W\times W}) \leq n_-(B), \quad n_+(B|_{W\times W}) \leq n_+(B). \tag{4.1.2}$$

O leitor deve recordar as definições de *núcleo* de uma forma bilinear simétrica B (denotado $\mathrm{Ker}(B)$; vide (1.1.6)) e do *complemento ortogonal* de um subespaço $S \subset V$ com respeito a B (denotado $S^\perp$; vide (1.1.9)). Recorde também que B é dita *não-degenerada* quando $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$. Observe que na Seção 1.1 consideramos apenas espaços vetoriais de dimensão finita, mas obviamente as definições de núcleo, complemento ortogonal e não-degenerescência fazem sentido para um espaço vetorial V qualquer; muitos resultados provados na Seção 1.1 no entanto, fazem uso essencial da finitude da dimensão (vide Exemplo 1.1.13). Note, por exemplo, que uma forma bilinear B é não-degenerada se e somente se seu operador linear associado

$$V \ni v \longmapsto B(v, \cdot) \in V^* \tag{4.1.3}$$

é injetor; se $\dim(V) = +\infty$ *não segue* que (4.1.3) é um isomorfismo.

DEFINIÇÃO 4.1.2. Dada $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$, a *degenerescência* de B, denotada $\mathrm{dgn}(B)$, é a dimensão (possivelmente infinita) do núcleo $\mathrm{Ker}(B)$. Dizemos que um subespaço $W \subset V$ é *não-degenerado* com respeito a B (ou também que W é *B-não-degenerado*) quando $B|_{W\times W}$ for não-degenerada.

EXEMPLO 4.1.3. A degenerescência de uma forma bilinear simétrica não é monótona relativamente à inclusão de subespaços (diferentemente do índice e do co-índice; vide (4.1.2)). Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^2$ e consideramos a forma bilinear simétrica

$$B\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2 - y_1y_2 \tag{4.1.4}$$

então $\mathrm{dgn}(B) = 0$; se W é o subespaço gerado pelo vetor $(1, 1)$ temos:

$$\mathrm{dgn}(B|_{W\times W}) = 1 > 0 = \mathrm{dgn}(B).$$

Por outro lado, se B é definida por

$$B\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2$$

e se W é o subespaço gerado pelo vetor $(1, 0)$ então

$$\mathrm{dgn}(B|_{W\times W}) = 0 < 1 = \mathrm{dgn}(B).$$

EXEMPLO 4.1.4. Se $T\colon V_1 \to V_2$ é um isomorfismo e se $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V_1)$ então podemos considerar a forma bilinear simétrica $T_*(B) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V_2)$ obtida fazendo o push-forward de B através de T. Daí é claro que T mapeia subespaços negativos e positivos de B respectivamente sobre subespaços negativos e positivos de $T_*(B)$; também $\mathrm{Ker}\big(T_*(B)\big) = T(\mathrm{Ker}(B))$. Em particular temos:

$$n_+\big(T_*(B)\big) = n_+(B), \quad n_-\big(T_*(B)\big) = n_-(B), \quad \mathrm{dgn}\big(T_*(B)\big) = \mathrm{dgn}(B).$$

OBSERVAÇÃO 4.1.5. Segue da Proposição 1.1.11 e da Observação 1.1.14 que se $W \subset V$ é um subespaço B-não-degenerado de *dimensão finita* então $V = W \oplus W^\perp$ (mesmo que $\dim(V) = +\infty$).

Recorde que se $W \subset V$ é um subespaço então a *co-dimensão* de W em V é definida por:

$$\text{co-dim}_V(W) = \dim(V/W);$$

esta pode ser finita mesmo quando $\dim(W) = \dim(V) = +\infty$. A co-dimensão de W em V coincide obviamente com a dimensão de qualquer subespaço complementar de W em V.

O seguinte lema e corolário são a ferramenta básica para o cálculo de índices.

LEMA 4.1.6. *Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$; se $Z \subset V$ é um subespaço onde B é semi-definida positiva então*

$$n_-(B) \le \text{co-dim}_V(Z).$$

DEMONSTRAÇÃO. Se B é definida negativa num subespaço $W \subset V$ então $W \cap Z = \{0\}$ e portanto a aplicação quociente $q\colon V \to V/Z$ leva W isomorficamente sobre um subespaço de V/Z. Logo $\dim(W) \le \text{co-dim}_V(Z)$. □

COROLÁRIO 4.1.7. *Suponha que $V = Z \oplus W$ com B semi-definida positiva em Z e negativa definida em W; então $n_-(B) = \dim(W)$.*

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $n_-(B) \ge \dim(W)$ e segue do Lema 4.1.6 que $n_-(B) \le \text{co-dim}_V(Z) = \dim(W)$. □

OBSERVAÇÃO 4.1.8. Obviamente todo resultado envolvendo índices (como o Lema 4.1.6 e o Corolário 4.1.7) admite uma versão correspondente envolvendo co-índices; basta trocar B por $-B$. Enunciaremos em geral apenas os resultados envolvendo índices e deixaremos os correspondentes resultados sobre co-índices subentendidos. Da mesma forma, resultados sobre formas bilineares simétricas (semi-)definidas negativas correspondem, trocando B por $-B$, a resultados sobre formas bilineares simétricas (semi-)definidas positivas; enunciaremos em geral apenas uma das versões e usaremos também a outra sem mais comentários.

PROPOSIÇÃO 4.1.9. *Se $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e $V = Z \oplus W$ com B definida positiva em Z e definida negativa em W então B é não-degenerada.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $v \in \mathrm{Ker}(B)$; escreva $v = v_+ + v_-$ com $v_+ \in Z$ e $v_- \in W$. Daí:

$$B(v, v_+) = B(v_+, v_+) + B(v_-, v_+) = 0, \tag{4.1.5}$$

$$B(v, v_-) = B(v_+, v_-) + B(v_-, v_-) = 0; \tag{4.1.6}$$

de (4.1.5) vem $B(v_+, v_-) \le 0$ e de (4.1.6) vem $B(v_+, v_-) \ge 0$, donde obtemos $B(v_+, v_-) = 0$. Daí (4.1.5) implica $v_+ = 0$ e (4.1.6) implica $v_- = 0$. □

TEOREMA 4.1.10 (de inércia de Sylvester). *Suponha que* $\dim(V) = n < +\infty$ *e seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$; então existe uma base de V na qual a matriz de B é dada por:*

$$\eta_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0_{p\times q} & 0_{p\times r} \\ 0_{q\times p} & -\mathrm{I}_q & 0_{q\times r} \\ 0_{r\times p} & 0_{r\times q} & 0_r \end{pmatrix}, \tag{4.1.7}$$

onde $0_{\alpha\times\beta}$, 0_α e I_α denotam respectivamente a matriz zero $\alpha\times\beta$, a matriz zero $\alpha\times\alpha$ e a matriz identidade $\alpha\times\alpha$.

Os números p, q e r são unicamente determinados pela forma bilinear simétrica B; temos:

$$n_+(B) = p, \quad n_-(B) = q, \quad \mathrm{dgn}(B) = r. \tag{4.1.8}$$

DEMONSTRAÇÃO. A existência de uma base $(b_i)_{i=1}^n$ que deixa B na forma canônica (4.1.7) segue do Teorema 1.1.15, multiplicando os vetores da base fornecida por esse teorema por escalares adequados. Para provar que p, q, r são unicamente determinados por B (i.e., não dependem da escolha da base) basta na verdade provar (4.1.8). Se Z é o subespaço gerado por $\{b_i\}_{i=1}^p \cup \{b_i\}_{i=p+q+1}^n$ e W é o subespaço gerado pelos vetores $\{b_i\}_{i=p+1}^{p+q}$ então $V = Z \oplus W$, B é semi-definida positiva em Z e negativa definida em W; segue do Corolário 4.1.7 que $n_-(B) = \dim(W) = q$. De modo similar segue que $n_+(B) = p$. Como é fácil ver que $\mathrm{Ker}(B)$ é gerado pelos vetores $\{b_i\}_{i=p+q+1}^n$ concluímos que $\mathrm{dgn}(B) = r$. □

COROLÁRIO 4.1.11. *Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e suponha* $\dim(V) < +\infty$. *Se g é um produto interno em V (i.e., $g \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e g é definida positiva) e se $T \in \mathcal{L}(V)$ é tal que $B = g(T\cdot, \cdot)$ então o índice (respectivamente, o co-índice) de B é igual à soma das multiplicidades dos autovalores negativos (respectivamente, positivos) de T; a degenerescência de B é igual à multiplicidade do autovalor nulo em T.*

DEMONSTRAÇÃO. Como T é g-simétrica, existe uma base ortonormal com respeito a g que diagonaliza T, sendo a diagonal da matriz em questão formada pelos autovalores de T repetidos de acordo com a multiplicidade; nessa base, B será representada pela mesma matriz. Multiplicando os vetores dessa base por escalares adequados, colocamos B na forma canônica (4.1.7); essa operação não muda os sinais dos elementos da diagonal da matriz que representa B. A conclusão segue agora do Teorema 4.1.10. □

EXEMPLO 4.1.12. A conclusão do Corolário 4.1.11 vale se denotarmos por T a matriz que representa B numa base qualquer; de fato, observe que qualquer base é ortonormal para algum produto interno g. Recorde que o determinante e o traço de uma matriz são iguais respectivamente ao produto e à soma de seus autovalores (repetidos de acordo com multiplicidade); no caso $\dim(V) = 2$, segue que o determinante e o traço da matriz que representa B numa base qualquer determinam completamente os números $n_+(B)$, $n_-(B)$ e $\mathrm{dgn}(B)$.

LEMA 4.1.13. *Suponha que $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ é semi-definida positiva; então:*

$$\mathrm{Ker}(B) = \big\{v \in V : B(v, v) = 0\big\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $v \in V$ com $B(v, v) = 0$ e seja $w \in V$ arbitrário; devemos mostrar que $B(v, w) = 0$. Se v e w são linearmente dependentes, isso é trivial; caso contrário, v e w formam uma base de um subespaço bidimensional na qual (a restrição de) B é representada pela matriz:

$$\begin{pmatrix} B(v,v) & B(v,w) \\ B(v,w) & B(w,w) \end{pmatrix}. \tag{4.1.9}$$

Segue do Corolário 4.1.11 (vide Exemplo 4.1.12) que o determinante de (4.1.9) é não-negativo, ou seja:

$$B(v,w)^2 \le B(v,v)B(w,w) = 0,$$

o que completa a demonstração. □

Corolário 4.1.14. *Se $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ é semi-definida positiva e não-degenerada então B é definida positiva.* □

Obtemos agora uma versão generalizada da *desigualdade de Cauchy-Schwarz*.

Proposição 4.1.15. *Sejam dados $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e vetores $v, w \in V$. Temos então:*

- *se v, w são linearmente dependentes ou se v, w geram um subespaço bidimensional B-degenerado então*
$$B(v,w)^2 = B(v,v)B(w,w);$$
- *se v, w geram um subespaço bidimensional B-positivo ou B-negativo então*
$$B(v,w)^2 < B(v,v)B(w,w);$$
- *se v, w geram um subespaço bidimensional onde B tem índice e co-índice iguais a 1 então*
$$B(v,w)^2 > B(v,v)B(w,w);$$

as possibilidades acima são exaustivas e mutuamente exclusivas.

Demonstração. O caso em que v, w são linearmente dependentes é trivial; os outros seguem diretamente do Corolário 4.1.11 (vide também Exemplo 4.1.12), levando em conta que a matriz que representa a restrição de B ao subespaço gerado por v e w (na base v, w) é dada por (4.1.9). □

Definição 4.1.16. Dada $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$, dizemos que dois subespaços V_1 e V_2 de V são *ortogonais com respeito a B* (ou *B-ortogonais*) quando $B(v_1, v_2) = 0$ para todos $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$; uma decomposição em soma direta $V = V_1 \oplus V_2$ com V_1, V_2 subespaços B-ortogonais é dita uma *decomposição B-ortogonal*.

Lema 4.1.17. *Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$; se $V = V_1 \oplus V_2$ é uma decomposição B-ortogonal e se B é definida negativa (respectivamente, semi-definida negativa) em V_1 e em V_2 então B é definida negativa (respectivamente, semi-definida negativa) em V.*

Demonstração. Segue do seguinte cálculo simples:

$$B(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = B(v_1, v_1) + B(v_2, v_2), \quad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

□

Definição 4.1.18. Dada $B \in \mathcal{B}_{\rm sim}(V)$, dizemos que um subespaço $W \subset V$ é *negativo maximal* com respeito a B se W for B-negativo e não estiver propriamente contido em nenhum subespaço B-negativo; de maneira similar, dizemos que W é *positivo maximal* se W for B-positivo e não estiver propriamente contido em nenhum subespaço B-positivo.

Corolário 4.1.19. *Sejam $B \in \mathcal{B}_{\rm sim}(V)$ e $W \subset V$ um subespaço negativo maximal com respeito a B (por exemplo, se $\dim(W) = n_-(B) < +\infty$); daí se $Z \subset V$ é um subespaço B-ortogonal a W então B é semi-definida positiva em Z.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1.17, a soma de qualquer subespaço negativo não nulo de Z com W seria um subespaço negativo contendo W propriamente; a conclusão segue. □

Corolário 4.1.20. *Dada $B \in \mathcal{B}_{\rm sim}(V)$ então:*

$$\dim(V) = n_+(B) + n_-(B) + \mathrm{dgn}(B).$$

Demonstração. Se um dos números $n_+(B)$, $n_-(B)$ é infinito o resultado é trivial. Suponha então que esses números são ambos finitos; seja $W \subset V$ um subespaço negativo com $\dim(W) = n_-(B)$ e seja $Z \subset V$ um subespaço positivo com $\dim(Z) = n_+(B)$. Pela Proposição 4.1.9 temos que B é não-degenerada em $Z \oplus W$ e segue portanto da Observação 4.1.5 que

$$V = Z \oplus W \oplus (Z \oplus W)^\perp.$$

Pelo Corolário 4.1.19 temos que B é semi-definida positiva e semi-definida negativa em $(Z \oplus W)^\perp$, donde B é identicamente nula em $(Z \oplus W)^\perp$; segue agora que $\mathrm{Ker}(B) = (Z \oplus W)^\perp$, o que completa a demonstração. □

Corolário 4.1.21. *Se $W \subset V$ é um subespaço negativo maximal com respeito a $B \in \mathcal{B}_{\rm sim}(V)$ então $n_-(B) = \dim(W)$.*

Demonstração. Se $\dim(W) = +\infty$ o resultado é trivial; caso contrário, segue da Observação 4.1.5 que $V = W \oplus W^\perp$. Pelo Corolário 4.1.19, B é semi-definida positiva em $W^\perp$ e a conclusão segue então do Corolário 4.1.7.

□

Observação 4.1.22. Podemos concluir agora que o supremo que aparece na definição de índice (4.1.1) é na verdade um *máximo*, i.e., sempre existe um subespaço B-negativo $W \subset V$ com $n_-(B) = \dim(W)$; de fato, se $n_-(B) < +\infty$ essa afirmação é trivial. Se $n_-(B) = +\infty$, segue do Corolário 4.1.21 que nenhum subespaço negativo de dimensão finita é maximal. Se não houvesse um subespaço negativo de dimensão infinita, poderíamos construir uma seqüência estritamente crescente $W_1 \subset W_2 \subset \cdots$ de subespaços negativos; daí $W = \bigcup_{n\geq 1} W_n$ é um subespaço negativo de dimensão infinita, contradizendo a hipótese.

Na verdade, segue do *Lema de Zorn* que toda forma bilinear simétrica admite um subespaço negativo maximal.

PROPOSIÇÃO 4.1.23. *Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$; se $V = V_1 \oplus V_2$ é uma decomposição B-ortogonal então:*

$$n_+(B) = n_+\big(B|_{V_1\times V_1}\big) + n_+\big(B|_{V_2\times V_2}\big), \tag{4.1.10}$$

$$n_-(B) = n_-\big(B|_{V_1\times V_1}\big) + n_-\big(B|_{V_2\times V_2}\big), \tag{4.1.11}$$

$$\mathrm{dgn}(B) = \mathrm{dgn}\big(B|_{V_1\times V_1}\big) + \mathrm{dgn}\big(B|_{V_2\times V_2}\big). \tag{4.1.12}$$

DEMONSTRAÇÃO. A identidade (4.1.12) segue de

$$\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}\big(B|_{V_1\times V_1}\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(B|_{V_2\times V_2}\big).$$

Mostremos (4.1.11). Se B tem índice infinito em V_1 ou em V_2 o resultado é trivial; suponha então que esses índices são finitos. Seja $W_i \subset V_i$ um subespaço B-negativo com $n_-\big(B|_{V_i\times V_i}\big) = \dim(W_i)$, $i = 1, 2$. Pela Observação 4.1.5 podemos encontrar uma decomposição B-ortogonal $V_i = Z_i \oplus W_i$; segue do Corolário 4.1.19 que B deve ser semi-definida positiva em Z_i. Daí:

$$V = (W_1 \oplus W_2) \oplus (Z_1 \oplus Z_2),$$

onde, pelo Lema 4.1.17, B é definida negativa em $W_1 \oplus W_2$ e semi-definida positiva em $Z_1 \oplus Z_2$. A identidade (4.1.11) segue agora do Corolário 4.1.7; a identidade (4.1.10) segue trocando B por $-B$. □

COROLÁRIO 4.1.24. *Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e seja $N \subset \mathrm{Ker}(B)$; se $W \subset V$ é um complementar qualquer de N então valem as identidades:*

$$\begin{gathered} n_+(B) = n_+\big(B|_{W\times W}\big), \quad n_-(B) = n_-\big(B|_{W\times W}\big), \\ \mathrm{dgn}(B) = \mathrm{dgn}\big(B|_{W\times W}\big) + \dim(N); \end{gathered} \tag{4.1.13}$$

se $N = \mathrm{Ker}(B)$ então B é não-degenerada em W.

DEMONSTRAÇÃO. As identidades em (4.1.13) seguem trivialmente da Proposição 4.1.23, já que $V = W \oplus N$ é uma decomposição B-ortogonal. Se $N = \mathrm{Ker}(B)$, a não-degenerescência de B em W é óbvia. □

OBSERVAÇÃO 4.1.25. Se N é um subespaço de $\mathrm{Ker}(B)$ então B passa ao quociente e define uma forma bilinear simétrica $\overline{B} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V/N)$ dada por:

$$\overline{B}(v_1 + N, v_2 + N) = B(v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in V.$$

Se $W \subset V$ é um complementar qualquer de N então temos um isomorfismo $q\colon W \to V/N$ obtido por restrição da aplicação quociente; além do mais, $\overline{B}$ é o push-forward de $B|_{W\times W}$ através de q. Segue então do Corolário 4.1.24 (vide também Exemplo 4.1.4) que:

$$n_+(B) = n_+\big(\overline{B}\big), \quad n_-(B) = n_-\big(\overline{B}\big), \quad \mathrm{dgn}(B) = \mathrm{dgn}\big(\overline{B}\big) + \dim(N);$$

se $N = \operatorname{Ker}(B)$ então temos também que $\overline{B}$ é não-degenerada.

EXEMPLO 4.1.26. O Lema 4.1.17 (e a Proposição 4.1.23) não vale se os espaços V_1 e V_2 não são B-ortogonais; por exemplo, se $V = \mathbb{R}^2$ e se considerarmos a forma bilinear simétrica B em (4.1.4) então $n_-(B) = n_+(B) = 1$, mas podemos escrever $\mathbb{R}^2$ como soma direta dos subespaços gerados pelos vetores $(0, 1)$ e $(1, 2)$, ambos negativos.

Na proposição a seguir generalizamos o Lema 4.1.17 mostrando que se $V = V_1 \oplus V_2$ onde V_1 e V_2 são subespaços B-negativos tais que o produto de elementos de V_1 com elementos de V_2 é "pequeno relativamente a seus comprimentos" então V é B-negativo.

PROPOSIÇÃO 4.1.27. *Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e suponha que V se escreve como soma direta de subespaços B-negativos $V = V_1 \oplus V_2$; se para todos $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ não nulos vale a condição*

$$B(v_1, v_2)^2 < B(v_1, v_1)B(v_2, v_2) \tag{4.1.14}$$

então B é definida negativa em V.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $v \in V$ não nulo e escreva $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Devemos mostrar que $B(v, v) < 0$ e obviamente basta considerar o caso em que v_1 e v_2 são não nulos; mas a hipótese (4.1.14) juntamente com a Proposição 4.1.15 implicam que o subespaço bidimensional gerado por v_1 e v_2 é B-negativo, o que completa a demonstração. $\square$

OBSERVAÇÃO 4.1.28. Pode-se mostrar também uma versão da Proposição 4.1.27 supondo apenas que B seja semi-definida negativa em V_1 e V_2 e que

$$B(v_1, v_2)^2 \le B(v_1, v_1)B(v_2, v_2), \tag{4.1.15}$$

para todos $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Conclui-se aí que B é semi-definida negativa em V. A demonstração é análoga àquela feita para a Proposição 4.1.27, levando em conta que se $v_1, v_2 \in V$ são vetores linearmente independentes tais que $B(v_i, v_i) \le 0$, $i = 1, 2$ e tais que (4.1.15) vale então B é semi-definida negativa no subespaço bidimensional gerado por v_1 e v_2 (vide Exemplo 4.1.12).

4.1.1. A evolução do índice numa família a um parâmetro de formas bilineares simétricas. Nesta subseção estudaremos a evolução da função $n_-(B(t))$ onde $t \mapsto B(t)$ é uma família a um parâmetro de formas bilineares simétricas num espaço V.

Convencionamos nesta subseção que V denota sempre um espaço vetorial real *de dimensão finita*:

$$\dim(V) < +\infty.$$

Escolhemos uma norma arbitrária em V denotada por $\|\cdot\|$; definimos então a norma de uma forma bilinear $B \in \mathcal{B}(V)$ fazendo:

$$\|B\| = \sup_{\substack{\|v\| \le 1 \\ \|w\| \le 1}} |B(v, w)|.$$

Observe na verdade que, como V e $\mathcal{B}(V)$ tem dimensão finita, qualquer outra escolha de norma induziria a mesma topologia nesses espaços.

Mostremos primeiramente que a condição $n_-(B) \geq k$ (para algum k fixo) é aberta.

LEMA 4.1.29. *Fixado $k \geq 0$ então o conjunto das formas bilineares simétricas $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ tais que $n_-(B) \geq k$ é aberto em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ com $n_-(B) \geq k$; existe portanto um subespaço k-dimensional B-negativo $W \subset V$. Como a esfera unitária de W é compacta temos:

$$\sup_{\substack{v \in W \\ \|v\|=1}} B(v,v) = c < 0;$$

segue diretamente agora que se $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ e $\|A - B\| < |c|/2$ então A é definida negativa em W e portanto $n_-(A) \geq k$. □

COROLÁRIO 4.1.30. *Fixado $k \geq 0$ então o conjunto das formas bilineares simétricas não-degeneradas $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ tais que $n_-(B) = k$ é aberto em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ é não-degenerada e $n_-(B) = k$ então $n_+(B) = \dim(V) - k$ (vide Corolário 4.1.20); pelo Lema 4.1.29, para A numa vizinhança de B em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ temos $n_-(A) \geq k$ e $n_+(A) \geq \dim(V) - k$ donde $n_-(A) = k$ e $\mathrm{dgn}(A) = 0$. □

COROLÁRIO 4.1.31. *Seja $t \mapsto B(t)$ uma curva contínua em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ definida em algum intervalo I; se $B(t)$ é não-degenerada para todo $t \in I$ então $n_-(B(t))$ e $n_+(B(t))$ são constantes em I.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 4.1.30 o conjunto dos instantes $t \in I$ tais que $n_-(B(t)) = k$ é aberto em I para cada $k = 0, 1, \ldots, \dim(V)$ fixado; a conclusão segue da conexidade do intervalo I. □

O Corolário 4.1.31 nos diz que o índice $n_-(B(t))$ e o co-índice $n_+(B(t))$ só podem mudar quando $B(t)$ degenera; o teorema a seguir nos diz como computar essa mudança quando $t \mapsto B(t)$ é de classe C^1.

TEOREMA 4.1.32. *Seja $B\colon [t_0, t_1[\, \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ uma curva de classe C^1; escreva $N = \mathrm{Ker}\big(B(t_0)\big)$. Suponha que a forma bilinear $B'(t_0)|_{N \times N}$ é não-degenerada; então existe $\varepsilon > 0$ tal que para $t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[$ a forma bilinear $B(t)$ é não-degenerada e valem as identidades:*

$$\begin{aligned} n_+(B(t)) &= n_+(B(t_0)) + n_+\big(B'(t_0)|_{N \times N}\big), \\ n_-(B(t)) &= n_-(B(t_0)) + n_-\big(B'(t_0)|_{N \times N}\big). \end{aligned}$$

A demonstração seguirá facilmente do seguinte:

LEMA 4.1.33. *Seja $B\colon [t_0, t_1[\, \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ uma curva de classe C^1; escreva $N = \mathrm{Ker}\big(B(t_0)\big)$. Se $B(t_0)$ é semi-definida positiva e $B'(t_0)|_{N \times N}$ é definida positiva então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(t)$ é definida positiva para $t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[$.*

Demonstração. Seja $W \subset V$ um subespaço complementar a N; segue do Corolário 4.1.24 que $B(t_0)$ é não-degenerada em W e do Corolário 4.1.14 que $B(t_0)$ é definida positiva em W. Escolha uma norma qualquer em V; como a esfera unitária de W é compacta temos que:

$$\inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|=1}} B(t_0)(w,w) = c_0 > 0; \tag{4.1.16}$$

analogamente, como $B'(t_0)$ é definida positiva em N temos:

$$\inf_{\substack{n \in N \\ \|n\|=1}} B'(t_0)(n,n) = c_1 > 0. \tag{4.1.17}$$

Como B é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|B(t) - B(t_0)\| \le \frac{c_0}{2}, \quad t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\,,$$

donde segue de (4.1.16) que:

$$\inf_{\substack{w \in W \\ \|w\|=1}} B(t)(w,w) \ge \frac{c_0}{2} > 0, \quad t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\,. \tag{4.1.18}$$

Como B é derivável em t_0 podemos escrever:

$$B(t) = B(t_0) + (t - t_0)B'(t_0) + r(t), \quad \text{com} \ \lim_{t \to t_0} \frac{r(t)}{t - t_0} = 0, \tag{4.1.19}$$

e daí, diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário teremos:

$$\|r(t)\| \le \frac{c_1}{2}(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\,; \tag{4.1.20}$$

de (4.1.17), (4.1.19) e (4.1.20) vem:

$$\inf_{\substack{n \in N \\ \|n\|=1}} B(t)(n,n) \ge \frac{c_1}{2}(t - t_0), \quad t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[\,. \tag{4.1.21}$$

Segue de (4.1.18) e (4.1.21) que $B(t)$ é positiva definida em W e em N para $t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[$; tomando $c_3 = \|B'(t_0)\| + \frac{c_1}{2}$ obtemos de (4.1.19) e (4.1.20) que:

$$\big|B(t)(w,n)\big| \le (t - t_0)c_3, \quad t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\,, \tag{4.1.22}$$

sempre que $w \in W$, $n \in N$ e $\|w\| = \|n\| = 1$. Diminuindo $\varepsilon > 0$ se necessário, juntando (4.1.18), (4.1.21) e (4.1.22) obtemos:

$$\begin{aligned} B(t)(w,n)^2 &\le (t - t_0)^2 c_3^2 < \frac{c_0 c_1}{4}(t - t_0) \\ &\le B(t)(w,w)\,B(t)(n,n), \quad t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[\,, \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

para todos $w \in W$, $n \in N$ com $\|w\| = \|n\| = 1$; mas (4.1.23) implica:

$$B(t)(w,n)^2 < B(t)(w,w)\,B(t)(n,n), \quad t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[\,,$$

para todos $w \in W$, $n \in N$ não nulos. A conclusão segue agora da Proposição 4.1.27. $\square$

Demonstração do Teorema 4.1.32. Pelo Teorema 4.1.10 existe uma decomposição $V = V_+ \oplus V_- \oplus N$ sendo V_+ e V_- respectivamente um subespaço $B(t_0)$-positivo e um subespaço $B(t_0)$-negativo; similarmente, podemos escrever $N = N_+ \oplus N_-$ sendo N_+ um subespaço $B'(t_0)$-positivo e N_- um subespaço $B'(t_0)$-negativo. Obviamente:

$$n_+(B(t_0)) = \dim(V_+), \quad n_-(B(t_0)) = \dim(V_-),$$
$$n_+\big(B'(t_0)|_{N\times N}\big) = \dim(N_+), \quad n_-\big(B'(t_0)|_{N\times N}\big) = \dim(N_-);$$

aplicando o Lema 4.1.33 para a restrição de B a $V_+ \oplus N_+$ e para a restrição de $-B$ a $V_- \oplus N_-$ concluímos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(t)$ é definida positiva em $V_+ \oplus N_+$ e definida negativa em $V_- \oplus N_-$ para $t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[$; a conclusão segue agora do Corolário 4.1.7 e da Proposição 4.1.9. □

Corolário 4.1.34. *Se $t \mapsto B(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ é uma curva de classe C^1 definida numa vizinhança do instante $t_0 \in \mathbb{R}$ e se $B'(t_0)|_{N\times N}$ é não-degenerada, onde $N = \mathrm{Ker}\big(B(t_0)\big)$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos:*

$$n_+(B(t_0+\varepsilon)) - n_+(B(t_0-\varepsilon)) = \mathrm{sgn}\big(B'(t_0)|_{N\times N}\big).$$

Demonstração. Segue do Teorema 4.1.32 que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos:

$$n_+(B(t_0+\varepsilon)) = n_+(B(t_0)) + n_+\big(B'(t_0)|_{N\times N}\big); \tag{4.1.24}$$

aplicando o Teorema 4.1.32 para a curva $t \mapsto B(-t)$ obtemos:

$$n_+(B(t_0-\varepsilon)) = n_+(B(t_0)) + n_-\big(B'(t_0)|_{N\times N}\big). \tag{4.1.25}$$

A conclusão segue subtraindo as equações (4.1.24) e (4.1.25). □

Por razões técnicas precisaremos de uma *versão uniforme* do Teorema 4.1.32.

Proposição 4.1.35. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico e seja dada uma aplicação contínua*

$$\mathcal{X} \times [t_0, t_1[\, \ni (\lambda, t) \longmapsto B_\lambda(t) = B(\lambda, t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$$

derivável na variável t, de modo que $\frac{\partial B}{\partial t}$ também é contínua em $\mathcal{X} \times [t_0, t_1[$. Escreva $N_\lambda = \mathrm{Ker}\big(B_\lambda(t_0)\big)$; suponha que $\dim(N_\lambda)$ não depende de $\lambda \in \mathcal{X}$ e que $B'_{\lambda_0}(t_0) = \frac{\partial B}{\partial t}(\lambda_0, t_0)$ é não-degenerada em N_{λ_0} para um certo $\lambda_0 \in \mathcal{X}$. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de λ_0 em $\mathcal{X}$ de modo que $B'_\lambda(t_0)$ é não-degenerada em N_λ e $B_\lambda(t)$ é não-degenerada em V para todo $\lambda \in \mathfrak{U}$ e todo $t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon[$.

Demonstração. Mostremos primeiramente que o caso geral pode ser reduzido ao caso em que N_λ não depende de $\lambda \in \mathcal{X}$. Com esse objetivo, seja $k = \dim(N_\lambda)$ (que por hipótese não depende de $\lambda \in \mathcal{X}$). Como o núcleo de uma forma bilinear coincide com o núcleo de seu operador linear associado, segue da Proposição 2.4.11 que a aplicação $\lambda \mapsto N_\lambda \in G_k(V)$ é contínua em $\mathcal{X}$; usando agora a Proposição 2.4.6 encontramos uma aplicação contínua

$A\colon \mathfrak{U} \to \mathrm{GL}(V)$ definida numa vizinhança $\mathfrak{U}$ de λ_0 em $\mathcal{X}$ de modo que para cada $\lambda \in \mathfrak{U}$, o isomorfismo $A(\lambda)$ leva N_{λ_0} sobre N_λ. Defina então:

$$\overline{B}_\lambda(t) = A(\lambda)^*\big(B_\lambda(t)\big) = B_\lambda(t)\big(A(\lambda)\cdot, A(\lambda)\cdot\big),$$

para todo $\lambda \in \mathfrak{U}$ e todo $t \in [t_0, t_1[$. Daí $\mathrm{Ker}\big(\overline{B}_\lambda(t_0)\big) = N_{\lambda_0}$ para todo $\lambda \in \mathfrak{U}$; além do mais, a aplicação $\overline{B}$ definida em $\mathfrak{U} \times [t_0, t_1[$ satisfaz as hipóteses da proposição e a validade da tese sobre $\overline{B}$ implicará na validade da tese sobre B.

O argumento acima mostrou que não há perda de generalidade em supor que

$$\mathrm{Ker}\big(B_\lambda(t_0)\big) = N,$$

para todo $\lambda \in \mathcal{X}$; note que, como $\frac{\partial B}{\partial t}$ é contínua então obviamente $B'_\lambda(t_0)$ é não-degenerada em N para λ numa vizinhança de λ_0 em $\mathcal{X}$. Dividimos o restante da demonstração em dois casos.

(1) *Supomos que $B_{\lambda_0}(t_0)$ é semi-definida positiva e que $B'_{\lambda_0}(t_0)$ é definida positiva em N*;

seja W um subespaço complementar de N em V; daí $B_{\lambda_0}(t_0)$ é definida positiva em W. Segue então que $B_\lambda(t_0)$ é definida positiva em W e que $B'_\lambda(t_0)$ é definida positiva em N para todo λ numa vizinhança $\mathfrak{U}$ de λ_0 em $\mathcal{X}$; note que, por hipótese, $\mathrm{Ker}\big(B_\lambda(t_0)\big) = N$ para todo $\lambda \in \mathfrak{U}$. Daí para cada $\lambda \in \mathfrak{U}$ o Lema 4.1.33 nos fornece um número $\varepsilon(\lambda) > 0$ tal que $B_\lambda(t)$ é definida positiva para todo $t \in \,]t_0, t_0 + \varepsilon(\lambda)[$; devemos apenas analisar mais de perto as estimativas feitas na demonstração desse lema para ver que é possível escolher $\varepsilon > 0$ independentemente de λ, quando λ varia numa vizinhança suficientemente pequena de λ_0 em $\mathcal{X}$.

A única estimativa mais delicada aparece em (4.1.20). A fórmula (4.1.19) define agora uma função $r_\lambda(t)$; para cada $\lambda \in \mathfrak{U}$, aplicamos a desigualdade do valor médio para a função $t \mapsto \sigma(t) = B_\lambda(t) - tB'_\lambda(t_0)$ e obtemos:

$$\begin{aligned}\|\sigma(t) - \sigma(t_0)\| = \|r_\lambda(t)\| &\le (t - t_0) \sup_{s\in[t_0,t]} \|\sigma'(s)\| \\ &= (t - t_0) \sup_{s\in[t_0,t]} \|B'_\lambda(s) - B'_\lambda(t_0)\|.\end{aligned}$$

Com a estimativa acima é fácil agora obter a conclusão desejada.

(2) *Mostramos o caso geral*;

tendo em mente que $\mathrm{Ker}\big(B_\lambda(t_0)\big) = N$ não depende de $\lambda \in \mathcal{X}$, repitimos o argumento que aparece na demonstração do Teorema 4.1.32, trocando $B(t_0)$ por $B_{\lambda_0}(t_0)$, $B'(t_0)$ por $B'_{\lambda_0}(t_0)$ e $B(t)$ por $B_\lambda(t)$; usamos o passo (1) acima em vez do Lema 4.1.33.

□

EXEMPLO 4.1.36. O Teorema 4.1.32 e seu Corolário 4.1.34 *não valem* sem a hipótese que $B'(t_0)$ seja não-degenerada em $N = \mathrm{Ker}\big(B(t_0)\big)$; contra-exemplos são fáceis de construir considerando matrizes diagonais $B(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$. Uma análise ingênua do caso em que as formas bilineares $B(t)$ são simultaneamente diagonalizáveis nos levaria a conjecturar que quando $B'(t_0)$ é degenerada em $\mathrm{Ker}\big(B(t_0)\big)$ então seria possível determinar a variação do co-índice de $B(t)$ quando t passa por t_0 usando termos de ordem superior no polinômio de Taylor de $B(t)|_{N\times N}$ em torno de $t = t_0$. O seguinte exemplo mostra que isso não é possível.

Considere as curvas $B_1, B_2\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^2)$ dadas por:

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^3 \end{pmatrix}, \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix};$$

temos $B_1(0) = B_2(0)$ e $N = \mathrm{Ker}\big(B_1(0)\big) = \mathrm{Ker}\big(B_2(0)\big) = \{0\} \oplus \mathbb{R}$. Observe que $B_1(t)|_{N\times N} = B_2(t)|_{N\times N}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que toda a expansão de Taylor de B_1 coincide com a de B_2 em N; por outro lado, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos:

$$n_+(B_1(\varepsilon)) - n_+(B_1(-\varepsilon)) = 1 - 1 = 0,$$
$$n_+(B_2(\varepsilon)) - n_+(B_2(-\varepsilon)) = 2 - 1 = 1.$$

Nosso objetivo agora é mostrar que a base fornecida pelo Teorema de Inércia de Sylvester pode ser escrita como função diferenciável do parâmetro t quando B depende diferenciavelmente desse parâmetro. Para isso, considere a ação do grupo linear geral $\mathrm{GL}(V)$ no espaço $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ dada por:

$$\mathrm{GL}(V)\times\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V) \ni (T, B) \longmapsto T_*(B) = B(T^{-1}\cdot, T^{-1}\cdot) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V); \tag{4.1.26}$$

segue do Teorema de Inércia de Sylvester (Teorema 4.1.10) que as órbitas dessa ação são os conjuntos:

$$\mathcal{B}^{p,q}_{\mathrm{sim}}(V) = \big\{B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V) : n_+(B) = p,\ n_-(B) = q\big\},$$

com $p + q = 0, 1, \ldots, \dim(V)$. Além do mais, fixados p e q os conjuntos

$$\big\{B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V) : n_+(B) \ge p,\ n_-(B) \ge q\big\} \quad \text{e}$$
$$\big\{B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V) : n_+(B) \le p,\ n_-(B) \le q\big\}$$

são respectivamente um aberto e um fechado de $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$, pelo Lema 4.1.29; segue que o conjunto $\mathcal{B}^{p,q}_{\mathrm{sim}}(V)$ é localmente fechado em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ (recorde Definição 2.1.11). Dessas observações obtemos o seguinte:

LEMA 4.1.37. *O conjunto $\mathcal{B}^{p,q}_{\mathrm{sim}}(V)$ é uma subvariedade mergulhada conexa de $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ para quaisquer inteiros $p, q \ge 0$ com $p+q = 0, 1, \ldots, \dim(V)$.*

DEMONSTRAÇÃO. O fato que $\mathcal{B}^{p,q}_{\mathrm{sim}}(V)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ segue do Teorema 2.1.12. A conexidade de $\mathcal{B}^{p,q}_{\mathrm{sim}}(V)$ segue do fato que a restrição da ação (4.1.26) a $\mathrm{GL}_+(V)$ é ainda transitiva em $\mathcal{B}^{p,q}_{\mathrm{sim}}(V)$; essa última afirmação segue da observação que, fixada uma orientação em V, a base $(b_i)_{i=1}^n$ dada pelo Teorema de Inércia de Sylvester pode ser escolhida positivamente orientada (trocando b_1 por $-b_1$ se necessário). $\square$

COROLÁRIO 4.1.38. *O conjunto das formas bilineares simétricas não-degeneradas em* V *é um aberto em* $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ *cujas componentes conexas (por arcos) são os conjuntos* $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}^{k,n-k}(V)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *onde* $n = \dim(V)$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 4.1.30 e do Lema 4.1.37. □

Obtemos agora a extensão desejada do Teorema de Sylvester.

PROPOSIÇÃO 4.1.39. *Dada uma curva* $B\colon [a,b] \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(V)$ *de classe* C^k *(*$0 \le k \le +\infty$*) tal que os inteiros* $n_-(B(t))$ *e* $n_+(B(t))$ *não dependem de* $t \in [a,b]$ *então existem aplicações* $b_i\colon [a,b] \to V$ *de classe* C^k, $i = 1, \ldots, n$, *de modo que para cada* $t \in [a,b]$ *os vetores* $(b_i(t))_{i=1}^n$ *formam uma base de* V *na qual* $B(t)$ *assume a forma canônica* (4.1.7).

DEMONSTRAÇÃO. Sejam p e q tais que $n_+(B(t)) = p$, $n_-(B(t)) = q$ para todo $t \in [a,b]$; tendo em mente a ação transitiva (4.1.26) de $\mathrm{GL}(V)$ em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}^{p,q}(V)$, segue do Corolário 2.1.15 que, fixada $B_0 \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}^{p,q}(V)$, a aplicação

$$\mathrm{GL}(V) \ni T \longmapsto T_*(B_0) = B_0(T^{-1}\cdot, T^{-1}\cdot) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}^{p,q}(V)$$

é uma fibração diferenciável. Segue da Observação 2.1.18 que existe uma aplicação $T\colon [a,b] \to \mathrm{GL}(V)$ de classe C^k tal que $T(t)_*(B_0) = B(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Escolhendo uma base $(b_i)_{i=1}^n$ de V que coloca B_0 na forma canônica (4.1.7), definimos $b_i(t) = T(t) \cdot b_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e $t \in [a,b]$. Isso completa a demonstração. □

4.2. Definição e Cálculo do Índice de Maslov

Nesta seção introduzimos o índice de Maslov (relativamente a um Lagrangeano fixado L_0) de uma curva no Grassmanniano de Lagrangeanos de um espaço simplético (V, ω); tal índice será um número inteiro que corresponde a uma contagem algébrica do número de interseções dessa curva com o conjunto $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$.

A definição do índice de Maslov será feita usando homologia singular relativa e portanto assumimos familiaridade com o maquinário introduzido na Seção 3.3. Usaremos vários fatos sobre a geometria do Grassmanniano de Lagrangeanos Λ mostrados na Seção 2.5 (principalmente Subseção 2.5.1). Será necessário calcular o grupo fundamental de Λ e para isso usaremos a seqüência exata longa de homotopia da fibração, estudada na Seção 3.2. Esse cálculo segue a mesma linha de idéias dos exemplos que aparecem na Subseção 3.2.1; como naquela subseção, omitiremos por simplicidade o ponto base quando nos referirmos ao grupo fundamental de um espaço (vide Corolário 3.1.12 e Observações 3.1.13 e 3.3.37; veremos que os grupos fundamentais que aparecem nesta seção são todos abelianos). Finalmente, para relacionar o grupo fundamental de Λ com seu primeiro grupo de homologia singular precisaremos do homomorfismo de Hurewicz estudado na Subseção 3.3.1.

Durante esta seção consideraremos fixo um espaço simplético (V, ω) com $\dim(V) = 2n$; denotamos por Λ o Grassmanniano de Lagrangeanos desse espaço simplético. Recorde que pelo termo "curva" entendemos sempre *curva contínua*.

Sabemos que o Grassmanniano de Lagrangeanos Λ é difeomorfo ao quociente $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ (vide Corolário 2.5.12). Considere o homomorfismo:

$$d = \det^2 \colon \mathrm{U}(n) \longrightarrow S^1,$$

onde $S^1 \subset \mathbb{C}$ denota o círculo unitário; se $A \in \mathrm{O}(n)$ então obviamente $\det(A) = \pm 1$, donde $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Ker}(d)$. Segue que d induz por passagem ao quociente uma aplicação:

$$\bar{d} \colon \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \longrightarrow S^1, \tag{4.2.1}$$

dada por $\bar{d}(A \cdot \mathrm{O}(n)) = \det^2(A)$. Temos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 4.2.1. *O grupo fundamental do Grassmanniano de Lagrangeanos $\Lambda \cong \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ é cíclico infinito; mais explicitamente, a aplicação* (4.2.1) *induz um isomorfismo:*

$$\bar{d}_* \colon \pi_1\big(\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)\big) \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 2.1.16 que $\bar{d}$ é uma fibração com fibra típica $\mathrm{Ker}(d)/\mathrm{O}(n)$. É fácil ver que a ação de $\mathrm{SU}(n)$ em $\mathrm{Ker}(d)/\mathrm{O}(n)$ por translação à esquerda é transitiva e que o subgrupo de isotropia da classe $1 \cdot \mathrm{O}(n)$ do elemento neutro é $\mathrm{SU}(n) \cap \mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n)$; segue do Corolário 2.1.9 que temos um difeomorfismo

$$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n) \cong \mathrm{Ker}(d)/\mathrm{O}(n)$$

induzido pela inclusão de $\mathrm{SU}(n)$ em $\mathrm{Ker}(d)$. Como $\mathrm{SU}(n)$ é simplesmente conexo e $\mathrm{SO}(n)$ é conexo, segue facilmente da seqüência exata de homotopia da fibração $\mathrm{SU}(n) \to \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ que $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ é simplesmente conexo. Daí $\mathrm{Ker}(d)/\mathrm{O}(n)$ também é simplesmente conexo e a seqüência exata de homotopia da fibração $\bar{d}$ fica:

$$0 \longrightarrow \pi_1\big(\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)\big) \xrightarrow[\cong]{\bar{d}_*} \pi_1(S^1) \longrightarrow 0$$

Isso completa a demonstração. $\square$

COROLÁRIO 4.2.2. *O primeiro grupo de homologia singular $H_1(\Lambda)$ do Grassmanniano de Lagrangeanos é cíclico infinito.*

DEMONSTRAÇÃO. Como Λ é conexo por arcos e $\pi_1(\Lambda)$ é abeliano segue do Teorema 3.3.36 que o homomorfismo de Hurewicz é um isomorfismo:

$$\Theta \colon \pi_1(\Lambda) \xrightarrow{\cong} H_1(\Lambda) \tag{4.2.2}$$

$\square$

COROLÁRIO 4.2.3. *Fixado um Lagrangeano $L_0 \in \Lambda$ então a inclusão*

$$\mathfrak{q} \colon (\Lambda, \emptyset) \longrightarrow (\Lambda, \Lambda^0(L_0))$$

induz um isomorfismo:

$$\mathfrak{q}_* \colon H_1(\Lambda) \xrightarrow{\cong} H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)); \tag{4.2.3}$$

em particular $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ *é cíclico infinito.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Observação 2.5.3 e do Exemplo 3.3.19. □

Seja $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ uma curva com extremos em $\Lambda^0(L_0)$, i.e., $\ell(a), \ell(b) \in \Lambda^0(L_0)$; temos que ℓ define uma classe de homologia em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ (vide Observações 3.3.33 e 3.3.29). Nosso objetivo agora é mostrar que a orientação transversa de $\Lambda^1(L_0)$ dada na Definição 2.5.19 induz uma escolha canônica de gerador para o grupo infinito cíclico $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$; a partir daí poderemos associar um número inteiro para cada curva em Λ com extremos em $\Lambda^0(L_0)$.

EXEMPLO 4.2.4. Analisando os passos que nos levaram a concluir que $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ podemos calcular explicitamente um gerador desse grupo. Em primeiro lugar a curva

$$[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}] \ni t \longmapsto A(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & & & \\ & i & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & i \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n)$$

projeta-se numa curva fechada $\overline{A}(t) = A(t) \cdot \mathrm{O}(n)$ em $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$; além do mais,

$$[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}] \ni t \longmapsto \det{}^2\big(A(t)\big) = (-1)^{n-1} e^{2it} \tag{4.2.4}$$

é um gerador do grupo fundamental do círculo unitário S^1. Segue da Proposição 4.2.1 que $\overline{A}$ define um gerador do grupo fundamental de $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$.

Denotando por $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ o Grassmanniano de Lagrangeanos do espaço simplético $\mathbb{R}^{2n}$ (munido da forma simplética canônica), segue da Proposição 2.5.11 que um difeomorfismo $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \cong \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ é dado explicitamente por:

$$\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \ni A \cdot \mathrm{O}(n) \longmapsto A\big(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n\big) \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n});$$

temos que o Lagrangeano $A(t)\big(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n\big)$ é gerado pelos vetores[1]

$$\{e_1 \cos(t) + e_{n+1} \operatorname{sen}(t), e_{n+2}, \ldots, e_{2n}\},$$

onde $(e_j)_{j=1}^{2n}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$.

A escolha de uma base simplética $(b_j)_{j=1}^{2n}$ de V induz um difeomorfismo de Λ sobre $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ da maneira óbvia. Considere o Lagrangeano $\ell(t)$ dado por:

$$\ell(t) = \mathbb{R}\big(b_1 \cos(t) + b_{n+1} \operatorname{sen}(t)\big) + \sum_{j=n+2}^{2n} \mathbb{R} b_j; \tag{4.2.5}$$

[1] A matriz complexa $A(t)$ deve ser vista como um endomorfismo linear de $\mathbb{R}^{2n}$; devemos portanto identificar matrizes complexas $n \times n$ com matrizes reais $2n \times 2n$ (vide Observação 1.2.10).

daí a curva

$$[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}] \ni t \longmapsto \ell(t) \in \Lambda \tag{4.2.6}$$

é um gerador de $\pi_1(\Lambda)$. Pela definição do homomorfismo de Hurewicz (vide (3.3.27)) temos que a mesma curva (4.2.6) define um gerador de $H_1(\Lambda)$; como o isomorfismo (4.2.3) é induzido por inclusão temos que a curva (4.2.6) é também um gerador de $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$.

LEMA 4.2.5. *Seja $A \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ um simplectomorfismo de V e considere o difeomorfismo de Λ induzido pela ação de A (e que também é denotado por A); então o homomorfismo induzido em homologia*

$$A_*\colon H_p(\Lambda) \longrightarrow H_p(\Lambda)$$

é a aplicação identidade para todo $p \in \mathbb{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ é conexo por arcos existe uma curva

$$[0,1] \ni s \longmapsto A(s) \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$$

tal que $A(0) = A$ e $A(1) = \mathrm{Id}$. Defina

$$[0,1] \times \Lambda \ni (s, L) \longmapsto H_s(L) = A(s) \cdot L \in \Lambda;$$

daí $H\colon A \cong \mathrm{Id}$ é uma homotopia. A conclusão segue do Corolário 3.3.24. □

COROLÁRIO 4.2.6. *Seja $L_0 \in \Lambda$ um subespaço Lagrangeano e seja $A \in \mathrm{Sp}(V, \omega, L_0)$ (recorde (2.5.15)); então o homomorfismo*

$$A_*\colon H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)) \longrightarrow H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$$

é a aplicação identidade.

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 4.2.5 e do diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_1(\Lambda) \arrow[r, "A_* = \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathfrak{q}_*"', "\cong"] & H_1(\Lambda) \arrow[d, "\cong"', "\mathfrak{q}_*"] \\
H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)) \arrow[r, "A_*"'] & H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))
\end{tikzcd}$$

onde $\mathfrak{q}_*$ é dada em (4.2.3). □

Podemos na verdade mostrar a seguinte extensão do Corolário 4.2.6:

LEMA 4.2.7. *Seja $L_0 \in \Lambda$ um subespaço Lagrangeano e sejam $A\colon [a,b] \to \mathrm{Sp}(V, \omega, L_0)$, $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ curvas de modo que ℓ tem extremos em $\Lambda^0(L_0)$; então a curva*

$$[a,b] \ni t \longmapsto A(t) \cdot \ell(t) \in \Lambda \tag{4.2.7}$$

é homóloga a ℓ em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$.

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação

$$[0,1] \times [a,b] \ni (s,t) \longmapsto A((1-s)t + sa) \cdot \ell(t) \in \Lambda$$

é uma homotopia com extremos livres em $\Lambda^0(L_0)$ entre a curva (4.2.7) e a curva $A(a) \circ \ell$; pela Observação 3.3.33 vemos que (4.2.7) e $A(a) \circ \ell$ são homólogas em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$. A conclusão segue do Corolário 4.2.6. $\square$

EXEMPLO 4.2.8. Considere uma decomposição Lagrangeana (L_0, L_1) de V e seja L um elemento do domínio de φ_{L_0,L_1}, i.e., $L \in \Lambda^0(L_1)$. Segue diretamente da definição da carta φ_{L_0,L_1} (vide (2.5.3)) que o núcleo da forma bilinear simétrica $\varphi_{L_0,L_1}(L) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ é $L_0 \cap L$, ou seja:

$$\operatorname{Ker}\big(\varphi_{L_0,L_1}(L)\big) = L_0 \cap L. \tag{4.2.8}$$

Obtemos então que para cada $k = 0, \ldots, n$ o Lagrangeano L pertence a $\Lambda^k(L_0)$ se e somente se o núcleo de $\varphi_{L_0,L_1}(L)$ tem dimensão k, ou seja:

$$\varphi_{L_0,L_1}\big(\Lambda^0(L_1) \cap \Lambda^k(L_0)\big) = \big\{B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0) : \mathrm{dgn}(B) = k\big\}.$$

Em particular temos $L \in \Lambda^0(L_0)$ se e somente se $\varphi_{L_0,L_1}(L)$ é não-degenerada.

EXEMPLO 4.2.9. Seja $t \mapsto \ell(t)$ uma curva em Λ derivável em $t = t_0$ e seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de V com $\ell(t_0) \in \Lambda^0(L_1)$. Daí para t numa vizinhança de t_0 temos também $\ell(t) \in \Lambda^0(L_1)$ e portanto podemos definir $\beta(t) = \varphi_{L_0,L_1}(\ell(t)) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$. Vamos relacionar $\beta'(t_0)$ e $\ell'(t_0)$; pelo Lema 2.5.7 temos:

$$\beta'(t_0) = \mathrm{d}\varphi_{L_0,L_1}(\ell(t_0)) \cdot \ell'(t_0) = \big(\eta^{L_1}_{\ell(t_0),L_0}\big)_* \cdot \ell'(t_0).$$

Como $\eta^{L_1}_{\ell(t_0),L_0}$ fixa os pontos de $L_0 \cap \ell(t_0)$ obtemos em particular que as formas bilineares simétricas $\beta'(t_0) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ e $\ell'(t_0) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\ell(t_0))$ coincidem em $L_0 \cap \ell(t_0)$.

LEMA 4.2.10. *Fixe um subespaço Lagrangeano $L_0 \in \Lambda$. Sejam dadas curvas*

$$\ell_1, \ell_2 \colon [a,b] \longrightarrow \Lambda$$

com extremos em $\Lambda^0(L_0)$. Suponha que existe um subespaço Lagrangeano $L_1 \in \Lambda$ complementar a L_0 tal que $\Lambda^0(L_1)$ contém a imagem de ambas as curvas ℓ_1, ℓ_2; se tivermos

$$n_+\big(\varphi_{L_0,L_1}(\ell_1(t))\big) = n_+\big(\varphi_{L_0,L_1}(\ell_2(t))\big), \tag{4.2.9}$$

para $t = a$ e $t = b$ então as curvas ℓ_1, ℓ_2 são homólogas em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue de (4.2.9) e do Corolário 4.1.38 que existem curvas

$$\sigma_1, \sigma_2 \colon [0,1] \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$$

de modo que $\sigma_1(t)$ e $\sigma_2(t)$ são não-degeneradas para todo $t \in [0,1]$ e também:

$$\sigma_1(0) = \varphi_{L_0,L_1}(\ell_1(a)), \qquad \sigma_1(1) = \varphi_{L_0,L_1}(\ell_2(a)),$$
$$\sigma_2(0) = \varphi_{L_0,L_1}(\ell_1(b)), \qquad \sigma_2(1) = \varphi_{L_0,L_1}(\ell_2(b)).$$

Defina $m_i = \varphi_{L_0,L_1}^{-1} \circ \sigma_i$, $i = 1, 2$; segue do Exemplo 4.2.8 que m_1 e m_2 tem imagem em $\Lambda^0(L_0)$ e portanto são homólogas a zero em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$. Considere a concatenação $\ell = m_1^{-1} \cdot \ell_1 \cdot m_2$; segue do Lema 3.3.30 que ℓ_1 e ℓ são homólogas em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$. Temos que ℓ e ℓ_2 são curvas em $\Lambda^0(L_1)$ com os mesmos extremos; como $\Lambda^0(L_1)$ é homeomorfo ao espaço Euclideano $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ segue que ℓ e ℓ_2 são homotópicas com extremos fixos. Pelo Corolário 3.3.32 temos que ℓ e ℓ_2 são homólogas, o que completa a demonstração. $\square$

DEFINIÇÃO 4.2.11. Seja $\ell\colon [a, b] \to \Lambda$ uma curva de classe C^1. Dizemos que ℓ *intercepta transversalmente* o conjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ no instante $t = t_0$ se $\ell(t_0) \in \Lambda^1(L_0)$ e $\ell'(t_0) \notin T_{\ell(t_0)}\Lambda^1(L_0)$; dizemos que tal interseção transversa é *positiva* (respectivamente, *negativa*) se a classe de $\ell'(t_0)$ no quociente $T_{\ell(t_0)}\Lambda/T_{\ell(t_0)}\Lambda^1(L_0)$ define uma base positivamente (respectivamente, negativamente) orientada (recorde Definição 2.5.19).

Segue do Teorema 2.5.16 que ℓ intercepta $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ transversalmente no instante $t = t_0$ se e somente se $\ell(t_0) \in \Lambda^1(L_0)$ e a forma bilinear simétrica $\ell'(t_0)$ não é nula no subespaço $L_0 \cap \ell(t_0)$; tal interseção será positiva (respectivamente, negativa) se $\ell'(t_0)$ for definida positiva (respectivamente, negativa) em $L_0 \cap \ell(t_0)$.

LEMA 4.2.12. *Seja $L_0 \in \Lambda$ um subespaço Lagrangeano e sejam*

$$\ell_1, \ell_2\colon [a, b] \longrightarrow \Lambda$$

curvas de classe C^1 com extremos em $\Lambda^0(L_0)$ que interceptam $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ uma única vez; suponha que essa interseção é transversa e positiva. Temos então que ℓ_1 e ℓ_2 são homólogas em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ e qualquer uma dessas curvas define um gerador de $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)) \cong \mathbb{Z}$.

DEMONSTRAÇÃO. Em vista do Lema 3.3.28 podemos supor que ambas as curvas ℓ_1, ℓ_2 interceptam $\Lambda^1(L_0)$ no mesmo instante $t_0 \in \,]a, b[$. Pela Proposição 1.4.39 existe um simplectomorfismo $A \in \mathrm{Sp}(V, \omega, L_0)$ tal que $A(\ell_1(t_0)) = \ell_2(t_0)$. Segue do Corolário 4.2.6 que $A \circ \ell_1$ e ℓ_1 são homólogas em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$; note que também $A \circ \ell_1$ intercepta $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ apenas no instante t_0 e essa interseção é transversa e positiva (vide Proposição 2.5.20).

O argumento acima mostrou que não há perda de generalidade em supor que $\ell_1(t_0) = \ell_2(t_0)$. Pelo Lema 3.3.30 temos que basta mostrar que $\ell_1|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ é homóloga a $\ell_2|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ para algum $\varepsilon > 0$. Seja $L_1 \in \Lambda$ um complementar comum de $\ell_1(t_0)$ e L_0 (vide Observação 2.5.18); para t numa vizinhança de t_0 podemos escrever $\beta_i(t) = \varphi_{L_0,L_1} \circ \ell_i(t)$, $i = 1, 2$. Pelo Exemplo 4.2.9 temos que $\beta_i'(t_0)$ e $\ell_i'(t_0)$ coincidem em $L_0 \cap \ell_i(t_0) = \mathrm{Ker}\big(\beta_i(t_0)\big)$ (vide (4.2.8)); como por hipótese $\ell_i'(t_0)$ é definida positiva no espaço unidimensional $L_0 \cap \ell_i(t_0)$ segue do Teorema 4.1.32 (vide também (4.1.25)) que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos

$$n_+\big(\beta_i(t_0 + \varepsilon)\big) = n_+\big(\beta_i(t_0)\big) + 1, \quad n_+\big(\beta_i(t_0 - \varepsilon)\big) = n_+\big(\beta_i(t_0)\big). \tag{4.2.10}$$

Como $\beta_1(t_0) = \beta_2(t_0)$ segue de (4.2.10) que

$$n_+\big(\beta_1(t_0+\varepsilon)\big) = n_+\big(\beta_2(t_0+\varepsilon)\big), \quad n_+\big(\beta_1(t_0-\varepsilon)\big) = n_+\big(\beta_2(t_0-\varepsilon)\big),$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Segue agora do Lema 4.2.10 que a curva $\ell_1|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}$ é homóloga à curva $\ell_2|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}$ em $H_1(\Lambda,\Lambda^0(L_0))$. Isso completa a demonstração da primeira afirmação do enunciado.

Para mostrar a segunda afirmação é suficiente agora exibir uma curva ℓ que possui uma única interseção com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$, sendo esta interseção transversa e positiva, de modo que ℓ defina um gerador de $H_1(\Lambda,\Lambda^0(L_0))$. Seja $(b_j)_{j=1}^{2n}$ uma base simplética de V de modo que $(b_j)_{j=1}^{n}$ seja uma base de L_0 (vide Lema 1.4.35); considere o gerador ℓ de $H_1(\Lambda,\Lambda^0(L_0))$ descrito em (4.2.5) e (4.2.6). É fácil ver que ℓ intercepta $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ apenas no instante $t = \pi$ e $L_0 \cap \ell(\pi)$ é o espaço unidimensional gerado por b_1; além do mais, um cálculo simples mostra que:

$$\ell'(\pi)(b_1,b_1) = \omega(b_{n+1},b_1) = -1. \tag{4.2.11}$$

Segue que ℓ^{-1} possui uma única interseção com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ e essa interseção é transversa e positiva. Pelo Lema 3.3.30 a curva ℓ^{-1} é também um gerador de $H_1(\Lambda,\Lambda^0(L_0))$, o que completa a demonstração. $\square$

Definição 4.2.13. Seja dado um Lagrangeano $L_0 \in \Lambda$; vamos definir um isomorfismo

$$\mu_{L_0}\colon H_1(\Lambda,\Lambda^0(L_0)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \tag{4.2.12}$$

da seguinte maneira: escolha uma curva ℓ em Λ de classe C^1 com extremos em $\Lambda^0(L_0)$, de modo que ℓ possua uma única interseção com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ e de modo que essa interseção seja transversa e positiva. Defina μ_{L_0} declarando que a classe de homologia de ℓ seja levada no elemento $1 \in \mathbb{Z}$; pelo Lema 4.2.12 o isomorfismo (4.2.12) fica então de fato bem definido, independentemente da escolha de ℓ.

Supondo agora que $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ é uma curva *arbitrária* com extremos em $\Lambda^0(L_0)$ então denotamos por $\mu_{L_0}(\ell) \in \mathbb{Z}$ o número inteiro que corresponde pelo isomorfismo (4.2.12) à classe de homologia de ℓ; o número $\mu_{L_0}(\ell)$ é chamado o *índice de Maslov* da curva ℓ relativamente ao Lagrangeano L_0.

No lema a seguir listamos as propriedades básicas do índice de Maslov.

Lema 4.2.14. *Seja $L_0 \in \Lambda$ um subespaço Lagrangeano e seja $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ uma curva com extremos em $\Lambda^0(L_0)$; temos então:*

1. *se $\sigma\colon [a',b'] \to [a,b]$ é uma aplicação contínua com $\sigma(a') = a$, $\sigma(b') = b$ então $\mu_{L_0}(\ell \circ \sigma) = \mu_{L_0}(\ell)$;*
2. *se $m\colon [a',b'] \to \Lambda$ é uma curva com extremos em $\Lambda^0(L_0)$ tal que $\ell(b) = m(a')$ então $\mu_{L_0}(\ell \cdot m) = \mu_{L_0}(\ell) + \mu_{L_0}(m)$;*
3. *$\mu_{L_0}\big(\ell^{-1}\big) = -\mu_{L_0}(\ell)$;*
4. *se $\mathrm{Im}(\ell) \subset \Lambda^0(L_0)$ então $\mu_{L_0}(\ell) = 0$;*
5. *se $m\colon [a,b] \to \Lambda$ é homotópica a ℓ com extremos livres em $\Lambda^0(L_0)$ (vide Definição 3.1.25) então $\mu_{L_0}(\ell) = \mu_{L_0}(m)$;*

(6) *existe uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* ℓ *em* $\mathcal{C}([a,b],\Lambda)$ *munido da topologia compacto-aberta (vide Definição 3.1.18) tal que se* $m \in \mathcal{U}$ *tem extremos em* $\Lambda^0(L_0)$ *então* $\mu_{L_0}(\ell) = \mu_{L_0}(m)$.

Demonstração. A Propriedade (1) segue do Lema 3.3.28; as Propriedades (2) e (3) seguem do Lema 3.3.30. A Propriedade (4) segue trivialmente da definição do grupo $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ (vide (3.3.8)). A Propriedade (5) segue da Observação 3.3.33 e a Propriedade (6) segue do Teorema 3.1.27 e da Propriedade (5). □

Exemplo 4.2.15. O índice de Maslov $\mu_{L_0}(\ell)$ pode ser entendido como um *número de interseção* da curva ℓ com o subconjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0) \subset \Lambda$; de fato, segue do Lema 4.2.14 (mais especificamente, das Propriedades (2), (3) e (4)) que se $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ é uma curva de classe C^1 com extremos em $\Lambda^0(L_0)$ que possui apenas interseções transversas com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ então o índice de Maslov $\mu_{L_0}(\ell)$ é o número de interseções positivas de ℓ com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ menos o número de interseções negativas de ℓ com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ (esses números são de fato finitos; vide Exemplo 4.2.18 a seguir). No Corolário 4.2.19 generalizaremos esse resultado.

Vamos agora estabelecer uma fórmula explícita para o índice de Maslov μ_{L_0} em termos de uma carta φ_{L_0,L_1}.

Teorema 4.2.16. *Seja* $L_0 \in \Lambda$ *um subespaço Lagrangeano e seja dada uma curva* $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ *com extremos em* $\Lambda^0(L_0)$*; se existe um Lagrangeano* $L_1 \in \Lambda$ *complementar a* L_0 *de modo que a imagem de* ℓ *esteja contida em* $\Lambda^0(L_1)$ *então o índice de Maslov de* ℓ *é dado por:*

$$\mu_{L_0}(\ell) = n_+\big(\varphi_{L_0,L_1}(\ell(b))\big) - n_+\big(\varphi_{L_0,L_1}(\ell(a))\big).$$

Demonstração. Em vista do Lema 4.2.10 é suficiente apenas para cada $i, j = 0, 1, \ldots, n$ encontrar uma curva $\beta_{i,j}\colon [0,1] \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ de modo que

$$n_+\big(\beta_{i,j}(0)\big) = i, \qquad \mathrm{dgn}\big(\beta_{i,j}(0)\big) = 0, \tag{4.2.13}$$

$$n_+\big(\beta_{i,j}(1)\big) = j, \qquad \mathrm{dgn}\big(\beta_{i,j}(1)\big) = 0 \tag{4.2.14}$$

e a curva $\ell_{i,j} = \varphi_{L_0,L_1}^{-1} \circ \beta_{i,j}$ satisfaça $\mu_{L_0}(\ell_{i,j}) = j - i$. Se $i = j$ é só tomar $\beta_{i,i}$ como sendo uma curva constante qualquer tal que $\beta_{i,i}(0)$ seja não-degenerada e $n_+\big(\beta_{i,i}(0)\big) = i$.

A Propriedade (3) no enunciado do Lema 4.2.14 implica que não há perda de generalidade em supor $i < j$. Começamos com o caso $j = i + 1$; escolha uma base qualquer de L_0 e defina $\beta_{i,i+1}(t)$ como sendo a forma bilinear cuja representação matricial nessa base é dada por:

$$\beta_{i,i+1}(t) \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i \text{ vezes}}, t - \tfrac{1}{2}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{n-i-1 \text{ vezes}}), \quad t \in [0,1],$$

onde $\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ denota a matriz diagonal com entradas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Temos então

$$\begin{aligned} n_+\big(\beta_{i,i+1}(0)\big) &= i, & \mathrm{dgn}\big(\beta_{i,i+1}(0)\big) &= 0,\\ n_+\big(\beta_{i,i+1}(1)\big) &= i+1, & \mathrm{dgn}\big(\beta_{i,i+1}(1)\big) &= 0; \end{aligned}$$

além do mais $\beta_{i,i+1}(t)$ é degenerada apenas para $t=\frac{1}{2}$ e a derivada $\beta'_{i,i+1}(\frac{1}{2})$ é definida positiva no espaço unidimensional $\mathrm{Ker}\big(\beta_{i,i+1}(\frac{1}{2})\big)$. Segue dos Exemplos 4.2.8 e 4.2.9 que $\ell_{i,i+1}$ intercepta $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ apenas em $t=\frac{1}{2}$ e que essa interseção é transversa e positiva. Pela definição do índice de Maslov temos:

$$\mu_{L_0}(\ell_{i,i+1}) = 1;$$

isso completa a construção de $\beta_{i,j}$ no caso $j=i+1$.

Passemos ao caso $j>i+1$. Para cada $i=0,\ldots,n$, seja $B_i\in\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ uma forma bilinear simétrica não-degenerada com $n_+(B_i)=i$; escolha uma curva qualquer $\tilde\beta_{i,i+1}\colon[0,1]\to\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ com $\tilde\beta_{i,i+1}(0)=B_i$ e $\tilde\beta_{i,i+1}(1)=B_{i+1}$ para $i=0,\ldots,n-1$. Segue do Lema 4.2.10 e da primeira parte da demonstração que a curva $\tilde\ell_{i,i+1}=\varphi_{L_0,L_1}^{-1}\circ\tilde\beta_{i,i+1}$ satisfaz $\mu_{L_0}\big(\tilde\ell_{i,i+1}\big)=1$; para $j>i+1$ defina:

$$\beta_{i,j} = \tilde\beta_{i,i+1}\cdot\tilde\beta_{i+1,i+2}\cdot\cdots\cdot\tilde\beta_{j-1,j}.$$

Daí $\beta_{i,j}$ satisfaz (4.2.13), (4.2.14) e da Propriedade (2) no enunciado do Lema 4.2.14 segue que $\mu_{L_0}(\ell_{i,j})=j-i$. □

Definição 4.2.17. Dada uma curva $t\mapsto\ell(t)\in\Lambda$ de classe C^1 dizemos que ℓ possui uma interseção *não-degenerada* com $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ no instante $t=t_0$ se $\ell(t_0)\in\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ e $\ell'(t_0)$ é não-degenerada em $L_0\cap\ell(t_0)$.

Exemplo 4.2.18. Se uma curva ℓ em Λ de classe C^1 possui uma interseção não-degenerada com $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ no instante $t=t_0$ então essa interseção é *isolada*, i.e., $\ell(t)\in\Lambda^0(L_0)$ para $t\ne t_0$ suficientemente próximo de t_0. Para ver isso, escolha um complementar comum $L_1\in\Lambda$ a L_0 e $\ell(t_0)$ (vide Observação 2.5.18) e aplique o Teorema 4.1.32 sobre a curva $\beta=\varphi_{L_0,L_1}\circ\ell$ em torno do instante t_0, tendo em mente os Exemplos 4.2.8 e 4.2.9.

Como $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ é fechado em Λ, segue que se uma curva $\ell\colon[a,b]\to\Lambda$ de classe C^1 possui apenas interseções não-degeneradas com $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ então $\ell(t)\in\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ apenas para um número finito de instantes $t\in[a,b]$.

Temos agora o seguinte corolário do Teorema 4.2.16.

Corolário 4.2.19. *Seja $L_0\in\Lambda$ um subespaço Lagrangeano e seja dada uma curva $\ell\colon[a,b]\to\Lambda$ de classe C^1 com extremos em $\Lambda^0(L_0)$ que possui apenas interseções não-degeneradas com $\Lambda^{\ge 1}(L_0)$; então $\ell(t)\in\Lambda^{\ge 1}(L_0)$ apenas para um número finito de instantes $t\in[a,b]$ e vale a identidade:*

$$\mu_{L_0}(\ell) = \sum_{t\in[a,b]} \mathrm{sgn}\big(\ell'(t)|_{(L_0\cap\ell(t))\times(L_0\cap\ell(t))}\big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Exemplo 4.2.18 que $\ell(t) \in \Lambda^{\geq 1}(L_0)$ apenas para um número finito de instantes $t \in [a,b]$. Seja $t_0 \in \,]a,b[$ tal que $\ell(t_0) \in \Lambda^{\geq 1}(L_0)$; tendo em mente as Propriedade (2) e (4) no enunciado do Lema 4.2.14 vemos que é suficiente mostrar que:

$$\mu_{L_0}\big(\ell|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}\big) = \operatorname{sgn}\big(\ell'(t_0)|_{(L_0\cap\ell(t_0))\times(L_0\cap\ell(t_0))}\big),$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Escolha um complementar comum $L_1 \in \Lambda$ de L_0 e $\ell(t_0)$ (vide Observação 2.5.18); podemos para t numa vizinhança de t_0 escrever $\beta(t) = \varphi_{L_0,L_1}(\ell(t))$. A conclusão segue agora do Teorema 4.2.16 e do Corolário 4.1.34, tendo em mente os Exemplos 4.2.8 e 4.2.9. $\square$

Vimos no Exemplo 4.2.18 que uma interseção não-degenerada de uma curva ℓ de classe C^1 com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ num instante t_0 é isolada, i.e., existe $\varepsilon > 0$ tal que $t \in \,]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ implica $\ell(t) \notin \Lambda^{\geq 1}(L_0)$; por razões técnicas, precisaremos de um "lema de uniformidade" para a escolha desse $\varepsilon > 0$ com respeito a parâmetros.

LEMA 4.2.20. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico e seja dada uma aplicação contínua*

$$\mathcal{X} \times [t_0, t_1[\, \ni (\lambda, t) \longmapsto \ell_\lambda(t) = \ell(\lambda, t) \in \Lambda$$

derivável na variável t de modo que $\frac{\partial \ell}{\partial t}\colon \mathcal{X}\times[t_0,t_1[\,\to T\Lambda$ também é contínua. Fixe um Lagrangeano $L_0 \in \Lambda$; suponha que $\dim(\ell(\lambda,t_0)\cap L_0)$ não depende de $\lambda \in \mathcal{X}$ e que a curva ℓ_{λ_0} possui uma interseção não-degenerada com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ no instante t_0, para algum $\lambda_0 \in \mathcal{X}$. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de λ_0 em $\mathcal{X}$ de modo que ℓ_λ possui uma interseção não-degenerada com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ no instante t_0 e de modo que $\ell(\lambda, t) \in \Lambda^0(L_0)$ para todo $\lambda \in \mathfrak{U}$ e todo $t \in \,]t_0, t_0+\varepsilon[$.

DEMONSTRAÇÃO. Escolha um complementar comum $L_1 \in \Lambda$ de L_0 e $\ell(\lambda_0, t_0)$ (vide Observação 2.5.18) e defina $\beta(\lambda,t) = \varphi_{L_0,L_1}(\ell(\lambda,t))$ para t numa vizinhança de t_0 e λ numa vizinhança de λ_0 em $\mathcal{X}$; daí β é contínua, derivável em t, sendo $\frac{\partial\beta}{\partial t}$ ainda contínua. A conclusão segue diretamente agora aplicando a Proposição 4.1.35 para a aplicação β, tendo em mente os Exemplos 4.2.8 e 4.2.9. $\square$

Registramos para uso posterior mais um lema técnico.

LEMA 4.2.21. *Sejam dados quatro subespaços Lagrangeanos L, L_*, L_0, $L_1 \in \Lambda$, com L_0 e L_1 complementares entre si, L complementar a L_0 e com L_* complementar a ambos os Lagrangeanos L e L_0. Então (recorde* (1.4.11) *e Definição 1.1.3):*

$$\varphi_{L_1,L_0}(L_*) - \varphi_{L_1,L_0}(L) = (\rho_{L_0,L_1})^*\big(\varphi_{L_0,L_*}(L)^{-1}\big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando (2.5.11) obtemos:

$$\varphi_{L_*,L_0}(L) = -(\rho_{L_0,L_*})^*\big(\varphi_{L_0,L_*}(L)^{-1}\big); \tag{4.2.15}$$

de (2.5.5) segue que:

$$\varphi_{L_1,L_0} \circ (\varphi_{L_*,L_0})^{-1}(B) = \varphi_{L_1,L_0}(L_*) + \big(\eta^{L_0}_{L_1,L_*}\big)^*(B) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_1), \tag{4.2.16}$$

para qualquer forma bilinear simétrica $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_*)$. É fácil ver que:

$$\rho_{L_0,L_*} \circ \eta^{L_0}_{L_1,L_*} = \rho_{L_0,L_1}; \tag{4.2.17}$$

a conclusão segue agora fazendo $B = \varphi_{L_*,L_0}(L)$ em (4.2.16) e depois utilizando (4.2.15) e (4.2.17). □

COROLÁRIO 4.2.22. *Sob as hipóteses do Lema 4.2.21, temos:*

$$\begin{aligned} n_+\big(\varphi_{L_0,L_*}(L)\big) &= n_+\big(\varphi_{L_1,L_0}(L_*) - \varphi_{L_1,L_0}(L)\big) \\ &= n - n_-\big(\varphi_{L_1,L_0}(L_*) - \varphi_{L_1,L_0}(L)\big). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Vide Exemplos 4.1.4 e 1.1.5. □

COROLÁRIO 4.2.23. *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de V e seja $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ uma curva com extremos em $\Lambda^0(L_0)$. Suponha que existe um Lagrangeano $L_* \in \Lambda$, complementar a L_0, tal que $\mathrm{Im}(\ell) \subset \Lambda^0(L_*)$; então:*

$$\mu_{L_0}(\ell) = n_-\big(\varphi_{L_1,L_0}(L_*) - \varphi_{L_1,L_0}(\ell(a))\big) - n_-\big(\varphi_{L_1,L_0}(L_*) - \varphi_{L_1,L_0}(\ell(b))\big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 4.2.16 temos:

$$\mu_{L_0}(\ell) = n_+\big(\varphi_{L_0,L_*}(\ell(b))\big) - n_+\big(\varphi_{L_0,L_*}(\ell(a))\big);$$

a conclusão segue usando o Corolário 4.2.22 com $L = \ell(a)$ e com $L = \ell(b)$. □

OBSERVAÇÃO 4.2.24. Uma análise mais detalhada da definição da orientação transversa de $\Lambda^1(L_0)$ em Λ (vide Definição 2.5.19) mostra que a escolha de sinal que fizemos para o isomorfismo μ_{L_0} é na verdade determinada por uma escolha de sinal na forma simplética ω. Mais explicitamente, trocando ω por $-\omega$ (note que o conjunto Λ não se altera) então obtemos uma troca de sinal para os isomorfismos ρ_{L_0,L_1} e ρ_L (vide (1.4.11) e (1.4.13)); essa troca de sinal induz por sua vez uma troca de sinal nas cartas φ_{L_0,L_1} (vide (2.5.3)) e no isomorfismo (2.5.12) que identifica $T_L\Lambda$ com $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L)$. Concluímos então que a troca de sinal em ω faz com que a orientação transversa de $\Lambda^1(L_0)$ em Λ se inverta, o que por sua vez inverte o sinal do isomorfismo μ_{L_0}.

OBSERVAÇÃO 4.2.25. A escolha de um subespaço Lagrangeano $L_0 \in \Lambda$ nos define um isomorfismo

$$\mu_{L_0} \circ \mathfrak{q}_*\colon H_1(\Lambda) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}, \tag{4.2.18}$$

onde $\mathfrak{q}_*$ é dado em (4.2.3). Esse isomorfismo não depende da escolha de L_0; de fato, seja $L_0' \in \Lambda$ um outro subespaço Lagrangeano. Pelo Corolário 1.4.28 existe um simplectomorfismo $A \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ tal que $A(L_0) = L_0'$; temos o seguinte diagrama comutativo (vide Lema 4.2.5):

$$\begin{tikzcd} H_1(\Lambda) \arrow[rr, "A_*=\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathfrak{q}_*"'] & & H_1(\Lambda) \arrow[d, "\mathfrak{q}_*"] \\ H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)) \arrow[rr, "A_*"] \arrow[dr, "\mu_{L_0}"'] & & H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0')) \arrow[dl, "\mu_{L_0'}"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

onde a comutatividade do triângulo inferior segue da Observação 2.5.21. Isso conclui o argumento. Note que se $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ é um laço, i.e., $\ell(a) = \ell(b)$, então como ℓ define uma classe de homologia em $H_1(\Lambda)$, obtemos a igualdade:

$$\mu_{L_0}(\ell) = \mu_{L_0'}(\ell),$$

para quaisquer subespaços Lagrangeanos $L_0, L_0' \in \Lambda$.

Observação 4.2.26. Seja J uma estrutura complexa compatível com ω; considere o produto interno $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ e o produto Hermiteano g_{s} em (V, J) definido em (1.4.10). Seja $\ell_0 \in \Lambda$ um subespaço Lagrangeano; a Proposição 2.5.11 nos diz que a aplicação

$$\mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}})/\mathrm{O}\big(\ell_0, g|_{\ell_0\times\ell_0}\big) \ni A\cdot \mathrm{O}\big(\ell_0, g|_{\ell_0\times\ell_0}\big) \longmapsto A(\ell_0) \in \Lambda \tag{4.2.19}$$

é um difeomorfismo. Podemos como em (4.2.1) definir uma aplicação

$$\bar{d}\colon \mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}})/\mathrm{O}\big(\ell_0, g|_{\ell_0\times\ell_0}\big) \longrightarrow S^1$$

obtida de

$$d = \det{}^2\colon \mathrm{U}(V, J, g_{\mathrm{s}}) \longrightarrow S^1$$

por passagem ao quociente; daí a aplicação $\bar{d}$ induz um isomorfismo $\bar{d}_*$ de grupos fundamentais. De fato, pela Observação 1.4.30 podemos encontrar uma base de V que deixa todos os objetos $(V, \omega, J, g, g_{\mathrm{s}}, \ell_0)$ simultaneamente nas suas respectivas formas canônicas e daí tudo funciona como na Proposição 4.2.1. O isomorfismo $\bar{d}_*$ juntamente com o difeomorfismo (4.2.19) e a escolha de (3.2.24) (ou, equivalentemente, de (4.2.4)) como gerador de $\pi_1(S^1) \cong H_1(S^1)$ produzem um isomorfismo (vide também (4.2.2)):

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_{J,\ell_0}\colon H_1(\Lambda) \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbb{Z};$$

esse isomorfismo na verdade não depende da escolha de J e de ℓ_0. Para ver isso, escolha uma outra estrutura complexa J' compatível com ω e um outro subespaço Lagrangeano $\ell_0' \in \Lambda$; obtemos então um isomorfismo $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}_{J',\ell_0'}$. Da Observação 1.4.30 segue que existe um simplectomorfismo $A \in \mathrm{Sp}(V,\omega)$ que leva ℓ_0 sobre ℓ_0' e que é $\mathbb{C}$-linear de (V, J) em (V, J'); daí é fácil ver que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
H_1(\Lambda) \arrow[d, "A_*"'] \arrow[dr, "\mathfrak{u}"] & \\
& \mathbb{Z} \\
H_1(\Lambda) \arrow[ur, "\mathfrak{u}'"'] &
\end{tikzcd}$$

Pelo Lema 4.2.5 temos que $A_* = \mathrm{Id}$ e a conclusão segue.

Na verdade, a fórmula (4.2.11) mostra que o isomorfismo $\mathfrak{u}$ tem o sinal oposto do isomorfismo (4.2.18) obtido usando a orientação transversa de $\Lambda^1(L_0)$ em Λ.

CAPÍTULO 5

Tópicos de Análise Funcional

5.1. Espaços de Banach e Hilbert: Notações e Convenções

Nesta seção fixamos algumas notações e convenções sobre a teoria elementar dos espaços de Banach e Hilbert; listamos também alguns exemplos e enunciamos alguns resultados básicos.

Seja X um espaço vetorial real; uma *norma* em X é uma função

$$\|\cdot\|: X \to [0, +\infty[\tag{5.1.1}$$

satisfazendo as propriedades:

(1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todos $\lambda \in I\!R$, $x \in X$;
(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$;
(3) $\|x\| > 0$ para todo $x \in X$ não nulo;

dizemos então que o par $(X, \|\cdot\|)$ é um *espaço vetorial (real) normado*. Num espaço vetorial normado X definimos $d(x, y) = \|x - y\|$ e daí (X, d) torna-se um *espaço métrico*; a métrica d induz por sua vez uma topologia τ em X. Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é dito um *espaço de Banach* se o espaço métrico (X, d) correspondente for completo.

OBSERVAÇÃO 5.1.1. Se X é um espaço vetorial complexo então uma *norma* em X é uma aplicação (5.1.1) satisfazendo as Propriedades (1), (2) e (3) acima, mas exigimos nesse caso também que a Propriedade (1) seja satisfeita para todo $\lambda \in \mathbb{C}$; daí $(X, \|\cdot\|)$ é dito um *espaço normado complexo*. Como no caso real obtemos a partir da norma $\|\cdot\|$ uma métrica d e uma topologia τ e dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um *espaço de Banach complexo* se (X, d) for um espaço métrico completo.

Espaços vetoriais normados complexos não serão utilizados neste texto e portanto *todos os espaços vetoriais normados (e espaços de Banach) que consideraremos serão reais*.

Se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado então todo subespaço $V \subset X$ é também visto como um espaço normado munido com a *restrição* da norma de X; a métrica e a topologia de V induzidas por sua norma coincidem respectivamente com a métrica e a topologia induzidas de X. Se X é um espaço de Banach então $V \subset X$ será um espaço de Banach se e somente se V for fechado em X. Se $V \subset X$ é um subespaço então é fácil ver que o fecho $\overline{V}$ de V em X é ainda um subespaço de X; em particular, se X é um espaço de Banach então $\overline{V}$ é sempre um espaço de Banach.

Dados espaços vetoriais normados $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ então um operador linear $T\colon X \to Y$ é dito *limitado* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|,$$

para todo $x \in X$; de maneira similar, dados espaços normados $(X_i, \|\cdot\|)$, $i = 1, \ldots, r$, dizemos que um operador multi-linear

$$B\colon X_1 \times \cdots \times X_r \longrightarrow Y \tag{5.1.2}$$

é *limitado* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|B(x_1, \ldots, x_r)\| \leq c\|x_1\| \cdots \|x_r\|,$$

para todos $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, r$. As seguintes propriedades são equivalentes sobre um operador multi-linear B (vide [**50**, Teorema I.6] ou [**34**, Proposição 10, §5, Capítulo 2]):

- B é contínuo;
- B é contínuo no ponto zero;
- B é limitado.

Se B é um operador multi-linear como em (5.1.2) e se B é limitado então definimos a *norma* de B fazendo:

$$\|B\| = \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1,\ldots,r}} \|B(x_1, \ldots, x_r)\|; \tag{5.1.3}$$

daí (5.1.3) define de fato uma norma no espaço dos operadores multi-lineares limitados (5.1.2). Se Y é um espaço de Banach então também o espaço de operadores multi-lineares limitados (5.1.2) é um espaço de Banach munido da norma (5.1.3). Obviamente temos:

$$\|B(x_1, \ldots, x_r)\| \leq \|B\|\, \|x_1\| \cdots \|x_r\|,$$

para todos $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, r$; além do mais, se $T\colon X \to Y$, $S\colon Y \to Z$ são operadores lineares limitados então é fácil ver que:

$$\|S \circ T\| \leq \|S\|\, \|T\|.$$

Escrevemos:

$$\mathcal{L}(X, Y) = \big\{T\colon X \to Y \ : \ T \text{ é linear e limitado}\big\}, \tag{5.1.4}$$

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X),$$

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}), \tag{5.1.5}$$

$$\mathcal{B}(X, Y) = \big\{B\colon X \times Y \to \mathbb{R} \ : \ B \text{ é bilinear e limitado}\big\}, \tag{5.1.6}$$

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X),$$

$$\mathcal{B}_{\text{sim}}(X) = \big\{B \in \mathcal{B}(X) : B \text{ é simétrico}\big\}, \tag{5.1.7}$$

$$\mathcal{B}_{\text{ant}}(X) = \big\{B \in \mathcal{B}(X) : B \text{ é anti-simétrico}\big\}; \tag{5.1.8}$$

os espaços em (5.1.4), (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) e (5.1.8) são todos vistos como espaços normados sendo a norma definida como em (5.1.3). Os espaços em

(5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) e (5.1.8) são *sempre* espaços de Banach enquanto que (5.1.4) será um espaço de Banach se Y o for.

Observação 5.1.2. Se X é um espaço de dimensão finita munido de uma norma qualquer então todo operador linear definido em X é limitado; mais geralmente, se $X_1, \ldots, X_r$ tem dimensão finita então todo operador multi-linear (5.1.2) é limitado. Segue que a notação introduzida em (5.1.4), (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) e (5.1.8) *não* é incoerente com a notação introduzida na Seção 1.1; por outro lado, nas Seções 1.2, 1.3 e 4.1 consideramos espaços V de dimensão infinita e usamos notações como $\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}(V)$, para nos referir a espaços de operadores lineares e bilineares *quaisquer*, i.e., não necessariamente limitados. Essa ambiguidade de notação não deve trazer confusão: no contexto de espaços normados e análise funcional escrevemos $\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}(V)$ para nos referir a espaços de operadores lineares e bilineares limitados; num contexto puramente algébrico, onde não houver norma (ou topologia) especificada essas mesmas notações se referem a espaços de operadores lineares e bilineares quaisquer.

O espaço X^* em (5.1.5) é às vezes chamado o *dual topológico* de X e seus elementos são chamados os *funcionais lineares limitados* em X; o teorema a seguir diz que X^* tem “muitos elementos”:

Teorema 5.1.3 (de Hahn-Banach). *Se X é um espaço vetorial normado e $V \subset X$ é um subespaço então todo funcional linear limitado $\beta \in V^*$ se estende a um funcional $\alpha \in X^*$, i.e., $\beta = \alpha|_V$; além do mais, podemos escolher α de modo que $\|\alpha\| = \|\beta\|$.*

Demonstração. Vide [**28**, Teorema 8.5, Capítulo II] ou [**9**, Corolário I.2]. □

Corolário 5.1.4. *Se X é um espaço normado não nulo então dado $x \in X$ existe um funcional $\alpha \in X^*$ com $\|\alpha\| = 1$ e $\alpha(x) = \|x\|$.* □

Definição 5.1.5. Se X é um espaço normado e $V \subset X$ é um subespaço então dizemos que V é *co-fechado* em X se V admite um subespaço complementar fechado em X, i.e., se existe um subespaço fechado $W \subset X$ tal que $X = V \oplus W$.

É fácil ver que se existir um *operador de projeção* limitado $\pi\colon X \to V$, i.e., π é um operador linear limitado e $\pi|_V = \mathrm{Id}$, então V é fechado e co-fechado em X; de fato, se $\pi\colon X \to V$ é um operador de projeção limitado então V é o conjunto de pontos fixos da aplicação contínua $\pi\colon X \to X$ e $\mathrm{Ker}(\pi)$ é um complementar fechado para V. Se X é um espaço de Banach e se V é um subespaço fechado de X então vale a recíproca: se W é um complementar fechado para V então a projeção $\pi\colon X \to V$ relativa à decomposição $X = V \oplus W$ é limitada (vide Observação 5.1.31 adiante).

Temos mais um corolário do Teorema de Hahn-Banach:

Corolário 5.1.6. *Se X é um espaço normado e $V \subset X$ é um subespaço de dimensão finita então existe um operador de projeção limitado $\pi\colon X \to V$; em particular, todo subespaço de dimensão finita é co-fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\beta\colon V \to I\!R^n$ um isomorfismo e escreva $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ com cada $\beta_i \in V^*$; pelo Teorema 5.1.3 existe $\alpha_i \in X^*$ com $\alpha_i|_V = \beta_i$. Daí $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\colon X \to I\!R^n$ é limitado e $\pi = \beta^{-1} \circ \alpha$ é um operador de projeção sobre V; obviamente $W = \mathrm{Ker}(\pi)$ é um complementar fechado de V. $\square$

Um operador linear $T\colon X \to Y$ é dito uma *imersão isométrica* se

$$\|T(x)\| = \|x\|,$$

para todo $x \in X$; daí T é automaticamente limitado e injetor. Uma imersão isométrica bijetora é chamada uma *isometria*; daí T^{-1} é também uma isometria. Enunciamos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 5.1.7. *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $D \subset X$ um subespaço denso. Temos que todo operador linear limitado $T_0\colon D \to Y$ admite uma* única *extensão contínua $T\colon X \to Y$; tal extensão T é linear (e limitada). Além do mais a aplicação*

$$\mathcal{L}(X, Y) \ni T \longmapsto T|_D \in \mathcal{L}(D, Y)$$

é uma isometria.

DEMONSTRAÇÃO. Vide [**50**, Teorema I.7] ou [**34**, Proposição 10, §4, Capítulo 7]. $\square$

Se X é um espaço normado, $V \subset X$ é um subespaço e $D \subset X$ é um subespaço denso então obviamente não vale em geral que $D \cap V$ é denso em V (pode até mesmo acontecer que $D \cap V = \{0\}$); temos porém o seguinte critério útil para reconhecer subespaços densos:

LEMA 5.1.8. *Sejam X um espaço normado, $V \subset X$ um subespaço e $D \subset X$ um subespaço denso; se existe um operador de projeção limitado $\pi\colon X \to V$ (i.e. $\pi|_V = \mathrm{Id}$) tal que $\pi(D) \subset D$ então $D \cap V$ é denso em V.*

DEMONSTRAÇÃO. Como π é contínua e D é denso em X segue que $\pi(D)$ é denso em $\pi(X) = V$; mas $\pi(D) = D \cap V$. $\square$

Se $T\colon X \to Y$ é um isomorfismo linear limitado cujo inverso também é limitado (i.e., T é um homeomorfismo linear) então dizemos que T é um *isomorfismo topológico*; no caso de espaços de Banach temos o seguinte:

TEOREMA 5.1.9 (da aplicação aberta). *Se X, Y são espaços de Banach então toda aplicação linear limitada e sobrejetora $T\colon X \to Y$ é aberta; em particular, se T é um isomorfismo limitado então T é um isomorfismo topológico.*

DEMONSTRAÇÃO. Vide [**27**, Teorema 3.4, Capítulo III], [**28**, Teorema 12.3, Capítulo II] ou [**9**, Teorema II.5]. $\square$

Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial X são ditas *equivalentes* se elas induzem a mesma topologia em X; isso equivale a dizer que a aplicação identidade é um isomorfismo topológico de $(X, \|\cdot\|_1)$ em $(X, \|\cdot\|_2)$, ou seja, que existem constantes $c, c' > 0$ tais que:

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c'\|x\|_1,$$

para todo $x \in X$. Quando $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes então $(X, \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach se e somente se $(X, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Banach; se $\dim(X) < +\infty$ então todas as normas em X são equivalentes e todas fazem de X um espaço de Banach.

Definição 5.1.10. Seja X um espaço vetorial real e seja τ uma topologia em X; dizemos que (X, τ) é um *espaço Banachizável* se existe uma norma $\|\cdot\|$ em X que induz a topologia τ e que torna $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach.

Observação 5.1.11. A topologia no espaço de operadores multi-lineares limitados (5.1.2) depende apenas das topologias nos espaços X_i, $i = 1, \ldots, r$ e Y; portanto, dados espaços Banachizáveis X_i, $i = 1, \ldots, r$ e Y então o espaço de operadores multi-lineares limitados (5.1.2) é também um espaço Banachizável *de maneira canônica*.

Observação 5.1.12. No contexto de espaços normados, o isomorfismo (1.1.1) é uma *isometria*; deve-se tomar cuidado porém com a generalização da teoria desenvolvida na Seção 1.1 para o caso de espaços normados de dimensão infinita. Por exemplo, em geral não é possível identificar um espaço normado X com seu bidual topológico X^{**}, mesmo que X seja um espaço de Banach; temos apenas uma imersão isométrica

$$X \ni x \longmapsto \hat{x} \in X^{**}, \tag{5.1.9}$$

onde $\hat{x}$ é o funcional de *avaliação em* x definido por $\hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$ para todo $\alpha \in X^*$. O fato que (5.1.9) é mesmo uma imersão isométrica segue do Corolário 5.1.4 do Teorema de Hahn-Banach.

Quando a imersão isométrica (5.1.9) é uma isometria dizemos que o espaço normado X é *reflexivo*; note que como X^{**} é sempre completo, apenas espaços de Banach têm chance de ser reflexivos. Dado um operador limitado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ então podemos definir o *operador transposto* $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ de T como em (1.1.2); é fácil ver que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Identificando X, Y com subespaços de X^{**} e Y^{**} respectivamente então o *operador bitransposto* T^{**} é uma extensão de T; em particular segue que:

$$\|T\| \leq \|T^{**}\| \leq \|T^*\| \leq \|T\| \Longrightarrow \|T\| = \|T^*\|.$$

Enunciamos para uso posterior mais um teorema básico da análise funcional.

Teorema 5.1.13 (da limitação uniforme). *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma família de operadores lineares limitados $T_\alpha \colon X \to Y$; se para cada $x \in X$ tivermos*

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|T_\alpha(x)\| < +\infty$$

então também $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|T_\alpha\| < +\infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Vide [**27**, Teorema 2.1, Capítulo III], [**28**, Teorema 11.1, Capítulo II] ou [**9**, Teorema II.1]. □

Temos a seguinte conseqüência simples do Teorema 5.1.13 (vide [**27**, Teorema 2.2, Capítulo III]):

COROLÁRIO 5.1.14 (Banach-Steinhaus). *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(T_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de operadores lineares limitados $T_n\colon X \to Y$. Suponha que para cada $x \in X$ existe o limite*

$$T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x);$$

então $\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < +\infty$, *$T\colon X \to Y$ é um operador linear limitado e vale a desigualdade:*

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|.$$

Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial real e seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno em $\mathcal{H}$, i.e., $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é uma forma bilinear simétrica definida positiva em $\mathcal{H}$. Dizemos então que o par $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um *espaço pré-Hilbertiano*. O produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induz uma norma em $\mathcal{H}$ dada por

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{5.1.10}$$

e portanto $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ é um espaço normado; se $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ for um espaço de Banach dizemos que $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um *espaço de Hilbert*. Uma norma que é induzida por um produto interno como em (5.1.10) é chamada uma *norma Hilbertiana*.

OBSERVAÇÃO 5.1.15. Se $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial complexo e se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto Hermiteano positivo em $\mathcal{H}$ então dizemos que $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um *espaço pré-Hilbertiano complexo*; também nesse caso a fórmula (5.1.10) define uma norma em $\mathcal{H}$ e dizemos que $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um *espaço de Hilbert complexo* se $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ for um espaço de Banach complexo.

Espaços pré-Hilbertianos complexos não serão utilizados neste texto e portanto *todos os espaços pré-Hilbertianos (e espaços de Hilbert) que consideraremos serão reais*.

Dois produtos internos num espaço vetorial $\mathcal{H}$ são ditos *equivalentes* se eles induzem normas equivalentes em $\mathcal{H}$; temos também a seguinte:

DEFINIÇÃO 5.1.16. Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial real e seja τ uma topologia em $\mathcal{H}$; dizemos que $(\mathcal{H}, \tau)$ é um *espaço Hilbertizável* se existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $\mathcal{H}$ que induz a topologia τ e que torna $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert.

Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert. Se $V \subset \mathcal{H}$ é um subespaço então denotamos por $V^\perp$ o *complemento ortogonal* de V relativo ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (vide (1.1.9)). O complemento ortogonal de um subespaço qualquer de $\mathcal{H}$ é sempre um subespaço fechado de $\mathcal{H}$; vale a identidade:

$$(V^\perp)^\perp = \overline{V}, \tag{5.1.11}$$

onde $\overline{V}$ denota o fecho de V em $\mathcal{H}$. Se $V \subset \mathcal{H}$ é um subespaço fechado (e $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert) então temos (vide [**28**, Proposição 4.2 e Teorema 4.3, Capítulo I]):

$$\mathcal{H} = V \oplus V^{\perp}; \tag{5.1.12}$$

em particular fica bem definido o *projetor ortogonal* sobre o subespaço V:

$$\pi_V \colon \mathcal{H} \longrightarrow V \tag{5.1.13}$$

que é simplesmente o operador de projeção correspondente à decomposição (5.1.12). Se $x, y \in \mathcal{H}$ são mutuamente ortogonais, i.e., se $\langle x, y\rangle = 0$ então obviamente vale o "Teorema de Pitágoras":

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

segue daí que $\|\pi_V\| = 1$ sempre que V for um subespaço não nulo (e $\pi_V = 0$ se $V = \{0\}$). Além do mais, se $x \in \mathcal{H}$ então $\pi_V(x)$ é o *mínimo global estrito* da função $V \ni y \mapsto d(x, y)$.

Associado ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ temos um operador linear limitado

$$\mathcal{H} \ni x \longmapsto \langle x, \cdot\rangle \in \mathcal{H}^*; \tag{5.1.14}$$

segue diretamente da desigualdade de Cauchy-Schwarz que (5.1.14) é uma imersão isométrica. Temos também o seguinte:

TEOREMA 5.1.17 (de representação de Riesz). *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert então* (5.1.14) *é uma isometria.* □

Segue facilmente do Teorema de Representação de Riesz que todo espaço de Hilbert é reflexivo. Usando a isometria (5.1.14) podemos "substituir" a identificação usual $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \cong \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2^*)$ pela identificação $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \cong \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ como descrito na seguinte:

DEFINIÇÃO 5.1.18. Sejam $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e seja dada uma forma bilinear $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$; o único operador linear $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que

$$B(x, y) = \langle T(x), y\rangle,$$

para todos $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ é chamado o operador linear que *representa* B.

É fácil ver que aplicação

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \ni T \longmapsto \langle T\cdot, \cdot\rangle \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

é uma isometria.

OBSERVAÇÃO 5.1.19. Se $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma forma bilinear limitada então o núcleo de B (vide (1.1.6)) coincide com o núcleo do operador linear $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que representa B, ou seja:

$$\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(T).$$

EXEMPLO 5.1.20. Seja B uma forma bilinear limitada num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ o operador que a representa. Se $V \subset \mathcal{H}$ é um subespaço fechado invariante por T, i.e., $T(V) \subset V$, então a restrição $B|_{V\times V}$ de B a V é representada pela restrição $T|_V \colon V \to V$ de T; mais geralmente, se V não é invariante por T então $B|_{V\times V}$ é representada pelo operador $\pi_V \circ T|_V$ onde $\pi_V\colon \mathcal{H} \to V$ é o projetor ortogonal sobre V.

Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é *simétrico* (respectivamente, *anti-simétrico*) quando ele for simétrico (respectivamente, anti-simétrico) relativamente ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (vide Definição 1.1.6); vale então que uma forma bilinear $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é simétrica (respectivamente, anti-simétrica) se e somente se o operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que a representa for simétrico (respectivamente, anti-simétrico).

Dados espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ e considerando identificações $\mathcal{H}_1 \cong \mathcal{H}_1^*$ e $\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{H}_2^*$ como em (5.1.14), temos que o transposto $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2^*, \mathcal{H}_1^*)$ de um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ pode ser identificado com um operador $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$; daí:

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle,$$

para todos $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$. Observe que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é simétrico (respectivamente, anti-simétrico) se e somente se $T^* = T$ (respectivamente, $T^* = -T$); mais geralmente, se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ representa $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ então $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ representa a *transposta* de B (como forma bilinear) dada por $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \ni (y, x) \mapsto B(x, y)$.

Observação 5.1.21. Dados espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ então um argumento padrão de polarização mostra que um operador linear $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é uma imersão isométrica se e somente se

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \tag{5.1.15}$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}_1$; é claro que (5.1.15) é equivalente à condição $T^* \circ T = \mathrm{Id}$. Vemos então que T é uma isometria se e somente se T^* é um inverso bilateral para T; uma isometria entre espaços de Hilbert é também chamada um *operador ortogonal*.

Definição 5.1.22. Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert então um operador $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é dito *positivo* quando a forma bilinear $\langle P\cdot,\cdot\rangle$ for simétrica e semi-definida positiva, i.e., quando P é simétrico e $\langle P(x), x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Segue do Corolário 4.1.14 que uma forma bilinear limitada $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ em $\mathcal{H}$ é um produto interno se e somente se o operador $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que a representa é positivo e injetor; note que todo produto interno equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é limitado mas um produto interno limitado $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pode *não ser* equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (vide Exemplo 5.1.40 adiante). Temos a seguinte:

Proposição 5.1.23. *Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert; então uma forma bilinear limitada $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um produto interno equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e somente se o operador linear $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que a representa é um isomorfismo positivo.*

Demonstração. Como já observamos, dado $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ então $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 = \langle P\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em $\mathcal{H}$ se e somente se P é positivo e injetor; resta então mostrar que $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e somente se P é bijetor.

Considere o espaço pré-Hilbertiano $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$; como $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é limitado em $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é fácil ver que o operador identidade

$$\mathrm{Id}\colon (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \tag{5.1.16}$$

é limitado. Obviamente $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e somente se (5.1.16) é um isomorfismo topológico; segue então do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 5.1.9) que $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e somente se $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ é um espaço de Hilbert. Mostraremos então que P é bijetor se e somente se $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ é um espaço de Hilbert; para isso, considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)^* \arrow[dr, "\mathrm{Id}^*"] & \\
(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \arrow[ur, "\mathfrak{R}_1"] \arrow[dr, "P"'] & & (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)^* \\
 & (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \arrow[ur, "\cong", "\mathfrak{R}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.1.17}$$

onde $\mathfrak{R}_1$ é dado por $x \mapsto \langle x,\cdot\rangle_1$ e $\mathfrak{R}$ é a isometria dada em (5.1.14). Segue facilmente da desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ que $\mathfrak{R}_1$ é uma imersão isométrica; além do mais, Id^* é simplesmente um operador de inclusão e portanto é injetor. Supondo que P é bijetor então ambas as flechas no triângulo inferior do diagrama (5.1.17) são bijetoras e portanto $\mathrm{Id}^* \circ \mathfrak{R}_1$ é bijetora. Como Id^* é injetora segue que $\mathfrak{R}_1$ é bijetora e portanto é uma isometria; concluímos então que $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ é um espaço de Hilbert, já que o dual topológico de um espaço normado é sempre completo.

Reciprocamente, suponha que $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ é um espaço de Hilbert. Daí (5.1.16) é um isomorfismo topológico e portanto Id^* é bijetora; também, pelo Teorema de Representação de Riesz (Teorema 5.1.17) a aplicação $\mathfrak{R}_1$ é uma isometria. Como $\mathfrak{R}$ é também uma isometria, segue que P é bijetor, o que completa a demonstração. □

Observação 5.1.24. A Proposição 5.1.23 é também uma conseqüência do *Teorema de Lax-Milgram* (vide [**9**, Corolário V.8]).

Observação 5.1.25. Sejam $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno de $\mathcal{H}_2$; note que dado $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ então o operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que representa B *não depende* do produto interno usado em $\mathcal{H}_1$, mas apenas do produto interno em $\mathcal{H}_2$. Seja P um isomorfismo positivo de $\mathcal{H}_2$ e considere o produto interno $\langle P\cdot,\cdot\rangle$ em $\mathcal{H}_2$ (que é equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, pela Proposição 5.1.23); podemos então considerar o operador $T' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que representa B quando usamos o produto $\langle P\cdot,\cdot\rangle$ em $\mathcal{H}_2$, ou seja:

$$B(x, y) = \langle (P \circ T')(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle,$$

para todos $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$. Concluímos então que:

$$T' = P^{-1} \circ T.$$

EXEMPLO 5.1.26. Se $x = (x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de números reais então para cada $p \in [1, +\infty[$ definimos:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty];$$

definimos também:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n| \in [0, +\infty].$$

A *desigualdade de Minkowsky* (vide [**17**, Proposição 4.2.2]) nos diz que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

para todo $p \in [1, +\infty]$ e para quaisquer seqüências x, y de números reais. Segue então que o conjunto

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \big\{x = (x_n)_{n\geq 1} : \|x\|_p < +\infty\big\}$$

é um subespaço do espaço vetorial de todas as seqüências de números reais; além do mais, $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\ell_p(\mathbb{N})$. Não é difícil mostrar que $\|\cdot\|_p$ faz de $\ell_p(\mathbb{N})$ um espaço de Banach; para $p = 2$ a norma em $\ell_p(\mathbb{N})$ é induzida pelo produto interno

$$\langle x, y\rangle_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n, \quad x, y \in \ell_2(\mathbb{N}).$$

Segue portanto que $(\ell_2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ é um espaço de Hilbert.

EXEMPLO 5.1.27. Seja $\mathrm{Mns}([a, b], I\!R^n)$ o espaço vetorial de todas as funções *mensuráveis* $f : [a, b] \to I\!R^n$; denote por $\overline{\mathrm{Mns}}([a, b], I\!R^n)$ o quociente de $\mathrm{Mns}([a, b], I\!R^n)$ pelo subespaço formado pelas funções $f : [a, b] \to I\!R^n$ que são *nulas quase sempre*[1], i.e., tais que $f^{-1}(I\!R\setminus\{0\})$ tem medida de Lebesgue zero em $I\!R$. Com um certo abuso, denotamos ainda por f a classe de equivalência de f em $\overline{\mathrm{Mns}}([a, b], I\!R^n)$; para $p \in [1, +\infty[$ definimos:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b \|f(t)\|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty];$$

definimos também:

(5.1.18)
$$\|f\|_\infty = \inf\big\{c \in [0, +\infty] : \|f(t)\| \leq c \text{ quase sempre para } t \in [a, b]\big\},$$

para toda $f \in \mathrm{Mns}([a, b], I\!R^n)$; obviamente se $f = g$ quase sempre então $\|f\|_p = \|g\|_p$ para $p \in [1, +\infty]$ e portanto podemos pensar em $\|\cdot\|_p$ como uma função definida em $\overline{\mathrm{Mns}}([a, b], I\!R^n)$. A *desigualdade de Minkowsky* (vide [**17**, Proposição 4.2.2]) nos diz que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

[1]Como é usual em teoria da medida, dizemos que uma propriedade vale *quase sempre* quando o conjunto dos pontos onde a propriedade não vale tem medida nula.

para quaisquer funções $f, g \in \mathrm{Mns}([a,b], I\!R^n)$ e todo $p \in [1, +\infty]$; segue então que o conjunto

$$L^p([a,b], I\!R^n) = \big\{ f \in \overline{\mathrm{Mns}}([a,b], I\!R^n) : \|f\|_p < +\infty \big\}$$

é um subespaço vetorial de $\overline{\mathrm{Mns}}([a,b], I\!R^n)$ e que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $L^p([a,b], I\!R^n)$. Mostra-se que $\|\cdot\|_p$ faz de $L^p([a,b], I\!R^n)$ um espaço de Banach (vide [**17**, Proposição 4.2.4]); para $p = 2$ definimos também um produto interno em $L^p([a,b], I\!R^n)$ fazendo

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle \, \mathrm{d}t, \quad f, g \in L^2([a,b], I\!R^n). \tag{5.1.19}$$

O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ induz a norma $\|\cdot\|_2$ em $L^2([a,b], I\!R^n)$ e portanto faz de $L^2([a,b], I\!R^n)$ um espaço de Hilbert. Observe que a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ nos diz que:

$$\left(\int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle \, \mathrm{d}t \right)^2 \le \int_a^b \|f(t)\|^2 \, \mathrm{d}t \int_a^b \|g(t)\|^2 \, \mathrm{d}t, \tag{5.1.20}$$

sendo a igualdade válida se e somente se existe $c \in I\!R$ com $f(t) = cg(t)$ para quase todo $t \in [a,b]$.

Observação 5.1.28. Obviamente duas funções contínuas que coincidem quase sempre num intervalo são iguais (sempre); daí, se $f \in L^p([a,b], I\!R^n)$ então existe *no máximo uma* aplicação contínua f_0 na mesma classe de equivalência de f (i.e., tal que $f = f_0$ quase sempre). Dizemos portanto que $f \in L^p([a,b], I\!R^n)$ é *contínua* quando existe uma aplicação contínua f_0 que é igual a f quase sempre e nesse caso *identificamos* (a classe de) f com f_0; dito de outra maneira, identificamos o conjunto das funções contínuas $f_0 \colon [a,b] \to I\!R^n$ com um subespaço de $L^p([a,b], I\!R^n)$.

Exemplo 5.1.29. Se A é um conjunto e X é um espaço vetorial normado então denotamos por $\mathrm{Bd}(A, X)$ o espaço vetorial das funções limitadas $f \colon A \to X$; para cada função $f \colon A \to X$ definimos:

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{u \in A} \|f(u)\| \in [0, +\infty]; \tag{5.1.21}$$

daí é fácil ver que $\|\cdot\|_{\sup}$ define uma norma em $\mathrm{Bd}(A, X)$. Quando X é um espaço de Banach então também $\mathrm{Bd}(A, X)$ é um espaço de Banach. A convergência de seqüências no espaço $\mathrm{Bd}(A, X)$ coincide com a *convergência uniforme* de funções.

Note que para uma função *contínua* $f \colon [a,b] \to I\!R^n$ temos (vide (5.1.18)):

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\sup}.$$

Exemplo 5.1.30. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são espaços de Banach então a soma direta $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ é também um espaço de Banach se a considerarmos munida da norma:

$$\big\|(x_1, \ldots, x_n)\big\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|, \quad x_i \in X_i, \ i = 1, \ldots, n; \tag{5.1.22}$$

a norma (5.1.22) é também equivalente às normas (vide [**28**, Proposição 4.4, Capítulo II]):

$$\big\|(x_1,\ldots,x_n)\big\| = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p\in[1,+\infty[, \quad \text{e} \tag{5.1.23}$$

$$\big\|(x_1,\ldots,x_n)\big\| = \max_{1\le i\le n} \|x_i\|. \tag{5.1.24}$$

Qualquer uma das normas (5.1.22), (5.1.23) e (5.1.24) induz em X a *topologia produto*. Daí se cada X_i é um espaço Banachizável então X é também um espaço Banachizável de maneira *canônica*.

Observação 5.1.31. A soma direta definida no Exemplo 5.1.30 é também chamada a *soma direta externa* dos espaços de Banach $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Se um espaço de Banach X se escreve como *soma direta interna* de subespaços *fechados* $X_i \subset X$, $i=1,\ldots,n$ então segue do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 5.1.9) que o isomorfismo canônico entre X e a soma direta externa dos espaços X_i dado por

$$\bigoplus_{i=1}^n X_i \ni (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \in X$$

é um isomorfismo topológico. Em particular, os operadores de projeção $\pi_i\colon X\to X_i$ relativos à decomposição $X=\bigoplus_{i=1}^n X_i$ são limitados.

Exemplo 5.1.32. Se $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\ldots,\mathcal{H}_n$ são espaços de Hilbert então podemos definir na soma direta $\mathcal{H}=\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ um produto interno fazendo

$$\big\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i\rangle, \tag{5.1.25}$$

para $x_i, y_i \in \mathcal{H}_i$, $i=1,\ldots,n$. O espaço $\mathcal{H}$ munido do produto interno (5.1.25) é também um espaço de Hilbert; quando o produto interno (5.1.25) é considerado em $\mathcal{H}$ dizemos então que

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i$$

é uma *soma direta de espaços de Hilbert*. Note que a norma em $\mathcal{H}$ induzida pelo produto interno (5.1.25) coincide com a norma definida em (5.1.23) quando tomamos $p=2$; em particular, a noção de soma direta de espaços de Hilbert é compatível com a noção de soma direta de espaços de Banach introduzida no Exemplo 5.1.30.

Observação 5.1.33. A soma direta de espaços de Hilbert definida no Exemplo 5.1.32 é também chamada a *soma direta externa* dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\ldots,\mathcal{H}_n$. Descrevemos agora uma noção de *soma direta interna* de espaços de Hilbert. Seja então $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e suponha que $\mathcal{H}$ se escreve como a soma de subespaços fechados $\mathcal{H}_i\subset\mathcal{H}$, $i=1,\ldots,n$ e que os espaços $\mathcal{H}_i$ são *mutuamente ortogonais*, i.e., $\langle x,y\rangle=0$ para todos

$x \in \mathcal{H}_i$, $y \in \mathcal{H}_j$, e todos $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$; daí $\mathcal{H}$ é na verdade uma soma *direta* dos subespaços $\mathcal{H}_i$ e o isomorfismo canônico entre $\mathcal{H}$ e a soma direta externa dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_i$ dado por

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \in \mathcal{H}$$

é uma isometria.

Observação 5.1.34. Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ são subespaços fechados mutuamente ortogonais de $\mathcal{H}$ então a soma $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ (que é automaticamente direta) é também fechada em $\mathcal{H}$; de fato, obtemos como na Observação 5.1.33 uma isometria entre $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ e a soma direta externa dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_i$, donde concluímos que $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ é um subespaço completo de $\mathcal{H}$. Observe que a soma de dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert em geral pode não ser fechada (vide Exemplo 5.1.35 a seguir).

Exemplo 5.1.35. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ um operador limitado; obviamente o gráfico de T e $\mathcal{H} \oplus \{0\}$ são subespaços fechados do espaço de Hilbert $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Temos:

$$\mathrm{Gr}(T) + (\mathcal{H} \oplus \{0\}) = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Im}(T) \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H};$$

vemos então que $\mathrm{Gr}(T) + (\mathcal{H} \oplus \{0\})$ é fechado em $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ se e somente se a imagem de T for fechada em $\mathcal{H}$, o que nem sempre é o caso[2].

Exemplo 5.1.36. Se X é um espaço de Banach e $V \subset X$ é um subespaço fechado então definimos uma norma no quociente X/V fazendo:

$$\|x + V\| = \inf_{v \in V} \|x + v\|, \tag{5.1.26}$$

para todo $x + V \in X/V$. Mostra-se então (vide [**28**, §4(B), Capítulo II] ou [**50**, Seção 4, Capítulo III]) que (5.1.26) faz de X/V um espaço de Banach e que a topologia em X/V induzida pela norma (5.1.26) coincide com a topologia quociente; na verdade, a aplicação quociente $q\colon X \to X/V$ é aberta. Quando V admite um subespaço complementar fechado V' em X então a aplicação quociente q se restringe a um isomorfismo topológico de V' sobre X/V.

Observe que o operador transposto q^* da aplicação quociente q é um isomorfismo topológico de $(X/V)^*$ sobre o *anulador* de V em X^*. Uma aplicação do Corolário 5.1.4 sobre o espaço X/V mostra que dado $x \in X$ com $x \notin V$ então existe $\alpha \in X^*$ tal que $\alpha|_V = 0$ e $\alpha(x) = 1$.

Exemplo 5.1.37. Se $k \geq 0$ é um inteiro denotamos por $C^k([a,b], \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k; o espaço $C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ munido da norma (5.1.21) (que coincide com (5.1.18)) é um espaço de Banach.

---

[2]Por exemplo, se T é um operador compacto que não possui posto finito então a imagem de T nunca é fechada (vide Corolário 5.2.13).

Para $k \geq 1$ a aplicação linear injetora

$$C^k([a,b],\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto \big(f, f', f'', \ldots, f^{(k)}\big) \in \bigoplus_{k+1} C^0([a,b],\mathbb{R}^n) \tag{5.1.27}$$

tem imagem fechada e portanto induz uma topologia no espaço $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ que faz dele um espaço Banachizável. Uma norma em $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ pode ser obtida através de qualquer uma das possíveis normas numa soma direta de espaços de Banach introduzidas no Exemplo 5.1.30; definimos por exemplo:

$$\|f\| = \sum_{i=0}^{k} \big\|f^{(i)}\big\|_\infty, \quad f \in C^k([a,b],\mathbb{R}^n), \tag{5.1.28}$$

onde $f^{(i)}$ denota a i-ésima derivada de f. Uma seqüência de funções $(f_j)_{j\geq 1}$ converge no espaço $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ para uma função f se e somente se a i-ésima derivada de f_j converge uniformemente para a i-ésima derivada de f para $i = 0, 1, \ldots, k$.

Note que temos um isomorfismo topológico de $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ sobre a soma direta $(\mathbb{R}^n)^k \oplus C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ dado por

$$f \longmapsto \big(f(t_0), f'(t_0), \ldots, f^{(k-1)}(t_0), f^{(k)}\big), \tag{5.1.29}$$

para qualquer $t_0 \in [a,b]$ fixado. O isomorfismo (5.1.29) induz outras normas em $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ equivalentes a (5.1.28); por exemplo:

$$\|f\| = \max\big\{\|f(a)\|, \|f'(a)\|, \ldots, \big\|f^{(k-1)}(a)\big\|, \big\|f^{(k)}\big\|_\infty\big\}.$$

EXEMPLO 5.1.38. Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dita *absolutamente contínua* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $]x_i, y_i[$, $i = 1, \ldots, r$ são intervalos abertos dois a dois disjuntos contidos em $[a,b]$ com $\sum_{i=1}^r y_i - x_i < \delta$ então $\sum_{i=1}^r \|f(y_i) - f(x_i)\| < \varepsilon$. Listamos algumas propriedades básicas das aplicações absolutamente contínuas (vide, por exemplo, [**17**, Capítulo 7]):

- toda aplicação absolutamente contínua é contínua;
- toda aplicação Lipschitziana (e em particular toda aplicação de classe C^1) é absolutamente contínua;
- a restrição de uma aplicação absolutamente contínua em $[a,b]$ a um subintervalo fechado de $[a,b]$ é ainda absolutamente contínua;
- dada uma partição $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ de $[a,b]$ então uma aplicação que é absolutamente contínua em cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ é absolutamente contínua em $[a,b]$;
- a soma e o produto de aplicações absolutamente contínuas são aplicações absolutamente contínuas;
- se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua e $\sigma\colon \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}^m$ é localmente Lipschitziana (em particular, se σ é C^1) então $\sigma \circ f$ é absolutamente contínua;

- se $\phi \in L^1([a,b], I\!R^n)$ então a função
$$f(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],$$
é absolutamente contínua para todo $t_0 \in [a,b]$; além do mais, f é derivável quase sempre e $f' = \phi$ quase sempre em $[a,b]$;
- se $f\colon [a,b] \to I\!R^n$ é absolutamente contínua então f é derivável quase sempre[3], $f' \in L^1([a,b], I\!R^n)$ e vale o Teorema Fundamental do Cálculo:
$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b];$$
- se $f\colon [a,b] \to I\!R^n$ é absolutamente contínua e $f' = 0$ quase sempre então f é constante; se f' coincide quase sempre com uma aplicação contínua então f é de classe C^1.

Para todo inteiro $k \ge 0$ e todo $p \in [1, +\infty]$ escrevemos
$$W^{k,p}([a,b], I\!R^n) = \big\{ f \in C^{k-1}([a,b], I\!R^n) : f^{(k-1)} \text{ é absolutamente contínua} \\ \text{e } f^{(k)} \in L^p([a,b], I\!R^n) \big\}.$$
Note em particular que $W^{1,1}([a,b], I\!R^n)$ é simplesmente o espaço de todas as funções absolutamente contínuas $f\colon [a,b] \to I\!R^n$; o espaço $W^{0,p}([a,b], I\!R^n)$ coincide com o espaço $L^p([a,b], I\!R^n)$ introduzido no Exemplo 5.1.27. Uma aplicação $f\colon [a,b] \to I\!R^n$ que pertence a $W^{k,p}([a,b], I\!R^n)$ é dita uma *aplicação de classe* $W^{k,p}$.

É fácil ver que a aplicação linear injetora
(5.1.30)
$$W^{k,p}([a,b], I\!R^n) \ni f \longmapsto (f, f', \ldots, f^{(k)}) \in \bigoplus_{k} C^0([a,b], I\!R^n) \oplus L^p([a,b], I\!R^n)$$
tem imagem fechada e portanto induz no espaço $W^{k,p}([a,b], I\!R^n)$ uma topologia que faz dele um espaço Banachizável; uma norma explícita em $W^{k,p}([a,b], I\!R^n)$ pode ser definida por:
$$\|f\| = \big\|f^{(k)}\big\|_p + \sum_{i=0}^{k-1} \big\|f^{(i)}\big\|_\infty. \tag{5.1.31}$$
A convergência em $W^{k,p}([a,b], I\!R^n)$ de uma seqüência $(f_j)_{j\ge 1}$ para uma função f é quivalente à convergência uniforme da i-ésima derivada de f_j para a i-ésima derivada de f, $i = 0, \ldots, k-1$ juntamente com a convergência da k-ésima derivada de f_j para a k-ésima derivada de f no espaço $L^p([a,b], I\!R^n)$.

[3]Uma função contínua, derivável quase sempre, com derivada em $L^1([a,b], I\!R^n)$ pode *não ser* absolutamente contínua; na verdade, existem funções contínuas e estritamente crescentes com derivada igual a zero quase sempre (vide [**17**, Seção 7.5]).

Note que fixado qualquer $t_0 \in [a,b]$ temos um isomorfismo topológico de $W^{k,p}([a,b],\mathbb{R}^n)$ sobre a soma direta $(\mathbb{R}^n)^k \oplus L^p([a,b],\mathbb{R}^n)$ dado por

$$f \longmapsto \big(f(t_0), f'(t_0), \ldots, f^{(k-1)}(t_0), f^{(k)}\big); \tag{5.1.32}$$

esse isomorfismo induz outras possíveis normas em $W^{k,p}([a,b],\mathbb{R}^n)$ equivalentes a (5.1.31), por exemplo:

$$\|f\| = \big\|f^{(k)}\big\|_p + \sum_{i=0}^{k-1} \big\|f^{(i)}(t_0)\big\|, \quad f \in W^{k,p}([a,b],\mathbb{R}^n);$$

quando $p = 2$ escrevemos simplesmente

$$H^k([a,b],\mathbb{R}^n) = W^{k,2}([a,b],\mathbb{R}^n);$$

o espaço $H^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ é Hilbertizável; por exemplo, o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \big\langle f^{(k)}, g^{(k)}\big\rangle_2 + \sum_{i=0}^{k-1} \big\langle f^{(i)}(t_0), g^{(i)}(t_0)\big\rangle, \quad f, g \in H^k([a,b],\mathbb{R}^n), \tag{5.1.33}$$

faz de $H^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ um espaço de Hilbert, para qualquer $t_0 \in [a,b]$ fixado.

OBSERVAÇÃO 5.1.39. Obviamente nos Exemplos 5.1.27, 5.1.37 e 5.1.38 podemos trocar $\mathbb{R}^n$ por um espaço vetorial normado de dimensão finita V qualquer; para que as fórmulas (5.1.19) e (5.1.33) façam sentido é necessário que a norma de V seja proveniente de um produto interno. As topologias dos espaços descritos nesses exemplos não dependem da norma escolhida em V.

EXEMPLO 5.1.40. O produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ do espaço $L^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ restringe-se a um produto interno limitado no espaço $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$; note porém que $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ não induz a topologia padrão de $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, i.e., $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ não é equivalente a (5.1.33) com $k = 1$.

EXEMPLO 5.1.41. Se $\pi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota o operador de projeção na i-ésima coordenada então é fácil ver que a aplicação

$$L^p([a,b],\mathbb{R}^n) \ni v \longmapsto (\pi_1 \circ v, \ldots, \pi_n \circ v) \in \bigoplus_n L^p([a,b],\mathbb{R}) \tag{5.1.34}$$

é um isomorfismo topológico, para todo $p \in [1,+\infty]$. Mais geralmente, se V é um espaço de dimensão finita e $V = V_1 \oplus V_2$ então temos um isomorfismo topológico

$$L^p([a,b],V) \ni v \longmapsto (\pi_1 \circ v, \pi_2 \circ v) \in L^p([a,b],V_1) \oplus L^p([a,b],V_2), \tag{5.1.35}$$

onde π_1 e π_2 denotam as projeções relativas à decomposição $V_1 \oplus V_2$. Exatamente as mesmas conclusões valem se trocarmos L^p por C^k ou $W^{k,p}$ em (5.1.34) e (5.1.35).

EXEMPLO 5.1.42. Na notação do Exemplo 5.1.27, a *desigualdade de Hölder* (vide [**17**, Teorema 4.2.1]) diz que:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q \tag{5.1.36}$$

para quaisquer funções mensuráveis $f, g\colon [a,b] \to I\!R$, onde $p, q \in [1, +\infty]$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (convencionando $\frac{1}{+\infty} = 0$); segue então que o *operador de multiplicação*

$$L^p([a,b], I\!R) \times L^q([a,b], I\!R) \ni (f,g) \longmapsto fg \in L^1([a,b], I\!R)$$

é um operador bilinear limitado. Mais geralmente, tendo em mente o Exemplo 5.1.41 é fácil ver que, dados espaços vetoriais de dimensão finita V_1, V_2, W e um operador bilinear $B\colon V_1 \times V_2 \to W$ então

$$L^p([a,b], V_1) \times L^q([a,b], V_2) \ni (f,g) \longmapsto B(f,g) \in L^1([a,b], W)$$

é um operador bilinear limitado onde $B(f,g)(t) = B\big(f(t), g(t)\big)$, $t \in [a,b]$; de particular interesse é o caso $p = q = 2$ (aí a desigualdade de Hölder se reduz à desigualdade de Cauchy-Schwarz (5.1.20)). O operador de multiplicação

$$L^p([a,b], V_1) \times L^\infty([a,b], V_2) \ni (f,g) \longmapsto B(f,g) \in L^p([a,b], W)$$

também é limitado para todo $p \in [1, +\infty]$; de fato, é fácil ver que:

$$\|B(f,g)\|_p \le \|B\| \, \|f\|_p \, \|g\|_\infty.$$

Mais geralmente,

$$\mathfrak{M}([a,b], V_1) \times \mathfrak{M}([a,b], V_2) \ni (f,g) \longmapsto B(f,g) \in \mathfrak{M}([a,b], W)$$

é bilinear limitado quando trocamos $\mathfrak{M}$ por L^∞, C^k (para $k \ge 0$) ou $W^{k,p}$ (para $k \ge 1$, $p \in [1, +\infty]$); para o caso $\mathfrak{M} = L^\infty$ ou $\mathfrak{M} = C^0$ observe que:

$$\|B(f,g)\|_\infty \le \|B\| \, \|f\|_\infty \, \|g\|_\infty.$$

Vamos demonstrar também o caso $\mathfrak{M} = W^{1,2} = H^1$ que será de particular interesse no Capítulo 6; os outros casos também são simples, mas não serão usados neste texto. Levando em conta o Exemplo 5.1.41, não há perda de generalidade em supor $V_1 = V_2 = I\!R$ e que B é a multiplicação de números reais; usando a norma $\|\cdot\|$ dada em (5.1.31) (com $k = 1$, $p = 2$) calculamos para quaisquer funções $f, g \in H^1([a,b], I\!R)$:

$$\|fg\| \le \|fg\|_\infty + \|f'g\|_2 + \|fg'\|_2,$$

mas:

$$\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \, \|g\|_\infty \le \|f\| \, \|g\|,$$
$$\|f'g\|_2 \le \|f'\|_2 \, \|g\|_\infty \le \|f\| \, \|g\|,$$

e de maneira análoga estimamos $\|fg'\|$. A conclusão segue.

Exemplo 5.1.43. Usando a desigualdade de Hölder (5.1.36) com $g = 1$ e $p = p_1/p_2$ é fácil ver que $L^{p_1}([a,b], I\!R^n) \subset L^{p_2}([a,b], I\!R^n)$ para $p_1 \ge p_2 \ge 1$, sendo a inclusão desses espaços de Banach um operador limitado. Mais geralmente, se $p_1 \ge p_2 \ge 1$ então a inclusão de $W^{k,p_1}([a,b], I\!R^n)$ em $W^{k,p_2}([a,b], I\!R^n)$ é limitada para todo inteiro $k \ge 1$. É fácil ver também que a inclusão de $W^{k+1,p}([a,b], I\!R^n)$ em $C^k([a,b], I\!R^n)$ é limitada e que a inclusão de $C^k([a,b], I\!R^n)$ em $W^{k,p}([a,b], I\!R^n)$ é limitada para todo $p \in [1, +\infty]$ e todo inteiro $k \ge 0$.

EXEMPLO 5.1.44. É fácil ver que o *operador derivação*

$$\mathrm{der}\colon \mathfrak{M}_1([a,b],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{M}_2([a,b],\mathbb{R}^n) \tag{5.1.37}$$

dado por $\mathrm{der}(f) = f'$ é limitado quando fazemos $\mathfrak{M}_1 = C^k$, $\mathfrak{M}_2 = C^{k-1}$ ou $\mathfrak{M}_1 = W^{k,p}$, $\mathfrak{M}_2 = W^{k-1,p}$ com $k \geq 1$; para esses mesmos valores de $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ temos também que o *operador de primitivação*

$$\mathrm{prim}\colon \mathfrak{M}_2([a,b],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{M}_1([a,b],\mathbb{R}^n),$$

dado por $\mathrm{prim}(f)(t) = \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s$ (com $t_0 \in [a,b]$ fixado) é limitado.

EXEMPLO 5.1.45. O *operador de reparametrização afim*

$$\phi\colon \mathfrak{M}([a,b],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{M}([c,d],\mathbb{R}^n)$$

dado por $\phi(f)(t) = f\Big(a + (b-a)\frac{t-c}{d-c}\Big)$, $t \in [c,d]$, é um isomorfismo topológico quando fazemos $\mathfrak{M} = C^k$ ou $\mathfrak{M} = W^{k,p}$, para todo $p \in [1,+\infty]$ e todo inteiro $k \geq 0$. De fato, para o caso $\mathfrak{M} = L^p$, $p \in [1,+\infty[$ um argumento trivial de mudança de variável (afim) na integral mostra que:

$$\|\phi(f)\|_p = \Big(\frac{d-c}{b-a}\Big)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p;$$

para o caso $\mathfrak{M} = L^\infty$ ou $\mathfrak{M} = C^0$ basta ver que:

$$\|\phi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Para o caso $\mathfrak{M} = C^k$ observe que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C^k([a,b],\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{der}^{(r)}"'] & C^k([c,d],\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathrm{der}^{(r)}"] \\
C^0([a,b],\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\left(\frac{b-a}{d-c}\right)^r \phi"'] & C^0([c,d],\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

comuta, onde as flechas verticais são dadas pela r-ésima iterada do operador de derivação (5.1.37). A conclusão segue então do caso $\mathfrak{M} = C^0$ e do fato que a topologia de $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ é induzida pela aplicação (5.1.27); o caso $\mathfrak{M} = W^{k,p}$ segue de modo análogo (usando também o caso $\mathfrak{M} = L^p$), observando que a topologia de $W^{k,p}([a,b],\mathbb{R}^n)$ é induzida pela aplicação (5.1.30).

DEFINIÇÃO 5.1.46. Se X é um espaço normado, dizemos que uma família $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de vetores de X é *somável* quando existe $s \in X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe uma parte finita $F_\varepsilon \subset \mathcal{J}$ tal que

$$\Big\|s - \sum_{j\in F} x_j\Big\| < \varepsilon,$$

para toda parte finita $F \subset \mathcal{J}$ contendo F_ε. É óbvio que o vetor $s \in X$ é único quando existe e é chamado a *soma* da família $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$; escrevemos:

$$s = \sum_{j\in\mathcal{J}} x_j.$$

Se $(t_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é uma família de numeros reais não negativos que *não* é somável então escrevemos $\sum_{j\in\mathcal{J}} t_j = +\infty$.

Se uma família $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é somável num espaço normado X então $x_j = 0$ para $j \in \mathcal{J}$ fora do conjunto enumerável $\bigcup_{n\geq 1} F_{\frac{1}{n}}$; além do mais, é fácil ver que se $\mathcal{J}$ é enumerável então $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é somável com soma $s \in X$ se e somente se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\phi(n)}$ converge para s para toda bijeção $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{J}$.

Se X é um espaço de Banach então temos um *critério de Cauchy* para somabilidade: uma família $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ em X é somável se e somente se dado $\varepsilon > 0$ existe uma parte finita $F_\varepsilon \subset \mathcal{J}$ tal que

$$\Big\| \sum_{j\in F} x_j \Big\| < \varepsilon$$

para toda parte finita $F \subset \mathcal{J}$ disjunta de F_ε.

Se $\dim(X) < +\infty$ então a somabilidade de uma famiília $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é equivalente[4] à condição que $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é *normalmente somável*, ou seja

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} \|x_j\| < +\infty.$$

Uma última observação trivial sobre somabilidade: se $T\colon X \to Y$ é um operador linear limitado e se $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é uma família somável em X então vale a identidade:

$$T \cdot \sum_{j\in\mathcal{J}} x_j = \sum_{j\in\mathcal{J}} T(x_j).$$

Uma referência bastante completa com os resultados sobre somabilidade de famílias em espaços normados é, por exemplo, [**28**, §1(B), Capítulo 1].

Exemplo 5.1.47. Generalizando o Exemplo 5.1.26, se $\mathcal{J}$ é um conjunto arbitrário e $p \in [1, +\infty[$ então para toda família $x = (x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de números reais definimos:

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{j\in\mathcal{J}} |x_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty];$$

definimos também:

$$\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathcal{J}} |x_j| \in [0, +\infty].$$

Daí para todo $p \in [1, +\infty]$ definimos $\ell_p(\mathcal{J})$ como sendo o conjunto das famílias $x = (x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de números reais tais que $\|x\|_p < +\infty$, ou seja:

$$\ell_p(\mathcal{J}) = \big\{ x = (x_j)_{j\in\mathcal{J}} : \|x\|_p < +\infty \big\};$$

[4]Num espaço de Banach, segue do critério de Cauchy que a somabilidade em norma implica na somabilidade comum, mas a recíproca não vale em geral; por exemplo, se $e_n \in \ell_2(\mathbb{N})$ denota a seqüência cuja n-ésima coordenada é igual a 1 e cujas outras coordenadas são nulas então a família $(\frac{e_n}{n})_{n\geq 1}$ é somável em $\ell_2(\mathbb{N})$ mas não é normalmente somável.

mostra-se então que $\ell_p(\mathcal{J})$ é um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|_p$. Se $p = 2$ o produto interno

$$\langle x, y\rangle_2 = \sum_{j\in\mathcal{J}} x_j y_j, \quad x, y \in \ell_2(\mathcal{J})$$

induz a norma $\|\cdot\|_2$ no espaço $\ell_2(\mathcal{J})$ e faz dele um espaço de Hilbert.

Exemplo 5.1.48. Generalizando os Exemplos 5.1.30 e 5.1.47 definimos agora uma noção de soma direta para uma família $(X_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de espaços de Banach indexada num conjunto arbitrário $\mathcal{J}$; se $x = (x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é uma família com $x_j \in X_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$ então definimos para $p \in [1, +\infty[$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j\in\mathcal{J}} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty], \tag{5.1.38}$$

e também:

$$\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathcal{J}} \|x_j\| \in [0, +\infty].$$

Daí para $p \in [1, +\infty]$ definimos a *p-soma direta* (no sentido de espaços de Banach) da família $(X_j)_{j\in\mathcal{J}}$ fazendo:

$$\overline{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}}^{\,p} X_j = \Big\{x \in \prod\nolimits_{j\in\mathcal{J}} X_j : \|x\|_p < +\infty\Big\}. \tag{5.1.39}$$

Temos que (5.1.39) é um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|_p$. Quando X_j é não nulo para um número infinito de índices $j \in \mathcal{J}$ então o espaço (5.1.39) contém propriamente a soma direta algébrica $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j$; se $p < +\infty$ a soma direta algébrica é densa em (5.1.39). Observe que a topologia de (5.1.39) é estritamente mais fina que a topologia induzida pela topologia produto de $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, quando $X_j \neq \{0\}$ para um número infinito de índices $j \in \mathcal{J}$.

Se $\mathcal{J}$ é finito então a noção de soma direta definida em (5.1.39) coincide com a noção de soma direta introduzida no Exemplo 5.1.30; nesse caso, como já observamos, o espaço (5.1.39) coincide com a soma direta algébrica $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} X_j$ e sua topologia não depende de p. Para $\mathcal{J}$ arbitrário, se cada $X_j = \mathbb{R}$ então (5.1.39) coincide com o espaço $\ell_p(\mathcal{J})$ introduzido no Exemplo 5.1.47.

Exemplo 5.1.49. Generalizando o Exemplo 5.1.32, consideramos agora uma família arbitrária $(\mathcal{H}_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de espaços de Hilbert e definimos:

$$\overline{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}} \mathcal{H}_j = \overline{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}}^{\,2} \mathcal{H}_j; \tag{5.1.40}$$

consideramos em (5.1.40) o produto interno definido por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle x_j, y_j\rangle, \tag{5.1.41}$$

para todos $x = (x_j)_{j \in \mathcal{J}}$ e $y = (y_j)_{j \in \mathcal{J}}$ em (5.1.40). Daí (5.1.41) induz no espaço (5.1.40) a norma (5.1.38) com $p = 2$ e portanto o produto (5.1.41) faz de (5.1.40) um espaço de Hilbert; dizemos então que (5.1.40) é uma *soma direta de espaços de Hilbert*. Se $\mathcal{J}$ é finito obtemos novamente a noção de soma direta de espaços de Hilbert introduzida no Exemplo 5.1.32; para $\mathcal{J}$ arbitrário, se cada $\mathcal{H}_j = I\!R$ então a soma direta (5.1.40) coincide com o espaço de Hilbert $\ell_2(\mathcal{J})$.

OBSERVAÇÃO 5.1.50. A soma direta definida no Exemplo 5.1.49 é também chamada a *soma direta externa* da família $(\mathcal{H}_j)_{j \in \mathcal{J}}$ de espaços de Hilbert. Podemos definir uma noção de soma direta interna de espaços de Hilbert da seguinte maneira: seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $(\mathcal{H}_j)_{j \in \mathcal{J}}$ uma família de subespaços fechados de $\mathcal{H}$ *mutuamente ortogonais*, i.e., $\langle x, y \rangle = 0$ para todos $x \in \mathcal{H}_i$, $y \in \mathcal{H}_j$, com $i, j \in \mathcal{J}$, $i \neq j$; daí a soma dos espaços $\mathcal{H}_j$ é automaticamente direta. Suponha então que essa soma direta algébrica $\bigoplus_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{H}_j$ seja densa em $\mathcal{H}$; dizemos nesse caso que $\mathcal{H}$ é a *soma direta (interna) de espaços de Hilbert* da família $(\mathcal{H}_j)_{j \in \mathcal{J}}$. Não é difícil mostrar os seguintes fatos:

(1) *Uma família $(x_j)_{j \in \mathcal{J}}$ com $x_j \in \mathcal{H}_j$ para todo $j \in \mathcal{J}$ é somável em $\mathcal{H}$ se e somente se $\sum_{j \in \mathcal{J}} \|x_j\|^2 < +\infty$;*

a validade de (1) é uma conseqüência simples do critério de Cauchy para somabilidade e do Teorema de Pitágoras.

(2) *Dado $x \in \mathcal{H}$ então a família $(\pi_{\mathcal{H}_j}(x))_{j \in \mathcal{J}}$ é somável e sua soma é x;*

a validade de (2) segue facilmente da hipótese que a soma direta algébrica $\bigoplus_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{H}_j$ é densa em $\mathcal{H}$ e do fato que a projeção ortogonal[5] de x num subespaço V é o ponto de V mais próximo de x.

Para uma discussão sobre somas de famílias ortogonais em espaços de Hilbert vide [**28**, §5, §6, Capítulo I].

Segue diretamente dos fatos (1) e (2) que temos uma isometria entre $\mathcal{H}$ e a soma direta externa dos espaços $\mathcal{H}_j$ dada por:

$$\mathcal{H} \ni x \longmapsto (\pi_{\mathcal{H}_j}(x))_{j \in \mathcal{J}} \in \overline{\bigoplus_{j \in \mathcal{J}}} \mathcal{H}_j; \tag{5.1.42}$$

além do mais, o inverso de (5.1.42) é dado por:

$$\overline{\bigoplus_{j \in \mathcal{J}}} \mathcal{H}_j \ni (x_j)_{j \in \mathcal{J}} \longmapsto \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j \in \mathcal{H}.$$

OBSERVAÇÃO 5.1.51. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert; uma família de vetores $(b_j)_{j \in \mathcal{J}}$ é dita *ortonormal* se $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ para todos $i, j \in \mathcal{J}$ com $i \neq j$ e $\langle b_j, b_j \rangle = 1$ para todo $j \in \mathcal{J}$. Uma família ortonormal $(b_j)_{j \in \mathcal{J}}$ é dita uma

[5]Note que se $F \subset \mathcal{J}$ é uma parte finita então $\sum_{j \in F} \pi_{\mathcal{H}_j}(x)$ é a projeção ortogonal de x no subespaço $\bigoplus_{j \in F} \mathcal{H}_j$.

base de Hilbert (ou também uma *família ortonormal completa*) para $\mathcal{H}$ se o subespaço gerado por $\{b_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ é denso em $\mathcal{H}$; nesse caso temos que $\mathcal{H}$ se escreve como soma direta interna dos subespaços unidimensionais $\mathbb{R}b_j$, $j \in \mathcal{J}$ e daí:

$$\mathcal{H} \cong \overline{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}} \mathbb{R}b_j = \ell_2(\mathcal{J}).$$

Todo espaço de Hilbert admite uma base de Hilbert; de fato, segue do Lema de Zorn que sempre existe uma *família ortonormal maximal* $(b_j)_{j\in\mathcal{J}}$ em $\mathcal{H}$. Daí o subespaço gerado pelos vetores b_j tem complemento ortogonal nulo e é portanto denso em $\mathcal{H}$ (vide (5.1.11)).

Observe que as considerações acima mostraram que todo espaço de Hilbert é isométrico a $\ell_2(\mathcal{J})$ para algum conjunto $\mathcal{J}$.

OBSERVAÇÃO 5.1.52. As definições dos espaços de Banach que aparecem nos Exemplos 5.1.27, 5.1.37 e 5.1.38 podem ser generalizadas em várias direções; mencionamos algumas possibilidades. No caso de $L^p([a,b],\mathbb{R}^n)$, o intervalo $[a,b]$ pode ser trocado por um espaço de medida qualquer sem o aparecimento de complicações significativas[6] (vide [**17**, Proposição 4.2.4] para a prova da completude); o espaço $\mathbb{R}^n$ pode ser trocado por um espaço de Banach X qualquer. Quando X não é separável, um certo cuidado deve ser tomado com a definição de função mensurável (deve-se considerar funções mensuráveis no sentido *forte*; vide [**59**, Seção 4, Capítulo 5]). É possível também definir espaços de Banach de seções L^p de fibrados vetoriais.

Quanto ao espaço $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$, podemos trocar em geral $[a,b]$ por uma variedade diferenciável compacta (possivelmente com bordo); novamente $\mathbb{R}^n$ pode ser trocado por um espaço de Banach (na Subseção 5.1.1 a seguir discutiremos cálculo em espaços de Banach). Pode-se também considerar o espaço de Banach de seções de classe C^k de um fibrado vetorial (sobre uma variedade compacta). Os espaços $W^{k,p}$ podem ser definidos sobre abertos de $\mathbb{R}^m$ e são normalmente conhecidos como *Espaços de Sobolev* (vide [**9**, Capítulo IX]); tais definições normalmente envolvem a noção de *derivada fraca* (no sentido da Teoria de Distribuições de Schwarz) ou às vezes a Transformada de Fourier (que permite até a generalização para o caso em que k não é inteiro). Várias complicações aparecem aí, especialmente porque $W^{k,p}$ pode conter funções não contínuas mesmo para $k \geq 1$. Os espaços de Sobolev também podem ser definidos no contexto de seções de um fibrado vetorial sobre uma variedade com bordo qualquer (no caso não compacto estruturas adicionais como métricas e conexões são necessárias).

5.1.1. Cálculo em espaços de Banach. O objetivo desta subseção é introduzir as noções básicas do cálculo em espaços de Banach; provamos um critério prático para a diferenciabilidade de uma aplicação entre espaços

[6]Para que tenhamos uma inclusão limitada de L^{p_1} em L^{p_2} para $p_1 \geq p_2$ (vide Exemplo 5.1.43) é necessário supor que o espaço de medida tenha medida total *finita*.

de Banach. Nesta subseção, todos os espaços normados considerados serão espaços de Banach.

Sejam X, Y espaços de Banach e seja $f\colon U \to Y$ uma função definida num aberto $U \subset X$; se $X = I\!R$ admitimos também que U seja um intervalo qualquer (não necessariamente aberto) em $I\!R$. Dizemos que f é *diferenciável*[7] no ponto $x \in U$ se existe um operador linear *limitado* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ de modo que a função r definida pela identidade

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h), \tag{5.1.43}$$

satisfaz:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \tag{5.1.44}$$

É fácil ver que quando tal operador T existe ele é único; de fato, para $v \in X$ temos que $T(v)$ coincide com a *derivada direcional* de f no ponto x, na direção de v:

$$T(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Dizemos então que T é a *diferencial* de f no ponto $x \in U$ e escrevemos $T = \mathrm{d}f(x)$. Se $X = I\!R$ então identificamos $\mathrm{d}f(x)$ com um vetor de Y através da isometria

$$\mathcal{L}(I\!R, Y) \ni T \longmapsto T(1) \in Y;$$

escrevemos então $f'(x) = \mathrm{d}f(x)\cdot 1$ e dizemos que $f'(x)$ é o *vetor tangente* a f no ponto $x \in U$. Mais explicitamente:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \tag{5.1.45}$$

se $X = I\!R$ a diferenciabilidade de f no ponto x é equivalente à existência do limite em (5.1.45).

OBSERVAÇÃO 5.1.53. Se f é diferenciável no ponto $x \in U$ e trocamos as normas em X e Y por normas equivalentes então f continua diferenciável no ponto x e sua diferencial não muda; vemos então que na verdade o conceito de função diferenciável e de diferencial podem ser definidos em espaços Banachizáveis.

Se f é diferenciável em todo ponto de U então dizemos que f é *diferenciável* em U e obtemos uma aplicação

$$\mathrm{d}f\colon U \longrightarrow \mathcal{L}(X,Y); \tag{5.1.46}$$

quando a aplicação (5.1.46) é contínua dizemos que f é *de classe* C^1. Definimos indutivamente a *diferencial de ordem* k de f no ponto $x \in U$ fazendo $\mathrm{d}^{(k)}f(x) = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}^{(k-1)}f\big)(x)$ (quando essas diferenciais de fato existirem); daí $\mathrm{d}^{(k)}f(x)$ pode ser identicado com um operador k-linear limitado

[7]Nesta subseção, "diferenciável" significa "diferenciável uma vez"; recorde que na Seção 2.1 "diferenciável" significava "de classe C^∞". Fora da presente subseção, a terminologia adotada será a da Seção 2.1.

de $X \times \cdots \times X$ em Y. Se f é diferenciável k vezes e a aplicação $x \mapsto \mathrm{d}^{(k)} f(x)$ é contínua em U dizemos que f é *de classe* C^k em U.

A partir daí desenvolve-se a teoria de cálculo em espaços de Banach de maneira essencialmente idêntica ao cálculo em dimensão finita; mostra-se a regra da cadeia e as propriedades operatórias elementares da diferencial. Operadores lineares e multi-lineares *limitados* são sempre de classe C^∞ e suas diferenciais são dadas pelas mesmas expressões que aparecem no cálculo em dimensão finita, ou seja:

(5.1.47)
$$\mathrm{d}B(x_1, \ldots, x_n) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} B(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

onde B é um operador multi-linear limitado como em (5.1.2) e $x_i, h_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$; aqui o produto $\prod_{i=1}^n X_i$ deve ser identificado com a soma direta $\bigoplus_{i=1}^n X_i$.

Repetindo as construções da Seção 2.1 pode-se também desenvolver um cálculo em *variedades de Banach*, também essencialmente idêntico ao cálculo em variedades de dimensão finita. Uma exposição bastante completa sobre o assunto pode ser encontrada em [**33**]; as demonstrações feitas em dimensão finita em geral repetem-se *ipsis literis* quando estamos no contexto de espaços de Banach (uma pequena exceção é mencionada na Observação 5.1.56 adiante). Alguns teoremas de cálculo em espaços de Banach podem ser obtidos como corolários dos correspondentes teoremas clássicos em dimensão finita, normalmente usando como ferramenta o Corolário 5.1.4 do Teorema de Hahn-Banach; mencionamos a seguir dois exemplos.

EXEMPLO 5.1.54. O *Teorema de Schwarz* para o cálculo em espaços de Banach nos diz que se $f\colon U \subset X \to Y$ é uma função k vezes diferenciável no ponto $x \in U$ então a forma k-linear $\mathrm{d}^{(k)} f(x)$ é simétrica; esse resultado é uma conseqüência do Teorema de Schwarz em dimensão finita. Para ver isso, seja $V \subset X$ um subespaço de dimensão finita qualquer e seja $\alpha \in Y^*$; a função

$$v \longmapsto g(v) = (\alpha \circ f)(x + v) \in I\!R$$

definida numa vizinhança da origem em V é k vezes diferenciável na origem e

$$\mathrm{d}^{(k)} g(0) = \alpha \circ \mathrm{d}^{(k)} f(x)|_{(V \times \cdots \times V)}.$$

Pelo Teorema de Schwarz em dimensão finita temos que $\mathrm{d}^{(k)} g(0)$ é uma forma k-linear simétrica; como V e α são arbitrários, a simetria de $\mathrm{d}^{(k)} f(x)$ segue do Corolário 5.1.4.

EXEMPLO 5.1.55. A *Desigualdade do Valor Médio* para o cálculo em espaços de Banach nos diz que se $f\colon [a, b] \to X$ é uma aplicação contínua, diferenciável no intervalo aberto $]a, b[$ então existe $t \in\,]a, b[$ tal que:

$$\|f(b) - f(a)\| \le \|f'(t)\|(b - a);$$

para ver isso, usamos o Corolário 5.1.4 para encontrar $\alpha \in X^*$ com $\|\alpha\| = 1$, $\alpha(f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|$ e aplicamos o Teorema do Valor Médio para a função escalar $\alpha \circ f$.

Segue da Desigualdade do Valor Médio que se $f\colon [a,b] \to X$ é contínua e tem derivada zero em $]a,b[$ então f é constante.

OBSERVAÇÃO 5.1.56. Uma dificuldade que aparece no estudo do cálculo em espaços de Banach é que, diferentemente do caso $\dim(X) < +\infty$, *nem todo subespaço fechado de um espaço de Banach é co-fechado*. No caso de espaços de Hilbert, tal dificuldade não aparece, já que *todo subespaço fechado de um espaço de Hilbert é co-fechado* (vide (5.1.12)). No caso de espaços de Banach, a possível inexistência de complementares fechados tem duas principais conseqüências:

- *As definições de imersão e submersão devem ser adaptadas*;

  dizemos que uma aplicação $f\colon U \subset X \to Y$ é uma *submersão* no ponto $x \in U$ se $\mathrm{d}f(x)$ é sobrejetora e seu núcleo é co-fechado em X. Dizemos que f é uma *imersão* no ponto x se $\mathrm{d}f(x)$ é injetora e sua imagem é fechada e co-fechada em Y. Essas definições fazem com que a *forma local das imersões* e a *forma local das submersões* sejam ainda verdadeiras no contexto de cálculo em espaços de Banach[8].

- *A demonstração do* princípio de mudança de contra-domínio *é mais delicada*;

  se uma função $f\colon X \supset U \to Y$ é de classe C^k e se a imagem de f está contida num subespaço fechado $Y_0 \subset Y$ então a aplicação $f_0\colon U \to Y_0$ dada por $f_0(x) = f(x)$, para todo $x \in U$, é ainda de classe C^k. Em dimensão finita, esse fato é uma conseqüência trivial da regra da cadeia: basta observar que $f_0 = \pi \circ f$, onde $\pi\colon Y \to Y_0$ é uma projeção limitada. No caso de espaços de Banach esse resultado *ainda é verdadeiro*, apesar da possível inexistência da projeção limitada π. A demonstração desse fato segue facilmente (por indução em k) da definição de função diferenciável, levando em conta que Y_0 tem a topologia induzida de Y.

Na demonstração do resultado central desta seção (Teorema 5.1.64) precisaremos de uma noção de integral para funções contínuas $f\colon [a,b] \to X$, onde X é um espaço de Banach[9]. Desenvolvemos brevemente a seguir uma tal teoria de integração.

---

[8]Recorde que a forma local das submersões é necessária na demonstração do *Teorema do Valor Regular*: se uma função $f\colon X \supset U \to Y$ de classe C^k ($k \geq 1$) é uma submersão em todos os pontos de $f^{-1}(y)$ para um certo $y \in Y$ então $f^{-1}(y)$ é uma *subvariedade mergulhada* de classe C^k de X.

[9]Uma teoria como essa pode ser desenvolvida no espírito da integral de Riemann, usando partições do intervalo $[a,b]$ e limites de somas. Isso é feito em [**37**, §1, §2, Capítulo 6]; embora os resultados nessa referência estejam enunciados para $X = \mathbb{R}^n$, as demonstrações que aparecem lá funcionam num espaço de Banach qualquer.

DEFINIÇÃO 5.1.57. Seja X um espaço de Banach; dizemos que uma função $f\colon [a,b] \to X$ é *integrável* se para todo funcional linear limitado $\lambda \in X^*$ a função $\lambda \circ f\colon [a,b] \to I\!R$ é (Lebesgue) integrável e existe um vetor $v \in X$ tal que

$$\int_a^b (\lambda \circ f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(v),$$

para todo $\lambda \in X^*$. Segue do Teorema de Hahn-Banach que tal vetor v é único quando existe; dizemos então que v é a *integral* de f no intervalo $[a,b]$ e escrevemos:

$$v = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f.$$

Na Definição 5.1.57 acima é necessário somente que o espaço X seja Banachizável; a escolha de uma norma particular em X é irrelevante.

PROPOSIÇÃO 5.1.58. *As seguintes propriedades são satisfeitas pela noção de integral introduzida na Definição 5.1.57:*

(1) *o conjunto das funções integráveis é um subespaço do espaço vetorial de todas as funções $f\colon [a,b] \to X$; a integral é um operador linear definido nesse subespaço;*

(2) *se $T\colon X \to Y$ é um operador linear limitado e $f\colon [a,b] \to X$ é uma função integrável então $T \circ f$ também é integrável e vale a identidade:*
$$\int_a^b T \circ f = T \cdot \int_a^b f;$$

(3) *se $f\colon [a,b] \to X$ e $c \in \,]a,b[$ são tais que $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis então f é integrável e*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t;$$

(4) *se $f\colon [a,b] \to X$ é uma função limitada e integrável então vale a desigualdade:*
$$\Big\| \int_a^b f \Big\| \le (b-a)\|f\|_{\sup}.$$

(5) *seja $(f_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de funções $f_n\colon [a,b] \to X$ que converge uniformemente para uma função $f\colon [a,b] \to X$; se cada f_n é integrável então f também o é e vale a identidade:*
$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n.$$

DEMONSTRAÇÃO. As Propriedades (1), (2) e (3) seguem trivialmente da Definição 5.1.57. A Propriedade (4) segue facilmente usando um funcional $\lambda \in X^*$ tal que $\|\lambda\| = 1$ e

$$\lambda \cdot \int_a^b f = \Big\| \int_a^b f \Big\|;$$

a existência de tal funcional λ segue do Corolário 5.1.4 do Teorema de Hahn-Banach. Finalmente, a Propriedade (5) segue facilmente usando a Propriedade (4) para mostrar que a seqüência $\big(\int_a^b f_n\big)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em X. $\square$

EXEMPLO 5.1.59. Dizemos que uma função $f\colon [a,b]\to X$ é *simples* se f tem imagem finita e o subconjunto $f^{-1}(v)\subset [a,b]$ é mensurável para todo $v\in X$. É fácil ver que toda função simples é integrável; explicitamente, se $\mathrm{Im}(f)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ (com $v_1,\ldots,v_n$ distintos) então:

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^n \mathfrak{m}\big(f^{-1}(v_i)\big)v_i,$$

onde $\mathfrak{m}$ denota a *medida de Lebesgue* em $\mathbb{R}$.

LEMA 5.1.60. *Toda função contínua $f\colon [a,b]\to X$ é limite uniforme de uma seqüência de funções simples.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\varepsilon>0$; como $[a,b]$ é compacto temos que f é uniformemente contínua e portanto existe $\delta>0$ tal que $|x-y|<\delta$ implica $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$, para todos $x,y\in[a,b]$. Considere uma partição $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$ do intervalo $[a,b]$ tal que $t_{i+1}-t_i<\delta$ para $i=0,\ldots,k-1$; defina $g\colon [a,b]\to X$ fazendo:

$$g(t)=\begin{cases} f(t_i), & t\in[t_i,t_{i+1}[\,,\ i=0,\ldots,k-2,\\ f(t_{k-1}), & t\in[t_{k-1},t_k].\end{cases}$$

Daí g é simples e $\|f-g\|_{\sup}<\varepsilon$. A conclusão segue. $\square$

COROLÁRIO 5.1.61. *Toda função contínua $f\colon [a,b]\to X$ é integrável.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 5.1.60, do Exemplo 5.1.59 e da Propriedade (5) no enunciado da Proposição 5.1.58. $\square$

OBSERVAÇÃO 5.1.62. Se $f\colon [a,b]\to X$ é uma aplicação contínua então, pelo Corolário 5.1.61, vemos que é possível definir $F\colon [a,b]\to X$ fazendo

$$F(t)=\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s,\quad t\in\,]a,b]\,,$$

e $F(a)=0$. Segue facilmente das Propriedades (3) e (4) no enunciado da Proposição 5.1.58 que F é diferenciável em $[a,b]$ e $F'=f$; além do mais, se $G\colon [a,b]\to X$ é qualquer função diferenciável em $[a,b]$ com $G'=f$ então $F-G$ é constante (vide Exemplo 5.1.55) e portanto:

$$\int_a^b f=G(b)-G(a).$$

Está completo então o desenvolvimento da teoria de integração até onde será necessário para nossos propósitos.

DEFINIÇÃO 5.1.63. Seja X um espaço de Banach e seja $\mathfrak{S}$ um conjunto de operadores lineares limitados definidos em X (o contra-domínio de cada $T \in \mathfrak{S}$ é um espaço de Banach, que pode depender de T); dizemos que $\mathfrak{S}$ *separa pontos em* X se dados $v, w \in X$ distintos existe $T \in \mathfrak{S}$ tal que $T(v) \neq T(w)$.

Obviamente para que $\mathfrak{S}$ separe pontos em X é suficiente que para todo $v \in X$ não nulo exista $T \in \mathfrak{S}$ tal que $T(v) \neq 0$.

Temos agora condições de enunciar e demonstrar um critério muito eficiente para mostrar que uma função entre espaços de Banach é de classe C^1.

TEOREMA 5.1.64. *Sejam X, Y espaços de Banach, $U \subset X$ um aberto, $\mathfrak{S}$ um conjunto que separa pontos em Y, $f\colon U \to Y$ uma função qualquer e $g\colon U \to \mathcal{L}(X,Y)$ uma função contínua. Suponha que para todos $x \in U$, $v \in X$, $T \in \mathfrak{S}$ a aplicação $T \circ f$ admite derivada dericional no ponto x, na direção v e que vale a identidade*

$$\frac{\partial(T \circ f)}{\partial v}(x) = T\big(g(x) \cdot v\big);$$

então f é de classe C^1 em U e $\mathrm{d}f = g$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in U$ e considere a função r definida pela identidade

$$f(x+h) = f(x) + g(x) \cdot h + r(h).$$

Se $h \in X$ é bem próximo da origem de modo que $x + th \in U$ para $t \in [0,1]$ então, dado $T \in \mathfrak{S}$, é fácil ver que a curva $[0,1] \ni t \mapsto (T \circ f)(x+th)$ é diferenciável e vale a identidade:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T \circ f)(x+th) = T\big(g(x+th) \cdot h\big), \quad t \in [0,1];$$

da Observação 5.1.62 e da Propriedade (2) no enunciado da Proposição 5.1.58 segue que:

$$T\big(f(x+h) - f(x)\big) = T \cdot \int_0^1 g(x+th) \cdot h \,\mathrm{d}t. \tag{5.1.48}$$

Como $\mathfrak{S}$ separa pontos em Y podemos "cancelar" T dos dois lados em (5.1.48); obtemos então

$$r(h) = \int_0^1 [g(x+th) - g(x)] \cdot h \,\mathrm{d}t. \tag{5.1.49}$$

Como g é contínua, dado $\varepsilon > 0$, o integrando em (5.1.49) pode ser feito menor que $\varepsilon\|h\|$ em norma, desde que $\|h\|$ seja suficientemente pequeno; segue então da Propriedade (4) no enunciado da Proposição 5.1.58 que vale o limite em (5.1.44). Isso completa a demonstração. □

Na verdade, no nosso texto só teremos uso para o Teorema 5.1.64 no caso $X = I\!\!R$; enunciamos então como corolário esse caso especial.

COROLÁRIO 5.1.65. *Sejam Y um espaço de Banach, $\mathfrak{S}$ um conjunto que separa pontos em Y, $f\colon I \to Y$ uma função qualquer e $g\colon I \to Y$ uma função contínua, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Suponha que para todo $T \in \mathfrak{S}$ a função $T \circ f$ é diferenciável em I e vale $(T \circ f)' = T \circ g$; então f é de classe C^1 em I e $f' = g$.* □

EXEMPLO 5.1.66. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma aplicação

$$\tilde{f}\colon I \longrightarrow C^0([a,b],\mathbb{R}^n) \tag{5.1.50}$$

defina $f\colon I \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fazendo $f(s,t) = \tilde{f}(s)(t)$. É fácil ver que $\tilde{f}$ é contínua se e somente se f é contínua; isso é conseqüência do fato que a continuidade de f é automaticamente uniforme com respeito à variável que percorre o compacto $[a,b]$ (vide [**34**, Proposição 5, §3, Capítulo 8]; veja também as Observações 3.1.19 e 3.1.20). Como a topologia de $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ é induzida por (5.1.27) segue que uma aplicação

$$\tilde{f}\colon I \longrightarrow C^k([a,b],\mathbb{R}^n) \tag{5.1.51}$$

é contínua se e somente se a correspondente aplicação f admite derivadas parciais $\frac{\partial^i f}{\partial t^i}$ contínuas no par $(s,t) \in I \times [a,b]$ para $i = 0,\ldots,k$.

Se para cada $t \in [a,b]$ consideramos o operador linear limitado

$$T_t\colon C^0([a,b],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de *avaliação* em t dado por $T_t(\phi) = \phi(t)$ então o conjunto

$$\mathfrak{S} = \big\{T_t : t \in [a,b]\big\} \tag{5.1.52}$$

separa pontos em $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$. Aplicando o Corolário 5.1.65 para a função (5.1.50) e para $\mathfrak{S}$ então é fácil ver que (5.1.50) é de classe C^1 se e somente se f admite derivada com respeito à variável $s \in I$ e essa derivada é contínua em $(s,t) \in I \times [a,b]$; nesse caso a derivada de (5.1.50) é dada por:

$$\tilde{f}'(s)(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \quad s \in I,\ t \in [a,b].$$

Similarmente, considerando o operador T_t definido em $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ então o conjunto $\mathfrak{S}$ definido em (5.1.52) separa pontos em $C^k([a,b],\mathbb{R}^n)$ e aplicando o Corolário 5.1.65 concluímos que (5.1.51) é de classe C^1 se e somente se a função f admite derivadas parciais $\frac{\partial^{i+1} f}{\partial t^i \partial s}$ contínuas em $(s,t) \in I \times [a,b]$ para $i = 0,\ldots,k$. Por indução em r mostra-se mais geralmente que (5.1.51) é de classe C^r se e somente se f admite derivadas parciais $\frac{\partial^{i+j} f}{\partial t^i \partial s^j}$ contínuas em $(s,t) \in I \times [a,b]$ para $i = 0,\ldots,k$ e $j = 0,\ldots,r$.

OBSERVAÇÃO 5.1.67. A teoria de integração que desenvolvemos nesta subseção é às vezes conhecida como *integração fraca*; tal teoria foi suficiente para os propósitos deste texto. Uma teoria de integração satisfazendo propriedades mais interessantes (como um "Teorema da Convergência Dominada") pode ser desenvolvida para funções definidas em espaços de medida quaisquer tomando valores em espaços de Banach quaisquer; tal integral é conhecida como *Integral de Bochner* e é desenvolvida por exemplo em [**59**, Seção 5, Capítulo 5] ou [**12**, Apêndice E].

5.2. Operadores Compactos

Nesta seção estudamos as propriedades elementares de uma importante classe de operadores limitados: os operadores compactos.

Começamos recordando alguma terminologia elementar de topologia. Um subconjunto S de um espaço topológico é dito *relativamente compacto* quando seu fecho é compacto; se o espaço topológico em questão for Hausdorff então S é relativamente compacto se e somente se S estiver contido em algum subespaço compacto. Na verdade estaremos interessados apenas em espaços métricos (M, d); para $x \in M$ e $r > 0$ denotamos por $B(x, r)$ (respectivamente, $B[x, r]$) a bola aberta (respectivamente, fechada) de centro x e raio r:

$$B(x,r) = \big\{y \in M : d(x,y) < r\big\}, \quad B[x,r] = \big\{y \in M : d(x,y) \leq r\big\}.$$

Se X é um espaço normado então escrevemos

$$B_r = B[0, r].$$

DEFINIÇÃO 5.2.1. Se (M, d) é um espaço métrico então, para $\varepsilon > 0$, um subconjunto $A \subset M$ é dito *ε-denso* em M se dado $x \in M$ existe $y \in A$ com $d(x, y) \leq \varepsilon$; alternativamente, A é ε-denso em M se tivermos

$$M = \bigcup_{x \in A} B[x, \varepsilon].$$

O espaço métrico (M, d) é dito *totalmente limitado* se para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto ε-denso finito em M; equivalentemente, M é totalmente limitado se para todo $\varepsilon > 0$ temos que M pode ser coberto com uma quantidade finita de subconjuntos de diâmetro menor que ε.

Obviamente um subespaço de um espaço totalmente limitado é ainda totalmente limitado.

Para um espaço métrico (M, d), sabe-se que são equivalentes as seguintes condições (vide [**34**, Proposição 7, §5, Capítulo 8]):

- M é compacto;
- M é *seqüêncialmente compacto*, i.e., toda seqüência em M tem uma subseqüência convergente;
- M é completo e totalmente limitado;

é fácil ver que $A \subset M$ é relativamente compacto se e somente se toda seqüência em A tem uma subseqüência convergente em M. Se M é completo então os subconjuntos relativamente compactos de M coincidem com os subespaços totalmente limitados de M.

A partir de agora consideraremos fixos espaços de Banach X e Y; o seguinte lema é bastante simples.

LEMA 5.2.2. *Seja $T\colon X \to Y$ um operador linear; as seguintes condições são equivalentes:*

- *$T(B_1)$ é relativamente compacto em Y;*
- *para todo subconjunto limitado $A \subset X$ o subconjunto $T(A) \subset Y$ é relativamente compacto;*
- *para toda seqüência limitada $(x_n)_{n\geq 1}$ em X, a seqüência $(T(x_n))_{n\geq 1}$ em Y possui uma subseqüência convergente;*
- *para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto finito $A \subset B_1$ tal que $T(A)$ é ε-denso em $T(B_1)$.*

Qualquer uma das condições acima implica que T é limitado. □

DEFINIÇÃO 5.2.3. Um operador linear $T\colon X \to Y$ é dito *compacto* quando satisfaz uma (e portanto todas) as condições no enunciado do Lema 5.2.2. Denotamos por $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ o conjunto dos operadores compactos $T\colon X \to Y$; escrevemos também $\mathcal{K}(X,X) = \mathcal{K}(X)$.

Mostramos agora as propriedades elementares dos operadores compactos.

PROPOSIÇÃO 5.2.4. *Sejam X, Y espaços de Banach; então:*

(1) *$\mathcal{K}(X,Y)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X,Y)$;*
(2) *se Z é um outro espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ são operadores limitados então $S \circ T$ é compacto sempre que S ou T for compacto; em particular, a restrição de um operador compacto a um subespaço fechado é ainda um operador compacto;*
(3) *se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é compacto e $V \subset Y$ é um subespaço fechado tal que $\mathrm{Im}(T) \subset V$ então o operador $T_0 \in \mathcal{L}(X,V)$ tal que $T(x) = T_0(x)$ para todo $x \in X$ é compacto;*
(4) *$\mathcal{K}(X,Y)$ é fechado no espaço de Banach $\mathcal{L}(X,Y)$;*
(5) *dado um operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ então $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ se e somente se $T^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$.*

DEMONSTRAÇÃO. As Propriedades (1), (2) e (3) são conseqüências simples da definição de operador compacto. Para provar a Propriedade (4), seja T um elemento do fecho de $\mathcal{K}(X,Y)$ em $\mathcal{L}(X,Y)$; dado $\varepsilon > 0$, seja $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ com $\|S - T\| \leq \varepsilon$ e seja $A \subset B_1$ um subconjunto finito tal que $S(A)$ é ε-denso em $S(B_1)$. Daí é fácil ver que $T(A)$ é 3ε-denso em $T(B_1)$, o que conclui a demonstração da Propriedade (4).

Para finalizar, vamos provar a Propriedade (5); como T identifica-se com uma restrição de T^{**} (vide Observação 5.1.12) é suficiente mostrar que se $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ então $T^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$. Seja dado então $T \in \mathcal{K}(X,Y)$; fixe $\varepsilon > 0$ e escolha um subconjunto finito $A \subset B_1$ tal que $T(A)$ é ε-denso em $T(B_1)$. Dado um funcional $\alpha \in Y^*$ é fácil ver que

$$\|\alpha \circ T\| - \varepsilon\|\alpha\| \leq \max_{x\in A} |(\alpha \circ T)(x)| \leq \|\alpha \circ T\|; \tag{5.2.1}$$

se $V \subset X$ é o subespaço (de dimensão finita) gerado por A então segue de (5.2.1) que:

$$\|\alpha \circ T\| - \varepsilon\|\alpha\| \le \big\|(\alpha \circ T)|_V\big\| \le \|\alpha \circ T\|, \tag{5.2.2}$$

para todo $\alpha \in Y^*$. Como $T(V)^*$ tem dimensão finita, sua bola unitária é compacta e portanto podemos encontrar um subconjunto finito ε-denso $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ dessa bola unitária; pelo Teorema de Hahn-Banach existe para cada $i = 1, \ldots, k$ um funcional $\alpha_i \in Y^*$ que estende $\beta_i \in T(V)^*$ e tal que $\|\alpha_i\| = \|\beta_i\| \le 1$. Seja $\alpha \in Y^*$ com $\|\alpha\| \le 1$; daí

$$\big\|\alpha|_{T(V)} - \beta_i\big\| \le \varepsilon,$$

para algum $i = 1, \ldots, k$. Concluímos então que

$$\big\|(\alpha \circ T)|_V - (\alpha_i \circ T)|_V\big\| \le \varepsilon\|T\|;$$

como $\|\alpha - \alpha_i\| \le 2$ segue de (5.2.2) (trocando α por $\alpha - \alpha_i$) que:

$$\|\alpha \circ T - \alpha_i \circ T\| = \|(\alpha - \alpha_i) \circ T\| \le \varepsilon\|T\| + 2\varepsilon;$$

daí $\{T^*(\alpha_1), \ldots, T^*(\alpha_k)\}$ é σ-denso em $T^*(B_1)$, onde $\sigma = (\|T\| + 2)\varepsilon$. Isso completa a demonstração. □

Observação 5.2.5. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ são espaços de Banach e se $T\colon X \to Y$ é um operador compacto então T continua compacto se substituirmos as normas de X e Y por normas equivalentes $\|\cdot\|'_X$ e $\|\cdot\|'_Y$ respectivamente; de fato, essa substituição de normas pode ser vista como uma composição à esquerda e à direita respectivamente com os operadores identidade

$$\mathrm{Id}\colon (Y, \|\cdot\|_Y) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|'_Y), \quad \mathrm{Id}\colon (X, \|\cdot\|'_X) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_X)$$

que são isomorfismos topológicos; a conclusão segue então da Propriedade (2) no enunciado da Proposição 5.2.4. Mostramos então que a noção de operador compacto pode ser definida no contexto de espaços Banachizáveis.

Exemplo 5.2.6. Se $T\colon X \to Y$ é um operador limitado de *posto finito*, i.e., se $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < +\infty$ então T é compacto; de fato, nesse caso $T(B_1)$ é um subconjunto limitado de um espaço de dimensão finita e é portanto relativamente compacto. Pela Propriedade (4) no enunciado da Proposição 5.2.4 temos também que o limite de uma seqüência de operadores de posto finito é um operador compacto. Quando Y é um espaço de Hilbert vale a recíproca: todo operador compacto $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ é limite de uma seqüência de operadores de posto finito; para ver isso, seja $\varepsilon > 0$ e seja $A \subset B_1$ um subconjunto finito tal que $T(A)$ é ε-denso em $T(B_1)$. Se $V \subset Y$ é o subespaço de dimensão finita gerado por $T(A)$ e π_V denota o projetor ortogonal sobre V então $\pi_V \circ T$ é um operador de posto finito e para todo $x \in B_1$ temos

$$\|T(x) - (\pi_V \circ T)(x)\| \le \varepsilon,$$

já que $(\pi_V \circ T)(x)$ é o ponto de V mais próximo de $T(x)$.

EXEMPLO 5.2.7. Seja $\lambda \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ uma seqüência limitada de números reais (vide Exemplo 5.1.26); para todo $p \in [1, +\infty]$, definimos um operador linear

$$M_\lambda \colon \ell_p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell_p(\mathbb{N})$$

fazendo $M_\lambda(x) = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$ para todo $x = (x_n)_{n\geq 1}$ em $\ell_p(\mathbb{N})$. É fácil ver que M_λ é um operador linear limitado e na verdade

$$\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty. \tag{5.2.3}$$

Dizemos que M_λ é o *operador de multiplicação* pela seqüência limitada λ. Para todo $n \geq 1$ denote por $\lambda^{(n)}$ o *truncamento* de λ na posição n dado por:

$$\lambda^{(n)} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots); \tag{5.2.4}$$

note que para todo n o operador de multiplicação $M_{\lambda^{(n)}}$ tem posto finito. Suponha agora que

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0;$$

daí segue de (5.2.3) que

$$\lim_{n\to+\infty} M_{\lambda^{(n)}} = M_\lambda$$

e portanto M_λ é um operador compacto.

EXEMPLO 5.2.8. Generalizando o Exemplo 5.2.7, consideramos agora um conjunto qualquer $\mathcal{J}$ e uma família limitada $\lambda \in \ell_\infty(\mathcal{J})$; daí, para todo $p \in [1, +\infty]$, definimos o *operador de multiplicação*

$$M_\lambda \colon \ell_p(\mathcal{J}) \longrightarrow \ell_p(\mathcal{J})$$

associado à família limitada λ fazendo $M_\lambda(x) = (\lambda_j x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ para todo $x \in \ell_p(\mathcal{J})$. É fácil ver que a identidade (5.2.3) também vale para $\mathcal{J}$ arbitrário.

Suponha agora que λ satisfaz as duas seguintes condições:

(a) o conjunto $\{\lambda_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ não tem pontos de acumulação em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(b) dado $t \in \mathbb{R}$ não nulo então $\lambda_j = t$ no máximo para um número finito de índices $j \in \mathcal{J}$;

vamos mostrar nesse caso que M_λ é um operador compacto. Suponha que $\mathcal{J}$ é infinito (senão o problema em questão é trivial); é fácil ver que podemos construir uma seqüência de índices distintos $(j_n)_{n\geq 1}$ em $\mathcal{J}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_{j_n} = 0$ e $\lambda_j = 0$ se $j \notin \{j_n\}_{n\geq 1}$. Temos uma decomposição em soma direta:

$$\ell_p(\mathcal{J}) = \ell_p(\{j_n\}_{n\geq 1}) \oplus \ell_p(\mathcal{J} \setminus \{j_n\}_{n\geq 1}); \tag{5.2.5}$$

pelo Exemplo 5.2.7, o operador M_λ se restringe a um endomorfismo compacto T do primeiro termo da soma em (5.2.5). Denotando por π e por $\mathfrak{i}$ respectivamente a projeção e a inclusão correspondentes ao primeiro termo da soma em (5.2.5) vemos que

$$M_\lambda = \mathfrak{i} \circ T \circ \pi,$$

donde segue que M_λ é compacto.

EXEMPLO 5.2.9. A inclusão de $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ em $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ é um operador compacto; para ver isso, considere uma seqüência $(f_j)_{j\geq 1}$ limitada em $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Queremos mostrar que a seqüência $(f_j)_{j\geq 1}$ possui uma subseqüência que converge uniformemente; aplicaremos o Teorema de Arzelá-Ascoli (vide Teorema 5.2.44 e Definição 5.2.43). Como obviamente a seqüência $(f_j(t))_{j\geq 1}$ é limitada para todo $t\in[a,b]$, resta ver que o conjunto $\{f_j\}_{j\geq 1}$ é equicontínuo; para todos $t,s\in[a,b]$ com $t\leq s$ calculamos:

$$\|f_j(s)-f_j(t)\|\leq\int_t^s\|f_j'\|\leq\left(\int_a^b\|f_j'\|^2\right)^{\frac{1}{2}}(s-t)^{\frac{1}{2}},$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz (5.1.20). A conclusão segue; na verdade, um argumento similar (usando a desigualdade de Hölder em vez de Cauchy-Schwarz) mostra que a inclusão de $W^{1,p}([a,b],\mathbb{R}^n)$ em $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ é compacta para todo $p>1$.

EXEMPLO 5.2.10. Seja $\mathcal{H}$ um subespaço fechado de $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ e denote por $\mathcal{H}_0$ o espaço que se obtém quando considera-se a topologia induzida de $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{H}$. Seja X um espaço de Banach arbitrário e suponha que um certo operador linear contínuo $K\colon\mathcal{H}\to X$ é também contínuo visto como um operador $K\colon\mathcal{H}_0\to X$; afirmamos nesse caso que K é *compacto*. De fato, se $\overline{\mathcal{H}}_0$ denota o fecho de $\mathcal{H}_0$ em $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ então segue do Exemplo 5.2.9 (e das Propriedades (2) e (3) no enunciado da Proposição 5.2.4) que o operador de inclusão $\mathfrak{i}\colon\mathcal{H}\to\overline{\mathcal{H}}_0$ é compacto; pela Proposição 5.1.7 o operador K admite uma (única) extensão contínua $\overline{K}\colon\overline{\mathcal{H}}_0\to X$ e daí $K=\overline{K}\circ\mathfrak{i}$, donde concluímos que K é compacto.

5.2.1. A teoria de Fredholm. Se X é um espaço vetorial de dimensão finita então um endomorfismo linear de X é injetor se e somente se esse endomorfismo for sobrejetor; se X tem dimensão infinita, obviamente esse resultado é falso. Nesta subseção, mostraremos que tal resultado ainda é verdadeiro para operadores que são dados por perturbações compactas da identidade de um espaço de Banach; esse teorema é conhecido como a Alternativa de Fredholm. Mais geralmente, definiremos a noção de operador de Fredholm; a um tal operador está associado um número inteiro chamado o índice de Fredholm. Esse índice nos dá um medida da diferença entre a “não-injetividade” e a “não-sobrejetividade” de um operador.

Seja $(X,\|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado; recorde que denotamos por d a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. Dado um ponto $x\in X$ e um subconjunto $V\subset X$ escrevemos

$$d(x,V)=\inf_{y\in V}d(x,y);$$

se V é um subespaço de X então obviamente temos as identidades:

$$d(cx,V)=|c|\,d(x,V),\quad d(x+v,V)=d(x,V),\tag{5.2.6}$$

para todo $c\in\mathbb{R}$ e todo $v\in V$. Temos o seguinte:

LEMA 5.2.11 (Riesz). *Se X é um espaço normado e $V \subset X$ é um subespaço que não é denso em X então para todo $\varepsilon > 0$ existe um vetor $x \in X$ com $\|x\| = 1$ e $d(x, V) > 1 - \varepsilon$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como V não é denso em X existe um vetor $u \in X$ tal que $d(u, V) > 0$. Considere uma seqüência $(v_n)_{n\geq 1}$ em V tal que

$$\lim_{n\to+\infty} d(u, v_n) = \lim_{n\to+\infty} \|u - v_n\| = d(u, V);$$

usando (5.2.6) concluímos que:

$$d\left(\frac{u - v_n}{\|u - v_n\|}, V\right) = \frac{d(u, V)}{\|u - v_n\|} \xrightarrow{n\to+\infty} 1.$$

Para n suficientemente grande o vetor $x = \frac{u-v_n}{\|u-v_n\|}$ possui as propriedades desejadas. □

COROLÁRIO 5.2.12. *Seja X um espaço normado; se algum aberto não vazio em X é relativamente compacto então* $\dim(X) < +\infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Se algum aberto não vazio de X é relativamente compacto então X possui uma bola fechada (de raio positivo) compacta; usando uma translação e uma homotetia concluímos que a bola unitária fechada B_1 é compacta. Suponha por absurdo que $\dim(X) = +\infty$; podemos então encontrar uma seqüência crescente $(V_n)_{n\geq 0}$ de subespaços de X de modo que $\dim(V_n) = n$ para todo n. Pelo Lema 5.2.11 podemos para cada $n \geq 1$ encontrar $x_n \in V_n$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $d(x_n, V_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$; daí $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em B_1 que não possui subseqüência convergente, já que $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2}$ sempre que $n \neq m$. Chegamos a uma contradição, o que completa a demonstração. □

COROLÁRIO 5.2.13. *Sejam X, Y espaços de Banach; se existe um operador compacto sobrejetor $K\colon X \to Y$ então* $\dim(Y) < +\infty$. *Em particular, se $K\colon X \to Y$ é um isomorfismo compacto então* $\dim(X) = \dim(Y) < +\infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Como K é sobrejetor, segue do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 5.1.9) que a imagem por K da bola aberta unitária de X é um aberto não vazio relativamente compacto em Y; a conclusão segue do Corolário 5.2.12. □

OBSERVAÇÃO 5.2.14. Se X é um espaço normado e $V \subset X$ é um subespaço de dimensão finita então para todo $x \in X$ a função

$$V \ni y \longmapsto d(x, y) \in \mathbb{R} \tag{5.2.7}$$

assume um mínimo; de fato, se $(y_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em V tal que $\lim_{n\to+\infty} d(x, y_n) = d(x, V)$ então $(y_n)_{n\geq 1}$ é limitada e portanto possui uma subseqüência convergente. O limite de uma tal subseqüência será o ponto de mínimo procurado.

Observamos que em geral não é verdade que a função (5.2.7) assume um mínimo se X é um espaço de Banach e $V \subset X$ é um subespaço fechado;

por outro lado, se X é um espaço de Hilbert então tal mínimo é de fato assumido na projeção ortogonal $\pi_V(x)$ de x sobre V (vide (5.1.13)).

DEFINIÇÃO 5.2.15. Sejam X, Y espaços de Banach; se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é um operador limitado e $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ é um operador compacto então dizemos que o operador $S = T + K$ é uma *perturbação compacta* do operador T.

A demonstração da alternativa de Fredholm depende de mais alguns lemas preparatórios.

LEMA 5.2.16. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador limitado. Temos que o núcleo do operador transposto $T^*\colon Y^* \to X^*$ coincide com o anulador da imagem de T e a imagem de T^* está contida no anulador do núcleo de T, ou seja:*

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^o, \quad \mathrm{Im}(T^*) \subset \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^o; \tag{5.2.8}$$

além do mais, se a imagem de T é fechada então:

$$\mathrm{Im}(T^*) = \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^o.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\alpha \in Y^*$; obviamente $\alpha \in \mathrm{Ker}(T^*)$ se e somente se $\alpha \circ T = 0$, o que equivale a $\alpha \in \big(\mathrm{Im}(T)\big)^o$. Também, se $\beta \in \mathrm{Im}(T^*)$ então $\beta = \alpha \circ T$ para algum $\alpha \in Y^*$ e portanto β anula $\mathrm{Ker}(T)$. Isso completa a demonstração de (5.2.8). Suponha agora que $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço fechado de Y; daí $\mathrm{Im}(T)$ é um espaço de Banach e segue do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 5.1.9) que a aplicação $T\colon X \to \mathrm{Im}(T)$ é aberta e portanto é uma aplicação quociente[10]. Daí, se $\beta \in \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^o$ então β passa ao quociente e define um funcional $\alpha_1 \in \big(\mathrm{Im}(T)\big)^*$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathrm{Im}(T) \arrow[r, "\alpha_1"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

comuta; pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 5.1.3) temos que α_1 se estende a um funcional $\alpha \in Y^*$ e daí $T^*(\alpha) = \beta$. Isso completa a demonstração. $\square$

LEMA 5.2.17. *Se X é um espaço de Banach e $V \subset X$ é um subespaço fechado de co-dimensão finita então todo subespaço $W \subset X$ contendo V é fechado em X e tem co-dimensão finita em X.*

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio que W tem co-dimensão finita em X, donde na verdade devemos apenas mostrar que W é fechado em X; denotando por $\mathfrak{q}\colon X \to X/V$ a aplicação quociente então $\mathfrak{q}(W)$ é obviamente fechado em

[10] Uma aplicação $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entre espaços topológicos é dita *quociente* quando $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}$ é aberto se e somente se $f^{-1}(\mathcal{U})$ é aberto em $\mathcal{X}$; equivalentemente, f é quociente quando $\mathcal{F} \subset \mathcal{Y}$ é fechado se e somente se $f^{-1}(\mathcal{F})$ é fechado em $\mathcal{X}$. Aplicações quocientes possuem a seguinte propriedade de *definição por passagem ao quociente*: se $\mathcal{Z}$ é um espaço topológico e $\varphi\colon Y \to \mathcal{Z}$ é uma aplicação qualquer então φ é contínua se e somente se $\varphi \circ f$ é contínua. Para mais detalhes, vide por exemplo [**35**, Capítulo III, §3, Exemplo 9b].

X/V (já que $\dim(X/V) < +\infty$) e como $V \subset W$ temos $W = \mathfrak{q}^{-1}\big(\mathfrak{q}(W)\big)$, o que completa a demonstração. □

O corolário a seguir não será usado nesta subseção, mas vamos deixá-lo registrado aqui para uso posterior.

COROLÁRIO 5.2.18. *Suponha que $X = V_1 + V_2$ onde X é um espaço de Banach e V_1, V_2 são subespaços fechados de X; se $W \subset V_2$ é um subespaço fechado de co-dimensão finita em V_2 então $V_1 + W$ é fechado em X.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a aplicação quociente $\mathfrak{q}\colon X \to X/V_1$; denote por $\mathfrak{q}_0$ a restrição de $\mathfrak{q}$ a V_2, ou seja:

$$\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}|_{V_2}\colon V_2 \longrightarrow X/V_1.$$

Como $X = V_1 + V_2$ vemos que $\mathfrak{q}_0$ é sobrejetora e segue então do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 5.1.9) que $\mathfrak{q}_0$ é uma aplicação aberta e portanto é também uma aplicação quociente (no sentido topológico). Temos $V_1 + W = \mathfrak{q}^{-1}\big(\mathfrak{q}(W)\big)$ e portanto para mostrar que $V_1 + W$ é fechado em X é suficiente mostrar que $\mathfrak{q}(W)$ é fechado em X/V_1; mas $\mathfrak{q}(W) = \mathfrak{q}_0(W)$ e

$$W \subset \mathfrak{q}_0^{-1}\big(\mathfrak{q}_0(W)\big) \subset V_2$$

donde pelo Lema 5.2.17, $\mathfrak{q}_0^{-1}\big(\mathfrak{q}_0(W)\big)$ é fechado em V_2 e como $\mathfrak{q}_0$ é uma aplicação quociente segue que $\mathfrak{q}_0(W)$ é fechado em X/V_1. Isso completa a demonstração. □

LEMA 5.2.19. *Seja X um espaço de Banach; se um operador $T\colon X \to X$ é uma perturbação compacta do operador identidade de X então o núcleo de T tem dimensão finita e a imagem de T é fechada e possui co-dimensão finita em X.*

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $T = \mathrm{Id} + K$ com $K \in \mathcal{K}(X)$; note primeiramente que o núcleo de T é um subespaço invariante por K e que a restrição de K a $\mathrm{Ker}(T)$ é um isomorfismo (igual a $-\mathrm{Id}$), donde $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) < +\infty$, pelo Corolário 5.2.13. Para mostrar que $\mathrm{Im}(T)$ é fechada em X, considere uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ em X tal que $(T(x_n))_{n\geq 1}$ converge para um vetor $y \in X$. Como $\mathrm{Ker}(T)$ tem dimensão finita, pela Observação 5.2.14, podemos para cada n encontrar $u_n \in \mathrm{Ker}(T)$ tal que

$$d(x_n, u_n) = d\big(x_n, \mathrm{Ker}(T)\big). \tag{5.2.9}$$

Escreva $x_n = u_n + v_n$; mostraremos logo a seguir que $(v_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência limitada. Supondo no momento que esse é o caso, vemos que, como K é compacto, existe uma subseqüência $(v_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(v_n)_{n\geq 1}$ tal que $(K(v_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge; mas

$$T(x_{n_k}) = T(v_{n_k}) = v_{n_k} + K(v_{n_k})$$

e como $(T(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ é convergente concluímos que $(v_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para algum vetor $v \in X$ e daí:

$$\lim_{k\to+\infty} T(x_{n_k}) = y = T(v) \in \mathrm{Im}(T).$$

Para completar a demonstração, devemos mostrar que $(v_n)_{n\geq 1}$ é limitada; supondo por absurdo que isso não ocorre então existe uma subseqüência $(v_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(v_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to+\infty}\|v_{n_k}\| = +\infty$. Como K é compacto, passando a uma subseqüência menor se necessário, podemos supor que

$$\lim_{k\to+\infty} K\cdot\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} = z,$$

para algum $z\in X$; como $(T(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ é uma seqüência convergente concluímos que:

$$\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} + K\cdot\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} = \frac{T(x_{n_k})}{\|v_{n_k}\|} \xrightarrow{k\to+\infty} 0. \tag{5.2.10}$$

Agora, por um lado, (5.2.10) implica que:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} = -z \quad \text{e} \quad T\cdot\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} = T\cdot\frac{x_{n_k}}{\|v_{n_k}\|} \xrightarrow{k\to+\infty} T(-z) = 0$$

e por outro lado, usando (5.2.6) e (5.2.9) obtemos:

$$d\left(\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|}, \mathrm{Ker}(T)\right) = \frac{d\big(x_{n_k}, \mathrm{Ker}(T)\big)}{\|v_{n_k}\|} = 1,$$

o que contradiz

$$d\left(\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|}, \mathrm{Ker}(T)\right) \leq d\left(\frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|}, -z\right) \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

Isso completa a demonstração do fato que $\mathrm{Im}(T)$ é fechada em X; daí o anulador de $\mathrm{Im}(T)$ é isomorfo ao dual do espaço de Banach $X/\mathrm{Im}(T)$ (vide Exemplo 5.1.36). Para concluir que $\mathrm{Im}(T)$ tem co-dimensão finita em X é suficiente então mostrar que o anulador de $\mathrm{Im}(T)$ tem dimensão finita. Para isso, observe que o operador T^* é uma perturbação compacta da identidade de X^* (vide Proposição 5.2.4, Propriedade (5)); a conclusão segue agora do Lema 5.2.16 e do fato que, pela primeira parte da demonstração, $\mathrm{Ker}(T^*)$ tem dimensão finita. □

Estamos em condições agora de demonstrar a alternativa de Fredholm.

PROPOSIÇÃO 5.2.20 (alternativa de Fredholm). *Seja X um espaço de Banach e suponha que um operador $T\colon X\to X$ é uma perturbação compacta do operador identidade de X; daí, se T é injetor então T é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $T = \mathrm{Id} + K$ com $K\in\mathcal{K}(X)$ e suponha por absurdo que T seja injetor mas não sobrejetor; defina indutivamente uma seqüência $(X_n)_{n\geq 0}$ de subespaços de X fazendo $X_0 = X$ e $X_{n+1} = T(X_n)$ para todo n. Como X_1 é um subespaço próprio de $X = X_0$, segue facilmente por indução em n (usando a injetividade de T) que a seqüência de subespaços $(X_n)_{n\geq 0}$ é *estritamente* decrescente; em particular, cada X_n é um subespaço invariante por T. Segue também por indução em n que cada X_n é fechado em X; de fato, se um certo X_n é fechado em X então claramente (vide Proposição 5.2.4, Propriedades (2) e (3)) T se restringe a uma perturbação compacta da identidade de X_n e daí o Lema 5.2.19 implica que $X_{n+1} =$

$T(X_n)$ é fechado em X_n. O Lema 5.2.11 nos fornece então uma seqüência $(x_n)_{n\geq 0}$ de vetores com $\|x_n\| = 1$, $x_n \in X_n$ e $d(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$; para $n < m$ temos:

$$\|K(x_n) - K(x_m)\| = d(T(x_n) - T(x_m) + x_m, x_n) \geq \frac{1}{2},$$

já que $T(x_n) - T(x_m) + x_m \in X_{n+1}$. Mas, como K é compacto, $(K(x_n))_{n\geq 0}$ deve ter uma subseqüência convergente, o que nos dá uma contradição. $\square$

Temos na verdade a seguinte extensão da Proposição 5.2.20:

LEMA 5.2.21. *Seja X um espaço de Banach e suponha que um operador $T\colon X \to X$ é uma perturbação compacta do operador identidade de X; então a dimensão de* $\mathrm{Ker}(T)$ *é igual à co-dimensão de* $\mathrm{Im}(T)$ *em X, ou seja:*

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = \text{co-}\dim_X\big(\mathrm{Im}(T)\big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 5.2.19, o núcleo de T tem dimensão finita e a imagem de T tem co-dimensão finita em X; o Corolário 5.1.6 nos diz então que existe um operador de projeção limitado $\pi\colon X \to \mathrm{Ker}(T)$, i.e., π restringe-se à identidade de $\mathrm{Ker}(T)$. Seja $V \subset X$ um subespaço tal que $X = \mathrm{Im}(T) \oplus V$; note que

$$\dim(V) = \text{co-}\dim_X\big(\mathrm{Im}(T)\big) < +\infty.$$

Suponha por absurdo que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) < \text{co-}\dim_X\big(\mathrm{Im}(T)\big)$; daí existe um operador linear injetor $F\colon \mathrm{Ker}(T) \to V$ que não é sobrejetor. Defina $S = T + F\circ\pi$; observe que S é uma perturbação compacta da identidade, já que $F\circ\pi$ tem posto finito (recorde Exemplo 5.2.6). Se $x \in \mathrm{Ker}(S)$ então

$$S(x) = T(x) + (F\circ\pi)(x) = 0$$

e como $\mathrm{Im}(F\circ\pi)$ está contido num complementar de $\mathrm{Im}(T)$ segue que $T(x) = 0$ e $(F\circ\pi)(x) = 0$; daí $x \in \mathrm{Ker}(T)$, $\pi(x) = x$ e $F(x) = 0$. Como F é injetor, mostramos na verdade que também S é injetor; pela Proposição 5.2.20 temos que S é um isomorfismo e por outro lado $\mathrm{Im}(S) \subset \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Im}(F)$ é um subespaço próprio de $X = \mathrm{Im}(T) \oplus V$, uma contradição. Mostramos então que:

$$\text{co-}\dim_X\big(\mathrm{Im}(T)\big) \leq \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big). \tag{5.2.11}$$

Para mostrar a desigualdade oposta, observe que o operador T^* é uma perturbação compacta da identidade de X^* (vide Proposição 5.2.4, Propriedade (5)) e portanto a desigualdade (5.2.11) também é verdadeira se trocarmos T por T^*, ou seja:

$$\text{co-}\dim_{X^*}\big(\mathrm{Im}(T^*)\big) \leq \dim\big(\mathrm{Ker}(T^*)\big). \tag{5.2.12}$$

Usando o Lema 5.2.16, vamos identificar os inteiros que aparecem na desigualdade (5.2.12); tenha em mente que, pelo Lema 5.2.19, $\mathrm{Im}(T)$ é fechada em X. Sabemos que o núcleo de T^* coincide com o anulador da imagem de T; esse anulador é isomorfo ao dual do espaço de Banach $X/\mathrm{Im}(T)$ (vide Exemplo 5.1.36). Concluímos então que:

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(T^*)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)^o\big) = \text{co-dim}_X\big(\mathrm{Im}(T)\big). \tag{5.2.13}$$

Observe também que, pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 5.1.3), o *operador restrição*

$$X^* \ni \alpha \longmapsto \alpha|_{\mathrm{Ker}(T)} \in \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^*$$

é sobrejetor e portanto induz um isomorfismo:

$$\frac{X^*}{\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^o} \cong \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^*;$$

mas a imagem de T^* coincide com o anulador do núcleo de T e portanto:

$$\text{co-dim}_{X^*}\big(\mathrm{Im}(T^*)\big) = \text{co-dim}_{X^*}\big(\mathrm{Ker}(T)^o\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big). \tag{5.2.14}$$

De (5.2.12), (5.2.13) e (5.2.14) segue que

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) \le \text{co-dim}_X\big(\mathrm{Im}(T)\big),$$

o que completa a demonstração. □

DEFINIÇÃO 5.2.22. Sejam X, Y espaços de Banach e seja $T\colon X \to Y$ um operador limitado. Dizemos que T é um *operador de Fredholm* se o núcleo de T tem dimensão finita e a imagem de T é fechada e tem co-dimensão finita em Y; nesse caso, o *índice de Fredholm* de T é definido por:

$$\mathrm{Ind}(T) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) - \text{co-dim}_Y\big(\mathrm{Im}(T)\big).$$

Obviamente a noção de operador de Fredholm (e o índice de Fredholm) fazem sentido em espaços Banachizáveis.

EXEMPLO 5.2.23. Se $T\colon X \to Y$ é um isomorfismo topológico então obviamente T é um operador de Fredholm de índice zero.

EXEMPLO 5.2.24. O Lema 5.2.19 nos diz que se $T \in \mathcal{L}(X)$ é uma perturbação compacta da identidade então T é um operador de Fredholm; o Lema 5.2.21 nos diz então que $\mathrm{Ind}(T) = 0$.

A seguir mostramos outras caracterizações dos operadores de Fredholm; deve-se ter em mente que todo operador de posto finito é compacto (vide Exemplo 5.2.6).

PROPOSIÇÃO 5.2.25. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$; as seguinte afirmações são equivalentes:*

(1) *T é um operador de Fredholm;*
(2) *existe $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $S \circ T - \mathrm{Id}$ e $T \circ S - \mathrm{Id}$ têm posto finito;*
(3) *existem $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(Y,X)$ tais que $S_1 \circ T$ e $T \circ S_2$ são perturbações compactas da identidade.*

Demonstração. Mostremos que (1)⇒(2); como $\mathrm{Ker}(T)$ tem dimensão finita segue do Corolário 5.1.6 que existe um subespaço fechado $V \subset X$ com $X = \mathrm{Ker}(T) \oplus V$. Como $\mathrm{Im}(T)$ tem co-dimensão finita então qualquer subespaço complementar de $\mathrm{Im}(T)$ em Y é fechado e portanto existe um operador de projeção limitado $\pi\colon Y \to \mathrm{Im}(T)$, i.e., π se restringe à identidade de $\mathrm{Im}(T)$ (recorde Observação 5.1.31). Denote por $\mathfrak{q}\colon X \to X/\mathrm{Ker}(T)$ a aplicação quociente; temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathfrak{q}"'] & Y \\ X/\mathrm{Ker}(T) \arrow[r, "\cong", "\overline{T}"'] & \mathrm{Im}(T) \arrow[u, "\mathfrak{i}"'] \end{tikzcd}$$

onde $\mathfrak{i}$ denota a inclusão de $\mathrm{Im}(T)$ e $\overline{T}$ é um isomorfismo. Defina $S = (\mathfrak{q}|V)^{-1} \circ \overline{T}^{-1} \circ \pi$; é fácil ver que a imagem de $S \circ T - \mathrm{Id}$ está contida em $\mathrm{Ker}(T)$ e a imagem de $T \circ S - \mathrm{Id}$ está contida em $\mathrm{Ker}(\pi)$; mas $\mathrm{Ker}(\pi)$ é um complementar de $\mathrm{Im}(T)$ em Y e portanto tem dimensão finita. Isso completa a demonstração de (1)⇒(2).

A implicação (2)⇒(3) é óbvia. Provemos (3)⇒(1); observe que $\mathrm{Ker}(T)$ está contido em $\mathrm{Ker}(S_1 \circ T)$ e, pelo Lema 5.2.19, $\mathrm{Ker}(S_1 \circ T)$ tem dimensão finita. Além do mais, $\mathrm{Im}(T)$ contém $\mathrm{Im}(T \circ S_2)$; pelo Lema 5.2.19, $\mathrm{Im}(T \circ S_2)$ é fechada e tem co-dimensão finita em Y e portanto, pelo Lema 5.2.17, $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço fechado de co-dimensão finita em Y. □

Observação 5.2.26. Se $T\colon X \to Y$ é um operador de Fredholm então a Proposição 5.2.25 nos fornece $S\colon Y \to X$ tal que $S \circ T - \mathrm{Id}$ e $T \circ S - \mathrm{Id}$ têm posto finito; observe que uma aplicação da mesma Proposição 5.2.25 trocando os papéis de T e S nos mostra que o operador S também é de Fredholm.

O índice de Fredholm é aditivo sob composição:

Proposição 5.2.27. *Se X, Y, Z são espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ são operadores de Fredholm então $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$ é um operador de Fredholm e*

$$\mathrm{Ind}(S \circ T) = \mathrm{Ind}(S) + \mathrm{Ind}(T).$$

Demonstração. Temos $\mathrm{Ker}(S \circ T) = T^{-1}\big(\mathrm{Ker}(S)\big)$; daí T restringe-se a um operador linear sobrejetor de $\mathrm{Ker}(S \circ T)$ em $\mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T)$ cujo núcleo é $\mathrm{Ker}(T)$ e portanto:

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(S \circ T)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Im}(T)\big) < +\infty. \tag{5.2.15}$$

Como $\mathrm{Im}(S)$ é fechada em Z segue do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 5.1.9) que $S\colon Y \to \mathrm{Im}(S)$ é uma aplicação aberta e portanto uma aplicação quociente; daí $\mathrm{Im}(S \circ T) = S\big(\mathrm{Im}(T)\big)$ é fechada em $\mathrm{Im}(S)$ (ou em Z) se e somente se $S^{-1}\big(\mathrm{Im}(S \circ T)\big) = \mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(S)$ é fechado em Y; usando então o Lema 5.2.17, concluímos que $\mathrm{Im}(S \circ T)$ é fechada em Z.

Para completar a demonstração vamos calcular explicitamente a co-dimensão de $\mathrm{Im}(S\circ T)$ em Z; em particular veremos que essa co-dimensão é finita e ficará completa a demonstração do fato que $S\circ T$ é um operador de Fredholm. Escolha então subespaços $V_1, V_2, V_3 \subset Y$ (não necessariamente fechados) tais que:

$$\mathrm{Im}(T) = \big(\mathrm{Ker}(S)\cap \mathrm{Im}(T)\big)\oplus V_1, \quad Y = \big(\mathrm{Ker}(S)+\mathrm{Im}(T)\big)\oplus V_2,$$
$$\mathrm{Ker}(S) = \big(\mathrm{Ker}(S)\cap \mathrm{Im}(T)\big)\oplus V_3;$$

daí $\mathrm{Im}(S\circ T) = S\big(\mathrm{Im}(T)\big) = S(V_1)$, $\mathrm{Im}(S) = S(V_1)\oplus S(V_2)$ e, tendo em mente que $Y = \mathrm{Im}(T)\oplus V_3\oplus V_2$ calculamos:

$$\begin{aligned}\text{co-dim}_{\mathrm{Im}(S)}\big(\mathrm{Im}(S\circ T)\big) &= \dim\big(S(V_2)\big) = \dim(V_2)\\ &= \text{co-dim}_Y\big(\mathrm{Im}(T)\big) - \dim(V_3)\\ &= \text{co-dim}_Y\big(\mathrm{Im}(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(S)\big)\\ &\quad + \dim\big(\mathrm{Ker}(S)\cap\mathrm{Im}(T)\big).\end{aligned}$$

Vemos então que:

(5.2.16)
$$\begin{aligned}\text{co-dim}_Z\big(\mathrm{Im}(S\circ T)\big) &= \text{co-dim}_Z\big(\mathrm{Im}(S)\big) + \text{co-dim}_{\mathrm{Im}(S)}\big(\mathrm{Im}(S\circ T)\big)\\ &= \text{co-dim}_Z\big(\mathrm{Im}(S)\big) + \text{co-dim}_Y\big(\mathrm{Im}(T)\big)\\ &\quad - \dim\big(\mathrm{Ker}(S)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(S)\cap\mathrm{Im}(T)\big) < +\infty;\end{aligned}$$

de (5.2.15) e (5.2.16) a conclusão segue. □

Operadores de Fredholm e o índice de Fredholm são estáveis por perturbações compactas:

Proposição 5.2.28. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T\colon X\to Y$ um operador de Fredholm; se $K\in\mathcal{K}(X,Y)$ é um operador compacto então $T+K$ também é um operador de Fredholm e vale a identidade:*

$$\mathrm{Ind}(T) = \mathrm{Ind}(T+K). \tag{5.2.17}$$

Demonstração. Como T é um operador de Fredholm, segue da Proposição 5.2.25 que existe um operador $S\in\mathcal{L}(Y,X)$ tal que $S\circ T - \mathrm{Id}$ e $T\circ S - \mathrm{Id}$ têm posto finito; em particular $S\circ T$ e $T\circ S$ são perturbações compactas da identidade e portanto também $S\circ(T+K)$ e $(T+K)\circ S$ são perturbações compactas da identidade. A Proposição 5.2.25 implica então que $T+K$ é um operador de Fredholm. Resta mostrar (5.2.17); para isso, observe primeiramente que S também é um operador de Fredholm (vide Observação 5.2.26). Tendo em mente o Exemplo 5.2.24 e a Proposição 5.2.27 calculamos:

$$\mathrm{Ind}(S\circ T) = \mathrm{Ind}(S) + \mathrm{Ind}(T) = 0,$$
$$\mathrm{Ind}\big(S\circ(T+K)\big) = \mathrm{Ind}(S) + \mathrm{Ind}(T+K) = 0,$$

o que completa a demonstração. □

Segue agora diretamente do Exemplo 5.2.23 o seguinte:

COROLÁRIO 5.2.29. *Se X, Y são espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ é uma perturbação compacta de um isomorfismo então T é um operador de Fredholm de índice zero; em particular, T é injetor se e somente se T é sobrejetor.* □

EXEMPLO 5.2.30. Suponha que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma forma bilinear e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é o operador linear que representa B; se $V \subset \mathcal{H}$ é um subespaço fechado então vimos no Exemplo 5.1.20 que o operador linear que representa $B|_{V\times V}$ é $T' = \pi_V \circ T \circ \mathfrak{i}_V$, onde π_V denota o projetor ortogonal sobre V e $\mathfrak{i}_V$ denota a inclusão de V. Suponha que V tem co-dimensão finita em $\mathcal{H}$; daí, se T é um operador de Fredholm então também T' é um operador de Fredholm e $\mathrm{Ind}(T') = \mathrm{Ind}(T)$. De fato, é fácil ver que $\mathfrak{i}_V\colon V \to \mathcal{H}$ e $\pi_V\colon \mathcal{H} \to V$ são operadores de Fredholm e seus índices são dados por:

$$\mathrm{Ind}(\mathfrak{i}_V) = -\text{co-dim}_{\mathcal{H}}(V), \quad \mathrm{Ind}(\pi_V) = \text{co-dim}_{\mathcal{H}}(V);$$

a conclusão segue da Proposição 5.2.27.

OBSERVAÇÃO 5.2.31. Se $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço de Hilbert e se $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é representada por um operador de Fredholm $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ com respeito ao produto $\langle\cdot,\cdot\rangle$ então, escolhido outro produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ em $\mathcal{H}$ equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, temos que o operador que representa B com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ também é de Fredholm e possui o mesmo índice que T. De fato, segue da Proposição 5.1.23 que $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é representado com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ por um isomorfismo positivo $P\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ e, pela Observação 5.1.25, o operador que representa B com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é $P^{-1} \circ T$; a conclusão segue da Proposição 5.2.27, tendo em mente o Exemplo 5.2.23.

OBSERVAÇÃO 5.2.32. Operadores de Fredholm e o índice de Fredholm também são estáveis por "perturbações pequenas" no espaço $\mathcal{L}(X,Y)$; mais explicitamente, se $T\colon X \to Y$ é um operador de Fredholm e $U\colon X \to Y$ tem norma suficientemente pequena então $T + U$ é ainda um operador de Fredholm e $\mathrm{Ind}(T) = \mathrm{Ind}(T + U)$. De fato, pela Proposição 5.2.25 existe um operador $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $S \circ T - \mathrm{Id}$ e $T \circ S - \mathrm{Id}$ têm posto finito; veremos no Lema 5.2.76 que operadores próximos da identidade são isomorfismos e, usando esse resultado, vemos que $S \circ (T + U)$ e $(T + U) \circ S$ são perturbações compactas de isomorfismos para $\|U\|$ suficientemente pequeno. Concluímos então que compondo $S \circ (T + U)$ e $(T + U) \circ S$ com isomorfismos convenientes obtemos perturbações compactas da identidade e daí, usando a Proposição 5.2.25, vê-se facilmente que $T + U$ é um operador de Fredholm; um cálculo similar ao feito na demonstração da Proposição 5.2.28 nos mostra que $\mathrm{Ind}(T + U) = \mathrm{Ind}(T)$.

5.2.2. A topologia fraca de um espaço de Banach. Nesta subseção definiremos a topologia fraca de um espaço de Banach e mostraremos que no contexto de espaços de Hilbert (ou, mais geralmente, de espaços de Banach reflexivos) ela pode ser usada para caracterizar os operadores compactos.

Ao longo desta subseção X denota sempre um espaço de Banach munido de uma norma $\|\cdot\|$. Começamos com uma definição.

Definição 5.2.33. A *topologia fraca* τ_{fr} em X é a topologia menos fina que torna todos os funcionais lineares limitados $\alpha \in X^*$ contínuos. Mais explicitamente, uma base de abertos para τ_{fr} pode ser obtida considerando interseções $\bigcap_{i=1}^n \alpha_i^{-1}(U_i)$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X^*$ é uma coleção finita qualquer de funcionais limitados e $U_1, \ldots, U_n \subset I\!R$ são abertos.

Obviamente a topologia induzida pela norma de X é mais fina que a topologia fraca de X, ou seja, a aplicação identidade

$$\mathrm{Id}\colon (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, \tau_{\text{fr}})$$

é contínua; dado $x \in X$ então um *sistema fundamental de vizinhanças* abertas para x com respeito a τ_{fr} consiste dos conjuntos

$$\mathcal{V}_{\text{fr}}(x, A, \delta) = \big\{ y \in X : \|A(x) - A(y)\| < \delta \big\}, \tag{5.2.18}$$

onde $A \in \mathcal{L}(X, I\!R^n)$ é um operador limitado qualquer (com n arbitrário) e $\delta > 0$.

O próximo lema (cuja demonstração é muito simples) fornece mais uma caracterização da topologia fraca.

Lema 5.2.34. *Dado um espaço topológico qualquer $\mathcal{Y}$ e uma função arbitrária $f\colon \mathcal{Y} \to (X, \tau_{\text{fr}})$ então f é contínua se e somente se $\alpha \circ f\colon \mathcal{Y} \to I\!R$ é contínua para todo $\alpha \in X^*$.* □

Lema 5.2.35. *A topologia fraca é Hausdorff.*

Demonstração. Dados $x, y \in X$ distintos então segue do Teorema de Hahn-Banach (ou mais simplesmente de seu Corolário 5.1.4) que existe $\alpha \in X^*$ com $\alpha(x - y) \neq 0$; daí se I_1, I_2 são intervalos abertos disjuntos em $I\!R$ contendo $\alpha(x)$ e $\alpha(y)$ respectivamente então os conjuntos $\alpha^{-1}(I_1)$ e $\alpha^{-1}(I_2)$ são abertos na topologia fraca que separam x e y. □

Se uma seqüência $(x_n)_{\geq 1}$ em X converge para um certo $x \in X$ na topologia fraca então dizemos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge para x *fracamente*; dizemos também que x é o *limite fraco* da seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$. Como a topologia fraca é Hausdorff, segue que uma seqüência em X possui no máximo um limite fraco. O seguinte lema caracteriza a convergência fraca de seqüências; sua demonstração é muito simples.

Lema 5.2.36. *Uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente para $x \in X$ se e somente se*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha(x_n) = \alpha(x)$$

para todo $\alpha \in X^*$. □

Observação 5.2.37. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em X; denote por $\hat{x}_n \in X^{**}$ o funcional de avaliação em x_n (recorde Observação 5.1.12). O Lema 5.2.36 diz que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente para $x \in X$ se e somente se a seqüência de funções $(\hat{x}_n)_{n\geq 1}$ converge *pontualmente* para $\hat{x} \in X^{**}$.

COROLÁRIO 5.2.38. *Se uma seqüência* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge fracamente para* $x \in X$ *então* $\sup_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty$ *e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Observação 5.2.37, do Corolário 5.1.14 e do fato que a aplicação (5.1.9) é uma imersão isométrica. □

COROLÁRIO 5.2.39. *Sejam* $(x_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência em* X *e* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência em* X^**; se* $x_n \to x$ *fracamente em* X *e* $\alpha_n \to \alpha$ *com respeito à norma de* X^* *então* $\alpha_n(x_n) \to \alpha(x)$ *em* $\mathbb{R}$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Para todo n temos:

$$|\alpha_n(x_n) - \alpha(x)| \leq \|\alpha_n - \alpha\| \, \|x_n\| + |\alpha(x_n) - \alpha(x)|;$$

pelo Corolário 5.2.38 temos que $\|x_n\|$ é limitado e pelo Lema 5.2.36 temos que $\alpha(x_n) \to \alpha(x)$. A conclusão segue. □

EXEMPLO 5.2.40. Para cada $n \geq 1$, denote por $e_n \in \ell_2(\mathbb{N})$ a seqüência cuja n-ésima coordenada é igual a 1 e cujas outras coordenadas são nulas. Pelo Teorema de Representação de Riesz (Teorema 5.1.17) todo $\alpha \in \ell_2(\mathbb{N})^*$ é da forma $\alpha = \langle x, \cdot \rangle_2$ para algum $x \in \ell_2(\mathbb{N})$; daí

$$\alpha(e_n) = \langle x, e_n \rangle_2 = x_n \longrightarrow 0,$$

já que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$. Segue então do Lema 5.2.36 que $(e_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente para zero; note que $\|e_n\|_2 = 1$ para todo $n \geq 1$.

EXEMPLO 5.2.41. Se X, Y são espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ é um operador linear limitado então T é contínuo com respeito às topologias fracas de X e Y; isso segue do Lema 5.2.34 observando que para todo $\alpha \in Y^*$ temos que $\alpha \circ T\colon X \to \mathbb{R}$ é contínuo na topologia fraca de X, já que $\alpha \circ T \in X^*$.

OBSERVAÇÃO 5.2.42. A topologia fraca de um espaço de Banach X em geral *não* satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, i.e., em geral os pontos de X *não* possuem sistemas fundamentais de vizinhanças enumeráveis com respeito à topologia fraca. Daí a topologia fraca *não* pode ser caracterizada por limites de seqüências; por exemplo, se $A \subset X$ é um subconjunto tal que toda seqüência em A, fracamente convergente em X, tem limite fraco em A então *não segue* que A é fechado em (X, τ_{fr}). Também não é verdade em geral que os subconjuntos de X que são compactos na topologia fraca são seqüêncialmente compactos na topologia fraca.

Quando trabalha-se com espaços topológicos que não satisfazem o primeiro axioma da enumerabilidade então o conceito de convergência de *redes* é mais útil que o conceito de convergência de seqüências; optamos por evitar a linguagem de redes neste texto.

Para demonstrar o resultado fundamental da subseção precisaremos de uma versão apropriada do Teorema de Arzelá-Ascoli. Recordamos algumas definições.

DEFINIÇÃO 5.2.43. Seja $\mathcal{Y}$ um espaço topológico e seja (M, d) um espaço métrico; um conjunto $\mathcal{F}$ de funções $f\colon \mathcal{Y} \to M$ é dito *equicontínuo* no ponto $y_0 \in \mathcal{Y}$ se dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de y_0 em $\mathcal{Y}$ tal que $d(f(y), f(y_0)) < \varepsilon$ para todo $y \in \mathcal{U}$ e toda função $f \in \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *equicontínuo* se $\mathcal{F}$ for equicontínuo em todo ponto $y_0 \in \mathcal{Y}$.

Obviamente se um conjunto $\mathcal{F}$ é equicontínuo então toda função $f \in \mathcal{F}$ é contínua. Recorde que um espaço topológico $\mathcal{Y}$ é dito *separável* se $\mathcal{Y}$ admite um subconjunto enumerável denso. Podemos enunciar então o seguinte:

TEOREMA 5.2.44 (de Arzelá-Ascoli). *Seja $\mathcal{Y}$ um espaço topológico separável e seja M um espaço métrico. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de funções $f_n\colon \mathcal{Y} \to M$ tal que o conjunto $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é equicontínuo e tal que para cada $y \in \mathcal{Y}$ o conjunto $\{f_n(y)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacto em M então alguma subseqüência de $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente para uma função $f\colon \mathcal{Y} \to M$; além do mais, a função f é contínua e o limite da subseqüência em questão é uniforme sobre as partes compactas de $\mathcal{Y}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $y \in \mathcal{Y}$ denote por $\mathcal{F}[y] \subset M$ o conjunto relativamente compacto $\{f_n(y)\}_{n\geq 1}$. Escolha um subconjunto enumerável denso $D \subset \mathcal{Y}$; daí $(f_n|_D)_{n\geq 1}$ pode ser identificada com uma seqüência no espaço métrico compacto $\prod_{y\in D} \overline{\mathcal{F}[y]}$ (vide [**34**, §6, Capítulo 5 e §6, Capítulo 8]). Passando a uma subseqüência de $(f_n)_{n\geq 1}$ (que será ainda denotada por $(f_n)_{n\geq 1}$) podemos supor que f_n converge para um elemento $f \in \prod_{y\in D} \overline{\mathcal{F}[y]}$; daí f é uma função $f\colon D \to M$ e $f_n|_D \to f$ pontualmente. Usando agora a equicontinuidade do conjunto $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é fácil completar a demonstração seguindo o seguinte roteiro:

- mostre que para $y \in \mathcal{Y}$ arbitrário, a seqüência $(f_n(y))_{n\geq 1}$ é de Cauchy no espaço métrico compacto $\overline{\mathcal{F}[y]}$; conclua que podemos estender f a $\mathcal{Y}$ de modo que $f_n \to f$ pontualmente em $\mathcal{Y}$;
- mostre que f é contínua e que $f_n \to f$ uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto de Y.

Detalhes sobre as demonstrações dos itens acima podem ser encontrados em [**34**, Proposição 14, §10, Capítulo 8] (embora nessa referência o domínio $\mathcal{Y}$ das funções seja um espaço métrico, esse fato não é usado de forma essencial na demonstração que lá aparece). □

LEMA 5.2.45. *Se X é um espaço de Banach reflexivo então todo subespaço fechado $V \subset X$ também é reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\eta \in V^{**}$; devemos encontrar $x \in V$ tal que $\eta(\beta) = \beta(x)$ para todo $\beta \in V^*$. Denote por $\mathfrak{i}\colon V \to X$ o operador de inclusão; daí o bitransposto $\mathfrak{i}^{**}$ de $\mathfrak{i}$ leva η sobre um elemento $\tilde{\eta} \in X^{**}$. Temos:

$$\tilde{\eta}(\alpha) = \eta(\alpha|_V), \tag{5.2.19}$$

para todo $\alpha \in X^*$. Como X é reflexivo existe $x \in X$ tal que $\tilde{\eta}(\alpha) = \alpha(x)$ para todo $\alpha \in X^*$. Mostremos que $x \in V$; se fosse $x \notin V$ então existiria um funcional $\alpha \in X^*$ tal que $\alpha|_V = 0$ mas $\alpha(x) = 1$ (vide Exemplo 5.1.36), o que contradiz (5.2.19). A conclusão segue agora de (5.2.19) observando que pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 5.1.3) todo funcional $\beta \in V^*$ é da forma $\alpha|_V$ para algum $\alpha \in X^*$. □

A seguinte proposição é uma recíproca parcial para o Corolário 5.2.38 no caso de espaços de Banach reflexivos; recorde que *todo espaço de Hilbert é reflexivo*.

PROPOSIÇÃO 5.2.46. *Se X é um espaço de Banach reflexivo então toda seqüência limitada $(x_n)_{n\geq 1}$ em X admite uma subseqüência fracamente convergente.*

DEMONSTRAÇÃO. Começamos com o caso em que X é separável. Denotando por $\hat{x}_n \in X^{**}$ o funcional de avaliação em x_n então

$$\sup_{n\geq 1} \|\hat{x}_n\| = \sup_{n\geq 1} \|x_n\| = c < +\infty;$$

daí c é uma constante de Lipschitz para todas as funções $\hat{x}_n$ o que mostra que o conjunto $\{\hat{x}_n\}_{n\geq 1}$ é equicontínuo. Além do mais, fixado $\alpha \in X^*$, temos

$$\big|\hat{x}_n(\alpha)\big| = |\alpha(x_n)| \leq c\|\alpha\|,$$

para todo n, o que mostra que o conjunto $\{\hat{x}_n(\alpha)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 5.2.44), existe uma subseqüência $(\hat{x}_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge pontualmente para uma função contínua $f\colon X^* \to \mathbb{R}$; é claro que f é linear. Como X é reflexivo, existe $x \in X$ tal que $f = \hat{x}$ e logo $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge fracamente para x, pela Observação 5.2.37.

Suponha agora que X é um espaço de Banach reflexivo qualquer; seja $V \subset X$ o fecho do subespaço gerado pelo conjunto $\{x_n\}_{n\geq 1}$. É fácil ver que V é separável; de fato, o $\mathbb{Q}$-subespaço vetorial gerado por $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é um subconjunto enumerável denso de V. Pelo Lema 5.2.45 e pela primeira parte da demonstração vemos que alguma subseqüência de $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente em V para um certo $x \in V$; obviamente convergência fraca em V implica convergência fraca em X, e daí a conclusão segue. □

Obtemos agora o teorema principal da subseção.

TEOREMA 5.2.47. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ um operador linear. Se T é compacto então para toda seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ em X que converge fracamente para $x \in X$ temos que $(T(x_n))_{n\geq 1}$ converge para $T(x)$ com respeito à norma de Y. Se X é reflexivo então vale a recíproca: se T leva seqüências fracamente convergentes em seqüências convergentes com respeito à norma então T é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que T é compacto e seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência que converge fracamente para $x \in X$; se $(T(x_n))_{n\geq 1}$ não fosse convergente em norma para $T(x)$ então, passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que

$$\|T(x_n) - T(x)\| \geq \varepsilon, \tag{5.2.20}$$

para todo n e para algum $\varepsilon > 0$. Mas pelo Corolário 5.2.38 a seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ é limitada e como T é compacto vemos que alguma subseqüência de $(T(x_n))_{n\geq 1}$ converge para $T(x)$ em norma (vide também Exemplo 5.2.41), contradizendo (5.2.20).

Suponha agora que X é reflexivo e que T leva seqüências fracamente convergentes em seqüências convergentes em norma. Daí se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência limitada em X então, pela Proposição 5.2.46, alguma subseqüência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge fracamente em X e portanto $(T(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge com respeito à norma de Y; concluímos então que T é compacto, o que completa a demonstração. □

OBSERVAÇÃO 5.2.48. O Teorema 5.2.47 pode levar à conjectura de que um operador compacto $T\colon X \to Y$ seria contínuo quando consideramos em X a topologia fraca τ_{fr} e em Y a topologia induzida pela norma; note que tal conclusão não pode ser tirada do Teorema 5.2.47 (vide Observação 5.2.42). Na verdade, um operador linear

$$T\colon (X, \tau_{\text{fr}}) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|) \tag{5.2.21}$$

é contínuo se e somente se T tiver posto finito. É óbvio que se T tem posto finito então (5.2.21) é contínuo; por outro lado, se (5.2.21) for contínuo na origem então existe $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$ e $\delta > 0$ tal que $\|T(y)\| < 1$ sempre que $y \in \mathcal{V}(0, A, \delta)$ (vide (5.2.18)). Em particular $\|T(y)\| < 1$ para todo $y \in \operatorname{Ker}(A)$ e portanto $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(T)$; como $\operatorname{Ker}(A)$ tem co-dimensão menor ou igual a n em X segue que T tem posto menor ou igual a n.

OBSERVAÇÃO 5.2.49. Se X é um espaço de Banach reflexivo, a Proposição 5.2.46 (tendo em mente também o Corolário 5.2.38) nos diz que a bola unitária fechada B_1 de X é seqüêncialmente compacta com respeito à topologia fraca. Como X é reflexivo, o *Teorema de Banach-Alaoglu* nos diz que a bola unitária fechada B_1 é compacta na topologia fraca de X (vide [**50**, Teorema IV.21]); salientamos que a Proposição 5.2.46 *não segue* do Teorema de Banach-Alaoglu, pois a topologia fraca não satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade (vide também Observação 5.2.42).

5.2.3. O teorema espectral para operadores compactos simétricos. Nesta subseção generalizaremos para operadores compactos simétricos em espaços de Hilbert o resultado que diz que todo operador simétrico num espaço de dimensão finita pode ser diagonalizado numa base ortonormal; essa generalização é conhecida como o Teorema Espectral para Operadores Compactos Simétricos.

Ao longo desta seção $\mathcal{H}$ denota sempre um espaço de Hilbert munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um operador limitado então denotamos por $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ o *conjunto dos autovalores* de T, ou seja:

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \big\{\lambda \in I\!R : T(x) = \lambda x, \text{ para algum } x \neq 0\big\}.$$

OBSERVAÇÃO 5.2.50. Um escalar $\lambda \in I\!R$ é um autovalor de T se e somente se o operador $T - \lambda\mathrm{Id}$ não é injetor; o *espectro* de T, denotado $\sigma(T)$, é usualmente definido como o conjunto dos escalares $\lambda \in I\!R$ tais que o operador $T - \lambda\mathrm{Id}$ não é bijetor. O conjunto $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset \sigma(T)$ dos autovalores de T é às vezes chamado o *espectro pontual* de T. Quando se estuda o teorema espectral para operadores simétricos quaisquer é o espectro que entra como peça fundamental; no caso específico de operadores compactos simétricos, o conjunto de autovalores $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ é suficiente para o desenvolvimento da teoria. Mencionamos que, se $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ é um operador compacto então segue diretamente do Corolário 5.2.29 que:

$$\sigma(K) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(K) \cup \{0\}; \tag{5.2.22}$$

se $\dim(\mathcal{H}) = +\infty$ então vale a igualdade em (5.2.22), pelo Corolário 5.2.13.

LEMA 5.2.51. *Suponha $\mathcal{H} \neq \{0\}$ e seja $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ um operador compacto e simétrico; então a função $x \mapsto \langle K(x), x\rangle$ assume um máximo ou um mínimo na esfera unitária $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\langle K(x), x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ então um argumento padrão de polarização usando a simetria de $\langle K\cdot, \cdot\rangle$ mostra que $K = 0$ e daí a conclusão segue de maneira trivial. Se $K \neq 0$ então, trocando K por $-K$ se necessário, podemos supor que

$$\sup_{\|x\|=1} \langle K(x), x\rangle = c > 0; \tag{5.2.23}$$

note que o supremo em (5.2.23) é de fato finito, já que K é limitado. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{H}$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n e tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle K(x_n), x_n\rangle = c.$$

Como $(x_n)_{n\geq 1}$ é limitada, passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente para $x \in \mathcal{H}$ (vide Proposição 5.2.46); além do mais, segue do Corolário 5.2.38 que $\|x\| \leq 1$. Como K é compacto, segue do Teorema 5.2.47 que $(K(x_n))_{n\geq 1}$ converge para $K(x)$ em norma; pelo Corolário 5.2.39 vemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle K(x_n), x_n\rangle = \langle K(x), x\rangle = c.$$

Como $c \neq 0$ não pode ser $x = 0$; além do mais, se fosse $\|x\| < 1$ então

$$\Big\langle K \cdot \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\Big\rangle = \frac{c}{\|x\|^2} > c,$$

o que contradiria (5.2.23). Obtemos então que $\|x\| = 1$, o que completa a demonstração. $\square$

Nosso objetivo é mostrar que todo operador compacto simétrico (num espaço não nulo) admite pelo menos um autovalor (real). Isso é uma conseqüência simples do Lema 5.2.51 acima e do método dos multiplicadores de Lagrange em espaços de Hilbert; para conveniência do leitor, apresentamos abaixo uma demonstração onde não usamos explicitamente o método dos multiplicadores de Lagrange.

COROLÁRIO 5.2.52. *Se $\mathcal{H} \neq \{0\}$ então todo operador compacto simétrico $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ possui algum autovalor, i.e., $\sigma_{\mathrm{p}}(K) \neq \emptyset$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja x_0 um ponto de máximo ou mínimo da função $x \mapsto \langle K(x), x\rangle$ na esfera unitária. Dado qualquer vetor $v \in \mathcal{H}$ ortogonal a x_0, considere a curva

$$I\!R \ni t \longmapsto \gamma(t) = \frac{x_0 + tv}{\|x_0 + tv\|} \in \mathcal{H};$$

um cálculo direto (usando (5.1.10) e (5.1.47)) mostra que $\gamma'(0) = v$. Note que a função escalar diferenciável

$$I\!R \ni t \longmapsto \big\langle K\big(\gamma(t)\big), \gamma(t)\big\rangle \in I\!R$$

assume um máximo ou um mínimo no instante $t = 0$ e portanto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\langle K\big(\gamma(t)\big), \gamma(t)\big\rangle\Big|_{t=0} = 2\langle K(x_0), v\rangle = 0.$$

Daí $K(x_0)$ é ortogonal a qualquer vetor v que seja ortogonal a x_0, i.e., $K(x_0) \in (I\!R x_0{}^{\perp})^{\perp}$; de (5.1.11) vem $K(x_0) \in I\!R x_0$, o que completa a demonstração. □

OBSERVAÇÃO 5.2.53. De modo idêntico à algebra linear em dimensão finita, mostra-se que se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um operador simétrico e se x, $y \in \mathcal{H}$ são autovetores correspondendo respectivamente à autovalores λ, μ distintos então $\langle x, y\rangle = 0$; de fato:

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

O lema a seguir caracteriza a "aparência" do conjunto $\sigma_{\mathrm{p}}(K)$, com K compacto simétrico.

LEMA 5.2.54. *Se $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ é um operador compacto simétrico então o conjunto $\sigma_{\mathrm{p}}(K)$ é limitado em $I\!R$ e não possui pontos de acumulação em $I\!R \setminus \{0\}$; em particular, $\sigma_{\mathrm{p}}(K)$ é enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Se λ é um autovalor de K então existe $x \in \mathcal{H}$ com $\|x\| = 1$ e $K(x) = \lambda x$; daí:

$$|\langle K(x), x\rangle| = |\lambda| \leq \|K\|$$

e portanto $\sigma_{\mathrm{p}}(K)$ é limitado.

Seja agora $\lambda \in I\!R$ um ponto de acumulação de $\sigma_{\mathrm{p}}(K)$; daí existe uma seqüência $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ em $\sigma_{\mathrm{p}}(K)$ de elementos dois a dois distintos que converge para λ. Seja $x_n \in \mathcal{H}$ um autovetor correspondente ao autovalor λ_n; podemos supor $\|x_n\| = 1$ e pela Observação 5.2.53 temos que a seqüência

$(x_n)_{n\geq 1}$ é ortonormal. Como K é compacto, passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $(K(x_n))_{n\geq 1}$ converge em $\mathcal{H}$. Por outro lado:

$$\|K(x_n) - K(x_m)\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\| = (\lambda_n^2 + \lambda_m^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.2.24}$$

para quaisquer n, m distintos; mas a expressão à direita do último sinal de igual em (5.2.24) converge a $|\lambda|\sqrt{2}$, donde $\lambda = 0$. Isso completa a demonstração. $\square$

Demonstraremos agora o teorema fundamental da subseção; o leitor deve recordar a noção de soma direta interna de uma família arbitrária de espaços de Hilbert (vide Observação 5.1.50).

Teorema 5.2.55 (o teorema espectral para operadores compactos simétricos). *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ um operador compacto simétrico em $\mathcal{H}$; para cada $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H})$ denote por*

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathrm{Ker}(K - \lambda \mathrm{Id})$$

o autoespaço correspondente ao autovalor λ. Então $\mathcal{H}$ se escreve como uma soma direta interna de espaços de Hilbert:

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(K)}} \mathcal{H}_\lambda; \tag{5.2.25}$$

além do mais, se $\lambda \neq 0$ então $\mathcal{H}_\lambda$ tem dimensão finita.

Demonstração. Pela Observação 5.2.53 vemos que os subespaços (obviamente fechados) $\mathcal{H}_\lambda$ são mutuamente ortogonais e portanto resta mostrar que a soma direta algébrica $V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(K)} \mathcal{H}_\lambda$ é densa em $\mathcal{H}$; note que V é um subespaço invariante por K, i.e., $K(V) \subset V$. Daí, como K é simétrico, $V^\perp$ é um subespaço fechado invariante por K e portanto K se restringe a um operador compacto em $V^\perp$ que não possui autovalores; pelo Corolário 5.2.52 concluímos que $V^\perp = \{0\}$ e portanto V é denso em $\mathcal{H}$ (vide (5.1.11)), o que completa a demonstração de (5.2.25). Se $\lambda \neq 0$ então a restrição de K a $\mathcal{H}_\lambda$ é um isomorfismo (igual a $\lambda\mathrm{Id}$) e é também um operador compacto; segue então do Corolário 5.2.13 que $\dim(H_\lambda) < +\infty$. $\square$

Exemplo 5.2.56. Sob as hipóteses e notações do Teorema 5.2.55, escolha uma base de Hilbert para cada espaço $\mathcal{H}_\lambda$; é fácil ver que a reunião de todas essas bases nos fornece uma base de Hilbert $(b_j)_{j\in\mathcal{J}}$ de todo o espaço $\mathcal{H}$. Essa base de Hilbert (vide Observação 5.1.51) por sua vez induz uma isometria

$$\phi\colon \mathcal{H} \longrightarrow \ell_2(\mathcal{J});$$

é fácil ver então que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\phi"', "\cong"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\cong"', "\phi"] \\ \ell_2(\mathcal{J}) \arrow[r, "M_\lambda"'] & \ell_2(\mathcal{J}) \end{tikzcd}$$

onde M_λ é definido como no Exemplo 5.2.8 e $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathcal{J}}$ é uma família de números reais formada pelos autovalores de K repetidos de acordo com a sua multiplicidade. Usando o Lema 5.2.54 vemos também que a família λ satisfaz as condições (a) e (b) que aparecem no Exemplo 5.2.8.

OBSERVAÇÃO 5.2.57. O Teorema 5.2.55 é demonstrado em [**50**, Teorema VI.16] no contexto de espaços de Hilbert complexos; o ponto crucial dessa demonstração (no nosso caso, o Corolário 5.2.52) é a demonstração de que um operador simétrico (ou, mais precisamente, Hermiteano) cujo espectro é $\{0\}$ necessariamente deve ser o operador nulo. A demonstração desse fato é baseada por sua vez numa fórmula para o *raio espectral* de um operador limitado cuja demonstração envolve técnicas de curvas holomorfas em espaços de Banach; portanto é feito uso da estrutura complexa do espaço de maneira essencial.

Na verdade, a versão real do teorema espectral para operadores compactos simétricos provada no nosso texto pode ser obtida como corolário da versão complexa provada em [**50**]: para isso considera-se a *complexificação* $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ em questão (juntamente com a única extensão Hermiteana do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$) e aplica-se as técnicas desenvolvidas na Seção 1.3. Uma outra demonstração do Teorema 5.2.55 feita diretamente para espaços de Hilbert reais pode ser encontrada em [**9**, Teorema VI.11].

5.2.4. Índice de formas bilineares simétricas em espaços normados. Na Seção 4.1 definimos o índice de uma forma bilinear simétrica num espaço vetorial real arbitrário e provamos alguns resultados elementares; para os resultados mais interessantes (como os da Subseção 4.1.1) precisávamos da finitude da dimensão. Nesta subseção mostraremos que vários resultados da Subseção 4.1.1 são válidos no contexto de espaços normados de dimensão infinita (tipicamente espaços de Hilbert), desde que sejam adicionadas hipóteses adequadas sobre a forma bilinear simétrica (tipicamente, a condição que ela seja representada por uma perturbação compacta de um isomorfismo positivo). Começamos com um exemplo.

EXEMPLO 5.2.58. Seja $\mathcal{J}$ um conjunto arbitrário e considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \ell_2(\mathcal{J})$ munido do produto interno padrão $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$; seja $\lambda = (\lambda_j)_{j\in\mathcal{J}}$ uma família limitada de números reais e defina

$$M_\lambda\colon \ell_2(\mathcal{J}) \longrightarrow \ell_2(\mathcal{J})$$

como no Exemplo 5.2.8. Obtemos então uma forma bilinear simétrica $B_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ fazendo $B_\lambda = \langle M_\lambda\cdot,\cdot\rangle_2$; daí M_λ é o operador linear que representa B_λ. Explicitamente temos:

$$B_\lambda(x,y) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j x_j y_j, \tag{5.2.26}$$

para todos $x = (x_j)_{j\in\mathcal{J}}$, $y = (y_j)_{j\in\mathcal{J}}$ em $\ell_2(\mathcal{J})$. Definimos então:

$$\mathcal{J}_+ = \big\{j \in \mathcal{J} : \lambda_j > 0\big\}, \quad \mathcal{J}_- = \big\{j \in \mathcal{J} : \lambda_j < 0\big\}, \tag{5.2.27}$$

$$\mathcal{J}_0 = \big\{j \in \mathcal{J} : \lambda_j = 0\big\}; \tag{5.2.28}$$

é fácil ver que obtemos uma decomposição ortogonal (com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ e a B_λ):

$$\mathcal{H} = \ell_2(\mathcal{J}_+) \oplus \ell_2(\mathcal{J}_-) \oplus \ell_2(\mathcal{J}_0)$$

onde B_λ é definida positiva (respectivamente negativa) em $\ell_2(\mathcal{J}_+)$ (respectivamente, $\ell_2(\mathcal{J}_-)$) e $\mathrm{Ker}(B_\lambda) = \ell_2(\mathcal{J}_0)$. Segue então do Corolário 4.1.7 que os números $n_+(B_\lambda)$, $n_-(B_\lambda)$ e $\mathrm{dgn}(B_\lambda)$ coincidem respectivamente com os números de elementos dos conjuntos $\mathcal{J}_+$, $\mathcal{J}_-$ e $\mathcal{J}_0$.

Passamos agora às generalizações dos resultados da Subseção 4.1.1; por exemplo, o Lema 4.1.29 generaliza-se diretamente para o contexto de espaços normados quaisquer.

LEMA 5.2.59. *Seja X um espaço normado; fixado um inteiro (finito) $k \geq 0$ então o conjunto das formas bilineares simétricas $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(X)$ tais que $n_-(B) \geq k$ é aberto em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(X)$.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração do Lema 4.1.29 pode ser repetida aqui literalmente. □

EXEMPLO 5.2.60. O Lema 5.2.59 *não vale* para $k = +\infty$; por exemplo, seja $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ e considere a família $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ onde $\lambda_n = -\frac{1}{n}$. Defina $B_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ como no Exemplo 5.2.58 e considere o truncamento $\lambda^{(n)}$ de λ definido em (5.2.4); daí:

$$\lim_{n\to+\infty} B_{\lambda^{(n)}} = B_\lambda$$

em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$. Note que B_λ tem índice infinito enquanto $B_{\lambda^{(n)}}$ tem índice $n < +\infty$ para todo n.

Também o Corolário 4.1.30 é falso em dimensão infinita, mesmo para k finito; de fato, seja $\mu = (\mu_n)_{n\geq 1}$ a seqüência definida por $\mu_n = \frac{1}{n}$ e para cada $i \geq 1$ defina $\mu^i = (\mu^i_n)_{n\geq 1}$ fazendo $\mu^i_n = \frac{1}{n}$ para $n \neq i$ e $\mu^i_i = -\frac{1}{i}$. Daí

$$\lim_{i\to+\infty} B_{\mu^i} = B_\mu,$$

mas B_μ é não-degenerada com índice zero, enquanto que $n_-(B_{\mu^i}) = 1$ para todo i.

Definimos agora a condição que torna possível generalizar os resultados da Subseção 4.1.1.

DEFINIÇÃO 5.2.61. Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert; dizemos que uma forma bilinear simétrica $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ é *RPCIP* quando B for Representada por uma Perturbação Compacta de um Isomorfismo Positivo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (vide Definições 5.1.18, 5.1.22 e 5.2.15); equivalentemente, B é RPCIP quando existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ em $\mathcal{H}$ equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que $B = \langle\cdot,\cdot\rangle_1 + \langle K\cdot,\cdot\rangle$, onde $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ é um operador compacto simétrico (vide Proposição 5.1.23).

OBSERVAÇÃO 5.2.62. Se $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert, $\phi\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é um isomorfismo topológico e $B \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(\mathcal{H}_2)$ é RPCIP então o pull-back $\phi^*(B) = B(\phi\cdot, \phi\cdot) \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(\mathcal{H}_1)$ também é RPCIP. De fato, se B é representada por $T = P + K$ com $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ um isomorfismo positivo e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ um operador compacto então:

$$\phi^*(B)(x, y) = B\big(\phi(x), \phi(y)\big) = \langle (T \circ \phi)(x), \phi(y)\rangle = \langle (\phi^* \circ T \circ \phi)(x), y\rangle,$$

donde o pull-back $\phi^*(B)$ é representado pelo operador

$$\phi^* \circ T \circ \phi = \phi^* \circ P \circ \phi + \phi^* \circ K \circ \phi$$

onde $\phi^* \circ P \circ \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ é um isomorfismo positivo e $\phi^* \circ K \circ \phi \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$ é compacto.

OBSERVAÇÃO 5.2.63. Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e seja $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ um produto interno em $\mathcal{H}$ equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$; aplicando a Observação 5.2.62 com

$$\phi = \mathrm{Id}\colon (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$$

concluímos que $B \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(\mathcal{H})$ é RPCIP com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se e somente se B é RPCIP com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Daí a condição "$B$ é RPCIP" pode na verdade ser definida para formas bilineares simétricas em espaços Hilbertizáveis.

EXEMPLO 5.2.64. Como já foi mencionado na Definição 5.2.61, segue da Proposição 5.1.23 que uma forma bilinear simétrica B num espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é RPCIP se e somente se existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ em $\mathcal{H}$ equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que a diferença $B - \langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é representada por um operador compacto (que será automaticamente simétrico). A seguir explicamos um critério prático para reconhecer formas bilineares em subespaços fechados de $H^1([a,b], I\!R^n)$ que são representadas por operadores compactos.

Seja $\mathcal{H}$ um subespaço fechado de $H^1([a,b], I\!R^n)$ e seja $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma forma bilinear (não necessariamente simétrica); denote por $\mathcal{H}_0$ o espaço que se obtém quando considera-se a topologia induzida por $C^0([a,b], I\!R^n)$ em $\mathcal{H}$. Suponha que a forma bilinear

$$B\colon \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H} \longrightarrow I\!R \tag{5.2.29}$$

é contínua; afirmamos então que B é representada por um operador compacto em $\mathcal{H}$. De fato, se $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ denota o operador que representa B então a continuidade de (5.2.29) implica na continuidade do operador $K\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ e portanto, pelo Exemplo 5.2.10, K é compacto. Suponha agora que a forma bilinear

$$B\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H}_0 \longrightarrow I\!R$$

é contínua; podemos novamente concluir que B é representada em $\mathcal{H}$ por um operador compacto. De fato, pelo que mostramos acima a forma bilinear $(x, y) \mapsto B(y, x)$ é representada por um operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ e daí B é representada pelo operador compacto $K^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (vide Proposição 5.2.4, Propriedade (5)).

OBSERVAÇÃO 5.2.65. Se $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço de Hilbert e $B \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(\mathcal{H})$ é RPCIP então a restrição de B a qualquer subespaço fechado $V \subset \mathcal{H}$ também é RPCIP. De fato, escreva $B = \langle\cdot,\cdot\rangle_1 + \langle K\cdot,\cdot\rangle$ com $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ um produto interno em $\mathcal{H}$ equivalente a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ um operador compacto; daí $B|_{V\times V}$ é igual à soma da restrição de $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ a V (que é um produto interno equivalente à restrição de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a V) com uma forma bilinear que é representada pelo operador compacto $\pi_V \circ K|_V \in \mathcal{K}(V)$, onde $\pi_V : \mathcal{H} \to V$ denota o projetor ortogonal sobre V (vide Exemplo 5.1.20).

OBSERVAÇÃO 5.2.66. Se $(\mathcal{H}, \tau)$ é um espaço Hilbertizável e $B \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(\mathcal{H})$ é RPCIP (vide Observação 5.2.63) então existe um produto interno em $\mathcal{H}$ que induz a topologia τ e que faz com que B seja representada por uma *perturbação compacta do operador identidade* de $\mathcal{H}$. De fato, se B é representada no espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pelo operador $P + K$ com $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ um isomorfismo positivo e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ compacto então, com respeito ao produto interno $\langle P\cdot,\cdot\rangle$, a forma bilinear B será representada pelo operador $\mathrm{Id} + P^{-1} \circ K$ (vide Proposição 5.1.23 e Observação 5.1.25).

O próximo lema é a ferramenta básica que permite usar a condição "B é RPCIP" para generalizar os resultados da Subseção 4.1.1.

LEMA 5.2.67. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $B \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(\mathcal{H})$ uma forma bilinear simétrica que é RPCIP. Então existe uma decomposição de $\mathcal{H}$ em soma direta de subespaços fechados ortogonais com respeito a B:*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_0, \tag{5.2.30}$$

sendo B definida positiva em $\mathcal{H}_+$, definida negativa em $\mathcal{H}_-$ e $\mathcal{H}_0 = \mathrm{Ker}(B)$. Além do mais, temos:

- *existe $c > 0$ tal que*

$$B(x,x) \ge c\|x\|^2 \tag{5.2.31}$$

  para todo $x \in \mathcal{H}_+$;
- *a degenerescência de B (que é por definição a dimensão de $\mathcal{H}_0$) é finita;*
- *o índice de B (que coincide com a dimensão de $\mathcal{H}_-$) é finito.*

DEMONSTRAÇÃO. Com uma escolha conveniente de produto interno em $\mathcal{H}$, podemos supor que B é representada por uma perturbação compacta do operador identidade (vide Observação 5.2.66); escreva então $B = \langle T\cdot,\cdot\rangle$ com $T = \mathrm{Id} + K$ e $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ um operador compacto simétrico. Seja $\mu = (\mu_j)_{j\in\mathcal{J}}$ uma família formada pelos autovalores de K repetidos de acordo com a sua multiplicidade e defina $\lambda_j = \mu_j + 1$ para todo $j \in \mathcal{J}$; daí, como no Exemplo 5.2.56, podemos encontrar uma isometria $\phi \colon \mathcal{H} \to \ell_2(\mathcal{J})$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi"', "\cong"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\cong"', "\phi"] \\ \ell_2(\mathcal{J}) \arrow[r, "M_\lambda"'] & \ell_2(\mathcal{J}) \end{tikzcd}$$

comuta, onde M_λ é definido como no Exemplo 5.2.8. Note que B é o pull-back da forma bilinear B_λ dada em (5.2.26) pela isometria ϕ, i.e., $B = B_\lambda(\phi\cdot, \phi\cdot)$. Pelo Lema 5.2.54, o conjunto $\{\lambda_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ é limitado em $I\!R$ e não possui pontos de acumulação em $I\!R \setminus \{1\}$; o Teorema 5.2.55 nos diz também que para $t \neq 1$ temos $\lambda_j = t$ apenas para um número finito de índices $j \in \mathcal{J}$. A conclusão segue agora facilmente tendo em mente o Exemplo 5.2.58 e definindo

$$\mathcal{H}_+ = \phi^{-1}\big(\ell_2(\mathcal{J}_+)\big), \qquad \mathcal{H}_- = \phi^{-1}\big(\ell_2(\mathcal{J}_-)\big),$$
$$\mathcal{H}_0 = \phi^{-1}\big(\ell_2(\mathcal{J}_0)\big), \qquad c = \inf_{j\in\mathcal{J}_+} \lambda_j > 0,$$

onde $\mathcal{J}_+$, $\mathcal{J}_-$ e $\mathcal{J}_0$ são dados em (5.2.27) e (5.2.28). □

OBSERVAÇÃO 5.2.68. A decomposição (5.2.30) não é em geral ortogonal com respeito ao produto interno do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, mas ela é ortogonal com respeito a algum produto interno que induz a topologia de $\mathcal{H}$; de fato, uma revisão da demonstração do Lema 5.2.67 mostra que a decomposição (5.2.30) é ortogonal com respeito ao produto interno que torna B representada por uma perturbação compacta do operador identidade de $\mathcal{H}$.

Podemos agora enunciar a generalização correta do Corolário 4.1.30.

COROLÁRIO 5.2.69. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ uma forma bilinear simétrica que é RPCIP; suponha também que B é não-degenerada. Então para $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ suficientemente próxima de B temos que A é ainda não-degenerada e $n_-(A) = n_-(B) < +\infty$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere uma decomposição como (5.2.30) e uma constante $c > 0$ como em (5.2.31); como B é não-degenerada temos $\mathcal{H}_0 = \{0\}$. Note que o espaço $\mathcal{H}_-$ tem dimensão finita e portanto, diminuindo $c > 0$ se necessário, podemos supor que

$$B(x, x) \leq -c\|x\|^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}_-$, já que a esfera unitária de $\mathcal{H}_-$ é compacta. É fácil ver então que se $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ é tal que $\|B - A\| \leq \frac{c}{2}$ então A é definida positiva em $\mathcal{H}_+$ e definida negativa em $\mathcal{H}_-$; a conclusão segue agora do Corolário 4.1.7 e da Proposição 4.1.9. □

Podemos também generalizar o Corolário 4.1.31.

COROLÁRIO 5.2.70. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $t \mapsto B(t)$ uma curva contínua em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ definida em algum intervalo I; se para todo*

$t \in I$ temos que $B(t)$ é não-degenerada e RPCIP então $n_-(B(t)) < +\infty$ é constante para $t \in I$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 5.2.69 o conjunto dos instantes $t \in I$ tais que $n_-(B(t)) = k$ é aberto em I para todo $k \geq 0$ fixado; a conclusão segue da conexidade do intervalo I. □

Fazemos uma pequena digressão para demonstrar a seguinte proposição que não possui uma versão (não trivial) em dimensão finita.

PROPOSIÇÃO 5.2.71. *Sejam X um espaço normado e $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(X)$ uma forma bilinear simétrica limitada; se $V \subset X$ é um subespaço denso então o índice de B em V coincide com o índice de B em X.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que para todo inteiro (finito) k com $0 \leq k \leq n_-(B)$ existe um subespaço k-dimensional B-negativo de V. Pela definição de índice, existe um subespaço k-dimensional B-negativo de X; denote por $(b_i)_{i=1}^k$ uma base de tal subespaço. Seja $T\colon \mathbb{R}^k \to X$ o operador linear tal que $T(e_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, k$, onde $(e_i)_{i=1}^k$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^k$. Como V é denso em X, existe para cada i uma seqüência $(b_i^n)_{n\geq 1}$ em V que converge para b_i; para cada $n \geq 1$ denote por $T_n\colon \mathbb{R}^k \to X$ o operador linear tal que $T_n(e_i) = b_i^n$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Obviamente a imagem de T_n está contida em V para todo n. Como B é definida negativa em $\mathrm{Im}(T)$ e T é um isomorfismo sobre $\mathrm{Im}(T)$, segue que o pull-back $T^*(B) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^k)$ é definido negativo; é claro que $\lim_{n\to+\infty} T_n^*(B) = T^*(B)$ e portanto $T_n^*(B)$ é definida negativa para n suficientemente grande (vide Lema 4.1.29). Daí, para esses valores de n, temos que T_n é injetora e B é definida negativa em $\mathrm{Im}(T_n)$; logo $\mathrm{Im}(T_n)$ é um subespaço k-dimensional B-negativo de V. □

Generalizamos agora o Teorema 4.1.32.

TEOREMA 5.2.72. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $B\colon\ [t_0, t_1[\ \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ uma curva de classe C^1 tal que $B(t_0)$ é RPCIP; escreva $N = \mathrm{Ker}\big(B(t_0)\big)$. Suponha que a forma bilinear $B'(t_0)|_{N\times N}$ é não-degenerada; então existe $\varepsilon > 0$ tal que para $t \in\ ]t_0, t_0 + \varepsilon[$ a forma bilinear $B(t)$ é não-degenerada e vale a identidade:*

$$n_-(B(t)) = n_-(B(t_0)) + n_-\big(B'(t_0)|_{N\times N}\big), \tag{5.2.32}$$

onde todos os termos em (5.2.32) *são finitos.*

DEMONSTRAÇÃO. Levando em conta o Lema 5.2.67 (e também[11] a Observação 5.2.65), a demonstração é uma adaptação evidente da demonstração do Teorema 4.1.32. Deve-se adaptar também o Lema 4.1.33; no seu enunciado deve-se acrescentar a hipótese que $B(t_0)$ é RPCIP e na sua demonstração a estimativa (4.1.16) segue agora de (5.2.31). □

---

[11]Na verdade, usamos também o fato que a soma de $\mathcal{H}_+$ com um subespaço de $N = \mathcal{H}_0$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$; isso segue por exemplo das Observações 5.2.68 e 5.1.34.

COROLÁRIO 5.2.73. *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert; suponha que* $t \mapsto B(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ *é uma curva de classe* C^1 *definida numa vizinhança do instante* $t_0 \in I\!R$ *tal que* $B(t_0)$ *é RPCIP. Se a restrição* $B'(t_0)|_{N\times N}$ *é não-degenerada, onde* $N = \mathrm{Ker}\big(B(t_0)\big)$*, então para* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno temos:*

$$n_-(B(t_0+\varepsilon)) - n_-(B(t_0-\varepsilon)) = -\mathrm{sgn}\big(B'(t_0)|_{N\times N}\big), \tag{5.2.33}$$

onde todos os termos em (5.2.33) *são finitos.*

DEMONSTRAÇÃO. É uma adaptação evidente da demonstração do Corolário 4.1.34. □

Precisaremos de uma versão do Teorema 5.2.72 para formas bilineares com *domínio variável*; temos a seguinte:

DEFINIÇÃO 5.2.74. Seja X um espaço de Banach e seja $I \subset I\!R$ um intervalo; suponha que para cada $t \in I$ seja dado um subespaço fechado $V_t \subset X$. Dizemos então que $(V_t)_{t\in I}$ é uma *família* C^k *de subespaços* de X ($0 \le k \le +\infty$) se para todo $t_0 \in I$ existe um subespaço fechado $W \subset X$ e uma curva $t \mapsto \phi(t) \in \mathcal{L}(X)$ de classe C^k numa vizinhança de t_0 em I tal que $\phi(t)$ é um isomorfismo e $\phi(t)(V_t) = W$ para todo t.

EXEMPLO 5.2.75. Se X tem dimensão finita então segue da Proposição 2.4.6 que $(V_t)_{t\in I}$ é uma família C^k de subespaços de X se e somente se $\dim(V_t) = d$ não depende de $t \in I$ e $t \mapsto V_t$ é uma curva de classe C^k no Grassmanniano $G_d(X)$ de subespaços d-dimensionais de X.

Precisaremos do seguinte lema.

LEMA 5.2.76. *Seja* X *um espaço de Banach; denote por* $\mathrm{GL}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ *o conjunto dos isomorfismos limitados de* X *e por*

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{GL}(X) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

o operador de inversão *dado por* $\mathrm{inv}(T) = T^{-1}$ *para todo* $T \in \mathrm{GL}(X)$. *Temos que* $\mathrm{GL}(X)$ *é aberto em* $\mathcal{L}(X)$ *e* inv *é uma aplicação de classe* C^∞*; sua diferencial num ponto* $T \in \mathrm{GL}(X)$ *é dada por:*

$$\mathrm{d}(\mathrm{inv})(T)\cdot H = -T^{-1}\circ H \circ T^{-1}, \tag{5.2.34}$$

para todo $H \in \mathcal{L}(X)$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $S \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\|S\| < 1$ então

$$\left(\sum_{n=0}^{k} S^n\right)(\mathrm{Id} - S) = (\mathrm{Id} - S)\left(\sum_{n=0}^{k} S^n\right) = \mathrm{Id} - S^{k+1}, \tag{5.2.35}$$

onde $S^0 = \mathrm{Id}$; como $\|S\| < 1$ a série $\sum_{n=0}^{+\infty} S^n$ é normalmente convergente no espaço de Banach $\mathcal{L}(X)$ e portanto é convergente. Fazendo $k \to +\infty$ em (5.2.35) concluímos que $\mathrm{Id} - S$ é inversível e seu inverso é dado por:

$$(\mathrm{Id} - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} S^n. \tag{5.2.36}$$

Fixe $T \in \mathrm{GL}(X)$. Se $H \in \mathcal{L}(X)$ é suficientemente próximo da origem de modo que $\|T^{-1} \circ H\| \le \|T^{-1}\| \, \|H\| < 1$ então pelo que mostramos acima vemos que $\mathrm{Id} + T^{-1} \circ H$ é inversível e portanto

$$T \circ (\mathrm{Id} + T^{-1} \circ H) = T + H \tag{5.2.37}$$

também é inversível; além do mais (5.2.36) e (5.2.37) implicam que:

$$(T + H)^{-1} = T^{-1} - T^{-1} \circ H \circ T^{-1} + r(H),$$

onde r é dado por:

$$r(H) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \big(T^{-1} \circ H\big)^n \circ T^{-1}.$$

Concluímos então que

$$\|r(H)\| \le \|T^{-1}\| \sum_{n=2}^{+\infty} \|T^{-1}\|^n \|H\|^n = \frac{\|T^{-1}\|^3 \|H\|^2}{1 - \|T^{-1}\| \, \|H\|},$$

donde $\lim_{H \to 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0$. Mostramos portanto que $\mathrm{GL}(X)$ é aberto em $\mathcal{L}(X)$ e que inv é diferenciável, sendo sua diferencial dada por (5.2.34). Resta mostrar que inv é de classe C^∞; para isso considere o operador bilinear limitado

$$\sigma \colon \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(X)\big)$$

definido por $\sigma(S_1, S_2) \cdot H = S_1 \circ H \circ S_2$. Daí

$$\mathrm{d}(\mathrm{inv}) = -\sigma \circ (\mathrm{inv}, \mathrm{inv}),$$

donde concluímos por indução em k que inv é de classe C^k para todo k. $\square$

Observação 5.2.77. Segue facilmente do Lema 5.2.76 que se X, Y são espaços de Banach então o subconjunto $\mathrm{Iso}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ formado pelos isomorfismos topológicos $T \colon X \to Y$ é aberto (possivelmente vazio) e a aplicação $T \mapsto \mathrm{inv}(T) = T^{-1}$ é de classe C^∞; de fato, se existe algum $T_0 \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ (caso contrário não há nada a mostrar) então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Iso}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{inv}"] & \mathrm{Iso}(Y,X) \\
\mathrm{GL}(X) \arrow[r, "\mathrm{inv}"'] \arrow[u, "\mathcal{L}(\mathrm{Id},T_0)", "\cong"'] & \mathrm{GL}(X) \arrow[u, "\cong", "\mathcal{L}\left(T_0^{-1},\mathrm{Id}\right)"']
\end{tikzcd}$$

onde $\mathcal{L}(\mathrm{Id}, T_0)$ e $\mathcal{L}\big(T_0^{-1}, \mathrm{Id}\big)$ denotam respectivamente os isomorfismos topológicos $S \mapsto T_0 \circ S$ e $S \mapsto S \circ T_0^{-1}$. A conclusão segue.

O seguinte lema fornece um método para construir famílias C^k de subespaços.

LEMA 5.2.78. *Sejam X, Y espaços de Banach e $F\colon I \to \mathcal{L}(X,Y)$ uma aplicação de classe C^k ($0 \le k \le +\infty$) definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $F(t)$ é sobrejetor para todo $t \in I$; suponha também que o núcleo de $F(t)$ é co-fechado em X para todo $t \in I$ (o que ocorre automaticamente se X é um espaço de Hilbert). Então $\big(\mathrm{Ker}(F(t))\big)_{t\in I}$ é uma família C^k de subespaços de X.*

DEMONSTRAÇÃO. Fixe $t_0 \in I$ e seja $Z \subset X$ um complementar fechado de $\mathrm{Ker}\big(F(t_0)\big)$; daí $F(t_0)$ leva Z isomorficamente sobre Y e pela Observação 5.2.77 temos que $F(t)$ também leva Z isomorficamente sobre Y para $t \in I$ suficientemente próximo de t_0. Defina

$$\pi(t) = \mathrm{Id} - \mathfrak{i} \circ \big(F(t)|_Z\big)^{-1} \circ F(t) \in \mathcal{L}(X),$$

para $t \in I$ numa vizinhança de t_0, onde $\mathfrak{i}$ denota a inclusão de Z em X. Observe que $\pi(t)$ é simplesmente o operador de projeção sobre $\mathrm{Ker}\big(F(t)\big)$ com respeito à decomposição em soma direta

$$X = \mathrm{Ker}\big(F(t)\big) \oplus Z;$$

segue também da Observação 5.2.77 que π é de classe C^k. Como $\mathrm{Ker}\big(F(t)\big)$ e $\mathrm{Ker}\big(F(t_0)\big)$ são ambos complementares de Z é fácil ver que $\pi(t)$ restringe-se a um isomorfismo de $\mathrm{Ker}\big(F(t_0)\big)$ sobre $\mathrm{Ker}\big(F(t)\big)$. Defina $\psi(t) \in \mathcal{L}(X)$ de modo que

$$\psi(t)|_{\mathrm{Ker}(F(t_0))} = \pi(t)|_{\mathrm{Ker}(F(t_0))}, \quad \psi(t)|_Z = \mathfrak{i};$$

daí $t \mapsto \psi(t) \in \mathcal{L}(X) \cong \mathcal{L}\big(\mathrm{Ker}(F(t_0)), X\big) \oplus \mathcal{L}(Z,X)$ é de classe C^k e a conclusão segue agora do Lema 5.2.76 definindo $\phi(t) = \psi(t)^{-1}$. □

Nosso objetivo é mostrar uma versão do Teorema 5.2.72 que nos permita estudar a variação do índice de uma família a um parâmetro $t \mapsto B(t)|_{V_t\times V_t}$ de formas bilineares simétricas cujos domínios formam uma família C^1 de subespaços $t \mapsto V_t$; precisaremos então de uma noção de derivada para a aplicação $t \mapsto V_t$. A idéia é exatamente a mesma que aparece na Seção 2.3 quando identificamos o espaço tangente ao Grassmanniano de subespaços de $\mathbb{R}^n$; para simplificar a exposição, porém, decidimos evitar uma construção formal de estrutura de variedade para Grassmannianos de subespaços de um espaço de Banach.

Começamos com as seguintes considerações. Seja $(V_t)_{t\in I}$ uma família C^k de subespaços de um espaço de Banach X, onde I é um intervalo; então:

- *dados $t_0 \in I$ e $v_0 \in V_{t_0}$ existe uma curva $t \mapsto v(t) \in X$ de classe C^k numa vizinhança de t_0 em I tal que $v(t_0) = v_0$ e $v(t) \in V_t$ para todo t;*

  de fato, basta escolher uma curva $t \mapsto \phi(t)$ de classe C^k como na Definição 5.2.74 e daí

$$v(t) = \big(\phi(t)^{-1} \circ \phi(t_0)\big)(v_0) \tag{5.2.38}$$

  fornece a curva $t \mapsto v(t)$ desejada.

- *Para $k \geq 1$, se $t \mapsto v_1(t)$ e $t \mapsto v_2(t)$ são curvas de classe C^1 com $v_1(t), v_2(t) \in V_t$ para todo t e $v_1(t_0) = v_2(t_0)$ então $v_1'(t_0) - v_2'(t_0) \in V_{t_0}$;*

  novamente escolhendo ϕ e W como na Definição 5.2.74, observe que $\phi(t) \cdot v_1(t)$ e $\phi(t) \cdot v_2(t)$ pertencem a W para todo t e portanto:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) \cdot \big(v_1(t) - v_2(t)\big)\Big|_{t=t_0} = \phi(t_0) \cdot \big(v_1'(t_0) - v_2'(t_0)\big) \in W.$$

As considerações acima nos permitem formular a seguinte:

Definição 5.2.79. Seja $(V_t)_{t\in I}$ uma família C^1 de subespaços de um espaço de Banach X, onde $I \subset I\!R$ é um intervalo; para $t_0 \in I$ definimos a *derivada* da família $(V_t)_{t\in I}$ no instante $t = t_0$ como sendo o operador linear

$$V_{t_0}' \colon V_{t_0} \longrightarrow X/V_{t_0} \tag{5.2.39}$$

que associa a cada vetor $v_0 \in V_{t_0}$ a classe $v'(t_0) + V_{t_0} \in X/V_{t_0}$, onde $t \mapsto v(t)$ é qualquer curva de classe C^1 numa vizinhança de t_0 em I tal que $v(t_0) = v_0$ e $v(t) \in V_t$ para todo t.

Levando em conta (5.2.38) e (5.2.34) é fácil obter uma fórmula explícita para o operador linear (5.2.39) em termos da curva de isomorfismos $t \mapsto \phi(t)$ que aparece na Definição 5.2.74; temos:
$$V_{t_0}'(v_0) = -\big(\phi(t_0)^{-1} \circ \phi'(t_0)\big)(v_0) + V_{t_0} \in X/V_{t_0},$$
para todo $v_0 \in V_{t_0}$.

Antes de enunciar o próximo resultado, introduziremos mais uma notação; se $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(X)$ é uma forma bilinear simétrica no espaço X e $V \subset X$ é um subespaço então definimos uma forma bilinear

$$\overline{B} \colon (X/V) \times \mathrm{Ker}\big(B|_{V\times V}\big) \longrightarrow I\!R \tag{5.2.40}$$

fazendo $\overline{B}(x + V, y) = B(x, y)$, para todos $x + V \in X/V$ e $y \in \mathrm{Ker}\big(B|_{V\times V}\big)$; obviamente $\overline{B}$ é bem definida, i.e., não depende da escolha do representante na classe $x + V \in X/V$.

Temos finalmente o seguinte:

Teorema 5.2.80. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $(V_t)_{t\in[t_0,t_1[}$ uma família C^1 de subespaços de $\mathcal{H}$ e $B\colon [t_0, t_1[\to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ uma curva de classe C^1 tal que $B(t_0)|_{V_{t_0}\times V_{t_0}}$ é RPCIP; escreva $N = \mathrm{Ker}\big(B(t_0)|_{V_{t_0}\times V_{t_0}}\big)$ e defina $B^\dagger \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(N)$ fazendo*

$$B^\dagger(v_0, w_0) = B'(t_0)(v_0, w_0) + \overline{B(t_0)}\big(V_{t_0}'(v_0), w_0\big) + \overline{B(t_0)}\big(V_{t_0}'(w_0), v_0\big), \tag{5.2.41}$$

para todos $v_0, w_0 \in N$, onde $\overline{B(t_0)}$ é definida como em (5.2.40)*. Suponha que $B^\dagger$ é não-degenerada; então existe $\varepsilon > 0$ tal que para $t \in\,]t_0, t_0 + \varepsilon[$ a forma bilinear simétrica $B(t)$ é não-degenerada em V_t e vale a identidade:*

$$n_-\big(B(t)|_{V_t\times V_t}\big) = n_-\big(B(t_0)|_{V_{t_0}\times V_{t_0}}\big) + n_-(B^\dagger), \tag{5.2.42}$$

onde todos os termos em (5.2.42) *são finitos.*

Demonstração. Seja $t \mapsto \phi(t) \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ uma curva de classe C^1 definida para $t \ge t_0$ suficientemente próximo de t_0, de modo que $\phi(t)(V_t) = W$ é um subespaço fechado fixo de $\mathcal{H}$; defina uma curva $t \mapsto A(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(W)$ de classe C^1 fazendo:

$$A(t) = \phi(t)_*\big(B(t)\big)|_{W\times W} = B(t)\big(\phi(t)^{-1}\cdot, \phi(t)^{-1}\cdot\big)|_{W\times W};$$

obviamente $\mathrm{Ker}\big(A(t_0)\big) = \phi(t_0)(N)$. Pela Observação 5.2.62 temos que $A(t_0)$ é RPCIP; calculamos também:

$$\begin{aligned} A'(t_0)(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(t)\big(\phi(t)^{-1}(x), \phi(t)^{-1}(y)\big)\Big|_{t=t_0} \\ &= B^\dagger\big(\phi(t_0)^{-1}(x), \phi(t_0)^{-1}(y)\big), \end{aligned}$$

para todos $x, y \in \mathrm{Ker}\big(A(t_0)\big)$; isso significa que:

$$A'(t_0)|_{\mathrm{Ker}(A(t_0))\times\mathrm{Ker}(A(t_0))} = \big(\phi(t_0)|_N\big)_*(B^\dagger).$$

A conclusão segue agora facilmente aplicando o Teorema 5.2.72 para a curva de formas bilineares simétricas $t \mapsto A(t)$ no espaço de Hilbert W. □

Corolário 5.2.81. *Sob as hipóteses do Teorema 5.2.80, se $t \mapsto V_t$ e $t \mapsto B(t)$ são definidas e de classe C^1 para t numa vizinhança de t_0 então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno vale a identidade:*

$$n_-\big(B(t_0+\varepsilon)|_{V_{t_0+\varepsilon}\times V_{t_0+\varepsilon}}\big) - n_-\big(B(t_0-\varepsilon)|_{V_{t_0-\varepsilon}\times V_{t_0-\varepsilon}}\big) = -\mathrm{sgn}(B^\dagger), \tag{5.2.43}$$

onde todos os termos em (5.2.43) *são finitos.*

Demonstração. É uma conseqüência simples do Teorema 5.2.80, usando a mesma idéia da demonstração do Corolário 4.1.34. □

Observação 5.2.82. Uma maneira mais simples de descrever a forma bilinear simétrica $B^\dagger \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(N)$ definida em (5.2.41) é a seguinte: dados $v_0, w_0 \in N$, consideramos curvas quaisquer $t \mapsto v(t) \in V_t$ e $t \mapsto w(t) \in V_t$ de classe C^1 numa vizinhança de t_0 com $v(t_0) = v_0$, $w(t_0) = w_0$; daí:

$$B^\dagger(v_0, w_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(t)\big(v(t), w(t)\big)\Big|_{t=t_0}.$$

Exemplo 5.2.83. Quando aplicamos o Teorema 5.2.80 ocorre algumas vezes em situações práticas que o núcleo N de $B(t_0)|_{V_{t_0}\times V_{t_0}}$ está contido no núcleo de $B(t_0)$ em $\mathcal{H}$; nesse caso os dois últimos termos do lado direito de (5.2.41) se anulam e $B^\dagger$ coincide simplesmente com a restrição a N da derivada $B'(t_0)$.

Observação 5.2.84. Podemos enunciar também uma versão do Corolário 5.2.70 para formas bilineares simétricas com domínio variável; mais explicitamente, sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $(V_t)_{t\in I}$ uma família C^0 de subespaços de $\mathcal{H}$ e $B\colon I \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ uma curva contínua, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo qualquer. Suponha que $B(t)|_{V_t\times V_t}$ é RPCIP e não-degenerada para todo $t \in I$; então $n_-\big(B(t)|_{V_t\times V_t}\big) < +\infty$ é constante para $t \in I$. Para ver isso, seja $t_0 \in I$ e considere uma curva contínua $t \mapsto \phi(t) \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ definida numa vizinhança de t_0 em I de modo que $\phi(t)(V_t) = W$ é um subespaço fechado fixo de $\mathcal{H}$; aplicando o Corolário 5.2.70 para a curva $t \mapsto \phi(t)_*\big(B(t)\big)|_{W\times W}$ em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(W)$ concluímos que

$$n_-\big(\phi(t)_*\big(B(t)\big)|_{W\times W}\big) = n_-\big(B(t)|_{V_t\times V_t}\big)$$

é constante para t numa vizinhança de t_0. A conclusão segue da conexidade do intervalo I.

Observação 5.2.85. Por razões técnicas, precisaremos de uma "versão seqüêncial" do resultado enunciado na Observação 5.2.84. Sejam então $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $V \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado e suponha que $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ é tal que $B|_{V\times V}$ é RPCIP e não-degenerada; suponha que uma seqüência $(B_n)_{n\geq 1}$ em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ converge para B e que uma seqüência $(V_n)_{n\geq 1}$ de subespaços fechados de $\mathcal{H}$ *converge* para V no seguinte sentido:

- existe um operador sobrejetor $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, Y)$, onde Y é um espaço de Banach qualquer, tal que $V = \mathrm{Ker}(F)$;
- existe uma seqüência $(F_n)_{n\geq 1}$ de operadores $F_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, Y)$ que converge para F em $\mathcal{L}(\mathcal{H}, Y)$ e tal que $V_n = \mathrm{Ker}(F_n)$ para todo n;

então para n suficientemente grande temos que B_n é não-degenerada em V_n e vale a identidade:

$$n_-\big(B_n|_{V_n\times V_n}\big) = n_-\big(B|_{V\times V}\big) < +\infty.$$

A demonstração desse fato é feita da seguinte maneira: raciocinando como na demonstração do Lema 5.2.78 (trocando os objetos X, $F(t_0)$, $F(t)$, $\pi(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ por $\mathcal{H}$, F, F_n, π_n, ψ_n, ϕ_n respectivamente) encontramos uma seqüência de isomorfismos $\phi_n \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ tal que $\phi_n(V_n) = V$ para n suficientemente grande e $\lim_{n\to+\infty} \phi_n = \mathrm{Id}$. Consideramos os push-forwards $A_n = (\phi_n)_*(B_n)$; obviamente $\lim_{n\to+\infty} A_n = B$ e como $B|_{V\times V}$ é RPCIP e não-degenerada segue do Corolário 5.2.69 que para n suficientemente grande $A_n|_{V\times V}$ é não-degenerada e tem índice igual a $n_-\big(B|_{V\times V}\big)$. Isso completa o argumento.

CAPÍTULO 6

Sistemas Diferenciais Simpléticos

6.1. Definição e Construções Básicas

Nesta seção introduzimos o conceito de sistema diferencial simplético. Tais sistemas aparecem como uma generalização dos sistemas de Morse-Sturm e fornecem a linguagem adequada para a formulação do nosso Teorema do Índice.

Para um melhor entendimento das construções feitas nesta seção será importante a familiaridade com as convenções introduzidas na Seção 1.1; usaremos também as noções básicas sobre formas simpléticas discutidas na Seção 1.4. O ambiente de trabalho básico para esta seção será o espaço simplético $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ munido de sua forma simplética canônica ω definida no Exemplo 1.4.8, ou seja:

$$\omega\big((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)\big) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2), \tag{6.1.1}$$

para todos $v_1, v_2 \in I\!R^n$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R^{n*}$.

Na Subseção 2.1.1, quando discutimos o grupo simplético, fizemos uma descrição matricial de sua álgebra de Lie $\mathrm{sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$ em (2.1.8); vimos que $X \in \mathcal{L}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*})$ pertence à algebra de Lie do grupo simplético se e somente se X é da forma:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}, \quad B, C \text{ simétricas}, \tag{6.1.2}$$

onde A^* denota a matriz transposta de A. As matrizes A, B, C e A^* identificam-se com operadores lineares $A \in \mathcal{L}(I\!R^n)$, $B \in \mathcal{L}(I\!R^{n*}, I\!R^n)$, $C \in \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^{n*})$ e $A^* \in \mathcal{L}(I\!R^{n*})$; podemos também identificar B com uma forma bilinear simétrica em $I\!R^{n*}$ e C com uma forma bilinear simétrica em $I\!R^n$.

Estaremos interessados em equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas da forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} v(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b], \tag{6.1.3}$$

onde $X\colon [a,b] \to \mathrm{sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$, $v\colon [a,b] \to I\!R^n$ e $\alpha\colon [a,b] \to I\!R^{n*}$. Para cada $t \in [a,b]$ o operador linear $X(t)$ determina operadores $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$ como em (6.1.2); podemos então reescrever (6.1.3) mais explicitamente sob a forma do sistema:

$$\begin{cases} v' = Av + B\alpha, \\ \alpha' = Cv - A^*\alpha, \end{cases} \tag{6.1.4}$$

onde omitimos o parâmetro t por simplicidade.

DEFINIÇÃO 6.1.1. Um sistema linear homogêneo de equações diferenciais ordinárias da forma (6.1.4) onde $A\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B\colon [a,b] \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^{n*})$ e $C\colon [a,b] \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$ são aplicações contínuas e $B(t)$ é não-degenerada para todo $t \in [a,b]$ é chamado um *sistema diferencial simplético*. Se $X(t)$ é a matriz constituída pelos operadores $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$ como em (6.1.2) então a aplicação $X\colon [a,b] \to \mathrm{sp}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}, \omega)$ é chamada a *matriz de coeficientes* do sistema diferencial simplético (6.1.4) e as aplicações A, B e C são chamadas as *componentes* de X.

Em geral *identificaremos o sitema diferencial simplético* (6.1.4) *com sua matriz de coeficientes* X; assim, diremos por exemplo que (v,α) é uma *solução de* X significando que (v,α) satisfaz (6.1.4) (ou, equivalentemente, (6.1.3)).

Para o resto da seção consideraremos fixado um sistema diferencial simplético $X\colon [a,b] \to \mathrm{sp}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}, \omega)$ com componentes A, B e C.

OBSERVAÇÃO 6.1.2. Como $B(t)$ é não-degenerada para todo t segue do Corolário 4.1.31 que o índice de $B(t)$ não depende de $t \in [a,b]$ e portanto podemos escrever:

$$n_-(B(t)) = k, \quad t \in [a,b].$$

Note que como $B(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n*}, \mathbb{R}^n)$ é inversível podemos considerar o operador linear $B(t)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$ que identifica-se com uma forma bilinear simétrica $B(t)^{-1} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$. Recorde (vide Exemplo 1.1.5) que $B(t)^{-1}$ é simplesmente o push-forward da forma bilinear $B(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^{n*})$ pelo isomorfismo $B(t)\colon \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}^n$; em particular:

$$n_-\big(B(t)^{-1}\big) = n_-(B(t)) = k, \quad t \in [a,b].$$

Dado $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, existe no máximo uma aplicação $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{n*}$ tal que (v,α) é uma solução de X; de fato, a inversibilidade de $B(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n*}, \mathbb{R}^n)$ nos permite isolar α na primeira equação em (6.1.4). Definimos então para *qualquer* aplicação $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 uma aplicação contínua $\alpha_v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{n*}$ pela fórmula:

$$\alpha_v(t) = B(t)^{-1}\big(v'(t) - A(t)v(t)\big), \quad t \in [a,b]; \tag{6.1.5}$$

na verdade, (6.1.5) faz sentido também se v é apenas absolutamente contínua (vide Exemplo 5.1.38) e nesse caso $\alpha_v \in L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ (vide Exemplo 5.1.27). Para uso posterior registramos aqui a identidade:

$$\alpha_{fv}(t) = f(t)\alpha_v(t) + f'(t)B(t)^{-1}v(t), \quad t \in [a,b], \tag{6.1.6}$$

que vale para quaisquer aplicações absolutamente contínuas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 6.1.3. Dizemos que uma aplicação $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uma *solução* do sistema diferencial simplético X se v e α_v são aplicações de classe C^1 e (v,α_v) é uma solução de X.

É fácil ver que se $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{n*}$ são aplicações absolutamente contínuas tais que (6.1.4) vale quase sempre em $[a,b]$ então v e α são de classe C^1 e (6.1.4) é satisfeito em todo o intervalo $[a,b]$; obviamente nesse caso temos $\alpha = \alpha_v$ e portanto v é uma solução de X.

Da teoria elementar das equações diferenciais ordinárias lineares sabe-se que dados $v_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}^{n*}$ e $t_0 \in [a,b]$ então existe uma única solução (v,α) de X com $v(t_0) = v_0$ e $\alpha(t_0) = \alpha_0$ (vide, por exemplo, [**11**, Teorema 5.1, Capítulo 1]); fica bem definido portanto um isomorfismo linear

$$\Phi(t)\colon \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*} \longrightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$$

tal que

$$\Phi(t)(v(a),\alpha(a)) = (v(t),\alpha(t)),$$

para toda solução (v,α) de X. Obtemos então uma aplicação $t \mapsto \Phi(t)$ de classe C^1 que satisfaz

$$\Phi'(t) = X(t) \circ \Phi(t), \text{ para todo } t \in [a,b] \quad \text{e} \quad \Phi(a) = \mathrm{Id}; \tag{6.1.7}$$

Definição 6.1.4. A aplicação Φ determinada por (6.1.7) é chamada a *matriz fundamental* do sistema diferencial simplético X.

Como X toma valores na álgebra de Lie do grupo simplético, segue de (6.1.7) que Φ toma valores no grupo simplético (vide Observação 2.1.4), ou seja, a matriz fundamental do sistema diferencial simplético X é uma aplicação de classe C^1:

$$\Phi\colon [a,b] \longrightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*},\omega);$$

o fato que $\Phi(t)$ é um simplectomorfismo pode ser reescrito sob a forma da identidade:

$$\omega\big((v(t),\alpha_v(t)),(w(t),\alpha_w(t))\big) = \alpha_w(t)\cdot v(t) - \alpha_v(t)\cdot w(t) = \text{constante}, \tag{6.1.8}$$

para quaisquer soluções v e w de X.

Seja $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ um subespaço Lagrangeano; consideramos a seguinte condição inicial para o sistema (6.1.4):

$$(v(a),\alpha(a)) \in \ell_0. \tag{6.1.9}$$

Fazendo $L_0 = \{0\}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ e $L_1 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n$ na Proposição 1.4.38 vemos que existe uma bijeção entre o conjunto dos subespaços Lagrangeanos $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ e o conjunto dos pares (P,S) onde $P \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço e $S \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(P)$; essa bijeção é determinada pela identidade:

$$\ell_0 = \big\{(v,\alpha) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*} : v \in P,\ \alpha|_P + S(v) = 0\big\}, \tag{6.1.10}$$

onde S é identificado com um operador linear $S\colon P \to P^*$. Em termos do par (P,S) a condição inicial (6.1.9) pode ser reescrita na forma:

$$v(a) \in P, \quad \alpha(a)|_P + S\big(v(a)\big) = 0. \tag{6.1.11}$$

DEFINIÇÃO 6.1.5. Chamamos (6.1.9) (respectivamente, (6.1.11)) a *condição inicial Lagrangeana* determinada pelo Lagrangeano ℓ_0 (respectivamente, pelo par (P,S)); se (v,α) é uma solução de X que satisfaz (6.1.9) (ou, equivalentemente, (6.1.11)) então dizemos que (v,α) (ou simplesmente v) é uma *solução* do par (X,ℓ_0). Denotaremos por $\mathbb{V}=\mathbb{V}(X,\ell_0)$ o conjunto das soluções de (X,ℓ_0), ou seja:

$$\mathbb{V}(X,\ell_0)=\mathbb{V}=\big\{v : v \text{ é uma solução de } (X,\ell_0)\big\}. \tag{6.1.12}$$

Obviamente $\mathbb{V}$ é um subespaço do espaço vetorial de todas as aplicações (de classe C^1) $v\colon[a,b]\to I\!R^n$; além do mais:

$$\dim(\mathbb{V})=\dim(\ell_0)=n.$$

Consideraremos fixado para o resto da seção um subespaço Lagrangeano $\ell_0\subset I\!R^n\oplus I\!R^{n*}$ e denotaremos por (P,S) o par correspondente a ℓ_0 através de (6.1.10).

Para cada $t\in[a,b]$ definimos o seguinte subespaço de $I\!R^n$:

$$\mathbb{V}[t]=\big\{v(t) : v\in\mathbb{V}\big\}\subset I\!R^n; \tag{6.1.13}$$

é fácil ver que:

$$\mathbb{V}[t]=\big(\pi_1\circ\Phi(t)\big)(\ell_0), \tag{6.1.14}$$

onde $\pi_1\colon I\!R^n\oplus I\!R^{n*}\to I\!R^n$ denota a projeção na primeira componente. Além do mais, temos:

$$\mathbb{V}[a]=P. \tag{6.1.15}$$

Segue diretamente de (6.1.8) que dadas soluções v e w de (X,ℓ_0) então:

$$\alpha_v(t)\cdot w(t)=\alpha_w(t)\cdot v(t), \tag{6.1.16}$$

para todo $t\in[a,b]$; daí se v é uma solução de (X,ℓ_0) com $v(t)=0$ então o funcional $\alpha_v(t)$ anula o espaço $\mathbb{V}[t]$. Reciprocamente, se $\alpha_0\in I\!R^{n*}$ é um funcional que anula $\mathbb{V}[t]$ então segue de (6.1.8) que se v é a única solução de X tal que $v(t)=0$ e $\alpha_v(t)=\alpha_0$ então

$$0=\omega\big((v(t),\alpha_v(t)),(w(t),\alpha_w(t))\big)=\omega\big((v(a),\alpha_v(a)),(w(a),\alpha_w(a))\big),$$

para toda (X,ℓ_0)-solução w; daí $(v(a),\alpha_v(a))$ é ω-ortogonal a ℓ_0 e portanto, v é uma solução de (X,ℓ_0). Essas observações mostram que o anulador de $\mathbb{V}[t]$ é dado por:

$$\mathbb{V}[t]^o=\big\{\alpha_v(t) : v\in\mathbb{V} \text{ e } v(t)=0\big\}, \tag{6.1.17}$$

para todo $t\in[a,b]$; levando em conta (6.1.5), segue diretamente de (6.1.17) que o complemento ortogonal de $\mathbb{V}[t]$ com respeito a $B(t)^{-1}$ é dado por:

$$\mathbb{V}[t]^\perp=B(t)\big(\mathbb{V}[t]^o\big)=\big\{v'(t) : v\in\mathbb{V} \text{ e } v(t)=0\big\}. \tag{6.1.18}$$

DEFINIÇÃO 6.1.6. Dizemos que $t\in\,]a,b]$ é um *instante focal* para o par (X,ℓ_0) (ou também que t é um *instante* (X,ℓ_0)*-focal*) quando existe uma solução $v\in\mathbb{V}$ não nula de (X,ℓ_0) tal que $v(t)=0$; a dimensão do espaço das soluções $v\in\mathbb{V}$ de (X,ℓ_0) tais que $v(t)=0$ é chamada a *multiplicidade* do instante focal t e é denotada por $\mathrm{mul}(t)$. A *assinatura* do instante focal t, denotada $\mathrm{sgn}(t)$, é definida como a assinatura da restrição da forma bilinear simétrica $B(t)^{-1}$ ao espaço $\mathbb{V}[t]^\perp$, ou seja:

$$\mathrm{sgn}(t) = \mathrm{sgn}\big(B(t)^{-1}|_{\mathbb{V}[t]^\perp\times\mathbb{V}[t]^\perp}\big),$$

onde o complemento ortogonal $\mathbb{V}[t]^\perp$ é tomado com respeito à forma bilinear $B(t)^{-1}$; dizemos que o instante focal t é *não-degenerado* quando $B(t)^{-1}$ for não-degenerada no espaço $\mathbb{V}[t]^\perp$. Se o par (X,ℓ_0) possui apenas um número finito de instantes focais definimos o seu *índice focal* como sendo o número inteiro:

$$i_{\mathrm{foc}}(X,\ell_0) = i_{\mathrm{foc}} = \sum_{t\in]a,b]} \mathrm{sgn}(t),$$

onde convencionamos $\mathrm{sgn}(t) = \mathrm{mul}(t) = 0$ quando t não é (X,ℓ_0)-focal.

OBSERVAÇÃO 6.1.7. Para todo $t \in\,]a,b]$ temos:

$$\mathrm{mul}(t) = \dim\big(\mathbb{V}[t]^o\big) = \text{co-}\dim_{I\!R^n}\mathbb{V}[t], \tag{6.1.19}$$

e em particular t é (X,ℓ_0)-focal se e somente se $\mathbb{V}[t] \ne I\!R^n$; de fato, segue de (6.1.17) que a aplicação

$$\big\{v\in\mathbb{V} : v(t) = 0\big\} \ni v \longmapsto \alpha_v(t) \in \mathbb{V}[t]^o \subset I\!R^{n*}$$

é um isomorfismo.

Tendo em mente a Observação 6.1.2 vemos que a forma bilinear simétrica $B(t)^{-1}|_{\mathbb{V}[t]^\perp\times\mathbb{V}[t]^\perp}$ é o push-forward de $B(t)|_{\mathbb{V}[t]^o\times\mathbb{V}[t]^o}$ através do isomorfismo

$$B(t)|_{\mathbb{V}[t]^o}\colon \mathbb{V}[t]^o \longrightarrow \mathbb{V}[t]^\perp.$$

Concluímos então que a assinatura de um instante (X,ℓ_0)-focal t coincide com:

$$\mathrm{sgn}(t) = \mathrm{sgn}\big(B(t)|_{\mathbb{V}[t]^o\times\mathbb{V}[t]^o}\big);$$

além do mais, um instante focal t é não-degenerado se e somente se $\mathbb{V}[t]^o$ é um subespaço não-degenerado para a forma bilinear $B(t)$. Note também que o Corolário 1.1.12 implica que um instante focal t é não-degenerado se e somente se $B(t)^{-1}$ é não-degenerada em $\mathbb{V}[t]$.

DEFINIÇÃO 6.1.8. Dizemos que a condição inicial Lagrangeana determinada pelo espaço Lagrangeano ℓ_0 (ou, equivalentemente, pelo par (P,S)) é *não-degenerada* quando a forma bilinear $B(a)^{-1}$ for não-degenerada em P; dizemos também nesse caso que o par (X,ℓ_0) possui *condição inicial não-degenerada*.

OBSERVAÇÃO 6.1.9. Na Definição 6.1.6 excluímos explicitamente a possibilidade que $t=a$ seja um instante (X,ℓ_0)-focal; porém, admitindo por um momento a terminologia da Definição 6.1.6 também para $t=a$ vemos que a não-degenerescência da condição inicial determinada por ℓ_0 é equivalente à não-degenerescência do "instante focal" $t=a$ (vide também (6.1.15)). Raciocinando então como na Observação 6.1.7, vemos que a não-degenerescência da condição inicial determinada por ℓ_0 é equivalente à não-degenerescência de $B(a)$ no anulador de P em $I\!R^n$ e também à não-degenerescência de $B(a)^{-1}$ em $P^\perp$ (o complemento ortogonal sendo tomado com respeito a $B(a)^{-1}$). Note que se $P = I\!R^n$ (o que equivale a $\ell_0 \cap \big(\{0\}^n \oplus I\!R^{n*}\big) = \{0\}$) ou se $P = \{0\}$ (o que equivale a $\ell_0 = \{0\}^n \oplus I\!R^{n*}$) então (X, ℓ_0) automaticamente possui condição inicial não-degenerada.

EXEMPLO 6.1.10. Se a forma bilinear $B(t)$ é definida positiva ou definida negativa para algum (e logo para todo) $t \in [a, b]$ então todo instante focal é não-degenerado; além do mais, se $t_0 \in\ ]a, b]$ é um instante focal então $\mathrm{sgn}(t_0) = \mathrm{mul}(t_0)$ se $B(t)$ é definida positiva e $\mathrm{sgn}(t_0) = -\mathrm{mul}(t_0)$ se $B(t)$ é definida negativa. Também, se $B(t)$ é definida positiva ou definida negativa então qualquer Lagrangeano ℓ_0 determina uma condição inicial não-degenerada para X.

EXEMPLO 6.1.11. Se $g\colon [a, b] \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(I\!R^n)$ e $R\colon [a, b] \to \mathcal{L}(I\!R^n)$ são aplicações contínuas com $g(t)$ não-degenerada e $R(t)$ um operador $g(t)$-simétrico para cada $t \in [a, b]$ então a equação diferencial ordinária linear homogênea

$$g(t)^{-1}\big(g(t) \cdot v'(t)\big)' = R(t) \cdot v(t), \quad t \in [a, b], \tag{6.1.20}$$

é chamada uma *equação de Morse-Sturm*. Se g é constante então (6.1.20) toma a forma simplificada:

$$v''(t) = R(t) \cdot v(t), \quad t \in [a, b]. \tag{6.1.21}$$

Definindo $\alpha(t) = g(t) \cdot v'(t)$ então a equação (6.1.20) pode ser reescrita sob a forma do sistema:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g(t)^{-1} \\ g(t) \circ R(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b]. \tag{6.1.22}$$

Daí (6.1.22) é um sistema diferencial simplético com componentes

$$A(t) = 0, \quad B(t) = g(t)^{-1}, \quad C(t) = g(t) \circ R(t). \tag{6.1.23}$$

Diremos em geral que um sistema diferencial simplético X com componentes A, B, C é uma *equação de Morse-Sturm* se $A = 0$; nesse caso definimos

$$g(t) = B(t)^{-1}, \quad R(t) = B(t) \circ C(t),$$

para todo $t \in [a, b]$ de modo que as identidades (6.1.23) são satisfeitas.

EXEMPLO 6.1.12. Considere o isomorfismo $\mathcal{O}\colon I\!R^n \oplus I\!R^{n*} \to I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ definido por $\mathcal{O}(v, \alpha) = (v, -\alpha)$; em termos de matrizes:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix},$$

onde 0 denota a matriz zero $n \times n$ e I denota a matriz identidade $n \times n$. Defina:

$$X^{\mathrm{op}} = \mathcal{O} \circ X \circ \mathcal{O};$$

é fácil ver que X^{op} é um sistema diferencial simplético com componentes A^{op}, B^{op}, C^{op} dadas por:

$$A^{\mathrm{op}} = A, \quad B^{\mathrm{op}} = -B, \quad C^{\mathrm{op}} = -C. \tag{6.1.24}$$

Temos que (v,α) é uma solução de X se e somente se $\mathcal{O}\circ(v,\alpha)=(v,-\alpha)$ é uma solução de $X^{\rm op}$; daí, se $\Phi^{\rm op}$ denota a matriz fundamental de $X^{\rm op}$ então:

$$\Phi^{\rm op}=\mathcal{O}\circ\Phi\circ\mathcal{O}. \tag{6.1.25}$$

Dizemos que $X^{\rm op}$ é o *sistema diferencial simplético oposto* a X. O isomorfismo $\mathcal{O}$ não é um simplectomorfismo; na verdade, temos $\mathcal{O}^*(\omega)=-\omega$. Em particular, $\mathcal{O}$ leva subespaços Lagrangeanos de $I\!R^n\oplus I\!R^{n*}$ em subespaços Lagrangeanos; escrevendo $\ell_0^{\rm op}=\mathcal{O}(\ell_0)$ então dizemos que $(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})$ é o *par oposto* ao par (X,ℓ_0). Se o par $(P^{\rm op},S^{\rm op})$ é associado a $\ell_0^{\rm op}$ como em (6.1.10) então é fácil ver que:

$$P^{\rm op}=P,\quad S^{\rm op}=-S. \tag{6.1.26}$$

Temos que (v,α) é uma (X,ℓ_0)-solução se e somente se $(v,-\alpha)$ é uma $(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})$-solução; daí (X,ℓ_0) e $(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})$ possuem os mesmos instantes focais com as mesmas multiplicidades, porém com as *assinaturas opostas*. Em particular, se (X,ℓ_0) possui apenas um número finito de instantes focais temos:

$$i_{\rm foc}(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})=-i_{\rm foc}(X,\ell_0).$$

Observe também que $t\in\,]a,b]$ é um instante focal não-degenerado para (X,ℓ_0) se e somente se t é um instante focal não-degenerado para $(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})$; além do mais, o par (X,ℓ_0) possui condição inicial não-degenerada se e somente se o par $(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})$ possui condição inicial não-degenerada.

EXEMPLO 6.1.13. Se a aplicação $X\colon[a,b]\to\mathrm{sp}(I\!R^n\oplus I\!R^{n*},\omega)$ for real-analítica (vide Observação 6.1.21 adiante) então ou todo instante $t\in\,]a,b]$ é (X,ℓ_0)-focal ou então (X,ℓ_0) possui apenas um número finito de instantes (X,ℓ_0)-focais. De fato, se a matriz de coeficientes X é real-analítica então também a matriz fundamental $t\mapsto\Phi(t)$ é real-analítica em $[a,b]$; se $(b_i)_{i=1}^n$ é uma base do Lagrangeano ℓ_0 então segue de (6.1.14) e da Observação 6.1.7 que os instantes (X,ℓ_0)-focais coincidem com os zeros no intervalo $]a,b]$ da função real-analítica

$$[a,b]\ni t\longmapsto\det\big((\pi_1\circ\Phi(t))\cdot b_1,\ldots,(\pi_1\circ\Phi(t))\cdot b_n\big),$$

onde $\pi_1\colon I\!R^n\oplus I\!R^{n*}\to I\!R^n$ denota a projeção na primeira coordenada.

Mostraremos mais adiante no Corolário 6.1.35 que se ℓ_0 determina uma condição inicial não-degenerada para X então (X,ℓ_0) não possui instantes focais numa vizinhança do instante inicial $t=a$; em particular, concluímos que *um par (X,ℓ_0) com condição inicial não-degenerada e tal que X é real-analítico possui apenas um número finito de instantes focais*.

Nosso objetivo agora é introduzir uma noção de *isomorfismo* no conjunto dos sistemas diferenciais simpléticos; começamos com uma motivação informal. A idéia aqui é que dois sistemas diferenciais simpléticos isomorfos X e $\tilde X$ devem ser obtidos um do outro por uma *mudança de variável*. Mais precisamente, uma noção de isomorfismo deve ser definida de modo que se (v,α) é uma solução de X então

$$[a,b]\ni t\longmapsto(\tilde v(t),\tilde\alpha(t))=\phi(t)(v(t),\alpha(t)) \tag{6.1.27}$$

é uma solução de $\tilde{X}$, onde para cada $t \in [a, b]$, $\phi(t)$ é um isomorfismo linear de $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$; na verdade, é razoável também supor que a aplicação $\phi(t)$ seja um *simplectomorfismo* de $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ para cada $t \in [a, b]$. Denotando por Φ e $\tilde{\Phi}$ respectivamente as matrizes fundamentais dos sistemas diferenciais simpléticos X e $\tilde{X}$ então:

$$(6.1.28) \qquad (\tilde{v}(t), \tilde{\alpha}(t)) = \tilde{\Phi}(t)(\tilde{v}(a), \tilde{\alpha}(a)) = \big(\tilde{\Phi}(t) \circ \phi(a)\big)(v(a), \alpha(a));$$

de (6.1.27) obtemos também:

$$(6.1.29) \qquad (\tilde{v}(t), \tilde{\alpha}(t)) = \big(\phi(t) \circ \Phi(t)\big)(v(a), \alpha(a)).$$

De (6.1.28) e (6.1.29) segue que:

$$(6.1.30) \qquad \tilde{\Phi}(t) \circ \phi(a) = \phi(t) \circ \Phi(t), \quad t \in [a, b];$$

diferenciando (6.1.30) obtemos:

$$(6.1.31) \qquad \tilde{X}(t) \circ \tilde{\Phi}(t) \circ \phi(a) = \phi'(t) \circ \Phi(t) + \phi(t) \circ X(t) \circ \Phi(t);$$

substituindo (6.1.30) em (6.1.31) obtemos finalmente:

$$(6.1.32) \qquad \tilde{X}(t) = \phi'(t) \circ \phi(t)^{-1} + \phi(t) \circ X(t) \circ \phi(t)^{-1}, \quad t \in [a, b].$$

Queremos definir também uma noção de *isomorfismo entre pares* (X, ℓ_0), $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$; obviamente a condição natural é:

$$(6.1.33) \qquad \tilde{\ell}_0 = \phi(a)(\ell_0);$$

note que uma noção razoável de isomorfismo deve ser tal que se (X, ℓ_0) é isomorfo a $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$ então os instantes (X, ℓ_0)-focais coincidem com os instantes $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$-focais. Instantes focais são definidos em termos de zeros de soluções v; devemos portanto supor que $\phi(t)$ preserva o subespaço $\{0\}^n \oplus I\!R^{n*}$ para todo t.

Em (1.4.6) e (1.4.7) fizemos uma descrição matricial dos elementos do grupo simplético; é fácil ver então que ϕ é um simplectomorfismo de $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ que deixa o subespaço $\{0\}^n \oplus I\!R^{n*}$ invariante se e somente se ϕ pode ser escrito na forma:

$$(6.1.34) \qquad \phi = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ Z^{*-1} \circ W & Z^{*-1} \end{pmatrix}, \quad Z \in \mathrm{GL}(n, I\!R),\ W \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(I\!R^n).$$

Estamos prontos agora para as considerações formais. Temos a seguinte:

Definição 6.1.14. Seja $\phi\colon [a, b] \to \mathrm{Sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$ uma aplicação tal que:

$$(6.1.35) \qquad \phi(t)\big(\{0\}^n \oplus I\!R^{n*}\big) = \{0\}^n \oplus I\!R^{n*},$$

para todo $t \in [a, b]$; podemos então definir aplicações

$$(6.1.36) \qquad Z\colon [a, b] \longrightarrow \mathrm{GL}(n, I\!R), \quad W\colon [a, b] \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(I\!R^n),$$

de modo que $\phi(t)$ seja dada como em (6.1.34) para todo $t \in [a, b]$. Se X e $\tilde{X}$ são sistemas diferenciais simpléticos então dizemos que ϕ é um *isomorfismo* de X para $\tilde{X}$ se ϕ é uma aplicação de classe C^1 e vale a identidade (6.1.32); escrevemos nesse caso

$$\phi\colon X \cong \tilde{X}$$

e dizemos que os sistemas X e $\tilde{X}$ são *isomorfos*. As aplicações Z e W são chamadas as *componentes* de ϕ. Quando $Z(t)$ é o operador identidade de $\mathbb{R}^n$ para todo $t \in [a,b]$, dizemos que ϕ é um *isomorfismo estrito* e que os sistemas X e $\tilde{X}$ são *estritamente isomorfos*.

Dados Lagrangeanos ℓ_0 e $\tilde{\ell}_0$, dizemos que ϕ é um *isomorfismo* entre os pares (X,ℓ_0) e $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ se ϕ é um isomorfismo entre X e $\tilde{X}$ e além do mais vale a identidade (6.1.33); escrevemos nesse caso

$$\phi\colon (X,\ell_0) \cong (\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$$

e dizemos que os pares (X,ℓ_0) e $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ são *isomorfos*. Se $Z(t) = \mathrm{Id}$ para todo t dizemos que ϕ é um *isomorfismo estrito* de pares e também que os pares (X,ℓ_0), $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ são *estritamente isomorfos*.

Se $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ denotam as componentes de $\tilde{X}$ e Z, W denotam as componentes de ϕ então um cálculo direto mostra que a identidade (6.1.32) é equivalente a:

$$\tilde{A} = Z\circ A\circ Z^{-1} - Z\circ B\circ W\circ Z^{-1} + Z'\circ Z^{-1}, \tag{6.1.37}$$

$$\tilde{B} = Z\circ B\circ Z^*, \tag{6.1.38}$$

$$\tilde{C} = Z^{*-1}\circ (W\circ A + C - W\circ B\circ W + A^*\circ W + W')\circ Z^{-1}, \tag{6.1.39}$$

onde omitimos o parâmetro t por simplicidade; note que (6.1.38) diz simplesmente que $\tilde{B}$ é o pull-back de B pelo isomorfismo $Z^* \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n*})$. Para toda aplicação $\tilde{v}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (ou ao menos absolutamente contínua) podemos definir uma aplicação $\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}$ como em (6.1.5); explicitamente:

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t) = \tilde{B}(t)^{-1}\big(\tilde{v}'(t) - \tilde{A}(t)\tilde{v}(t)\big). \tag{6.1.40}$$

Usando (6.1.37) e (6.1.38) obtêm-se facilmente:

$$\tilde{\alpha}_{Zv}(t) = Z(t)^{*-1}\big(\alpha_v(t) + W(t)v(t)\big), \tag{6.1.41}$$

para toda aplicação $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (ou ao menos absolutamente contínua).

Se os pares (P,S) e $(\tilde{P},\tilde{S})$ correspondem respectivamente aos Lagrangeanos ℓ_0 e $\tilde{\ell}_0$ como em (6.1.10) então é fácil ver que (6.1.33) é equivalente a:

$$\tilde{P} = Z(a)(P), \quad \tilde{S}(Z(a)|_P\,\cdot, Z(a)|_P\,\cdot) = S - W(a)|_{P\times P}, \tag{6.1.42}$$

ou seja, $\tilde{S}$ é o push-forward de $S - W(a)|_{P\times P}$ através do isomorfismo

$$Z(a)|_P\colon P \longrightarrow Z(a)(P) = \tilde{P}.$$

Mostremos algumas conseqüências simples da Definição 6.1.14.

LEMA 6.1.15. *Dadas aplicações Z e W de classe C^1 como em* (6.1.36) *então existe um único sistema diferencial simplético $\tilde{X}$ com $\phi\colon X \cong \tilde{X}$ onde ϕ é um isomorfismo com componentes Z e W; além do mais, dado um Lagrangeano ℓ_0 então existe um único Lagrangeano $\tilde{\ell}_0$ tal que $\phi\colon (X, \ell_0) \cong (\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Defina ϕ a partir de Z e W como em (6.1.34); como ϕ toma valores em $\mathrm{Sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$ é fácil ver que a aplicação $\tilde{X}$ definida por (6.1.32) toma valores em $\mathrm{sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$ e que o subespaço $\tilde{\ell}_0 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ definido por (6.1.33) é Lagrangeano. Além do mais, (6.1.38) mostra que a componente $\tilde{B}$ de $\tilde{X}$ é não-degenerada, donde $\tilde{X}$ é de fato um sistema diferencial simplético. □

LEMA 6.1.16. *Sejam X, $\tilde{X}$ sistemas diferenciais simpléticos com matrizes fundamentais Φ e $\tilde{\Phi}$ respectivamente. Seja $\phi\colon [a, b] \to \mathrm{sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$ uma aplicação de classe C^1 satisfazendo* (6.1.35) *e defina Z e W como em* (6.1.34)*; as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *$\phi\colon X \cong \tilde{X}$;*
(2) *vale a identidade* (6.1.32)*;*
(3) *para toda solução (v, α) de X temos que $t \mapsto \phi(t)(v(t), \alpha(t))$ é uma solução de $\tilde{X}$;*
(4) *vale a identidade* (6.1.30)*;*
(5) *valem as identidades* (6.1.37), (6.1.38) *e para toda solução v de X temos que $t \mapsto Z(t)v(t)$ é uma solução de $\tilde{X}$.*

DEMONSTRAÇÃO. A equivalência entre (1) e (2) é simplesmente a definição de $\phi\colon X \cong \tilde{X}$. A implicação (3)⇒(4) segue das identidades (6.1.27), (6.1.28) e (6.1.29); a recíproca (4)⇒(3) segue avaliando os dois lados de (6.1.30) num vetor arbitrário de $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$. A implicação (4)⇒(2) é obtida diferenciando (6.1.30) (vide (6.1.31)); a recíproca (2)⇒(4) é obtida observando que, sob (6.1.32), os dois lados de (6.1.30) são soluções da equação diferencial $M'(t) = \tilde{X}(t) \circ M(t)$ e satisfazem a condição inicial $M(a) = \phi(a)$.

Mostramos então que (1), (2), (3), (4) são equivalentes; daí a implicação (3)⇒(5) é óbvia. Para finalizar, vamos mostrar (5)⇒(3). Seja (v, α) uma solução de X; daí $\alpha = \alpha_v$ (vide (6.1.5)) e (5) nos diz que $(\tilde{v}, \tilde{\alpha}_{\tilde{v}})$ é uma solução de $\tilde{X}$, onde $\tilde{v}(t) = Z(t)v(t)$ e $\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}$ é definido em (6.1.40). Usando a identidade (6.1.41) (cuja dedução só usa (6.1.37) e (6.1.38)) vê-se diretamente que:

$$(\tilde{v}(t), \tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t)) = \phi(t)(v(t), \alpha_v(t)),$$

para todo t e portanto $t \mapsto \phi(t)(v(t), \alpha_v(t))$ é uma solução de $\tilde{X}$. Isso completa a demonstração. □

Veremos agora que a condição "X é isomorfo a $\tilde{X}$" define uma relação de equivalência:

LEMA 6.1.17. *Sejam X, $\tilde{X}$, $\bar{X}$ sistemas diferenciais simpléticos e sejam dados isomorfismos $\phi\colon X \cong \tilde{X}$ e $\psi\colon \tilde{X} \cong \bar{X}$; então:*

- *a aplicação constante* $t \mapsto \mathrm{Id}$ *é um isomorfismo estrito de* X *em* X*;*
- *a aplicação* $t \mapsto \phi(t)^{-1}$ *é um isomorfismo de* $\tilde{X}$ *em* X*;*
- *a aplicação* $t \mapsto \psi(t) \circ \phi(t)$ *é um isomorfismo de* X *em* $\bar{X}$*.*

Dados Lagrangeanos ℓ_0, $\tilde{\ell}_0$ *e* $\bar{\ell}_0$ *então o resultado acima vale também se trocarmos* X, $\tilde{X}$ *e* $\bar{X}$ *respectivamente pelos pares* (X, ℓ_0), $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$ *e* $(\bar{X}, \bar{\ell}_0)$*. Se os isomorfismos* ϕ *e* ψ *forem estritos então também os isomorfismos* $t \mapsto \phi(t)^{-1}$ *e* $t \mapsto \psi(t) \circ \phi(t)$ *serão estritos.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da equivalência entre as condições (1) e (4) no enunciado do Lema 6.1.16. □

EXEMPLO 6.1.18. A existência de uma aplicação $Z\colon [a, b] \to \mathrm{GL}(n, I\!R)$ de classe C^1 com a propriedade que v é uma solução de X se e somente se $t \mapsto Z(t)v(t)$ é uma solução de $\tilde{X}$ não é suficiente para que os sistemas diferenciais simpléticos X e $\tilde{X}$ sejam isomorfos. Por exemplo, se X^{op} denota o sistema oposto a X (vide Exemplo 6.1.12) então v é uma solução de X se e somente se v é uma solução de X^{op} mas em geral X não é isomorfo a X^{op}; de fato, se X for isomorfo a X^{op} então $n_+(B) = n_+(B^{\mathrm{op}}) = n_+(-B)$ (vide (6.1.24) e (6.1.38)), o que não é verdade se $n_+(B) \neq \frac{n}{2}$.

LEMA 6.1.19. *Se* $\phi\colon (X, \ell_0) \cong (\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$ *então um instante* $t \in \,]a, b]$ *é* (X, ℓ_0)*-focal se e somente se* t *é* $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$*-focal. A multiplicidade e a assinatura de* t *como instante* (X, ℓ_0)*-focal coincidem respectivamente com a multiplicidade e a assinatura de* t *como instante* $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$*-focal; além do mais, um instante* (X, ℓ_0)*-focal* t *é não-degenerado se e somente se* t *é não-degenerado como instante* $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$*-focal. Também,* (X, ℓ_0) *possui condição inicial não-degenerada se e somente se* $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$ *possui condição inicial não-degenerada.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\tilde{\mathbb{V}}$ denota o conjunto das $(\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$-soluções e se $\tilde{\mathbb{V}}[t]$ é definido de modo análogo a (6.1.13) para cada $t \in [a, b]$ então segue facilmente do Lema 6.1.16 que:

$$\tilde{\mathbb{V}}[t] = Z(t)\big(\mathbb{V}[t]\big);$$

além do mais, (6.1.38) nos diz que $\tilde{B}(t)^{-1}$ é o push-forward de $B(t)^{-1}$ pelo isomorfismo $Z(t)$. A conclusão segue (vide também a Observação 6.1.7 e (6.1.42)). □

O teorema a seguir nos diz que um sistema diferencial simplético com componentes suficientemente regulares é isomorfo a uma equação de Morse-Sturm da forma (6.1.21).

TEOREMA 6.1.20. *Seja* X *um sistema diferencial simplético com componentes* A, B, C *tais que* A *é de classe* C^1 *e* B *é de classe* C^2*; então existe um isomorfismo* $\phi\colon X \cong \tilde{X}$*, sendo* $\tilde{X}$ *um sistema diferencial simplético cujas componentes* $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *e* $\tilde{C}$ *satisfazem* $\tilde{A}(t) = 0$ *e* $\tilde{B}(t) = \eta_{n-k,k}$*, para todo* $t \in [a, b]$*, onde* $\eta_{n-k,k}$ *é a matriz (constante) definida em (4.1.7). Além do mais, se* A *é de classe* C^{p+1}*,* B *é de classe* C^{p+2} *e* C *é de classe* C^p

($0 \le p \le +\infty$) então o isomorfismo $\phi\colon X \cong \tilde{X}$ pode ser escolhido de modo que sua componente Z seja de classe C^{p+2} e sua componente W seja de classe C^{p+1}; com tal escolha $\tilde{C}$ será de classe C^p.

Demonstração. Suponha que A é de classe C^{p+1}, B é de classe C^{p+2} e C é de classe C^p; segue diretamente da Proposição 4.1.39 (vide também Observação 6.1.2) que existe uma aplicação $Z\colon [a,b] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de classe C^{p+2} tal que:

$$Z(t) \circ B(t) \circ Z(t)^* = \eta_{n-k,k}, \tag{6.1.43}$$

para todo $t \in [a,b]$; tomando por exemplo $W = 0$ vemos (usando (6.1.37), (6.1.38), (6.1.39) e o Lema 6.1.15) que o sistema diferencial simplético X é isomorfo a um sistema diferencial simplético $\tilde{X}$ com componentes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ tais que $\tilde{A}$ é de classe C^{p+1}, $\tilde{B}$ é constante igual a $\eta_{n-k,k}$ e $\tilde{C}$ é de classe C^p.

Tendo em mente que a relação de isomorfia entre sistemas diferenciais simpléticos é transitiva (vide Lema 6.1.17), o argumento acima mostrou que não há perda de generalidade em supor que o sistema diferencial simplético original X é tal que $B(t) = \eta_{n-k,k}$ para todo t. Usando as fórmulas (6.1.37), (6.1.38), (6.1.39) e o Lema 6.1.15 vemos que para completar a demonstração é suficiente encontrar uma aplicação Z de classe C^{p+2} e uma aplicação W de classe C^{p+1} como em (6.1.36) de modo que:

$$\eta_{n-k,k} = Z(t) \circ \eta_{n-k,k} \circ Z(t)^*, \tag{6.1.44}$$

$$Z'(t) = Z(t) \circ \big(\eta_{n-k,k} \circ W(t) - A(t)\big), \tag{6.1.45}$$

para todo $t \in [a,b]$.

Com esse objetivo, considere o subgrupo $\mathrm{O}(n-k,k)$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ formado pelos isomorfismos T que *preservam*, a forma bilinear simétrica $\eta_{n-k,k} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, tais que $T^*(\eta_{n-k,k}) = \eta_{n-k,k}$; explicitamente:

$$\mathrm{O}(n-k,k) = \big\{T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : T^* \circ \eta_{n-k,k} \circ T = \eta_{n-k,k}\big\}.$$

Temos que $\mathrm{O}(n-k,k)$ é um subgrupo de Lie fechado de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; sua álgebra de Lie é dada por (vide também (2.1.5)):

$$\mathrm{so}(n-k,k) = \big\{Y \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) : Y^* \circ \eta_{n-k,k} + \eta_{n-k,k} \circ Y = 0\big\}.$$

Observe que, identificando também $\eta_{n-k,k}$ com uma forma bilinear simétrica em $\mathbb{R}^{n*}$, temos:

$$\begin{aligned} T \in \mathrm{O}(n-k,k) &\Leftrightarrow T^* \circ \eta_{n-k,k} \circ T = \eta_{n-k,k} \\ &\Leftrightarrow T = \eta_{n-k,k} \circ T^{*-1} \circ \eta_{n-k,k} \Leftrightarrow T \circ \eta_{n-k,k} \circ T^* = \eta_{n-k,k}; \end{aligned}$$

vemos então que a equação (6.1.44) é equivalente à condição que Z toma valores no grupo $\mathrm{O}(n-k,k)$. Fixada uma aplicação qualquer $W\colon [a,b] \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$ de classe C^{p+1}, então (6.1.45) é uma equação diferencial ordinária linear que nos permite determinar uma aplicação Z de classe C^{p+2} no intervalo $[a,b]$; escolhendo $Z(a) = \mathrm{Id}$ teremos que $Z(t)$ é inversível[1] para todo t. Se conseguirmos determinar W de modo que

$$\eta_{n-k,k} \circ W(t) - A(t) \in \mathrm{so}(n-k,k), \tag{6.1.46}$$

para todo t então seguirá que Z toma valores em $\mathrm{O}(n-k,k)$ (vide Observação 2.1.4) e a demonstração ficará completa. Um cálculo simples mostra que, para $W(t)$ simétrica, (6.1.46) equivale a

$$W(t) = \frac{\eta_{n-k,k} \circ A(t) + A(t)^* \circ \eta_{n-k,k}}{2} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n), \tag{6.1.47}$$

o que completa a demonstração. □

Observação 6.1.21. Uma função $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é dita *real-analítica* se para todo $x^0 \in U$ podemos, numa vizinhança de x^0 em U, escrever f como a soma de uma *série de potências* em torno de x^0, ou seja:

$$f(x) = \sum_{\lambda} a_\lambda (x_1 - x_1^0)^{\lambda_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\lambda_m}, \tag{6.1.48}$$

para x próximo de x^0, onde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ percorre todas as m-uplas de inteiros não-negativos. Uma série de potências em torno de x^0, convergente numa vizinhança de x_0, converge absoluta e uniformemente numa vizinhança (possivelmente menor) de x^0. Segue então que a série (6.1.48) pode ser diferenciada termo a termo; em particular, toda função real-analítica é de classe C^∞ e o coeficiente a_λ em (6.1.48) é dado pela *fórmula de Taylor*:

$$a_\lambda = \frac{1}{\lambda_1! \cdots \lambda_m!} \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_m^{\lambda_m}} (x_1^0, \ldots, x_m^0), \tag{6.1.49}$$

onde $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$. Segue facilmente de (6.1.48) e (6.1.49) que o conjunto dos pontos de U onde f se anula juntamente com todas as suas derivadas parciais é aberto e fechado em U; em particular, *uma função real-analítica com domínio conexo que se anula num aberto não vazio é identicamente nula*. Se $m = 1$ e $U \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (abrimos aqui uma pequena exceção e admitimos que o intervalo U não seja aberto) então *uma função real-analítica f em $U \subset \mathbb{R}$ que não é identicamente nula possui apenas zeros isolados*; de fato, dado $x^0 \in U$ com $f(x^0) = 0$, podemos escrever $f(x)$ como o produto de uma potência de $x - x^0$ por uma função de classe C^∞ (dada por uma série de potências em torno de x^0) que não se anula em x^0.

Para o desenvolvimento da teoria das funções real-analíticas, é essencial o estudo simultâneo da teoria das funções holomorfas; uma função $\varphi\colon V \to \mathbb{C}^n$ definida num aberto $V \subset \mathbb{C}^m$ é dita *holomorfa* se φ é de classe C^1 e

[1]Isso segue da teoria elementar dos sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias; mais explicitamente, Z^* será a *matriz fundamental* do sistema $v'(t) = (\eta_{n-k,k} \circ W(t) - A(t))^* v(t)$.

sua diferencial em cada ponto de V é um operador $\mathbb{C}$-linear (vide também Exemplo 1.3.22). Usando a *fórmula integral de Cauchy*[2], mostra-se que toda função holomorfa é de classe C^∞ (vide [**29**, Corolário 2.2.2]) e também que (identificando $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ e $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$) *toda função holomorfa é real-analítica* (vide [**29**, Teorema 2.2.6]); além do mais, usando a série (6.1.48), é fácil ver que *toda função real-analítica se estende localmente a uma função holomorfa.*

Propriedades elementares das funções real-analíticas, como o fato que a soma, produto e a composição de funções real-analíticas é ainda real-analítica podem ser mostrados facilmente usando o fato (trivial) que tais propriedades valem no caso de funções holomorfas; segue-se sempre o seguinte roteiro: estende-se as funções real-analíticas dadas a funções holomorfas, usa-se uma versão do resultado que deseja-se mostrar para funções holomorfas e então obtêm-se a conclusão observando que restrições de funções holomorfas são real-analíticas.

Por exemplo, considere uma equação diferencial ordinária

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{6.1.50}$$

onde t toma valores num intervalo em $\mathbb{R}$, $x(t)$ toma valores em $\mathbb{R}^n$ e f é real-analítica num aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$; mostra-se então que *qualquer solução x de* (6.1.50) *é real-analítica* (vale na verdade também a dependência real-analítica da solução com respeito a condições iniciais). A demonstração desse fato é feita da seguinte maneira; considera-se uma extensão local de f a uma função holomorfa φ num aberto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Podemos então considerar a seguinte *equação diferencial ordinária complexa*:

$$w'(z) = \varphi(z, w(z)), \tag{6.1.51}$$

onde z toma valores num aberto de $\mathbb{C}$, $w(z)$ toma valores num aberto de $\mathbb{C}^n$ e a derivada $w'(z) \in \mathbb{C}^n$ é entendida no sentido complexo (ou seja, w é holomorfa e $w'(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ é um operador $\mathbb{C}$-linear que identifica-se com o vetor $w'(z) \cdot 1 \in \mathbb{C}^n$). A equação (6.1.51) admite soluções locais (holomorfas) com condições iniciais $w(z_0) = w_0$ arbitrárias (vale até a dependência holomorfa da solução com respeito a condições iniciais). Esse fato pode ser mostrado, por exemplo[3], reescrevendo (6.1.51) como uma equação integral e usando o *Teorema de Ponto Fixo de Contrações*; detalhes podem ser encontrados em [**11**, Teorema 8.1, Capítulo 1]. Restringindo w de volta ao eixo real obtemos uma função real-analítica $t \mapsto w(t) \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ que satisfaz a equação:

$$w'(t) = \varphi(t, w(t)), \tag{6.1.52}$$

[2]A fórmula integral de Cauchy para funções holomorfas de várias variáveis é uma conseqüência direta da fórmula integral de Cauchy para funções holomorfas de uma variável e do Teorema de Fubini; vide [**29**, Teorema 2.2.1].

[3]Uma outra demonstração desse fato pode ser obtida interpretando (6.1.51) como uma *equação diferencial parcial (real) total* e aplicando o Teorema de Frobenius (na versão que aparece em [**58**, pgs. 45–46]).

para t num aberto de $I\!R$; como φ é uma extensão de f, toda solução de (6.1.50) é também uma solução de (6.1.52). Usando a unicidade da solução de (6.1.52) (com respeito à condições iniciais fixadas) concluímos que *toda solução de* (6.1.50) *é real-analítica*. Um enunciado explícito desse fato (juntamente com uma demonstração que segue essencialmente as idéias acima) pode ser encontrado em [**57**, Teorema 1.4.1].

6.1.1. A forma do índice. Nesta subseção mostraremos como associar a cada par (X, ℓ_0) uma forma bilinear simétrica limitada I num certo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$; mostraremos que a forma I é invariante por isomorfismos de pares (X, ℓ_0) e que o núcleo de I está intimamente relacionado com as soluções de (X, ℓ_0).

Sejam dados um sistema diferencial simplético X com componentes A, B, C e um subespaço Lagrangeano $\ell_0 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$; denotamos como sempre por (P, S) o par correspondente a ℓ_0 pela fórmula (6.1.10). Ao par (X, ℓ_0) associamos a forma bilinear simétrica (recorde (6.1.5)):

(6.1.53)
$$I(v, w) = \int_a^b B(t)\big(\alpha_v(t), \alpha_w(t)\big) + C(t)\big(v(t), w(t)\big)\,\mathrm{d}t - S\big(v(a), w(a)\big),$$

definida no subespaço fechado $\mathcal{H} \subset H^1([a, b], I\!R^n)$ dado por:

$$\mathcal{H} = \big\{v \in H^1([a, b], I\!R^n) : v(a) \in P,\ v(b) = 0\big\}. \tag{6.1.54}$$

É fácil ver que I é uma forma bilinear limitada em $\mathcal{H}$ (usando as idéias que aparecem nos Exemplos 5.1.42, 5.1.43 e 5.1.44).

Definição 6.1.22. A forma bilinear simétrica limitada $I \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ definida em (6.1.53) é chamada a *forma do índice* associada ao par (X, ℓ_0).

Na proposição a seguir vamos calcular o núcleo da forma do índice; a idéia básica é usar integração por partes em (6.1.53) para fatorar w no integrando e depois usar o *Lema Fundamental do Cálculo das Variações* (Lema 6.1.25 adiante). Infelizmente, encontramos o problema técnico que α_v a princípio não é derivável; esse problema é resolvido pelo Corolário 6.1.27 (cuja demonstração é deixada para depois da Proposição 6.1.23).

Recorde que o *suporte* de uma função w é definido como o fecho do conjunto dos pontos onde w não se anula.

Proposição 6.1.23. *O núcleo da forma do índice é dado por (recorde* (6.1.12)*):*

$$\mathrm{Ker}(I) = \big\{v \in \mathbb{V} : v(b) = 0\big\} = \mathbb{V} \cap \mathcal{H}. \tag{6.1.55}$$

Demonstração. Podemos reescrever (6.1.53) sob a forma:

(6.1.56)
$$\begin{aligned} I(v, w) &= \int_a^b \alpha_v(t)\big(w'(t) - A(t)w(t)\big) + C(t)\big(v(t), w(t)\big)\,\mathrm{d}t - S\big(v(a), w(a)\big) \\ &= \int_a^b \alpha_v(t)w'(t) + \big(C(t)v(t) - A(t)^*\alpha_v(t)\big)w(t)\,\mathrm{d}t - S\big(v(a), w(a)\big). \end{aligned}$$

Se $v \in \mathrm{Ker}(I)$ então $I(v,w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{H}$. Em particular, devemos ter $I(v,w) = 0$ para toda função $w\colon [a,b] \to I\!R^n$ de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$; usando (6.1.56) e o Corolário 6.1.27 concluímos que existe uma função absolutamente contínua $\alpha\colon [a,b] \to I\!R^{n*}$ tal que $\alpha_v(t) = \alpha(t)$ e $\alpha'(t) = C(t)v(t) - A(t)^*\alpha(t)$ para quase todo $t \in [a,b]$. Logo v, α são funções absolutamente contínuas que satisfazem (6.1.4) quase sempre, donde segue facilmente que (v, α_v) é uma solução (de classe C^1) de X. Podemos então escrever

$$\alpha_v(t)w'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\alpha_v(t)w(t)\big] - {\alpha_v}'(t)w(t), \tag{6.1.57}$$

e substituindo (6.1.57) em (6.1.56) (ou seja, usando integração por partes) obtemos:

(6.1.58)

$$\begin{aligned} I(v,w) = \int_a^b \big(-{\alpha_v}'(t) + C(t)v(t) - A(t)^*\alpha_v(t)\big)w(t)\,\mathrm{d}t - S\big(v(a), w(a)\big) \\ - \alpha_v(a)w(a) = -\big[\alpha_v(a)|_P + S(v(a))\big]w(a) = 0, \end{aligned}$$

para todo $w \in \mathcal{H}$. Obviamente, para $w \in \mathcal{H}$, $w(a)$ pode assumir qualquer valor em P e portanto (6.1.58) implica que v é uma (X, ℓ_0)-solução. Reciprocamente, se $v \in \mathbb{V} \cap \mathcal{H}$, podemos obter (6.1.58) a partir de (6.1.56) e concluímos que $v \in \mathrm{Ker}(I)$. □

COROLÁRIO 6.1.24. *Se $B(t)$ é definida positiva e $C(t)$ é semi-definida positiva para todo $t \in [a,b]$ e se S é semi-definida negativa então (X, ℓ_0) não tem instantes focais em $[a,b]$; também, se $B(t)$ é definida negativa e $C(t)$ é semi-definida negativa para todo $t \in [a,b]$ e se S é semi-definida positiva então (X, ℓ_0) não tem instantes focais em $[a,b]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Supondo $B(t)$ definida positiva, $C(t)$ semi-definida positiva para todo $t \in [a,b]$ e S semi-definida negativa então é fácil ver que a forma do índice I é definida positiva[4] e portanto $\mathrm{Ker}(I) = \{0\}$; de (6.1.55) segue então que $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal. Repetindo o mesmo argumento para o par $(X|_{[a,t]}, \ell_0)$, $t \in\,]a,b]$, concluímos que (X, ℓ_0) não tem instantes focais em $[a,b]$; isso completa a demonstração da primeira parte do enunciado. A segunda parte do enunciado é provada de maneira similar (ou então aplicando a primeira parte da demonstração ao par oposto $(X^{\mathrm{op}}, \ell_0^{\mathrm{op}})$; vide Exemplo 6.1.29 adiante). □

Passamos agora à demonstração de alguns resultados técnicos.

LEMA 6.1.25 (fundamental do cálculo das variações). *Se $\sigma\colon [a,b] \to I\!R^{n*}$ é uma função (Lebesgue) integrável tal que*

$$\int_a^b \sigma(t)w(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{6.1.59}$$

[4]Supondo $I(v,v) = 0$ concluímos que v é solução da equação diferencial linear homogênea $v'(t) = A(t)v(t)$; como $v(b) = 0$ concluímos que $v \equiv 0$.

para toda função $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^∞ *com suporte contido em* $]a,b[$*, então* $\sigma = 0$ *quase sempre em* $[a,b]$*. Em particular, se* σ *é contínua então* σ *é identicamente nula em* $[a,b]$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar, observamos que o caso geral pode ser reduzido ao caso $n = 1$. De fato, se $(e_i)_{i=1}^n$ e $(e_i^*)_{i=1}^n$ denotam respectivamente as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n*}$ então, escrevendo $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i e_i^*$, temos:

$$\int_a^b \sigma(t)(w_0(t)e_i)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sigma_i(t)w_0(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

para toda função $w_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$; supondo o lema já demonstrado para $n = 1$ concluímos que $\sigma_i = 0$ quase sempre e, como i é arbitrário, segue que $\sigma = 0$ quase sempre.

Suponha agora que $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável tal que (6.1.59) vale para toda função $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$; considere o conjunto mensurável:

$$S = \{t \in \,]a,b[\, : \sigma(t) > 0\}.$$

Denote por $\mathfrak{m}$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$; como σ é integrável, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo subconjunto $D \subset [a,b]$ com $\mathfrak{m}(D) < \delta$ vale $\int_D |\sigma| < \varepsilon$ (essa propriedade é conhecida como a *continuidade absoluta* da integral $\int |\sigma|$ com respeito à medida $\mathfrak{m}$; vide [**17**, Corolário 4.1.2]). A regularidade da medida de Lebesgue implica que existem $K \subset S$ compacto e $U \supset S$ aberto em $\mathbb{R}$ tais que $\mathfrak{m}(S \setminus K) < \frac{\delta}{2}$ e $\mathfrak{m}(U \setminus S) < \frac{\delta}{2}$; trocando U por $U \cap \,]a,b[$ se necessário podemos supor que $U \subset \,]a,b[$. Não é difícil mostrar[5] que existe uma função $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\mathrm{Im}(w) \subset [0,1]$, w é constante igual a 1 em K e tal que o suporte de w está contido em U; daí:

$$\int_a^b \sigma(t)w(t)\,\mathrm{d}t = \int_K \sigma(t)\,\mathrm{d}t + \int_{U\setminus K} \sigma(t)w(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{6.1.60}$$

Como $|\sigma(t)w(t)| \le |\sigma(t)|$ e $\mathfrak{m}(U \setminus K) < \delta$ segue que a terceira integral em (6.1.60) tem módulo menor que ε; daí a segunda integral em (6.1.60) é menor que ε. Calculamos:

$$0 \le \int_S \sigma(t)\,\mathrm{d}t = \int_K \sigma(t)\,\mathrm{d}t + \int_{S\setminus K} \sigma(t)\,\mathrm{d}t < 2\varepsilon,$$

já que $\mathfrak{m}(S \setminus K) < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que $\int_S \sigma = 0$ e como σ é positiva em S segue que $\mathfrak{m}(S) = 0$; repetindo o argumento acima para a função $-\sigma$ concluímos também que $\{t \in \,]a,b[\, : \sigma(t) < 0\}$ tem medida nula e portanto $\sigma = 0$ quase sempre em $[a,b]$. Isso completa a demonstração. □

[5]Basta usar uma *partição da unidade* em $\mathbb{R}$ *subordinada* à cobertura aberta $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus K) \cup U$; vide, por exemplo, [**36**, Teorema 7, §4, Capítulo 7].

COROLÁRIO 6.1.26. *Seja* $\sigma\colon [a,b] \to I\!R^{n*}$ *uma função integrável e suponha que* (6.1.59) *vale para toda função* $w\colon [a,b] \to I\!R^n$ *de classe* C^∞ *com suporte em* $]a,b[$ *e tal que* $\int_a^b w(t)\,\mathrm{d}t = 0$*. Então* σ *é igual quase sempre em* $[a,b]$ *a uma função constante; em particular, se* σ *é contínua então* σ *é constante em* $[a,b]$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $w_0\colon [a,b] \to I\!R^n$ uma função de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$ e tal que $\int_a^b w_0 = 1$; defina $c = \int_a^b \sigma w_0$. Daí:

$$\int_a^b (\sigma(t) - c)w(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{6.1.61}$$

para toda função w de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$ e integral zero, e também para $w = w_0$; mas isso implica que (6.1.61) vale para toda função $w\colon [a,b] \to I\!R^n$ de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$ e portanto $\sigma(t) = c$ para quase todo $t \in [a,b]$. □

COROLÁRIO 6.1.27. *Sejam* $\sigma_1, \sigma_2\colon [a,b] \to I\!R^{n*}$ *funções integráveis tais que*

$$\int_a^b \sigma_1(t)w'(t) + \sigma_2(t)w(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{6.1.62}$$

para toda função $w\colon [a,b] \to I\!R^n$ *de classe* C^∞ *com suporte em* $]a,b[$*. Então existe uma função absolutamente contínua* $\tau\colon [a,b] \to I\!R^{n*}$ *tal que* $\tau = \sigma_1$ *e* $\tau' = \sigma_2$ *quase sempre em* $[a,b]$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Defina $\tau_0(t) = \int_a^t \sigma_2(s)\,\mathrm{d}s$. Daí τ_0 é absolutamente contínua e a identidade (6.1.62) pode ser reescrita como:

$$\int_a^b \sigma_1(t)w'(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\tau_0(t)w(t)\big] - \tau_0(t)w'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(\sigma_1(t) - \tau_0(t)\big)w'(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

para toda função w de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$; mas $z = w'$ é uma função arbitrária de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$ e integral zero, donde o Corolário 6.1.26 implica que $\sigma_1 - \tau_0$ é igual quase sempre em $[a,b]$ a uma função constante. Isso completa a demonstração. □

EXEMPLO 6.1.28. Se X é uma equação de Morse-Sturm (vide Exemplo 6.1.11) então a forma do índice I é dada por:

$$I(v,w) = \int_a^b g(t)\big(v'(t), w'(t)\big) + g(t)\big(R(t)v(t), w(t)\big)\,\mathrm{d}t - S\big(v(a), w(a)\big),$$

para todos $v, w \in \mathcal{H}$.

EXEMPLO 6.1.29. Se X^{op} denota o sistema diferencial simplético oposto a X (vide Exemplo 6.1.12) e $(X^{\mathrm{op}}, \ell_0^{\mathrm{op}})$ denota o par oposto a (X, ℓ_0) então segue trivialmente de (6.1.24) e (6.1.26) que a forma do índice I^{op} associada ao par $(X^{\mathrm{op}}, \ell_0^{\mathrm{op}})$ é dada por:

$$I^{\mathrm{op}} = -I.$$

Mostremos agora a invariância por isomorfismos da forma do índice.

PROPOSIÇÃO 6.1.30. *Considere um isomorfismo* $\phi\colon (X,\ell_0) \cong (\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$*; denote por* $I \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ *a forma do índice correspondente ao par* (X,ℓ_0) *e por* $\tilde{I} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\tilde{\mathcal{H}})$ *a forma do índice correspondente ao par* $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$*. Se* Z *e* W *denotam as componentes de* ϕ *então temos um isomorfismo topológico:*

$$\mathcal{H} \ni v \longmapsto Zv \in \tilde{\mathcal{H}}; \tag{6.1.63}$$

além do mais a forma bilinear $\tilde{I}$ *coincide com o push-forward de* I *pelo isomorfismo* (6.1.63)*, ou seja:*

$$\tilde{I}(Zv, Zw) = I(v,w),$$

para todos $v, w \in \mathcal{H}$*.*

DEMONSTRAÇÃO. O fato que (6.1.63) é um isomorfismo topológico segue facilmente de (6.1.42) e do fato que o operador de multiplicação em espaços H^1 é limitado (vide Exemplo 5.1.42). A fórma do índice $\tilde{I}$ é dada por:
(6.1.64)

$$\tilde{I}(\tilde{v},\tilde{w}) = \int_a^b \tilde{B}(t)\big(\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t),\tilde{\alpha}_{\tilde{w}}(t)\big) + \tilde{C}(t)\big(\tilde{v}(t),\tilde{w}(t)\big)\,\mathrm{d}t - \tilde{S}\big(\tilde{v}(a),\tilde{w}(a)\big),$$

onde $\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}$ e $\tilde{\alpha}_{\tilde{w}}$ são definidos como em (6.1.40). Fazendo $\tilde{v} = Zv$, $\tilde{w} = Zw$ em (6.1.64), um cálculo direto usando (6.1.37), (6.1.38), (6.1.39), (6.1.41) e (6.1.42) mostra que:

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}(Zv, Zw)\\
&= \int_a^b B(t)\big(\alpha_v(t),\alpha_w(t)\big) + C(t)\big(v(t),w(t)\big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[W(t)\big(v(t),w(t)\big)\big]\,\mathrm{d}t\\
&- S\big(v(a),w(a)\big) + W(a)\big(v(a),w(a)\big) = I(v,w),
\end{aligned}$$

para quaisquer $v, w \in \mathcal{H}$. Isso completa a demonstração. □

COROLÁRIO 6.1.31. *Pares* (X,ℓ_0) *e* $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ *que são estritamente isomorfos possuem a mesma forma do índice.* □

6.1.2. O índice de Maslov de um sistema diferencial simplético. Nesta subseção mostraremos que se X é um sistema diferencial simplético então, dado um Lagrangeano ℓ_0, podemos associar de maneira natural ao par (X,ℓ_0) uma curva no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ do espaço simplético $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$; sob condições adequadas poderemos então definir uma noção de índice de Maslov para o par (X,ℓ_0).

Nesta subseção consideraremos fixado um sistema diferencial simplético X juntamente com um Lagrangeano $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$; denotaremos *sempre* por L_0 o subespaço Lagrangeano:

$$L_0 = \{0\}^n \oplus \mathbb{R}^{n*} \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$$

e por Λ o Grassmanniano de Lagrangeanos do espaço simplético $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ munido de sua forma simplética canônica (6.1.1). Como sempre, denotamos por A, B e C as componentes de X e por Φ a matriz fundamental de X.

Definimos uma curva $\ell\colon [a,b] \to \Lambda$ de classe C^1 fazendo:

$$\ell(t) = \Phi(t)(\ell_0), \tag{6.1.65}$$

para todo $t \in [a,b]$; mais explicitamente temos:

$$\ell(t) = \big\{(v(t), \alpha_v(t)) : v \in \mathbb{V}\big\}. \tag{6.1.66}$$

Note que $\ell(a) = \ell_0$; levando em conta (6.1.66) e (6.1.17) vemos diretamente que:

$$L_0 \cap \ell(t) = \{0\}^n \oplus \mathbb{V}[t]^o, \tag{6.1.67}$$

para todo $t \in [a,b]$. Mostramos então o seguinte:

LEMA 6.1.32. *Um instante $t \in \,]a,b]$ é (X,ℓ_0)-focal se e somente se $\ell(t) \in \Lambda^{\geq 1}(L_0)$; além do mais, $\ell(t) \in \Lambda^k(L_0)$ se e somente se $\mathrm{mul}(t) = k$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue de (6.1.67) e (6.1.19). □

O Lema 6.1.32 dá uma primeira indicação de que as propriedades dos instantes focais do par (X,ℓ_0) podem ser estudadas através das interseções de ℓ com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$; para aprofundar esse estudo, vamos calcular a derivada de ℓ.

A linearização da ação natural do grupo simplético $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*},\omega)$ no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ nos fornece um anti-homomorfismo da álgebra de Lie $\mathrm{sp}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*},\omega)$ na álgebra de Lie dos campos vetoriais diferenciáveis em Λ. Tais conceitos foram definidos na Subseção 2.1.3; usamos aqui a notação introduzida naquela subseção. A identidade (6.1.7) nos diz que Φ é uma curva integral do campo vetorial dependente do tempo $(t,g) \mapsto X(t)^R(g)$ no grupo de Lie $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*},\omega)$; da Observação 2.1.22 e de (6.1.65) segue então que ℓ é uma curva integral do campo dependente do tempo $(t,m) \mapsto X(t)^*(m)$ em Λ, ou seja:

$$\ell'(t) = X(t)^*(\ell(t)), \tag{6.1.68}$$

para todo $t \in [a,b]$. A Proposição 2.5.10 nos dá:

$$X(t)^*(L) = \omega(X(t)\cdot,\cdot)|_{L\times L}, \tag{6.1.69}$$

para todo $L \in \Lambda$. Juntando então (6.1.68) e (6.1.69) obtemos:

$$\begin{aligned} \ell'(t)\big((0,\alpha),(0,\beta)\big) &= \omega\big(X(t)(0,\alpha),(0,\beta)\big) \\ &= \omega\big((B(t)\alpha, -A(t)^*\alpha),(0,\beta)\big) = B(t)(\alpha,\beta), \end{aligned} \tag{6.1.70}$$

para quaisquer $(0,\alpha),(0,\beta) \in L_0 \cap \ell(t)$. Mostramos então o seguinte:

LEMA 6.1.33. *Para todo $t \in [a,b]$ a restrição da forma bilinear simétrica $B(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^{n*})$ a $\mathbb{V}[t]^o$ coincide com o push-forward através do isomorfismo*

$$L_0 \cap \ell(t) \ni (0,\alpha) \longmapsto \alpha \in \mathbb{V}[t]^o$$

da restrição da forma bilinear $\ell'(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\ell(t))$ a $L_0 \cap \ell(t)$

DEMONSTRAÇÃO. Segue de (6.1.67) e (6.1.70). □

COROLÁRIO 6.1.34. *Um instante* (X, ℓ_0)*-focal* $t \in \,]a, b]$ *é não-degenerado se e somente se* ℓ *possui uma interseção não-degenerada com* $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ *no instante* t *(vide Definição 4.2.17); além do mais:*

$$\mathrm{sgn}(t) = \mathrm{sgn}\big(\ell'(t)|_{L_0 \cap \ell(t)}\big).$$

Também, o par (X, ℓ_0) *possui condição inicial não-degenerada se e somente se* ℓ *possui uma interseção não-degenerada com* $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ *no instante* $t = a$ *ou então* $\ell(a) \notin \Lambda^{\geq 1}(L_0)$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue das Observações 6.1.7 e 6.1.9. □

COROLÁRIO 6.1.35. *Se* $t_0 \in \,]a, b]$ *é um instante focal não-degenerado para* (X, ℓ_0) *então esse instante focal é* isolado*, i.e., nenhum* $t \neq t_0$ *suficientemente próximo de* t_0 *é* (X, ℓ_0)*-focal; além do mais, se* (X, ℓ_0) *possui condição inicial não-degenerada então não há instantes* (X, ℓ_0)*-focais numa vizinhança de* $t = a$*. Se* (X, ℓ_0) *possui condição inicial não-degenerada e* apenas *instantes focais não-degenerados então* (X, ℓ_0) *possui só um número finito de instantes focais.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 6.1.34, do Lema 6.1.32 e do Exemplo 4.2.18. □

Queremos agora definir o índice de Maslov de um par (X, ℓ_0); essencialmente, o índice de Maslov de (X, ℓ_0) deve ser definido como o índice de Maslov $\mu_{L_0}(\ell)$ da curva ℓ. O problema é que $\mu_{L_0}(\ell)$ só faz sentido se ℓ tem extremos em $\Lambda^0(L_0)$; supondo que $t = b$ não é um instante (X, ℓ_0)-focal, obtemos ao menos que $\ell(b) \in \Lambda^0(L_0)$ (vide Lema 6.1.32). O problema é que $\ell(a) = \ell_0$ em geral pode pertencer a $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$. A idéia é então "apagar" um pequeno segmento inicial de ℓ; formalmente, temos a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.1.36. Se o par (X, ℓ_0) possui condição inicial não-degenerada e se o instante final $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal então definimos o *índice de Maslov* do par (X, ℓ_0) fazendo:

$$i_{\mathrm{maslov}}(X, \ell_0) = i_{\mathrm{maslov}} = \mu_{L_0}\big(\ell_{[a+\varepsilon, b]}\big),$$

onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que não existam instantes (X, ℓ_0)-focais no intervalo $[a, a + \varepsilon]$.

Segue do Corolário 6.1.35 que existe de fato $\varepsilon > 0$ tal que (X, ℓ_0) não possui instantes focais em $[a, a + \varepsilon]$. Além do mais, a definição de i_{maslov} não depende da escolha de ε; de fato, se $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ e se (X, ℓ_0) não tem instantes focais em $[a, a + \varepsilon']$ então $\ell|_{[a+\varepsilon, a+\varepsilon']}$ é uma curva em $\Lambda^0(L_0)$ e portanto $\mu_{L_0}\big(\ell|_{[a+\varepsilon, a+\varepsilon']}\big) = 0$ (recorde Lema 4.2.14).

O índice de Maslov $i_{\mathrm{maslov}}(X, \ell_0)$ pode ser genericamente pensado como uma "contagem algébrica" do número de instantes focais do par (X, ℓ_0):

PROPOSIÇÃO 6.1.37. *Suponha que* (X, ℓ_0) *possui condição inicial não-degenerada e que o instante final* $t = b$ *não é* (X, ℓ_0)*-focal; se* (X, ℓ_0) *possui* apenas *instantes focais não-degenerados então* $((X, \ell_0)$ *possui apenas um* *número finito de instantes focais e) o índice focal coincide com o índice de Maslov:*

$$i_{\rm foc}(X,\ell_0)=i_{\rm maslov}(X,\ell_0).$$

Demonstração. Segue diretamente dos Corolários 4.2.19 e 6.1.34. □

Exemplo 6.1.38. Como vimos no Exemplo 6.1.10, se $B(t)$ é definida positiva para algum (e logo para todo) $t\in[a,b]$ então (X,ℓ_0) automaticamente possui condição inicial não-degenerada; além do mais, todo instante (X,ℓ_0)-focal $t\in\,]a,b]$ é não-degenerado e $\mathrm{sgn}(t)=\mathrm{mul}(t)$. Portanto, se $t=b$ não é (X,ℓ_0)-focal então segue da Proposição 6.1.37 que

$$i_{\rm maslov}(X,\ell_0)=\sum_{t\in]a,b[}\mathrm{mul}(t)<+\infty.$$

Uma das propriedades fundamentais do índice de Maslov de um par é a sua estabilidade; temos a seguinte:

Proposição 6.1.39. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico e suponha que para todo $\lambda\in\mathcal{X}$ seja dado um sistema diferencial simplético X_λ de modo que a aplicação*

$$\mathcal{X}\times[a,b]\ni(\lambda,t)\longmapsto X_\lambda(t)\in\mathrm{sp}(I\!R^n\oplus I\!R^{n*},\omega)$$

é contínua; seja $\ell_0\colon\mathcal{X}\to\Lambda$ uma curva contínua no Grassmanniano de Lagrangeanos de modo que $\dim(L_0\cap\ell_0(\lambda))$ não depende de $\lambda\in\mathcal{X}$. Se para algum $\lambda_0\in\mathcal{X}$ o par $(X_{\lambda_0},\ell_0(\lambda_0))$ possui condição inicial não-degenerada e se $t=b$ não é $(X_{\lambda_0},\ell_0(\lambda_0))$-focal então existe uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de λ_0 em $\mathcal{X}$ tal que para todo $\lambda\in\mathfrak{U}$ temos que:

- *$(X_\lambda,\ell_0(\lambda))$ possui condição inicial não-degenerada;*
- *o instante $t=b$ não é $(X_\lambda,\ell_0(\lambda))$-focal;*
- *$i_{\rm maslov}(X_\lambda,\ell_0(\lambda))=i_{\rm maslov}(X_{\lambda_0},\ell_0(\lambda_0))$.*

Demonstração. Denotando por Φ_λ a matriz fundamental do sistema diferencial simplético X_λ então segue da teoria padrão sobre dependência contínua de soluções de equações diferenciais com respeito a parâmetros que a aplicação $(\lambda,t)\mapsto\Phi_\lambda(t)$ é contínua em $\mathcal{X}\times[a,b]$ (vide Observação 6.1.43 adiante). Defina $\ell_\lambda(t)=\Phi_\lambda(t)(\ell_0(\lambda))$; daí obviamente $(\lambda,t)\mapsto\ell_\lambda(t)$ é uma aplicação contínua em $\mathcal{X}\times[a,b]$ e segue de (6.1.68) que também $(\lambda,t)\mapsto\ell'_\lambda(t)$ é contínua em $\mathcal{X}\times[a,b]$. Em particular, como $\Lambda^0(L_0)$ é aberto, temos que $\ell_\lambda(b)\in\Lambda^0(L_0)$ para λ numa vizinhança de λ_0 em $\mathcal{X}$ e portanto para tais valores de λ o instante $t=b$ não é $(X_\lambda,\ell_0(\lambda))$-focal (vide Lema 6.1.32). Tendo em mente também o Corolário 6.1.34, segue diretamente do Lema 4.2.20 que existe $\varepsilon>0$ e uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de λ em $\mathcal{X}$ de modo que $(X_\lambda,\ell_0(\lambda))$ possui condição inicial não-degenerada e de modo que não existam instantes $(X_\lambda,\ell_0(\lambda))$-focais no intervalo $[a,a+\varepsilon]$ para todo $\lambda\in\mathfrak{U}$; daí

$$i_{\rm maslov}(X_\lambda,\ell_0(\lambda))=\mu_{L_0}\big(\ell_\lambda|_{[a+\varepsilon,b]}\big)$$

para todo λ numa vizinhança de λ_0 em $\mathcal{X}$. Segue da Observação 3.1.20 que a aplicação $\lambda\mapsto\ell_\lambda\in\mathcal{C}([a+\varepsilon,b],\Lambda)$ é contínua quando consideramos

$\mathcal{C}([a+\varepsilon,b],\Lambda)$ munido da topologia compacto-aberta. Pela Propriedade (6) no enunciado do Lema 4.2.14 concluímos que $i_{\rm maslov}(X_\lambda,\ell_0(\lambda))$ é constante quando λ varia numa vizinhança de λ_0 em $\mathcal{X}$; isso completa a demonstração. $\square$

COROLÁRIO 6.1.40. *Seja dada uma seqüência $(X_m)_{m\ge1}$ de aplicações $X_m\colon[a,b]\to\mathrm{sp}(I\!R^n\oplus I\!R^{n*},\omega)$ que converge uniformemente para uma aplicação X; suponha que X e X_m são sistemas diferenciais simpléticos para todo m. Seja dada também uma seqüência $(\ell_0^m)_{m\ge1}$ de espaços Lagrangeanos que converge para um certo $\ell_0\in\Lambda$, onde $\dim(L_0\cap\ell_0^m)=\dim(L_0\cap\ell_0)$ para todo m. Daí, se (X,ℓ_0) possui condição inicial não-degenerada e se $t=b$ não é um instante (X,ℓ_0)-focal então para m suficientemente grande temos que (X_m,ℓ_0^m) possui condição inicial não-degenerada, $t=b$ não é um instante (X_m,ℓ_0^m)-focal e*

$$i_{\rm maslov}(X_m,\ell_0^m)=i_{\rm maslov}(X_0,\ell_0).$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere o espaço topológico $\mathcal{X}=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, onde $\mathfrak{U}\subset\mathcal{X}$ é aberto se e somente se $\mathfrak{U}\subset\mathbb{N}$ ou o complementar de $\mathfrak{U}$ em $\mathcal{X}$ é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Definindo $X_{+\infty}=X$ então é fácil ver que as hipóteses da Proposição 6.1.39 verificam-se para $\lambda_0=+\infty$; a conclusão segue. $\square$

O índice de Maslov é invariante por isomorfismos de pares:

PROPOSIÇÃO 6.1.41. *Seja (X,ℓ_0) um par com condição inicial não-degenerada tal que o instante final $t=b$ não é (X,ℓ_0)-focal; se $\phi\colon(X,\ell_0)\cong(\tilde X,\tilde\ell_0)$ é um isomorfismo então:*

$$i_{\rm maslov}(X,\ell_0)=i_{\rm maslov}(\tilde X,\tilde\ell_0).$$

DEMONSTRAÇÃO. Denote por $\tilde\Phi$ a matriz fundamental de $\tilde X$ e considere a curva de Lagrangeanos $t\mapsto\tilde\ell(t)=\tilde\Phi(t)(\tilde\ell_0)$ associada ao par $(\tilde X,\tilde\ell_0)$; de (6.1.30) e (6.1.33) (vide Lema 6.1.16) segue que

$$\tilde\ell(t)=\phi(t)\circ\ell(t),$$

para todo $t\in[a,b]$. Como $\phi(t)(L_0)=L_0$ para todo t, a conclusão segue do Lema 4.2.7. $\square$

EXEMPLO 6.1.42. Seja $X^{\rm op}$ o sistema diferencial simplético oposto a X (vide Exemplo 6.1.12) e $(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})$ o par oposto a (X,ℓ_0). Associamos ao par $(X^{\rm op},\ell_0^{\rm op})$ uma curva $\ell^{\rm op}$ no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ como em (6.1.65). Usando (6.1.25) vê-se diretamente que:

$$\ell^{\rm op}(t)=\mathcal{O}(\ell(t)). \tag{6.1.71}$$

Como já observamos no Exemplo 6.1.12 temos que $\mathcal{O}^*(\omega)=-\omega$ e portanto o difeomorfismo induzido por $\mathcal{O}$ no Grassmanniano de subespaços n-dimensionais de $I\!R^n\oplus I\!R^{n*}$ restringe-se a um difeomorfismo (também denotado por $\mathcal{O}$) do Grassmanniano de Lagrangeanos Λ; além do mais,

$\mathcal{O}(L_0) = L_0$, donde $\mathcal{O}$ deixa o conjunto $\Lambda^0(L_0)$ invariante e portanto induz um homomorfismo

$$\mathcal{O}_*\colon H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)) \longrightarrow H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)).$$

É fácil ver que $\mathcal{O}_*$ é igual a menos o operador identidade; de fato, é suficiente mostrar que $\mathcal{O}_*$ coincide com $-\mathrm{Id}$ em algum gerador de $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$: por exemplo, seja $L_1 = I\!R^n \oplus \{0\}^n$ e considere a curva $l = \varphi_{L_0,L_1}^{-1} \circ \beta$ em Λ, onde $\beta\colon [0,1] \to \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ é uma curva qualquer tal que $\beta(0)$ e $\beta(1)$ são não-degeneradas e

$$n_+(\beta(1)) - n_+(\beta(0)) = 1.$$

Usando a definição da carta φ_{L_0,L_1} é fácil ver que

$$\varphi_{L_0,L_1}(\mathcal{O}(L)) = -\varphi_{L_0,L_1}(L), \quad L \in \Lambda^0(L_1),$$

e portanto a curva $\mathcal{O} \circ l$ é representada na carta φ_{L_0,L_1} pela curva $-\beta$; daí $\mu_{L_0}(l) = 1$ e $\mu_{L_0}(\mathcal{O} \circ l) = -1$ (recorde Teorema 4.2.16). Isso termina a demonstração da igualdade $\mathcal{O}_* = -\mathrm{Id}$; levando em conta (6.1.71) vemos então que:

$$i_{\mathrm{maslov}}(X^{\mathrm{op}}, \ell_0^{\mathrm{op}}) = -i_{\mathrm{maslov}}(X, \ell_0).$$

Observação 6.1.43. Considere o seguinte sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$x'_\lambda(t) = M_\lambda(t) x_\lambda(t), \quad t \in [a,b], \tag{6.1.72}$$

onde o parâmetro λ toma valores num certo espaço topológico $\mathcal{X}$ e M é uma aplicação contínua em $\mathcal{X} \times [a,b]$ tomando valores em $\mathcal{L}(I\!R^n)$. A *matriz fundamental* de (6.1.72) é definida como a solução da equação diferencial matricial:

$$\Psi'_\lambda(t) = M_\lambda(t) \circ \Psi_\lambda(t), \tag{6.1.73}$$

satisfazendo a condição inicial $\Psi_\lambda(a) = \mathrm{Id}$ para todo $\lambda \in \mathcal{X}$. Um cálculo simples usando a *desigualdade de Gronwall* (vide, por exemplo, [**18**, Lema 3.9]) mostra que Ψ é contínua em $\mathcal{X} \times [a,b]$. Mais explicitamente, a desigualdade de Gronwall implica que se $\delta\colon [a,b] \to I\!R$ é uma aplicação contínua e se $k, K \in I\!R$, $k \geq 0$, são constantes tais que

$$\delta(t) \leq K + k \int_a^t \delta(s)\,\mathrm{d}s$$

então:

$$\delta(t) \leq K e^{k(t-a)}, \tag{6.1.74}$$

para todo $t \in [a,b]$. Fixando $\lambda_0 \in \mathcal{X}$, a compacidade do intervalo $[a,b]$ implica que a continuidade de M é uniforme com respeito à variável t, ou seja:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{t \in [a,b]} \|M_\lambda(t) - M_{\lambda_0}(t)\| = 0; \tag{6.1.75}$$

em particular existe $k \in I\!R$ tal que

$$\|M_\lambda(t)\| \le k,$$

para todo $t \in [a, b]$ e todo λ numa vizinhança de λ_0 em $\mathcal{X}$. Como $\Psi_\lambda(a) = \mathrm{Id}$ podemos reescrever (6.1.73) sob a forma:

$$\Psi_\lambda(t) = \mathrm{Id} + \int_a^t M_\lambda(s) \circ \Psi_\lambda(s)\,\mathrm{d}s;$$

definindo $\delta(t) = \|\Psi_\lambda(t) - \Psi_{\lambda_0}(t)\|$ calculamos:

$$\begin{aligned}\delta(t) &\le \int_a^t \|M_\lambda(s) \circ \Psi_\lambda(s) - M_{\lambda_0}(s) \circ \Psi_{\lambda_0}(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &\le \int_a^t \|M_\lambda(s) - M_{\lambda_0}(s)\|\,\|\Psi_{\lambda_0}(s)\| + \|M_\lambda(s)\|\delta(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

e aplicando (6.1.74) obtemos:

$$\delta(t) \le (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|\Psi_{\lambda_0}(t)\| \sup_{t\in[a,b]} \|M_\lambda(t) - M_{\lambda_0}(t)\|\, e^{k(b-a)},$$

o que, juntamente com (6.1.75), completa o argumento.

6.2. O Teorema do Índice

Nesta seção enunciamos o teorema central de todo este texto: o Teorema do Índice para Sistemas Diferenciais Simpléticos (Teorema 6.2.17). A parte inicial da seção consiste de uma série de construções necessárias para a formulação do enunciado do Teorema do Índice assim como de argumentos que motivam tais construções. Esta seção contém poucas demonstrações; deixamos apenas aquelas que consideramos ser úteis para motivar as idéias centrais. A demonstração do Teorema do Índice será feita mais adiante na Seção 6.3.

Consideraremos fixado ao longo da seção um sistema diferencial simplético X com componentes A, B, C e um subespaço Lagrangeano $\ell_0 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ correspondendo a um par (P, S) como em (6.1.10). Recorde (vide Observação 6.1.2) que o índice de $B(t)$ não depende de t e escrevemos:

$$n_-(B(t)) = n_-\big(B(t)^{-1}\big) = k, \tag{6.2.1}$$

para todo $t \in [a, b]$.

Começamos com o seguinte:

Lema 6.2.1. *Se B não é definida positiva (i.e., se $k \ne 0$) então a forma do índice I tem índice infinito.*

Demonstração. Seja v uma solução de X e seja $f\colon [a, b] \to I\!R$ uma função de classe C^1 com $f(a) = f(b) = 0$; um cálculo simples usando (6.1.6) mostra que:

(6.2.2)

$$\begin{aligned} I(fv,fv) &= \int_a^b (f')^2 B^{-1}(v,v) + 2ff'\alpha_v(v) + f^2\big[B(\alpha_v,\alpha_v) + C(v,v)\big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (f')^2 B^{-1}(v,v) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f^2\alpha_v(v)\big]\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f')^2 B^{-1}(v,v)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

onde omitimos o parâmetro t por simplicidade. Seja $t_0 \in\,]a,b[$; como $B(t_0)^{-1}$ não é definida positiva existe uma solução v de X tal que:

$$B(t_0)^{-1}(v(t_0), v(t_0)) < 0.$$

Por continuidade temos $B(t)^{-1}(v(t), v(t)) < 0$ para t em algum intervalo $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \subset\,]a,b[$; daí (6.2.2) implica que I é definida negativa no espaço de dimensão infinita formado pelos produtos fv onde $f\colon [a,b] \to I\!R$ percorre o espaço das funções de classe C^1 que se anulam fora de $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$. $\square$

Mostraremos adiante que quando B é definida positiva então o índice de I é finito (vide Corolário 6.2.21); quando B não é definida positiva, nosso objetivo é construir um subespaço de $\mathcal{H}$ onde I tem índice finito. Tal subespaço será construído com auxílio da seguinte:

DEFINIÇÃO 6.2.2. Seja $\mathcal{D}\colon [a,b] \to G_k(n)$ uma curva de classe C^p ($0 \le p \le +\infty$) no Grassmanniano de subespaços k-dimensionais de $I\!R^n$, onde k é dado em (6.2.1); se $B(t)^{-1}$ é definida negativa em $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_t \subset I\!R^n$ para todo $t \in [a,b]$ então dizemos que $\mathcal{D}$ é uma *distribuição maximal negativa* de classe C^p para o sistema diferencial simplético X (ou para B). A menos de menção explícita em contrário *toda distribuição maximal negativa considerada no texto será suposta ao menos de classe* C^1.

OBSERVAÇÃO 6.2.3. Dadas aplicações $Y_i\colon [a,b] \to I\!R^n$, $i = 1,\dots,k$, de classe C^p ($0 \le p \le +\infty$), se para cada $t \in [a,b]$ os vetores $Y_i(t)$, $i = 1,\dots,k$ geram um subespaço k-dimensional $\mathcal{D}(t)$ de $I\!R^n$ então $\mathcal{D}$ é uma aplicação de classe C^p a valores em $G_k(n)$; isso segue facilmente da Proposição 2.4.11, levando em conta que $\mathcal{D}(t)$ é a imagem do operador linear injetor $T(t) \in \mathcal{L}(I\!R^k, I\!R^n)$ cuja matriz possui os vetores $Y_i(t)$ em suas colunas. Reciprocamente, se $\mathcal{D}\colon [a,b] \to G_k(n)$ é uma aplicação de classe C^p então segue facilmente da Observação 2.4.9 que existe para cada $t \in [a,b]$ uma base $(Y_i(t))_{i=1}^k$ de $\mathcal{D}(t)$ tal que cada Y_i define uma aplicação de classe C^p em $[a,b]$; uma tal seqüência $(Y_i)_{i=1}^k$ de aplicações de classe C^p é chamada um *referencial de classe* C^p para $\mathcal{D}$.

OBSERVAÇÃO 6.2.4. Observamos que todo sistema diferencial simplético X admite uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ de classe C^∞; de fato, segue facilmente da Proposição 4.1.39 que existem aplicações contínuas $Y_i\colon [a,b] \to I\!R^n$, $i = 1,\dots,k$, de modo que para cada $t \in [a,b]$, $(Y_i(t))_{i=1}^k$ é uma base de um subespaço k-dimensional de $I\!R^n$ onde $B(t)^{-1}$ é definida negativa. Observe agora que cada Y_i é o limite uniforme de uma seqüência $(Y_i^m)_{n\ge1}$

de aplicações $Y_i^m\colon [a,b] \to I\!R^n$ de classe C^∞ (vide por exemplo [**36**, Teorema 10, §5, Capítulo 7]); daí é fácil ver que para todos $i, j = 1, \ldots, k$ temos:

$$\lim_{m\to+\infty} B(t)^{-1}\big(Y_i^m(t), Y_j^m(t)\big) = B(t)^{-1}\big(Y_i(t), Y_j(t)\big)$$

uniformemente em $t \in [a,b]$, donde segue facilmente que a matriz

$$\Big(B(t)^{-1}\big(Y_i^m(t), Y_j^m(t)\big)\Big)_{k\times k}$$

representa uma forma bilinear simétrica definida negativa em $I\!R^k$ para todo m suficientemente grande (vide Lema 4.1.29). Concluímos então que, para m suficientemente grande, se denotamos por $\mathcal{D}_t$ o espaço gerado pelos vetores $Y_i^m(t)$, $i = 1, \ldots, k$, então $\mathcal{D}$ é uma distribuição maximal negativa de classe C^∞ para X.

Definição 6.2.5. Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição maximal negativa para o sistema diferencial simplético X; dizemos que uma aplicação $v\colon [a,b] \to I\!R^n$ é *$\mathcal{D}$-horizontal* (ou simplesmente *horizontal*, quando $\mathcal{D}$ estiver subentendida) se $v(t) \in \mathcal{D}_t$ para todo $t \in [a,b]$. Uma aplicação absolutamente contínua $v\colon [a,b] \to I\!R^n$ é dita uma *solução de X ao longo de $\mathcal{D}$* quando para toda aplicação absolutamente contínua $\mathcal{D}$-horizontal $Y\colon [a,b] \to I\!R^n$ valem as condições:

(1) a aplicação $t \mapsto \alpha_v(t)Y(t)$ é absolutamente contínua em $[a,b]$;
(2) a igualdade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\alpha_v(t)Y(t)\big] = B(t)\big(\alpha_v(t), \alpha_Y(t)\big) + C(t)\big(v(t), Y(t)\big), \tag{6.2.3}$$

vale para quase todo $t \in [a,b]$.

Se $(Y_i)_{i=1}^k$ é um referencial de classe C^1 para $\mathcal{D}$ então é fácil ver (usando (6.1.6)) que uma aplicação absolutamente contínua $v\colon [a,b] \to I\!R^n$ é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$ se e somente se as condições (1) e (2) acima são satisfeitas para $Y = Y_i$, $1, \ldots, k$.

Observação 6.2.6. Se α_v e Y são aplicações de classe C^1 então a condição (2) na Definição 6.2.5 nos diz que a igualdade (6.2.3) é satisfeita para todo $t \in [a,b]$; nesse caso tal igualdade pode ser reescrita na forma:

$$\alpha_v{}'(t)Y(t) + \alpha_v(t)Y'(t) = B(t)\big(\alpha_v(t), \alpha_Y(t)\big) + C(t)\big(v(t), Y(t)\big); \tag{6.2.4}$$

levando em conta que $B(t)\big(\alpha_v(t), \alpha_Y(t)\big) = \alpha_v(t)\big(Y'(t) - A(t)Y(t)\big)$ vemos que (6.2.4) equivale a:

$$\alpha_v{}'(t)Y(t) = \big(C(t)v(t) - A(t)^*\alpha_v(t)\big)Y(t).$$

Vemos em particular que *toda solução de X é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$*; o cálculo acima motiva a Definição 6.2.5.

Observação 6.2.7. Na Definição 6.2.5 a condição (1) significa (mais precisamente) que a aplicação $t \mapsto \alpha_v(t)Y(t)$ é igual quase sempre a alguma função absolutamente contínua $\tau\colon [a,b] \to I\!R$; daí, o enunciado mais preciso da condição (2) é obtido substituindo o lado esquerdo de (6.2.3) por $\tau'(t)$ (vide também Observação 5.1.28).

EXEMPLO 6.2.8. Se X é uma equação de Morse-Sturm (vide Exemplo 6.1.11) então uma aplicação absolutamente contínua $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$ se e somente se para toda aplicação absolutamente contínua $\mathcal{D}$-horizontal $Y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ temos que a aplicação $t \mapsto g(t)\big(v'(t), Y(t)\big)$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ e vale a identidade:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[g(t)\big(v'(t), Y(t)\big)\big] = g(t)\big(v'(t), Y'(t)\big) + g(t)\big(R(t)v(t), Y(t)\big), \tag{6.2.5}$$

para quase todo $t \in [a,b]$. Na verdade, se $(Y_i)_{i=1}^k$ é um referencial de classe C^1 para $\mathcal{D}$ então v é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$ se e somente se a aplicação $t \mapsto g(t)\big(v'(t), Y_i(t)\big)$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ e vale a identidade (6.2.5) com $Y = Y_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Vamos agora calcular quais soluções de X ao longo de $\mathcal{D}$ são horizontais. Fixe um referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ de classe C^1 para $\mathcal{D}$; daí toda aplicação horizontal absolutamente contínua $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se escreve de modo único sob a forma:

$$v(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t) Y_i(t), \quad t \in [a,b], \tag{6.2.6}$$

onde $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^k$ é absolutamente contínua. Usando (6.1.6) obtemos:

$$\alpha_v(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t)\alpha_{Y_i}(t) + f_i'(t) B(t)^{-1} Y_i(t); \tag{6.2.7}$$

daí, se v é dado por (6.2.6) e $Y = Y_j$ a identidade (6.2.3) fica:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^k f_i \alpha_{Y_i}(Y_j) + f_i' B^{-1}(Y_i, Y_j)\Big)' &= \sum_{i=1}^k f_i B(\alpha_{Y_i}, \alpha_{Y_j}) + f_i' \alpha_{Y_j}(Y_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k f_i C(Y_i, Y_j), \quad j = 1, \ldots, k,\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

onde omitimos o parâmetro t por simplicidade. Para simplificar a fórmula (6.2.8) definimos formas bilineares simétricas $\mathfrak{B}(t), \mathcal{C}(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^k)$ e um operador linear $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k*}\big)$ cujas matrizes[6] com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^k$ são dadas por:

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}_{ij}(t) = B(t)^{-1}\big(Y_i(t), Y_j(t)\big), \qquad \mathcal{A}_{ij}(t) = \alpha_{Y_j}(t) Y_i(t) \\ \mathcal{C}_{ij}(t) = B(t)\big(\alpha_{Y_i}(t), \alpha_{Y_j}(t)\big) + C(t)\big(Y_i(t), Y_j(t)\big);\end{gathered} \tag{6.2.9}$$

[6]A matriz $(\mathcal{A}_{ij}(t))_{k\times k}$ descrita em (6.2.9) representa o *operador linear* $\mathcal{A}(t)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k*}$; a forma bilinear em $\mathbb{R}^k$ canonicamente identificada com $\mathcal{A}(t)$ seria representada pela *matriz transposta* de $(\mathcal{A}_{ij}(t))_{k\times k}$ (vide Observação 1.1.2).

note que o fato que $B(t)^{-1}$ é definida negativa em $\mathcal{D}_t$ implica que $\mathfrak{B}(t)$ é definida negativa (e em particular não-degenerada) em $I\!R^k$. Usando (6.2.9), podemos reescrever (6.2.8) de maneira mais eficiente:

$$\big(\mathfrak{B}f' + \mathcal{A}f\big)' = \mathcal{A}^* f' + \mathcal{C}f; \tag{6.2.10}$$

fazendo a substituição

$$\varphi = \mathcal{A}f + \mathfrak{B}f'$$

em (6.2.10) obtemos o seguinte sistema linear homogêneo de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} f' = -(\mathfrak{B}^{-1}\circ\mathcal{A})f + \mathfrak{B}^{-1}\varphi, \\ \varphi' = (\mathcal{C} - \mathcal{A}^*\circ\mathfrak{B}^{-1}\circ\mathcal{A})f + (\mathcal{A}^*\circ\mathfrak{B}^{-1})\varphi. \end{cases} \tag{6.2.11}$$

Observe que (6.2.11) é na verdade um sistema diferencial simplético em $I\!R^k$; temos a seguinte:

Definição 6.2.9. O sistema diferencial simplético (6.2.11) (onde $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ e $\mathcal{C}$ são definidas em (6.2.9)) é chamado o *sistema reduzido* associado ao sistema diferencial simplético X e à escolha do referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ de classe C^1 para a distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$; denotamos a matriz de coeficientes de (6.2.11) por:

$$X_{\rm red} = \begin{pmatrix} A_{\rm red} & B_{\rm red} \\ C_{\rm red} & -A_{\rm red}^* \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{gathered} A_{\rm red}(t) = -\mathfrak{B}(t)^{-1}\circ\mathcal{A}(t), \quad B_{\rm red}(t) = \mathfrak{B}(t)^{-1}, \\ C_{\rm red}(t) = \mathcal{C}(t) - \mathcal{A}(t)^*\circ\mathfrak{B}(t)^{-1}\circ\mathcal{A}(t), \end{gathered} \tag{6.2.12}$$

para todo $t \in [a,b]$.

O sistema reduzido $X_{\rm red}$ depende realmente da escolha do referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ para $\mathcal{D}$ e não só da distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$; mostraremos adiante porém (vide Lema 6.2.33) que sistemas reduzidos produzidos por referenciais diferentes de uma mesma distribuição maximal negativa são isomorfos.

Os cálculos antes da Definição 6.2.9 mostraram o seguinte:

Lema 6.2.10. *Seja $v\colon [a,b] \to I\!R^n$ uma aplicação $\mathcal{D}$-horizontal absolutamente contínua; então v é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$ se e somente se a aplicação*

$$f = (f_1, \ldots, f_k)\colon [a,b] \longrightarrow I\!R^k$$

definida através de (6.2.6) *é uma solução (de classe C^1) do sistema reduzido $X_{\rm red}$.* □

Observação 6.2.11. Em algumas situações será útil considerar outros sistemas diferenciais simpléticos que são isomorfos a (6.2.11); considere então o sistema diferencial simplético $\tilde{X}_{\text{red}}$ com componentes $\tilde{A}_{\text{red}}$, $\tilde{B}_{\text{red}}$, $\tilde{C}_{\text{red}}$ definidas por:

$$\tilde{A}_{\text{red}}(t) = -\mathfrak{B}(t)^{-1} \circ \mathcal{A}_{\text{ant}}(t), \quad \tilde{B}_{\text{red}} = \mathfrak{B}(t)^{-1}, \tag{6.2.13}$$
$$\tilde{C}_{\text{red}}(t) = \mathcal{C}(t) - \mathcal{A}'_{\text{sim}}(t) + \mathcal{A}_{\text{ant}}(t) \circ \mathfrak{B}(t)^{-1} \circ \mathcal{A}_{\text{ant}}(t),$$

para todo $t \in [a,b]$, onde $\mathcal{A}_{\text{sim}}$, $\mathcal{A}_{\text{ant}}$ denotam respectivamente as componentes simétrica e anti-simétrica de $\mathcal{A}$ definidas por:

$$\mathcal{A}_{\text{sim}}(t) = \frac{\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}(t)^*}{2}, \quad \mathcal{A}_{\text{ant}}(t) = \frac{\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t)^*}{2}. \tag{6.2.14}$$

O sistema $\tilde{X}_{\text{red}}$ é estritamente isomorfo ao sistema X_{red} introduzido na Definição 6.2.9; de fato, um isomorfismo estrito $\phi\colon X_{\text{red}} \cong \tilde{X}_{\text{red}}$ pode ser definido atribuindo os seguintes valores para suas componentes Z, W:

$$Z(t) = \text{Id}, \quad W(t) = -\mathcal{A}_{\text{sim}}(t), \qquad t \in [a,b].$$

Observe que o sistema $\tilde{X}_{\text{red}}$ *só está bem definido quando* $\mathcal{A}$ *é de classe* C^1; isso ocorre por exemplo se o referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ for de classe C^2 e se as componentes A, B de X forem de classe C^1.

EXEMPLO 6.2.12. Se X é uma equação de Morse-Sturm (vide Exemplo 6.1.11) então os operadores $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ e $\mathcal{C}$ são representados pelas matrizes:

$$\mathfrak{B}_{ij}(t) = g(t)\big(Y_i(t), Y_j(t)\big), \quad \mathcal{A}_{ij}(t) = g(t)\big(Y_j'(t), Y_i(t)\big), \tag{6.2.15}$$
$$\mathcal{C}_{ij}(t) = g(t)\big(Y_i'(t), Y_j'(t)\big) + g(t)\big(R(t)Y_i(t), Y_j(t)\big),$$

para todos $t \in [a,b]$ e $i, j = 1, \ldots, k$.

Dada uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ para X definimos espaços:

$$\mathcal{K} = \big\{v \in H^1([a,b], I\!R^n) : v \text{ é uma solução de } X \text{ ao longo de } \mathcal{D} \text{ e } v(a) \in P,\ v(b) = 0\big\} \subset \mathcal{H}, \tag{6.2.16}$$

$$\mathcal{S} = \big\{v \in H^1([a,b], I\!R^n) : v \text{ é } \mathcal{D}\text{-horizontal e } v(a) = v(b) = 0\big\} \subset \mathcal{H}; \tag{6.2.17}$$

recorde que $\mathcal{H}$ é o subespaço fechado de $H^1([a,b], I\!R^n)$ onde está definida a forma do índice I (vide (6.1.54)).

Os espaços $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ são ortogonais com respeito à forma do índice:

LEMA 6.2.13. *Os espaços* $\mathcal{K}$ *e* $\mathcal{S}$ *são* I*-ortogonais, i.e., se* $v \in \mathcal{K}$ *e* $w \in \mathcal{S}$ *então* $I(v, w) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Como v é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$ e w é uma aplicação horizontal absolutamente contínua então $t \mapsto \alpha_v(t)w(t)$ é absolutamente contínua e a identidade (6.2.3) vale com $Y = w$; daí:

$$I(v, w) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\alpha_v(t)w(t)\big]\,\mathrm{d}t - S\big(v(a), w(a)\big) = 0,$$

já que $w(a) = w(b) = 0$ (veja também a Observação 6.2.14 abaixo). $\square$

OBSERVAÇÃO 6.2.14. Na verdade, é necessário um pouco mais de cuidado na demonstração do Lema 6.2.13; recorde que sabemos apenas que $t \mapsto \alpha_v(t)w(t)$ é igual quase sempre a uma aplicação absolutamente contínua $\tau\colon [a,b] \to I\!R$ (vide Observação 6.2.7). Devemos mostrar que $\tau(a) = \tau(b) = 0$, o que não é uma conseqüência trivial[7] do fato que $w(a) = w(b) = 0$. O argumento completo é o seguinte: escrevemos

$$w(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i(t)Y_i(t), \quad t \in [a,b], \tag{6.2.18}$$

onde $(Y_i)_{i=1}^k$ é um referencial de classe C^1 para $\mathcal{D}$ e cada $f_i\colon [a,b] \to I\!R$ é uma aplicação absolutamente contínua com $f_i(a) = f_i(b) = 0$. Daí para cada $i = 1,\ldots,k$ existe uma aplicação absolutamente contínua $\tau_i\colon [a,b] \to I\!R$ com $\tau_i(t) = \alpha_v(t)Y_i(t)$ para quase todo $t \in [a,b]$ e aplicando $\alpha_v(t)$ nos dois lados de (6.2.18) obtemos:

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i(t)\tau_i(t), \tag{6.2.19}$$

para todo $t \in [a,b]$, já que os dois lados de (6.2.19) são funções contínuas; concluímos então que $\tau(a) = \tau(b) = 0$.

Temos a seguinte relação entre a forma do índice de um sistema diferencial simplético e a forma do índice do sistema reduzido:

LEMA 6.2.15. *Considere o par* (X_{red}, L_0) *onde* L_0 *denota o subespaço Lagrangeano*

$$L_0 = \{0\}^n \oplus I\!R^{n*} \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*} \tag{6.2.20}$$

e X_{red} *é o sistema reduzido associado a* X *e a um referencial* $(Y_i)_{i=1}^k$ *de classe* C^1 *para uma distribuição maximal negativa* $\mathcal{D}$*; denote por* $I_{\mathrm{red}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H}_{\mathrm{red}})$ *a forma do índice associada a* (X_{red}, L_0)*, onde*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{red}} = \big\{ f \in H^1([a,b], I\!R^k) : f(a) = f(b) = 0 \big\}.$$

Temos um isomorfismo topológico

$$\mathcal{H}_{\mathrm{red}} \ni f = (f_1,\ldots,f_k) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} f_i Y_i \in \mathcal{S} \tag{6.2.21}$$

onde $\mathcal{S}$ *é definido em* (6.2.17)*; a forma do índice* I_{red} *associada ao par* (X_{red}, L_0) *coincide com o pull-back por* (6.2.21) *da restrição* $I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ *da forma do índice* I *associada ao par* (X, ℓ_0) *(aqui* $\ell_0 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ *é um subespaço Lagrangeano arbitrário).*

---

[7] Por exemplo, se $f_1(t) = 1/\sqrt{t}$ e $f_2(t) = \sqrt{t}$ então f_1 define um elemento de $L^1([0,1], I\!R)$ e f_2 é uma aplicação (absolutamente) contínua em $[0,1]$ com $f_2(0) = 0$, mas o único representante contínuo da classe $f_1 f_2 \in L^1([0,1], I\!R)$ não se anula em $t = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. O fato que (6.2.21) é um isomorfismo topológico segue facilmente do fato que o operador de multiplicação em espaços H^1 é limitado (vide Exemplo 5.1.42) e do fato que $H^1([a,b],\mathbb{R}^k) \cong \bigoplus_k H^1([a,b],\mathbb{R})$ (vide Exemplo 5.1.41).

Vamos agora exibir uma fórmula explícita para I_{red}; com esse objetivo definimos (em analogia a (6.1.5)) para toda função absolutamente contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação $\varphi_f \in L^1([a,b],\mathbb{R}^k)$ fazendo:

$$\varphi_f(t) = B_{\mathrm{red}}(t)^{-1}\big(f'(t) - A_{\mathrm{red}}(t)f(t)\big).$$

Daí I_{red} é dada por:

$$I_{\mathrm{red}}(f,g) = \int_a^b B_{\mathrm{red}}(t)\big(\varphi_f(t),\varphi_g(t)\big) + C_{\mathrm{red}}(t)\big(f(t),g(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

para todas $f,g \in \mathcal{H}_{\mathrm{red}}$. Usando (6.2.12) obtemos:

$$\varphi_f(t) = \mathcal{A}(t)f(t) + \mathfrak{B}(t)f'(t),$$

e portanto I_{red} é dada por:

$$I_{\mathrm{red}}(f,g) = \int_a^b \mathcal{A}(f,g') + \mathcal{A}(g,f') + \mathfrak{B}(f',g') + \mathcal{C}(f,g)\,\mathrm{d}t,$$

onde omitimos o parâmetro t por simplicidade. Fazendo

$$v(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t)Y_i(t), \quad w(t) = \sum_{j=1}^k g_j(t)Y_j(t)$$

então α_v é dada por (6.2.7) e α_w é dada por uma fórmula análoga; um cálculo direto usando (6.2.9) mostra que:

$$I(v,w) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^k \mathcal{C}_{ij}f_ig_j + \mathcal{A}_{ij}f_i'g_j + \mathcal{A}_{ji}f_ig_j' + \mathfrak{B}_{ij}f_i'g_j'\,\mathrm{d}t = I_{\mathrm{red}}(f,g),$$

o que completa a demonstração. □

OBSERVAÇÃO 6.2.16. É óbvio que o subespaço $\mathcal{S}$ é fechado em $\mathcal{H}$; na verdade, vale até mesmo que se uma seqüência $(v_m)_{m\ge1}$ de aplicações $v_m \in \mathcal{S}$ converge *pontualmente* para uma aplicação $v \in \mathcal{H}$ (i.e., $\lim_{m\to+\infty} v_m(t) = v(t)$ para todo $t \in [a,b]$) então $v \in \mathcal{S}$. Também o subespaço $\mathcal{K}$ é fechado em $\mathcal{H}$; para ver isso, considere um referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ de classe C^1 para $\mathcal{D}$ e observe que $\mathcal{K} = F^{-1}(\mathrm{Cte})$ onde $\mathrm{Cte} \subset L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big)$ denota[8] o subespaço (fechado, de dimensão finita) formado pelas aplicações constantes e

$$F\colon \mathcal{H} \longrightarrow L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big)$$

[8]O uso de $L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big)$ em vez de $L^2([a,b],\mathbb{R}^k)$ pode parecer um tanto estranho e no momento é irrelevante; o motivo de tal escolha ficará claro quando fizermos uma construção similar na Subseção 6.3.1 (vide (6.3.19)).

denota o operador limitado definido por:

$$F(v)(t)_i = \alpha_v(t)Y_i(t) - \int_a^t B(s)\big(\alpha_v(s), \alpha_{Y_i}(s)\big) + C(s)\big(v(s), Y_i(s)\big)\,\mathrm{d}s,$$

para todos $t \in [a, b]$ e $i = 1, \ldots, k$. O fato que F é realmente limitado é simples e pode ser mostrado usando as idéias que aparecem nos Exemplos 5.1.41, 5.1.42, 5.1.43 e 5.1.44.

Vamos agora enunciar o Teorema do Índice para Sistemas Diferenciais Simpléticos. Por questões de clareza de exposição decidimos não enunciar diretamente a versão mais geral possível do teorema; pequenos adendos ao enunciado serão feitos ao longo dos comentários que o seguem. Por ser o teorema central do texto decidimos (na medida do possível) tornar o enunciado abaixo auto-contido.

TEOREMA 6.2.17 (do Índice para Sistemas Diferenciais Simpléticos). *Seja* $X\colon [a, b] \to \mathrm{sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$ *um sistema diferencial simplético com componentes* A, B, C *de classe* C^∞ *e seja* $\ell_0 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ *um subespaço Lagrangeano correspondente a um par* (P, S) *como em* (6.1.10)*; suponha que o par* (X, ℓ_0) *possui condição inicial não-degenerada e que o instante final* $t = b$ *não é* (X, ℓ_0)*-focal. Denote por* $I\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to I\!R$ *a forma do índice associada ao par* (X, ℓ_0) *e seja* $\mathcal{D}$ *uma distribuição maximal negativa de classe* C^∞ *para* X*; considere os subespaços fechados* $\mathcal{K}, \mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ *definidos respectivamente em* (6.2.16) *e* (6.2.17)*. Temos então que o índice de* $I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}$ *e o co-índice de* $I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ *são finitos e vale a identidade:*

$$i_{\mathrm{maslov}}(X, \ell_0) = n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) - n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big) - n_-\big(B(a)^{-1}|_{P\times P}\big); \tag{6.2.22}$$

além do mais, os espaços $\mathcal{K}$ *e* $\mathcal{S}$ *são* I*-ortogonais e se o instante final* $t = b$ *não é* (X_{red}, L_0)*-focal (vide Definição 6.2.9 e fórmula* (6.2.20)*) então temos uma decomposição em soma direta:*

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{S}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração do Teorema 6.2.17 é o assunto da Seção 6.3. Note que a I-ortogonalidade de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ já foi demonstrada no Lema 6.2.13; também o fato que $\mathcal{K} \cap \mathcal{S} = \{0\}$ quando $t = b$ não é (X_{red}, L_0)-focal segue do que já foi discutido nesta seção (vide Lema 6.2.10). Veremos no Corolário 6.3.13 que de fato $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{S}$ quando $t = b$ não é (X_{red}, L_0)-focal. □

OBSERVAÇÃO 6.2.18. As hipóteses de regularidade sobre as componentes de X e sobre $\mathcal{D}$ que aparecem no enunciado do Teorema 6.2.17 podem ser enfraquecidas da seguinte maneira: se $t = b$ não é um instante (X_{red}, L_0)-focal então é suficiente supor que A é de classe C^1, B é de classe C^2 e que a distribuição $\mathcal{D}$ é de classe C^2 (como sempre, supomos C contínua); se $t = b$ é (X_{red}, L_0)-focal então devemos supor também que A é de classe C^2, B é de classe C^3, C é de classe C^1 e a distribuição $\mathcal{D}$ é de classe C^3.

OBSERVAÇÃO 6.2.19. A hipótese que $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal no enunciado do Teorema 6.2.17 pode ser enfraquecida. Explicitamente, suponha que A é de classe C^2, B é de classe C^3, C é de classe C^1 e a distribuição $\mathcal{D}$ é de classe C^2; daí se $t = b$ não é $(X_{\rm red}, L_0)$-focal e se $t = b$ é um instante (X, ℓ_0)-focal não-degenerado então, no lugar de (6.2.22), temos a identidade:

(6.2.23)
$$\begin{aligned} i_{\rm maslov}\big(X|_{[a,b-\varepsilon]}, \ell_0\big) &= n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) - n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big) \\ &\qquad - n_-\big(B(a)^{-1}|_{P\times P}\big) + n_-\big(B(b)^{-1}|_{\mathbb{V}[b]^\perp\times\mathbb{V}[b]^\perp}\big), \end{aligned}$$

onde o complemento ortogonal em $\mathbb{V}[b]^\perp$ é tomado com respeito a $B(b)^{-1}$ (recorde também (6.1.13)) e $\varepsilon > 0$ é escolhido suficientemente pequeno de modo que não existam instantes (X, ℓ_0)-focais no intervalo $[b - \varepsilon, b[$ (recorde Corolário 6.1.35).

OBSERVAÇÃO 6.2.20. A hipótese que $t = b$ não seja um instante focal para o par $(X_{\rm red}, L_0)$ que aparece na segunda parte do enunciado do Teorema 6.2.17 (e que é mencionada na Observação 6.2.19) na verdade não depende do referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ de classe C^1 escolhido para a distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$; de fato, veremos no Lema 6.2.33 que sistemas reduzidos associados a referenciais diferentes de uma mesma distribuição $\mathcal{D}$ são isomorfos (recorde também o Lema 6.1.19).

Quando B é definida positiva (i.e., $k = 0$) então uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ para X é tal que $\mathcal{D}_t = \{0\}$ para todo t; daí o espaço $\mathcal{K}$ coincide simplesmente com todo o domínio $\mathcal{H}$ da forma do índice e $\mathcal{S} = \{0\}$. O sistema reduzido $X_{\rm red}$ é um sistema trivial (i.e., um sistema em $\mathbb{R}^0 = \{0\}$) e logo não existem instantes $(X_{\rm red}, L_0)$-focais; o Teorema 6.2.17 reduz-se então ao seguinte corolário que é na verdade uma versão do clássico Teorema do Índice de Morse:

COROLÁRIO 6.2.21. *Seja X um sistema diferencial simplético com componentes A, B e C de classe C^∞ e suponha que $B(t)$ é definida positiva para algum (e logo para todo) $t \in [a, b]$; se $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ é um subespaço Lagrangeano qualquer e $I\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ denota a forma do índice associada ao par (X, ℓ_0) então o índice de I é finito e é dado por:*

$$n_-(I) = \sum_{t\in]a,b[} \mathrm{mul}(t) < +\infty,$$

onde $\mathrm{mul}(t)$ *denota a multiplicidade de um instante (X, ℓ_0)-focal t (e convencionamos* $\mathrm{mul}(t) = 0$ *se t não é focal).*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 6.2.17 tendo em mente também os Exemplos 6.1.10 e 6.1.38; o caso que $t = b$ é (X, ℓ_0)-focal segue da fórmula (6.2.23) que generaliza (6.2.22). □

OBSERVAÇÃO 6.2.22. As hipóteses de regularidade sobre as componentes de X no enunciado do Corolário 6.2.21 podem ser enfraquecidas da seguinte forma: se $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal então é suficiente supor que A é de classe

C^1, B é de classe C^2 (e que C é contínua); se $t = b$ é (X, ℓ_0)-focal precisamos supor também que A é de classe C^2, B é de classe C^3 e que C é de classe C^1.

Usando o Corolário 6.2.21 podemos descrever mais explicitamente o termo $n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big)$ que aparece em (6.2.22); temos a seguinte:

Proposição 6.2.23. *Sejam X um sistema diferencial simplético com componentes A, B e C de classe C^∞, $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ um subespaço Lagrangeano, $\mathcal{D}$ uma distribuição maximal negativa de classe C^∞ para X e $(Y_i)_{i=1}^k$ um referencial de classe C^∞ para $\mathcal{D}$; denote por L_0 o Lagrangeano definido em* (6.2.20) *e por X_{red} o sistema reduzido associado a X e a $(Y_i)_{i=1}^k$. Se $\mathcal{S}$ é o espaço definido em* (6.2.17) *e I denota a forma do índice associada ao par (X, ℓ_0) então o co-índice de I em $\mathcal{S}$ é dado por:*

$$n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big) = \sum_{t\in]a,b[} \mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t) < +\infty, \tag{6.2.24}$$

onde $\mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t)$ *denota a multiplicidade de t como instante (X_{red}, L_0)-focal (sendo* $\mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t) = 0$ *se t não é (X_{red}, L_0)-focal).*

Demonstração. O Lema 6.2.15 nos diz que $I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ é um push-forward da forma do índice I_{red} associada ao par (X_{red}, L_0); observando que a componente B_{red} do sistema reduzido é definida negativa a conclusão segue da aplicação do Corolário 6.2.21 ao par $(X^{\mathrm{op}}_{\mathrm{red}}, L_0)$, onde $X^{\mathrm{op}}_{\mathrm{red}}$ denota o sistema oposto a X_{red} (recorde Exemplos 6.1.12 e 6.1.29). □

Observação 6.2.24. As hipóteses de regularidade sobre as componentes de X e sobre o referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ que aparecem no enunciado da Proposição 6.2.23 podem ser enfraquecidas da seguinte maneira: se $t = b$ não é (X_{red}, L_0)-focal então é suficiente supor que A é de classe C^1, B é de classe C^2 e que o referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ (e a distribuição $\mathcal{D}$) é de classe C^2 (como sempre, C é contínua); se $t = b$ é (X_{red}, L_0)-focal então precisamos supor também que A é de classe C^2, B é de classe C^3, C é de classe C^1 e que o referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ (e a distribuição $\mathcal{D}$) é de classe C^3.

Observação 6.2.25. Denote por $\mathcal{K}_\infty$, $\mathcal{S}_\infty$ respectivamente os subespaços de $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ formados pelas aplicações de classe C^∞, ou seja:

$$\mathcal{K}_\infty = \big\{v \in \mathcal{K} : v \text{ é de classe } C^\infty\big\}, \quad \mathcal{S}_\infty = \big\{v \in \mathcal{S} : v \text{ é de classe } C^\infty\big\}.$$

Suponha que X e $\mathcal{D}$ sejam de classe C^∞; se $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal ou se $t = b$ não é (X_{red}, L_0)-focal então segue dos Corolários 6.3.9 e 6.3.15 que existe um operador de projeção limitado $\pi\colon H^1([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}$ tal que $\pi(v)$ é de classe C^∞ sempre que v for de classe C^∞ (tais Corolários consideram apenas o caso de equações de Morse-Sturm; o caso geral segue usando o Teorema 6.1.20 e o Corolário 6.2.30). Sabe-se que o espaço das aplicações $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ é denso[9] em $H^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ (vide, por exemplo,

[9]Uma demonstração segue o seguinte roteiro: usando [**17**, Proposição 4.2.8] vemos que as funções constantes por partes formam um subespaço denso de $L^p([a,b], \mathbb{R}^n)$ para $p < +\infty$; técnicas elementares de partição da unidade (vide [**36**, §4, Capítulo VII]) mostram

[**9**, Teorema VIII.6]); usando o Lema 5.1.8, concluímos então que $\mathcal{K}_\infty$ é denso em $\mathcal{K}$. Usando o isomorfismo topológico (6.2.21) é também fácil ver que $\mathcal{S}_\infty$ é denso em $\mathcal{S}$. Tendo em mente então a Proposição 5.2.71 demonstramos o seguinte fato: *se X e $\mathcal{D}$ são de classe C^∞ e se $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal ou se $t = b$ não é $(X_{\rm red}, L_0)$-focal então*:

$$n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) = n_-\big(I|_{\mathcal{K}_\infty\times\mathcal{K}_\infty}\big), \quad n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big) = n_+\big(I|_{\mathcal{S}_\infty\times\mathcal{S}_\infty}\big).$$

EXEMPLO 6.2.26. Suponha que A é de classe C^1, B é de classe C^2 e que $(Y_i)_{i=1}^k$ é um referencial de classe C^2 para a distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$. Tendo em mente a Proposição 6.2.23 (e a Observação 6.2.24), vemos que o Corolário 6.1.24 implica que se a forma bilinear simétrica $C_{\rm red}(t)$ definida em (6.2.12) é semi-definida negativa para todo $t \in [a, b]$ então $n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big) = 0$; usando a Observação 6.2.11 (vide também Lema 6.1.19) vemos também que se a forma bilinear simétrica $\widetilde{C}_{\rm red}(t)$ definida em (6.2.13) é semi-definida negativa para todo $t \in [a, b]$ então concluímos novamente que $n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big) = 0$.

Mostraremos agora mais um adendo ao Teorema 6.2.17 que será usado na Seção 6.4 para demonstrar o Teorema do Índice para geodésicas semi-Riemannianas com extremos ortogonais a duas subvariedades (Proposição 6.4.13); surpreendentemente, a Proposição 6.2.27 abaixo também é útil como ferramenta para a demonstração do Teorema 6.2.17.

PROPOSIÇÃO 6.2.27. *Seja X um sistema diferencial simplético com componentes A, B, C e sejam $\ell_0, \ell_1 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ subespaços Lagrangeanos associados respectivamente a pares (P, S) e (Q, S_1) através da correspondência definida em* (6.1.10)*; temos que $P, Q \subset I\!R^n$ são subespaços e $S \in \mathcal{B}_{\rm sim}(P)$, $S_1 \in \mathcal{B}_{\rm sim}(Q)$ são formas bilineares simétricas. Suponha que $\mathcal{D}$ é uma distribuição maximal negativa de classe C^1 para X. Considere o subespaço fechado $\mathcal{H}^\#$ de $H^1([a, b], I\!R^n)$ definido por:*

$$\mathcal{H}^\# = \big\{v \in H^1([a, b], I\!R^n) : v(a) \in P,\ v(b) \in Q\big\};$$

definimos também uma forma bilinear simétrica $I^\# \in \mathcal{B}_{\rm sim}\big(\mathcal{H}^\#\big)$ e um subespaço fechado $\mathcal{K}^\# \subset \mathcal{H}^\#$ fazendo:

$$\mathcal{K}^\# = \big\{v \in \mathcal{H}^\# : v \text{ é uma solução de } X \text{ ao longo de } \mathcal{D}\big\},$$

(6.2.25)

$$I^\#(v, w) = \int_a^b B(t)\big(\alpha_v(t), \alpha_w(t)\big) + C(t)\big(v(t), w(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ - S\big(v(a), w(a)\big) + S_1\big(v(b), w(b)\big),$$

que funções constantes por partes são limite na topologia L^p ($p < +\infty$) de funções de classe C^∞ e portanto o espaço de funções de classe C^∞ é denso em $L^p([a, b], I\!R^n)$ para $p < +\infty$. O fato que as funções de classe C^∞ formam um subespaço denso de $W^{k,p}([a, b], I\!R^n)$ (para $p < +\infty$) segue então facilmente considerando o isomorfismo (5.1.32).

para todos $v, w \in \mathcal{H}^\#$*. Se* $t = b$ *não é* (X, ℓ_0)*-focal então vale a identidade:*

$$n_-\big(I^\#|_{\mathcal{K}^\# \times \mathcal{K}^\#}\big) = n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) + n_-\big(S_1 - \varphi_{L_1,L_0}(\ell(b))|_{Q\times Q}\big),$$

onde $L_1 = I\!R^n \oplus \{0\}^n$*,* $L_0 = \{0\}^n \oplus I\!R^{n*}$*,* φ_{L_1,L_0} *é a carta no Grassmanniano de Lagrangeanos* Λ *definida como em* (2.5.3) *e* ℓ *é a curva em* Λ *definida por* (6.1.65)*.*

Demonstração. O fato que $\mathcal{K}^\#$ é fechado em $\mathcal{H}^\#$ é mostrado com um argumento similar ao usado na Observação 6.2.16; note também que a hipótese que $t = b$ não é um instante (X, ℓ_0)-focal implica que $\ell(b)$ é transversal a L_0 (recorde Lema 6.1.32) e portanto a expressão $\varphi_{L_1,L_0}(\ell(b))$ faz sentido. Considere o subespaço $\mathbb{V}_Q \subset \mathcal{H}^\#$ definido por:

$$\mathbb{V}_Q = \big\{v \in \mathbb{V} : v(b) \in Q\big\} \subset \mathcal{K}^\# \subset \mathcal{H}^\#,$$

onde $\mathbb{V}$ é definido em (6.1.12); como $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal então a aplicação $\mathbb{V} \ni v \mapsto v(b)$ é um isomorfismo sobre $I\!R^n$ e daí é fácil ver que temos uma decomposição em soma direta:

$$\mathcal{K}^\# = \mathcal{K} \oplus \mathbb{V}_Q. \tag{6.2.26}$$

Substituindo a expressão $B\big(\alpha_v(t), \alpha_w(t)\big)$ por $\alpha_v(t)\big(w'(t) - A(t)w(t)\big)$ em (6.2.25) e fazendo integração por partes no termo $\alpha_v(t)w'(t)$ então um cálculo similar a (6.1.58) mostra que:

$$I^\#(v, w) = \alpha_v(b)w(b) + S_1\big(v(b), w(b)\big), \tag{6.2.27}$$

para todos $v \in \mathbb{V}_Q$, $w \in \mathcal{H}^\#$; em particular vemos que a decomposição (6.2.26) é $I^\#$-ortogonal, i.e., $I^\#(v, w) = 0$ para todos $v \in \mathbb{V}_Q$, $w \in \mathcal{K}$. A Proposição 4.1.23 nos diz então que:

$$n_-\big(I^\#|_{\mathcal{K}^\#\times\mathcal{K}^\#}\big) = n_-\big(I^\#|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) + n_-\big(I^\#|_{\mathbb{V}_Q\times\mathbb{V}_Q}\big).$$

Para completar a demonstração observe primeiramente que a restrição de $I^\#$ a $\mathcal{K}$ coincide com a restrição de I a $\mathcal{K}$; além do mais, é fácil ver usando (6.2.27) e a definição da carta φ_{L_1,L_0} que a restrição de $I^\#$ a $\mathbb{V}_Q$ é o pull-back através do isomorfismo $\mathbb{V}_Q \ni v \mapsto v(b) \in Q$ da forma bilinear simétrica $S_1 - \varphi_{L_1,L_0}(\ell(b))|_{Q\times Q}$. Isso completa a demonstração. □

Observação 6.2.28. Na verdade, com um certo esforço analítico adicional seria possível enfraquecer as hipóteses de regularidade sobre as componentes de X e sobre $\mathcal{D}$ no enunciado do Teorema 6.2.17 ainda mais do que mencionamos na Observação 6.2.18; explicitamente, se $t = b$ não é $(X_{\rm red}, L_0)$-focal então é suficiente supor A, B de classe C^1 e $\mathcal{D}$ de classe C^2 (com C contínua, obviamente) e se $t = b$ é $(X_{\rm red}, L_0)$-focal devemos supor que A, B, C são de classe C^1 e que $\mathcal{D}$ é de classe C^2. A fórmula (6.2.23) mencionada na Observação 6.2.19 para o caso que $t = b$ não é $(X_{\rm red}, L_0)$-focal mas é um instante (X, ℓ_0)-focal não-degenerado vale com A, B e C de classe C^1 e $\mathcal{D}$ de classe C^2. Com tais hipóteses de regularidade mais fracas, a demonstração do teorema do índice apresentada na Seção 6.3 não funciona;

ocorre que o uso do Teorema 6.1.20 que será feito para reduzir a demonstração do teorema do índice ao caso de equações de Morse-Sturm nos obriga a aumentar as hipótese de regularidade sobre $\mathcal{D}$ e as componentes de X. Tal redução ao caso de sistemas de Morse-Sturm simplifica os cálculos feitos nas Subseções 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3, mas na verdade tais cálculos poderiam ser feitos diretamente para um sistema diferencial simplético arbitrário (apenas com um pouco mais de trabalho) e daí obteríamos uma prova do Teorema 6.2.17 com as hipóteses de regularidade enfraquecidas que mencionamos acima.

6.2.1. Alguns resultados sobre isomorfismos de sistemas diferenciais simpléticos. Nesta subseção mostraremos a invariância por isomorfismos de alguns objetos e conceitos introduzidos na Seção 6.2.

LEMA 6.2.29. *Seja $\phi\colon X \cong \tilde{X}$ um isomorfismo com componentes Z, W. Se $\mathcal{D}$ é uma distribuição maximal negativa para X então*

$$[a,b] \ni t \longmapsto \tilde{\mathcal{D}}_t = Z(t)(\mathcal{D}_t) \tag{6.2.28}$$

é uma distribuição maximal negativa para $\tilde{X}$; além do mais, uma aplicação absolutamente contínua $v\colon [a,b] \to I\!R^n$ é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$ se e somente se a aplicação $t \mapsto \tilde{v}(t) = Z(t)v(t)$ é uma solução de $\tilde{X}$ ao longo de $\tilde{\mathcal{D}}$.

DEMONSTRAÇÃO. A fórmula (6.1.38) nos diz que $\tilde{B}(t)^{-1}$ é o push-forward de $B(t)^{-1}$ pelo isomorfismo $Z(t)$ e daí segue trivialmente que $\tilde{\mathcal{D}}$ é uma distribuição maximal negativa para $\tilde{X}$. Temos que $\tilde{v}$ é uma solução de $\tilde{X}$ ao longo de $\tilde{\mathcal{D}}$ se e somente se $t \mapsto \tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t)\tilde{Y}(t)$ (vide (6.1.40)) é absolutamente contínua e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t)\tilde{Y}(t)\big] = \tilde{B}(t)\big(\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t), \tilde{\alpha}_{\tilde{Y}}(t)\big) + \tilde{C}(t)\big(\tilde{v}(t), \tilde{Y}(t)\big), \tag{6.2.29}$$

para toda aplicação $\tilde{\mathcal{D}}$-horizontal absolutamente contínua $\tilde{Y}\colon [a,b] \to I\!R^n$; escrevendo $\tilde{Y}(t) = Z(t)Y(t)$ com Y uma aplicação $\mathcal{D}$-horizontal absolutamente contínua obtemos usando (6.1.41):

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t)\tilde{Y}(t) = \alpha_v(t)Y(t) + W(t)\big(v(t), Y(t)\big). \tag{6.2.30}$$

Daí segue que $t \mapsto \tilde{\alpha}_{\tilde{v}}(t)\tilde{Y}(t)$ é absolutamente contínua se e somente se $t \mapsto \alpha_v(t)Y(t)$ é absolutamente contínua; usando (6.1.41), (6.1.38) e (6.1.39) obtêm-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{B}\big(\tilde{\alpha}_{\tilde{v}}, \tilde{\alpha}_{\tilde{Y}}\big) &= B(\alpha_v + Wv, \alpha_Y + WY) \\ &= B(\alpha_v, \alpha_Y) + W(v' - Av, Y) \\ &\qquad + W(Y' - AY, v) + B(Wv, WY), \end{aligned} \tag{6.2.31}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}\big(\tilde{v}, \tilde{Y}\big) &= W(Av, Y) + C(v, Y) - B(Wv, WY) \\ &\qquad + W(v, AY) + W'(v, Y), \end{aligned} \tag{6.2.32}$$

onde omitimos o parâmetro t por simplicidade. De (6.2.30), (6.2.31) e (6.2.32) vê-se facilmente que (6.2.29) é equivalente a (6.2.3), o que completa a demonstração. $\square$

COROLÁRIO 6.2.30. *Seja* $\phi\colon (X,\ell_0) \cong (\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ *um isomorfismo com componentes* Z, W *e seja* $\mathcal{D}$ *uma distribuição maximal negativa para* X*; considere a distribuição maximal negativa* $\tilde{\mathcal{D}}$ *para* $\tilde{X}$ *definida em* (6.2.28)*. Se* $\mathcal{K}$ *é o espaço associado a* (X,ℓ_0) *e a* $\mathcal{D}$ *definido em* (6.2.16) *e se* $\tilde{\mathcal{K}}$ *é o espaço associado a* $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ *e a* $\tilde{\mathcal{D}}$ *definido em analogia a* (6.2.16) *então o isomorfismo topológico* (6.1.63) *induzido por* Z *leva* $\mathcal{K}$ *sobre* $\tilde{\mathcal{K}}$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue trivialmente do Lema 6.2.29 e de (6.1.42). $\square$

OBSERVAÇÃO 6.2.31. Obviamente, se $\phi\colon X \cong \tilde{X}$ é um isomorfismo com componentes Z e W, $\mathcal{D}$ é uma distribuição maximal negativa para X e $\tilde{\mathcal{D}}$ é definida em (6.2.28) então o isomorfismo topológico (6.1.63) induzido por Z leva $\mathcal{S}$ sobre $\tilde{\mathcal{S}}$, onde $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ são definidos respectivamente a partir de X e $\tilde{X}$ como em (6.2.17).

LEMA 6.2.32. *Seja* $\phi\colon X \cong \tilde{X}$ *um isomorfismo com componentes* Z, W*; seja* $\mathcal{D}$ *uma distribuição maximal negativa para* X *e seja* $\tilde{\mathcal{D}}$ *a distribuição maximal negativa para* $\tilde{X}$ *definida por* (6.2.28)*. Se* $(Y_i)_{i=1}^k$ *é um referencial de classe* C^1 *para* $\mathcal{D}$ *e se* $\tilde{Y}_i(t) = Z(t)Y_i(t)$, $t \in [a,b]$*, então* $(\tilde{Y}_i)_{i=1}^k$ *é um referencial de classe* C^1 *para* $\tilde{\mathcal{D}}$*; além do mais, o sistema reduzido* X_{red} *associado a* X *e a* $(Y_i)_{i=1}^k$ *é estritamente isomorfo ao sistema reduzido* $\tilde{X}_{\mathrm{red}}$ *associado a* $\tilde{X}$ *e a* $(\tilde{Y}_i)_{i=1}^k$.

DEMONSTRAÇÃO. A partir de $\tilde{X}$ e do referencial $(\tilde{Y}_i)_{i=1}^k$ definimos $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ e $\tilde{\mathcal{C}}$ em analogia a (6.2.9); um cálculo direto usando (6.1.38) e (6.1.41) mostra que:

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}(t) + \mathcal{W}(t), \quad \tilde{\mathfrak{B}}(t) = \mathfrak{B}(t),$$

onde $\mathcal{W}(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(I\!R^k)$ é representada pela matriz

$$\mathcal{W}_{ij}(t) = W(t)\big(Y_i(t), Y_j(t)\big).$$

Tendo em mente (6.2.12) calculamos agora as componentes $\tilde{A}_{\mathrm{red}}$ e $\tilde{B}_{\mathrm{red}}$ de $\tilde{X}_{\mathrm{red}}$:

$$\tilde{A}_{\mathrm{red}}(t) = A_{\mathrm{red}}(t) - B_{\mathrm{red}}(t) \circ \mathcal{W}(t), \quad \tilde{B}_{\mathrm{red}} = B_{\mathrm{red}}. \tag{6.2.33}$$

Se $f = (f_1,\ldots,f_k)$ é uma solução de X_{red} então pelo Lema 6.2.10, $\sum_{i=1}^k f_i Y_i$ é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$ e portanto, pelo Lema 6.2.29, $\sum_{i=1}^k f_i \tilde{Y}_i$ é uma solução de $\tilde{X}$ ao longo de $\tilde{\mathcal{D}}$; aplicando novamente o Lema 6.2.10 vemos que f é uma solução de $\tilde{X}_{\mathrm{red}}$. Tendo em mente a equivalência entre as condições (1) e (5) no enunciado do Lema 6.1.16 e usando (6.2.33) obtemos um isomorfismo estrito $\phi_{\mathrm{red}}\colon X_{\mathrm{red}} \cong \tilde{X}_{\mathrm{red}}$ com componentes $Z_{\mathrm{red}}(t) = \mathrm{Id}$ e $W_{\mathrm{red}} = \mathcal{W}$. Isso completa a demonstração. $\square$

Mostremos agora que a "classe de isomorfismo" do sistema reduzido $X_{\rm red}$ depende só (de X e) da distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$.

LEMA 6.2.33. *Dois referenciais $(Y_i)_{i=1}^k$, $(\tilde{Y}_i)_{i=1}^k$ de classe C^1 para uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ determinam sistemas reduzidos isomorfos.*

DEMONSTRAÇÃO. Denote por $X_{\rm red}$ e $\tilde{X}_{\rm red}$ respectivamente os sistemas reduzidos correspondentes a $(Y_i)_{i=1}^k$ e $(\tilde{Y}_i)_{i=1}^k$. Seja, para cada $t \in [a,b]$, $\kappa(t)$ a *matriz de mudança de base* de $(Y_i(t))_{i=1}^k$ para $(\tilde{Y}_i(t))_{i=1}^k$, ou seja:

$$\tilde{Y}_i(t) = \sum_{r=1}^k \kappa_{ri}(t) Y_r(t), \quad i = 1, \dots, k;$$

daí $\kappa\colon [a,b] \to \mathrm{GL}(k, I\!R)$ é uma aplicação de classe C^1. Se definirmos $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ e $\tilde{\mathcal{C}}$ a partir do referencial $(\tilde{Y}_i)_{i=1}^k$ em analogia a (6.2.9) então um cálculo direto usando (6.1.6) mostra que:

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \kappa^* \circ \mathfrak{B} \circ \kappa, \quad \tilde{\mathcal{A}} = \kappa^* \circ \mathcal{A} \circ \kappa + \kappa^* \circ \mathfrak{B} \circ \kappa',$$

onde omitimos o parâmetro t por simplicidade; podemos calcular então as componentes $\tilde{A}_{\rm red}$ e $\tilde{B}_{\rm red}$ de $\tilde{X}_{\rm red}$ (recorde (6.2.12)):

$$\tilde{A}_{\rm red} = \kappa^{-1} \circ A_{\rm red} \circ \kappa - \kappa^{-1} \circ \kappa', \quad \tilde{B}_{\rm red} = \kappa^{-1} \circ B_{\rm red} \circ \kappa^{*-1}. \tag{6.2.34}$$

Se definirmos

$$Z_{\rm red}(t) = \kappa(t)^{-1} \tag{6.2.35}$$

então segue do Lema 6.2.10 que f é uma solução de $X_{\rm red}$ se e somente se a aplicação $t \mapsto Z_{\rm red}(t) f(t)$ é uma solução de $\tilde{X}_{\rm red}$; tendo em mente a equivalência entre as condições (1) e (5) no enunciado do Lema 6.1.16 vemos que a demonstração estará terminada se encontrarmos uma aplicação $W_{\rm red}\colon [a,b] \to \mathcal{B}_{\rm sim}(I\!R^k)$ de classe C^1 tal que:

$$\tilde{A}_{\rm red} = Z_{\rm red} \circ A_{\rm red} \circ Z_{\rm red}^{-1} - Z_{\rm red} \circ B_{\rm red} \circ W_{\rm red} \circ Z_{\rm red}^{-1} + Z'_{\rm red} \circ Z_{\rm red}^{-1}. \tag{6.2.36}$$

Um cálculo direto usando (6.2.34) e (6.2.35) mostra que $W_{\rm red} = 0$ satisfaz (6.2.36), o que completa a demonstração. □

6.3. A Demonstração do Teorema do Índice

Nesta seção demonstraremos o Teorema do Índice para Sistemas Diferenciais Simpléticos (Teorema 6.2.17). As idéias principais da demonstração serão apresentadas a seguir e os resultados auxiliares mais técnicos serão espalhados ao longo das Subseções 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3.

Começamos observando que todos os objetos e conceitos que aparecem no enunciado do Teorema do Índice são invariantes por isomorfismos de pares (X, ℓ_0); mais explicitamente, recordamos que:

- a invariância dos instantes focais (e de suas não-degenerescências, multiplicidades e assinaturas) e da não-degenerescência da condição inicial foi demonstrada no Lema 6.1.19;

- na Proposição 6.1.30 demonstramos a invariância da forma do índice;
- na Proposição 6.1.41 demonstramos a invariância do índice de Maslov;
- a invariância do espaço $\mathcal{K}$ foi demonstrada no Corolário 6.2.30 e a invariância do espaço $\mathcal{S}$ foi demonstrada na Observação 6.2.31;
- a invariância do termo $n_-\big(B(a)^{-1}|_{P\times P}\big)$ segue de (6.1.38) e (6.1.42);

daí, usando o Teorema 6.1.20 vemos que é suficiente demonstrar o Teorema do Índice no caso que X é uma equação de Morse-Sturm da forma (6.1.21). Mais explicitamente, consideraremos fixada uma forma bilinear simétrica (constante) não-degenerada $g \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(I\!R^n)$ e uma aplicação contínua $R\colon [a,b] \to \mathcal{L}(I\!R^n)$ de modo que $R(t)$ é um operador g-simétrico para todo $t \in [a,b]$; trabalharemos então sobre o sistema diferencial simplético X com componentes

$$(6.3.1) \qquad A(t) = 0, \quad B(t) = g^{-1}, \quad C(t) = g \circ R(t), \qquad t \in [a,b].$$

Seja $\ell_0 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ um subespaço Lagrangeano correspondente a um par (P,S) como em (6.1.10); a hipótese que (X,ℓ_0) possui condição inicial não-degenerada significa que g é não-degenerada em P. A forma do índice $I \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ correspondente ao par (X,ℓ_0) é dada como no Exemplo 6.1.28 (trocando $g(t)$ por g). Fixamos uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ *de classe* C^2 para X e definimos espaços $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ como em (6.2.16) e (6.2.17) respectivamente (recorde também o Exemplo 6.2.8). Fixamos também um referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ de classe C^2 para $\mathcal{D}$ e denotamos por X_{red} o sistema reduzido associado a X e a $(Y_i)_{i=1}^k$ (vide Definição 6.2.9). Recorde que os operadores $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$ que aparecem na definição de X_{red} são dados pela fórmula (6.2.15) pois X é uma equação de Morse-Sturm. Denotamos *sempre* por L_0 o subespaço Lagrangeano:

$$L_0 = \{0\}^n \oplus I\!R^{n*} \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}.$$

Listamos abaixo o roteiro básico da demonstração:

(1) a parte inicial da demonstração é feita sob a hipótese que R é de classe C^1 e que o par (X,ℓ_0) tem apenas um número finito de instantes focais; supondo que $t = b$ não é um instante (X,ℓ_0)-focal nem um instante (X_{red},L_0)-focal mostramos a identidade:

$$(6.3.2) \quad n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) = n_-\big(B(a)^{-1}|_{P\times P}\big) + i_{\mathrm{maslov}}(X,\ell_0) + \sum_{t\in]a,b[} \mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t),$$

onde $\mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t)$ denota a multiplicidade de t como instante (X_{red},L_0)-focal. Pela Proposição 6.1.37 (recorde também Exemplo 6.1.10) vemos que (6.3.2) é equivalente a:

$$(6.3.3) \; n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) = n_-\big(B(a)^{-1}|_{P\times P}\big) + i_{\mathrm{maslov}}(X,\ell_0) - i_{\mathrm{maslov}}(X_{\mathrm{red}},L_0).$$

(2) Usamos um *argumento de perturbação* para demonstrar que a identidade (6.3.2) vale mais geralmente quando supomos apenas que $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal nem (X_{red}, L_0)-focal.

Observe que nesse ponto o Teorema 6.1.20 nos permite concluir que (6.3.2) vale quando X é um sistema diferencial simplético com componentes A de classe C^1 e B de classe C^2; em particular fica demonstrado o Corolário 6.2.21 (com hipóteses enfraquecidas de acordo com a Observação 6.2.22) para pares cujo instante final não é focal e também a Proposição 6.2.23 (com hipóteses enfraquecidas de acordo com a Observação 6.2.24) sob a hipótese que $t = b$ não é (X_{red}, L_0)-focal. Substituindo (6.2.24) em (6.3.2) obtemos:

$$n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) = n_-\big(B(a)^{-1}|_{P\times P}\big) + i_{\mathrm{maslov}}(X, \ell_0) + n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big),$$

o que prova o Teorema 6.2.17 (com hipóteses enfraquecidas de acordo com a Observação 6.2.18) no caso que $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal nem (X_{red}, L_0)-focal.

(3) novamente sob (6.3.1), supondo agora que R é de classe C^1, tratamos o caso que $t = b$ é um instante (X, ℓ_0)-focal não-degenerado mas não é um instante (X_{red}, L_0)-focal; mostraremos então a identidade (6.2.23). Podemos usar agora o Teorema 6.1.20 para concluir que o Teorema 6.2.17 vale (com $t = b$ não (X_{red}, L_0)-focal) com suas hipóteses modificadas de acordo com a Observação 6.2.19; em particular o Corolário 6.2.21 (com as hipóteses enfraquecidas de acordo com a Observação 6.2.22) e a Proposição 6.2.23 (com as hipóteses enfraquecidas de acordo com a Observação 6.2.24) ficam demonstrados no caso geral.

(4) mostramos o Teorema 6.2.17 (sendo $t = b$ possivelmente um instante (X_{red}, L_0)-focal) com as hipóteses enfraquecidas de acordo com a Observação 6.2.18. Consideramos primeiro o caso em que valem as identidades (6.3.1) com R de classe C^1; o caso geral segue então do Teorema 6.1.20.

Procedemos agora com a execução do roteiro descrito acima. Seja $t \in \,]a, b]$ e considere o sistema diferencial simplético $X|_{[a,t]}$; ao par $(X|_{[a,t]}, \ell_0)$ está associada a forma do índice $I_t \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H}_t)$ definida por:

$$I_t(v, w) = \int_a^t g\big(v'(s), w'(s)\big) + g\big(R(s)v(s), w(s)\big)\,\mathrm{d}s - S\big(v(a), w(a)\big),$$

para todos $v, w \in \mathcal{H}_t$ onde $\mathcal{H}_t$ é o subespaço fechado de $H^1([a, t], \mathbb{R}^n)$ definido por:

$$\mathcal{H}_t = \big\{v \in H^1([a, t], \mathbb{R}^n) : v(a) \in P,\ v(t) = 0\big\}.$$

Como em (6.2.16) e (6.2.17), associamos espaços $\mathcal{K}_t$ e $\mathcal{S}_t$ ao par $(X|_{[a,t]}, \ell_0)$ e à distribuição maximal negativa $\mathcal{D}|_{[a,t]}$; explicitamente temos:

$$\mathcal{K}_t = \big\{v \in H^1([a,t], I\!R^n) : v \text{ é uma solução de } X|_{[a,t]} \text{ ao longo de } \mathcal{D}|_{[a,t]} \text{ e } v(a) \in P,\ v(t) = 0\big\} \subset \mathcal{H}_t,$$

$$\mathcal{S}_t = \big\{v \in H^1([a,t], I\!R^n) : v \text{ é } \mathcal{D}|_{[a,t]}\text{-horizontal e } v(a) = v(t) = 0\big\} \subset \mathcal{H}_t.$$

Para cada $t \in \,]a,b]$ definimos:

$$i(t) = n_-\big(I_t|_{\mathcal{K}_t\times\mathcal{K}_t}\big);$$

a princípio temos $i(t) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ mas mostraremos que na verdade o índice de I_t em $\mathcal{K}_t$ é finito (vide Corolário 6.3.19). Para provar a identidade (6.3.2) nossa estratégia será analisar a evolução da função i quando t varia em $]a,b]$; supondo que R é de classe C^1 e que (X,ℓ_0) possui apenas um número finito de instantes focais então o Corolário 6.3.35 nos diz que i é uma função constante por partes e que seus saltos ocorrem precisamente nos instantes (X,ℓ_0)-focais e nos instantes $(X_{\rm red}, L_0)$-focais (observe que $(X_{\rm red}, L_0)$ também só tem um número finito de instantes focais, já que $B_{\rm red}$ é definida negativa; recorde Corolário 6.1.35 e Exemplo 6.1.10).

Com o objetivo de calcular o salto de i nos instantes focais de (X,ℓ_0) e de $(X_{\rm red}, L_0)$ definimos uma extensão $I_t^\# \in \mathcal{B}_{\rm sim}\big(\mathcal{H}_t^\#\big)$ da forma do índice I_t fazendo:

$$I_t^\#(v,w) = \int_a^t g\big(v'(s), w'(s)\big) + g\big(R(s)v(s), w(s)\big)\,\mathrm{d}s - S\big(v(a), w(a)\big) + \Theta\big(v(t), w(t)\big), \tag{6.3.4}$$

para todos $v, w \in \mathcal{H}_t^\#$ e todo $t \in \,]a,b]$, onde $\mathcal{H}_t^\#$ é o subespaço fechado de $H^1([a,t], I\!R^n)$ definido por:

$$\mathcal{H}_t^\# = \big\{v \in H^1([a,t], I\!R^n) : v(a) \in P\big\}$$

e $\Theta \in \mathcal{B}_{\rm sim}(I\!R^n)$ é uma forma bilinear simétrica qualquer cujo valor será escolhido no momento apropriado. Obviamente:

$$I_t^\#|_{\mathcal{H}_t\times\mathcal{H}_t} = I_t. \tag{6.3.5}$$

Definimos também extensões dos espaços $\mathcal{K}_t$ e $\mathcal{S}_t$ fazendo:

$$\mathcal{K}_t^\# = \big\{v \in H^1([a,t], I\!R^n) : v \text{ é uma solução de } X|_{[a,t]} \text{ ao longo de } \mathcal{D}|_{[a,t]} \text{ e } v(a) \in P\big\} \subset \mathcal{H}_t^\#,$$

$$\mathcal{S}_t^\# = \big\{v \in H^1([a,t], I\!R^n) : v \text{ é } \mathcal{D}|_{[a,t]}\text{-horizontal e } v(a) = 0\big\} \subset \mathcal{H}_t^\#;$$

é claro que:

$$\mathcal{K}_t = \mathcal{K}_t^\# \cap \mathcal{H}_t, \quad \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t^\# \cap \mathcal{H}_t. \tag{6.3.6}$$

Observação 6.3.1. Argumentando como na Observação 6.2.16 vê-se que os subespaços $\mathcal{K}_t^\#$ e $\mathcal{S}_t^\#$ são fechados em $\mathcal{H}_t^\#$.

OBSERVAÇÃO 6.3.2. Para $t = b$ escrevemos:

$$\mathcal{K}^{\#} = \mathcal{K}_b^{\#}, \quad \mathcal{S}^{\#} = \mathcal{S}_b^{\#}, \quad \mathcal{H}^{\#} = \mathcal{H}_b^{\#}, \quad I^{\#} = I_b^{\#}; \tag{6.3.7}$$

observe que as definições dos espaços $\mathcal{K}^{\#}$, $\mathcal{H}^{\#}$ e da extensão $I^{\#}$ de I são compatíveis com as correspondentes definições introduzidas no enunciado da Proposição 6.2.27 quando fazemos $Q = \mathbb{R}^n$ e $S_1 = \Theta$.

Vamos calcular o núcleo de $I_t^{\#}$:

LEMA 6.3.3. *Se $\mathbb{V}_t$ denota o conjunto das soluções de $\big(X|_{[a,t]}, \ell_0\big)$ então o núcleo de $I_t^{\#}$ é dado por:*

$$\mathrm{Ker}\big(I_t^{\#}\big) = \big\{v \in \mathbb{V}_t : g\big(v'(t)\big) + \Theta\big(v(t)\big) = 0\big\}. \tag{6.3.8}$$

DEMONSTRAÇÃO. A idéia é basicamente a mesma da demonstração da Proposição 6.1.23. Usando o Corolário 6.1.27 vemos que se $v \in \mathrm{Ker}\big(I_t^{\#}\big)$ então v é de classe C^1 e v' é absolutamente contínua; podemos então fazer uma integração por partes no termo $g\big(v'(s), w'(s)\big)$ que aparece na integral em (6.3.4) e obtemos:

(6.3.9)
$$\begin{aligned} I_t^{\#}(v,w) = \int_a^t g\big(-v''(s) + R(s)v(s), w(s)\big)\,\mathrm{d}s + \big[g\big(v'(t)\big) + \Theta\big(v(t)\big)\big]w(t) \\ - \big[g\big(v'(a)\big)\big|_P + S\big(v(a)\big)\big]w(a). \end{aligned}$$

Daí, se $v \in \mathrm{Ker}\big(I_t^{\#}\big)$ então $I_t^{\#}(v,w) = 0$ para todo $w \in \mathcal{H}_t^{\#}$ e em particular a integral em (6.3.9) se anula para toda aplicação $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ com suporte em $]a,b[$; pelo Lema Fundamental do Cálculo das Variações (Lema 6.1.25) concluímos que v satisfaz a equação

$$v''(s) = R(s)v(s), \quad s \in [a,t],$$

ou seja, v é uma solução de $X|_{[a,t]}$. Vemos então que a integral em (6.3.9) se anula para todo $w \in \mathcal{H}_t^{\#}$ e portanto também os "termos de bordo" (i.e., a expressão fora da integral) em (6.3.9) se anulam para todo $w \in \mathcal{H}_t^{\#}$; obviamente, para $w \in \mathcal{H}_t^{\#}$, $w(a)$ pode assumir qualquer valor em P e $w(t)$ pode assumir qualquer valor em $\mathbb{R}^n$ donde:

$$g\big(v'(a)\big)\big|_P + S\big(v(a)\big) = 0, \quad g\big(v'(t)\big) + \Theta\big(v(t)\big) = 0.$$

Mostramos então que v pertence ao lado direito de (6.3.8); reciprocamente, se v pertence ao lado direito de (6.3.8) então usando (6.3.9) é fácil ver que $v \in \mathrm{Ker}\big(I_t^{\#}\big)$. $\square$

COROLÁRIO 6.3.4. *Considere os subespaços Lagrangeanos $L_0 = \{0\}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ e $L_1 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n$ de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$; se $L_* \in \Lambda^0(L_0)$ é um Lagrangeano tal que $\varphi_{L_1,L_0}(L_*) = \Theta$ e se ℓ é a curva de Lagrangeanos definida em* (6.1.65) *então $I_t^{\#}$ é não-degenerada se e somente se $\ell(t) \cap L_* = \{0\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. É fácil ver que L_* é dado por:

$$L_* = \big\{\big(v, -\Theta(v)\big) : v \in I\!R^n\big\};$$

além do mais, $\ell(t)$ é dado por:

$$\ell(t) = \big\{\big(v(t), g(v'(t))\big) : v \in \mathbb{V}_t\big\}.$$

A conclusão segue. □

Seja $t_0 \in \,]a, b[$ um instante focal para o par (X, ℓ_0) ou para o par (X_{red}, L_0) (ou para ambos); escolha um Lagrangeano L_* complementar comum a $\ell(t_0)$ e a L_0 (vide Observação 2.5.18) e defina $\Theta = \varphi_{L_1,L_0}(L_*)$, onde L_0, L_1 são definidos como no enunciado do Corolário 6.3.4. Vamos calcular o valor de $i(t_0+\varepsilon) - i(t_0-\varepsilon)$ quando $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno; em primeiro lugar a Proposição 6.2.27 implica que:

$$n_-\Big(I^{\#}_{t_0+\varepsilon}\big|_{\mathcal{K}^{\#}_{t_0+\varepsilon}\times\mathcal{K}^{\#}_{t_0+\varepsilon}}\Big) = i(t_0+\varepsilon) + n_-\big(\Theta - \varphi_{L_1,L_0}(\ell(t_0+\varepsilon))\big), \tag{6.3.10}$$

$$n_-\Big(I^{\#}_{t_0-\varepsilon}\big|_{\mathcal{K}^{\#}_{t_0-\varepsilon}\times\mathcal{K}^{\#}_{t_0-\varepsilon}}\Big) = i(t_0-\varepsilon) + n_-\big(\Theta - \varphi_{L_1,L_0}(\ell(t_0-\varepsilon))\big). \tag{6.3.11}$$

Subtraindo (6.3.11) de (6.3.10) e usando o Lema 6.3.40 e os Corolários 6.3.4 e 4.2.23 obtemos:

$$i(t_0+\varepsilon) - i(t_0-\varepsilon) = \mu_{L_0}\big(\ell|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}\big) + \text{mul}_{\text{red}}(t_0). \tag{6.3.12}$$

Usando agora o Corolário 6.3.46 e a fórmula (6.3.12) para os saltos de i, obtêm-se a fórmula (6.3.2) e completamos portanto a execução do passo (1) do roteiro.

Para a execução do passo (2), observe primeiramente que se R é real-analítica então (X, ℓ_0) possui apenas um número finito de instantes focais (vide Exemplo 6.1.13); além do mais, podemos encontrar um seqüência $(R_m)_{m\ge1}$ de aplicações real-analíticas $R_m\colon [a, b] \to \mathcal{L}(I\!R^n)$ de modo que

$$\lim_{m\to+\infty} R_m(t) = R(t)$$

uniformemente em $[a, b]$ e $R_m(t)$ é um operador g-simétrico para todo $m \ge 1$ e todo $t \in [a, b]$. De fato, seja $\big(M_{ij}(t)\big)_{n\times n}$ a matriz que representa a forma bilinear simétrica $g \circ R(t) \in \mathcal{B}_{\text{sim}}(I\!R^n)$; pelo Teorema de Weierstrass (vide, por exemplo, [**34**, §11, Capítulo 8]) podemos encontrar para todos $i, j = 1, \ldots, n$, $i \le j$, uma seqüência $(M^m_{ij})_{m\ge1}$ de polinômios que converge uniformemente em $[a, b]$ para a aplicação contínua $M_{ij}\colon [a, b] \to I\!R$. Se $i > j$ definimos $M^m_{ij}(t) = M^m_{ji}(t)$ e daí obtemos para cada $m \ge 1$ uma aplicação real-analítica $M^m\colon [a, b] \to \mathcal{B}_{\text{sim}}(I\!R^n)$ de modo que

$$\lim_{m\to+\infty} M^m(t) = g \circ R(t)$$

uniformemente em $[a, b]$. A seqüência $(R_m)_{m\ge1}$ desejada pode agora ser definida por $R_m(t) = g^{-1} \circ M^m(t)$.

Seja X_m o sistema diferencial simplético correspondente à equação de Morse-Sturm $v''(t) = R_m(t) \cdot v(t)$, i.e., X_m tem componentes $A_m(t) = 0$,

$B_m(t) = g^{-1}$ e $C_m(t) = g \circ R_m(t)$; a partir do par (X_m, ℓ_0) podemos definir objetos I_m, $\mathcal{K}_m$, $\mathcal{S}_m$ e $(X_m)_{\rm red}$ em analogia respectivamente a I, $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ e $X_{\rm red}$ (para todo m usamos sempre a mesma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ e o mesmo referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ de classe C^2 para $\mathcal{D}$). Pelo que foi mostrado no passo (1) (mais especificamente, usando a fórmula (6.3.3) para (X_m, ℓ_0)) obtemos:

(6.3.13)
$$n_-\big(I_m|_{\mathcal{K}_m\times\mathcal{K}_m}\big) = n_-\big(g|_{P\times P}\big) + i_{\rm maslov}(X_m, \ell_0) - i_{\rm maslov}\big((X_m)_{\rm red}, L_0\big);$$

usando os Corolários 6.1.40, 6.3.20 e fazendo $m \to +\infty$ em (6.3.13) concluímos que (6.3.3) (e portanto (6.3.2)) vale para o par (X, ℓ_0). Isso completa a execução do passo (2).

Passamos à execução do passo (3); suponha então que as componentes de X são dadas por (6.3.1) e que R é de classe C^1. Suponha também que $t = b$ é um instante (X, ℓ_0)-focal não-degenerado mas não é um instante $(X_{\rm red}, L_0)$-focal. Pelo Corolário 6.1.35 vemos que $t = b$ é um instante (X, ℓ_0)-focal isolado e portanto, usando o passo (2), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno podemos escrever:

$$i(b-\varepsilon) = n_-\big(g|_{P\times P}\big) + i_{\rm maslov}\big(X|_{[a,b-\varepsilon]}, \ell_0\big) + \sum_{t\in]a,b-\varepsilon[} \mathrm{mul}_{\rm red}(t);$$

a conclusão do passo (3) segue agora do Corolário 6.3.38.

Passamos finalmente à execução do passo (4); suponha então que as componentes de X são dadas por (6.3.1) e que R é de classe C^1. Suponha também que $t = b$ é um instante $(X_{\rm red}, L_0)$-focal mas não é um instante (X,ℓ_0)-focal. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o resultado mostrado no passo (2) implica que:

$$i(b-\varepsilon) = n_-\big(g|_{P\times P}\big) + i_{\rm maslov}\big(X|_{[a,b-\varepsilon]}, \ell_0\big) + n_+\big(I_{b-\varepsilon}|_{\mathcal{S}_{b-\varepsilon}\times\mathcal{S}_{b-\varepsilon}}\big);$$

como não há instantes (X, ℓ_0)-focais numa vizinhança de $t = b$ temos:

$$i_{\rm maslov}\big(X|_{[a,b-\varepsilon]}, \ell_0\big) = i_{\rm maslov}(X, \ell_0).$$

Usando agora a Proposição 6.2.23 (cuja demonstração já foi completada pelo passo (3)) obtemos:

$$n_+\big(I_{b-\varepsilon}|_{\mathcal{S}_{b-\varepsilon}\times\mathcal{S}_{b-\varepsilon}}\big) = n_+\big(I|_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}\big);$$

para completar a execução do passo (4) devemos mostrar que $i(b-\varepsilon) = i(b)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Utilizamos um argumento análogo àquele explicado logo após a demonstração do Corolário 6.3.4, fazendo $t_0 = b$; na fórmula (6.3.10) trocamos $t_0 + \varepsilon$ por b e, raciocinando como antes, obtemos (no lugar de (6.3.12)):

$$i(b) - i(b-\varepsilon) = \mu_{L_0}\big(\ell|_{[b-\varepsilon,b]}\big).$$

Como não há instantes (X, ℓ_0)-focais numa vizinhança de $t = b$ vemos que $i(b) - i(b-\varepsilon) = 0$, o que completa a execução do passo (4) e a demonstração do Teorema do Índice.

6.3.1. Alguns resultados auxiliares. Nesta subseção mostraremos alguns lemas sobre a forma do índice I, sobre sua extensão $I^{\#}$ e sobre os espaços $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{\#}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^{\#}$ (vide (6.3.7)); obviamente, esses resultados também admitem versões correspondentes para os objetos I_t, $I_t^{\#}$, $\mathcal{K}_t$, $\mathcal{K}_t^{\#}$, $\mathcal{S}_t$ e $\mathcal{S}_t^{\#}$ (para ver isso, basta aplicar tais resultados para o sistema diferencial simplético $X|_{[a,t]}$).

Em várias situações precisaremos de argumentos para justificar a continuidade de certos operadores lineares e bilineares em espaços de Banach ou Hilbert; tais argumentos são discutidos nos Exemplos 5.1.41, 5.1.42, 5.1.43, 5.1.44 e não serão mencionados novamente.

Nesta subseção trabalhamos sob as mesmas condições da Seção 6.3; as componentes de X são definidas em (6.3.1) (com $R\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ contínua), $\mathcal{D}$ é uma distribuição maximal negativa para X e $(Y_i)_{i=1}^k$ é um referencial de classe C^2 para $\mathcal{D}$; a forma bilinear simétrica $\Theta \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$ que aparece na definição de $I^{\#}$ (vide (6.3.4)) é fixada com um valor arbitrário. Em analogia à Observação 6.2.16, definimos um operador linear limitado

$$F^{\#}\colon \mathcal{H}^{\#} \longrightarrow L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big) \tag{6.3.14}$$

fazendo:

$$F^{\#}(v)(s)_i = g\big(v'(s),Y_i(s)\big) - \int_a^s g\big(v'(r),Y_i'(r)\big) + g\big(R(r)v(r),Y_i(r)\big)\,\mathrm{d}r, \tag{6.3.15}$$

para todos $v \in \mathcal{H}^{\#}$, $s \in [a,b]$ e $i = 1,\ldots,k$. Defina também:

$$F = F^{\#}|_{\mathcal{H}}\colon \mathcal{H} \longrightarrow L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big). \tag{6.3.16}$$

Seja Cte o subespaço k-dimensional de $L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big)$ formado pelas *funções constantes*; segue diretamente das definições dos espaços $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}^{\#}$ (vide também Exemplo 6.2.8) que:

$$\mathcal{K} = F^{-1}(\mathrm{Cte}), \quad \mathcal{K}^{\#} = (F^{\#})^{-1}(\mathrm{Cte}). \tag{6.3.17}$$

Mostremos agora algumas propriedades mais interessantes sobre os operadores F e $F^{\#}$.

Lema 6.3.5. *A restrição de $F^{\#}$ a $\mathcal{S}^{\#}$ é um isomorfismo sobre o espaço $L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big)$.*

Demonstração. Temos um isomorfismo topológico

$$\psi\colon \big\{f \in H^1([a,b],\mathbb{R}^k) : f(a) = 0\big\} \longrightarrow \mathcal{S}^{\#} \tag{6.3.18}$$

dado por $\psi(f)(s) = \sum_{i=1}^k f_i(s)Y_i(s)$ para todo $s \in [a,b]$, onde $f(s) = (f_1(s),\ldots,f_k(s))$. Basta demonstrar então que a aplicação $F^{\#} \circ \psi$ é um isomorfismo sobre $L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big)$; um cálculo direto mostra que:

$$F^{\#}\big(\psi(f)\big)(s) = \mathfrak{B}(s)f'(s) + \mathcal{A}(s)f(s) - \int_a^s \mathcal{A}(r)^*f'(r) + \mathcal{C}(r)f(r)\,\mathrm{d}r, \tag{6.3.19}$$

para todo $s \in [a, b]$, onde $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ e $\mathcal{C}$ são definidas em (6.2.15). Como $\mathfrak{B}(s)$ é inversível para cada s é fácil ver que o seguinte operador é um isomorfismo:

$$\big\{f \in H^1([a,b], \mathbb{R}^k) : f(a) = 0\big\} \ni f \longmapsto \mathfrak{B}f' \in L^2\big([a,b], \mathbb{R}^{k^*}\big) \tag{6.3.20}$$

onde $(\mathfrak{B}f')(s) = \mathfrak{B}(s)f'(s)$. A diferença entre $F^{\#} \circ \psi$ e (6.3.20) é um operador contínuo na topologia induzida por $C^0([a,b], \mathbb{R}^k)$ em $H^1([a,b], \mathbb{R}^k)$ (vide Observação 6.3.10 adiante) e portanto é um operador compacto pelo Exemplo 5.2.10. Pelo Corolário 5.2.29 vemos que, para completar a demonstração, é suficiente mostrar que $F^{\#} \circ \psi$ é injetor; mas é fácil ver que o núcleo de $F^{\#} \circ \psi$ consiste das aplicações $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ de classe C^2 que são solução da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem (6.2.10) (ou, equivalentemente, do sistema reduzido X_{red}) e satisfazem a condição inicial $f(a) = f'(a) = 0$. Isso completa a demonstração. □

COROLÁRIO 6.3.6. *O operador $F^{\#}$ é sobrejetor.* □

COROLÁRIO 6.3.7. $\mathcal{H}^{\#} = \mathcal{K}^{\#} + \mathcal{S}^{\#}$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue de (6.3.17) (observe que o Lema 6.3.5 implica até mesmo que $\mathcal{H}^{\#} = \mathrm{Ker}\big(F^{\#}\big) \oplus \mathcal{S}^{\#}$). □

COROLÁRIO 6.3.8. $\dim\big(\mathcal{K}^{\#} \cap \mathcal{S}^{\#}\big) = k$.

DEMONSTRAÇÃO. Usando (6.3.17) vemos que $F^{\#}$ leva $\mathcal{K}^{\#} \cap \mathcal{S}^{\#}$ isomorficamente sobre $\mathrm{Cte} \cong \mathbb{R}^{k^*}$. □

O corolário abaixo não é usado na demonstração do Teorema do Índice; ele é usado apenas na Observação 6.2.25.

COROLÁRIO 6.3.9. *Se R e $\mathcal{D}$ são de classe C^∞ então existe um operador de projeção limitado $\pi : H^1([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}^{\#}$ tal que $\pi(v)$ é de classe[10] C^∞ sempre que v for de classe C^∞; se $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal então existe também um operador de projeção limitado $\bar{\pi} : H^1([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}$ tal que $\bar{\pi}(v)$ é de classe C^∞ sempre que v o for.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $P_0 \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço complementar a P; daí o espaço das aplicações constantes em $[a,b]$ a valores em P_0 é um complementar fechado para $\mathcal{H}^{\#}$ em $H^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ formado por aplicações de classe C^∞; esse complementar fechado determina um operador de projeção de $H^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{H}^{\#}$ que leva aplicações de classe C^∞ em aplicações de classe C^∞. Se $t = b$ não é (X, ℓ_0)-focal então a aplicação $\mathbb{V} \ni v \mapsto v(b)$ (recorde (6.1.12)) é um isomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$ e portanto $\mathbb{V}$ é um complementar fechado de $\mathcal{K}$ em $\mathcal{K}^{\#}$ formado por aplicações de classe C^∞ (já que R é C^∞); obtemos então um operador de projeção de $\mathcal{K}^{\#}$ sobre $\mathcal{K}$ que leva aplicações de classe C^∞ em aplicações de classe C^∞.

Para completar a demonstração é suficiente encontrar um operador de projeção de $\mathcal{H}^{\#}$ sobre $\mathcal{K}^{\#}$ que leva aplicações de classe C^∞ em aplicações de

[10] Uma aplicação $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dita de classe C^∞ quando v admite uma extensão de classe C^∞ a um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ contendo $[a,b]$.

classe C^∞; observe primeiramente que, já que $\mathcal{D}$ é de classe C^∞, podemos supor que o referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ que define $F^\#$ também é de classe C^∞. Seja V um complementar fechado de $\mathcal{K}^\# \cap \mathcal{S}^\#$ em $\mathcal{S}^\#$; segue do Corolário 6.3.7 que $\mathcal{H}^\# = \mathcal{K}^\# \oplus V$. Seja $v \in \mathcal{H}^\#$ uma aplicação de classe C^∞ e escreva $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in \mathcal{K}^\#$ e $v_2 \in V \subset \mathcal{S}^\#$; a demonstração ficará completa se mostrarmos que v_1 (ou, equivalentemente, v_2) também é de classe C^∞. Com esse objetivo observe que $F^\#(v) = F^\#(v_1) + F^\#(v_2)$ é de classe C^∞ e portanto $z = F^\#(v_2)$ é de classe C^∞, já que $F^\#(v_1)$ é constante. Escrevendo $v_2 = \psi(f)$ (onde ψ é definido em (6.3.18)) obtemos

$$F^\#(\psi(f)) = z, \tag{6.3.21}$$

onde $F^\#(\psi(f))$ é dado em (6.3.19), $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$, z são de classe C^∞ e $\mathfrak{B}(t)$ é inversível para todo t; de (6.3.21), segue agora facilmente por indução em p que f é de classe C^p para todo p e portanto f (e também v_2) é de classe C^∞. □

OBSERVAÇÃO 6.3.10. Se $\beta\colon [a,b] \to I\!R^{k^*}$ é uma aplicação de classe C^1 fixada então o operador

$$\sigma\colon H^1([a,b], I\!R^k) \longrightarrow C^0([a,b], I\!R)$$

dado por $\sigma(f)(s) = \int_a^s \beta(r)f'(r)\,\mathrm{d}r$ admite uma extensão contínua para $C^0([a,b], I\!R^k)$; de fato, usando integração por partes podemos reescrever σ sob a forma:

$$\sigma(f)(s) = \beta(s)f(s) - \beta(a)f(a) - \int_a^s \beta'(r)f(r)\,\mathrm{d}r, \quad s \in [a,b].$$

Recorde que X_{red} denota o sistema reduzido associado a X e ao referencial $(Y_i)_{i=1}^k$ (vide Definição 6.2.9) e que L_0 denota sempre o Lagrangeano $\{0\}^n \oplus I\!R^{n*}$. Por argumentos análogos aos usados na demonstração do Lema 6.3.5 mostra-se também o seguinte:

LEMA 6.3.11. *Considere a aplicação quociente*

$$\mathfrak{q}\colon L^2\big([a,b], I\!R^{k^*}\big) \longrightarrow L^2\big([a,b], I\!R^{k^*}\big)/\mathrm{Cte}, \tag{6.3.22}$$

onde Cte *denota o subespaço de* $L^2\big([a,b], I\!R^{k^*}\big)$ *formado pelas aplicações constantes. Se $t = b$ não é um instante (X_{red}, L_0)-focal então $\mathfrak{q} \circ F$ leva $\mathcal{S}$ isomorficamente sobre* $L^2\big([a,b], I\!R^{k^*}\big)/\mathrm{Cte}$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos um isomorfismo topológico

$$\psi\colon H_0^1([a,b], I\!R^k) \longrightarrow \mathcal{S}$$

dado por $\psi(f)(s) = \sum_{i=1}^k f_i(s)Y_i(s)$ para todo $s \in [a,b]$, onde $f(s) = (f_1(s), \ldots, f_k(s))$ e $H_0^1([a,b], I\!R^k)$ é definido por:

$$H_0^1([a,b], I\!R^k) = \big\{f \in H^1([a,b], I\!R^k) : f(a) = f(b) = 0\big\}.$$

Vamos mostrar que $\mathfrak{q} \circ F \circ \psi$ é um isomorfismo sobre $L^2\big([a,b], I\!R^{k^*}\big)/\mathrm{Cte}$; a expressão para $F(\psi(f))$ é dada em (6.3.19). Argumentando como na demonstração do Lema 6.3.5 vemos que $\mathfrak{q}\circ F\circ\psi$ é uma perturbação compacta do operador

$$H_0^1([a,b],\mathbb{R}^k)\ni f\longmapsto \mathfrak{B}f'+\mathrm{Cte}\in L^2\big([a,b],\mathbb{R}^{k^*}\big)/\mathrm{Cte}. \tag{6.3.23}$$

Como $\mathfrak{B}(s)$ é definida negativa para todo s não é difícil mostrar que (6.3.23) é um isomorfismo (para detalhes, vide Observação 6.3.16 adiante); daí $\mathfrak{q}\circ F\circ\psi$ é uma perturbação compacta de um isomorfismo e pelo Corolário 5.2.29 vemos que, para completar a demonstração, é suficiente mostrar que $\mathfrak{q}\circ F\circ\psi$ é injetor quando $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal. Levando em conta (6.3.17) vemos que o núcleo de $\mathfrak{q}\circ F\circ\psi$ consiste das aplicações f tais que $f(a)=f(b)=0$ e tais que $v=\sum_{i=1}^k f_iY_i$ pertence a $\mathcal{K}\cap\mathcal{S}$; mas o Lema 6.2.10 nos diz que $v\in\mathcal{K}\cap\mathcal{S}$ se e somente se f é uma solução do sistema reduzido X_{red}. Como $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal segue que não existe uma solução f não nula de X_{red} tal que $f(a)=f(b)=0$; isso completa a demonstração. □

COROLÁRIO 6.3.12. *Se $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal e se $\mathfrak{q}$ denota a aplicação quociente dada em (6.3.22) então o operador $\mathfrak{q}\circ F$ é sobrejetor.* □

COROLÁRIO 6.3.13. *Se $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal então $\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{S}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do fato que $\mathcal{K}=\mathrm{Ker}(\mathfrak{q}\circ F)$. □

COROLÁRIO 6.3.14. *Se $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal então o núcleo de $I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}$ coincide com o núcleo de I em $\mathcal{H}$, ou seja:*

$$\mathrm{Ker}\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big)=\mathrm{Ker}(I).$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Proposição 6.1.23 que $\mathrm{Ker}(I)\subset\mathcal{K}$ e portanto $\mathrm{Ker}(I)\subset\mathrm{Ker}\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big)$; se $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal então a inclusão $\mathrm{Ker}\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big)\subset\mathrm{Ker}(I)$ segue do Corolário 6.3.13 e do Lema 6.2.13. □

Assim como o Corolário 6.3.9, o corolário abaixo não será usado na demonstração do Teorema do Índice, mas apenas na Observação 6.2.25.

COROLÁRIO 6.3.15. *Suponha que R e $\mathcal{D}$ sejam de classe C^∞; se $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal então existe um operador de projeção limitado*

$$\pi\colon H^1([a,b],\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{K}$$

tal que $\pi(v)$ é de classe C^∞ sempre que v for de classe C^∞.

DEMONSTRAÇÃO. Se $P_0\subset\mathbb{R}^n$ denota um complementar qualquer de P em $\mathbb{R}^n$ então o espaço das aplicações afins v com $v(a)\in P_0$ é um complementar fechado de $\mathcal{H}$ em $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ formado apenas por aplicações de classe C^∞; daí obtemos um operador de projeção de $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{H}$ que leva aplicações de classe C^∞ em aplicações de classe C^∞. Para completar a demonstração é suficiente mostrar que existe um projetor de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{K}$ que leva aplicações de classe C^∞ em aplicações de classe C^∞. Como $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal, o Corolário 6.3.13 nos diz que $\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{S}$; dado $v\in\mathcal{H}$ de classe C^∞ com $v=v_1+v_2$, $v_1\in\mathcal{K}$, $v_2\in\mathcal{S}$, vamos mostrar que v_1 é de classe C^∞ e a demonstração ficará completa. Argumentamos então como na demonstração do Corolário 6.3.9: temos que $F(v) = F(v_1) + F(v_2)$ é de classe C^∞ e como $F(v_1)$ é constante segue que $F(v_2) = z$ é de classe C^∞; escrevemos então $v_2 = \psi(f)$ e usando (6.3.19) e $F(\psi(f)) = z$ concluímos que f (e portanto v_2 e v_1) é de classe C^∞. □

OBSERVAÇÃO 6.3.16. Vamos mostrar que (6.3.23) é um isomorfismo; como $\mathfrak{B}(s)^{-1}$ é uma forma bilinear simétrica definida negativa em $\mathbb{R}^{k^*}$ para todo s, é fácil ver que a integral $\int_a^b \mathfrak{B}(s)^{-1}\,\mathrm{d}s$ também é uma forma bilinear simétrica definida negativa (e em particular não-degenerada) em $\mathbb{R}^{k^*}$. Se f pertence ao núcleo de (6.3.23) então $\mathfrak{B}(s)f'(s) = c$ para quase todo $s \in [a,b]$ e para alguma constante $c \in \mathbb{R}^{k^*}$; além do mais $f(a) = f(b) = 0$. Daí

$$f(b) - f(a) = \Big(\int_a^b \mathfrak{B}(s)^{-1}\,\mathrm{d}s\Big)(c) = 0,$$

donde $c = 0$ e $f = 0$. Isso mostra que (6.3.23) é injetor. Para a sobrejetividade seja $z \in L^2\big([a,b], \mathbb{R}^{k^*}\big)$; queremos determinar $f \in H^1([a,b], \mathbb{R}^k)$ e uma constante $c \in \mathbb{R}^{k^*}$ de modo que $f(a) = f(b) = 0$ e

$$\mathfrak{B}(s)f'(s) = z(s) + c, \tag{6.3.24}$$

para quase todo $s \in [a,b]$. Obviamente, dado um valor para $c \in \mathbb{R}^{k^*}$ a identidade (6.3.24) determina uma única função $f \in H^1([a,b], \mathbb{R}^k)$ com $f(a) = 0$; o valor de $f(b)$ será então dado por:

$$f(b) = \int_a^b \mathfrak{B}(s)^{-1}z(s)\,\mathrm{d}s + \Big(\int_a^b \mathfrak{B}(s)^{-1}\,\mathrm{d}s\Big)(c). \tag{6.3.25}$$

A inversibilidade de $\int_a^b \mathfrak{B}(s)^{-1}\,\mathrm{d}s$ nos permite determinar $c \in \mathbb{R}^{k^*}$ que anula o lado direito de (6.3.25), o que completa a demonstração da sobrejetividade de (6.3.23).

Nosso objetivo agora é mostrar que a restrição de $I^\#$ a $\mathcal{K}^\#$ é RPCIP (recorde Definição 5.2.61); para isso devemos introduzir algumas construções auxiliares. Para cada $s \in [a,b]$, como g é definida negativa em $\mathcal{D}_s$, temos uma decomposição em soma direta:

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{D}_s \oplus \mathcal{D}_s^\perp, \tag{6.3.26}$$

onde o complemento ortogonal é tomado com respeito a g (vide Proposição 1.1.11). Podemos então, para cada $s \in [a,b]$, definir um produto interno *definido positivo* $g^+(s)$ em $\mathbb{R}^n$ declarando que $\mathcal{D}_s$ e $\mathcal{D}_s^\perp$ sejam $g^+(s)$-ortogonais, $g^+(s)$ seja igual a g em $\mathcal{D}_s^\perp$ e igual a $-g$ em $\mathcal{D}_s$; denotando por $\pi(s)\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}_s$ a projeção com respeito à decomposição (6.3.26) então uma fórmula explícita para $g^+(s)$ é dada por:

$$g^+(s)(v,w) = g(v,w) - 2g\big(\pi(s)v, \pi(s)w\big), \quad v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{6.3.27}$$

Na verdade, estaremos mais interessados numa fórmula para g em termos de $g^+(s)$:

$$g(v,w) = g^+(s)(v,w) - 2g^+(s)\big(\pi(s)v, \pi(s)w\big), \quad v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{6.3.28}$$

OBSERVAÇÃO 6.3.17. É fácil mostrar que $s \mapsto \pi(s) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação de classe C^2; de fato, como g é definida negativa em $\mathcal{D}_s$ podemos aplicar o *processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt* na base $(Y_i(s))_{i=1}^k$ de $\mathcal{D}_s$ obtendo uma base g-ortonormal $(\overline{Y}_i(s))_{i=1}^k$ de $\mathcal{D}_s$. Obviamente as aplicações $s \mapsto \overline{Y}_i(s)$ são de classe C^2; daí $\pi(s)$ é dada por:

$$\pi(s)(v) = -\sum_{i=1}^{k} g\big(v, \overline{Y}_i(s)\big)\overline{Y}_i(s), \tag{6.3.29}$$

para todos $s \in [a,b]$, $v \in \mathbb{R}^n$. Segue então que $s \mapsto \pi(s)$ é de classe C^2; usando (6.3.27) vemos também que $s \mapsto g^+(s) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$ é de classe C^2.

Da continuidade de $s \mapsto g^+(s)$ segue que:

$$\inf_{\substack{s\in[a,b]\\ \|v\|=1}} g^+(s)(v,v) > 0, \qquad \sup_{\substack{s\in[a,b]\\ \|v\|=1}} g^+(s)(v,v) < +\infty,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana de $\mathbb{R}^n$; daí vê-se facilmente que

$$L^2([a,b],\mathbb{R}^n) \times L^2([a,b],\mathbb{R}^n) \ni (v,w) \longmapsto \int_a^b g^+(s)\big(v(s), w(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

define um produto interno em $L^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ equivalente a (5.1.19). Segue então (vide Exemplo 5.1.38 ou, mais especificamente, fórmula (5.1.32)) que o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\langle v, w\rangle = g^+(a)\big(v(a), w(a)\big) + \int_a^b g^+(s)\big(v'(s), w'(s)\big)\,\mathrm{d}s \tag{6.3.30}$$

induz a topologia usual do espaço Hilbertizável $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Recorde também que, pela Observação 5.2.63, a condição "$I^{\#}|_{\mathcal{K}^{\#}\times\mathcal{K}^{\#}}$ é RPCIP" não depende do particular produto interno escolhido em $\mathcal{K}^{\#}$, desde que esse produto interno induza a topologia padrão de $\mathcal{K}^{\#}$ (i.e., a topologia induzida pelo espaço Hilbertizável $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$). Estamos em condição agora de demonstrar o seguinte:

LEMA 6.3.18. *A restrição de $I^{\#}$ a $\mathcal{K}^{\#}$ é RPCIP.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere os produtos internos $g^+(s)$ definidos em (6.3.27); usando (6.3.28), vemos que $I^{\#}$ pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} I^{\#}(v,w) = \int_a^b g^+(v', w') - 2g^+\big(\pi(v'), \pi(w')\big) + g\big(R(v), w\big)\,\mathrm{d}s \\ - S\big(v(a), w(a)\big) + \Theta\big(v(b), w(b)\big), \end{aligned}$$

onde omitimos o parâmetro s por simplicidade. A estratégia da demonstração é usar a idéia explicada no Exemplo 5.2.64; vamos mostrar então que a diferença entre $I^{\#}|_{\mathcal{K}^{\#}\times\mathcal{K}^{\#}}$ e a restrição do produto interno (6.3.30) a $\mathcal{K}^{\#}$ é uma forma bilinear (simétrica) representada por um operador compacto de $\mathcal{K}^{\#}$. Para isso, é suficiente mostrar que essa forma bilinear é contínua com respeito à topologia τ_0 induzida por $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{K}^\#$; esse fato seguirá facilmente se mostrarmos que o operador linear

$$\mathcal{K}^\# \ni v \longmapsto \pi(v') \in L^2([a,b],\mathbb{R}^n)$$

é contínuo com respeito à topologia τ_0 em $\mathcal{K}^\#$. Usando (6.3.29) vemos que é suficiente mostrar que, dada uma aplicação $\mathcal{D}$-horizontal $\overline{Y}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 então o operador linear

$$\mathcal{K}^\# \ni v \longmapsto \theta(v) = g(v', \overline{Y}) \in L^2([a,b],\mathbb{R})$$

é contínuo em $\mathcal{K}^\#$ munido de τ_0. Seja Cte o subespaço de $L^2([a,b],\mathbb{R})$ formado pelas aplicações constantes e denote por

$$\mathfrak{q}\colon L^2([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow L^2([a,b],\mathbb{R})/\mathrm{Cte} \tag{6.3.31}$$

a aplicação quociente; recordando (6.2.5), vemos que $\mathfrak{q}\circ\theta = \mathfrak{q}\circ\theta_1$ onde $\theta_1\colon \mathcal{K}^\# \to L^2([a,b],\mathbb{R})$ é o operador linear dado por:

$$\theta_1(v)(s) = \int_a^s g\big(v'(r), \overline{Y}'(r)\big) + g\big(R(r)v(r), \overline{Y}(r)\big)\,\mathrm{d}r,$$

para todo $s \in [a,b]$. Argumentando como na Observação 6.3.10, vemos que θ_1 é contínuo em $(\mathcal{K}^\#, \tau_0)$ e logo $\mathfrak{q}\circ\theta$ é contínuo em $(\mathcal{K}^\#, \tau_0)$; além do mais, o funcional linear

$$\mathcal{K}^\# \ni v \longmapsto \int_a^b \theta(v) = \int_a^b g\big(v'(s), \overline{Y}(s)\big)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$$

é contínuo em $(\mathcal{K}^\#, \tau_0)$, pelo argumento usado na Observação 6.3.10. A continuidade de θ em $(\mathcal{K}^\#, \tau_0)$ segue agora da Observação 6.3.21 adiante; isso completa a demonstração. □

COROLÁRIO 6.3.19. *A restrição de I a $\mathcal{K}$ é RPCIP; em particular $I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}$ tem índice finito:*

$$n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big) < +\infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. O fato que a restrição de I a $\mathcal{K}$ é RPCIP segue da Observação 5.2.65, já que $I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}$ é a restrição a $\mathcal{K}$ de $I^\#|_{\mathcal{K}^\#\times\mathcal{K}^\#}$; o fato que I tem índice finito em $\mathcal{K}$ segue do Lema 5.2.67. □

COROLÁRIO 6.3.20. *Suponha que $t = b$ não é nem um instante (X, ℓ_0)-focal nem um instante (X_{red}, L_0)-focal. Seja $(R_m)_{m\ge 1}$ uma seqüência de aplicações contínuas $R_m\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ que converge uniformemente para R em $[a,b]$ e tal que $R_m(t)$ é um operador g-simétrico para todo $m \ge 1$ e todo $t \in [a,b]$; seja X_m o sistema diferencial simplético correspondente à equação de Morse-Sturm $v''(t) = R_m(t)\cdot v(t)$. Denote por $I_m \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$ a forma do índice correspondente ao par (X_m, ℓ_0) e por $\mathcal{K}_m$ o subespaço de $\mathcal{H}$ definido a partir de X_m e da distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ em analogia a* (6.2.16) *(i.e., troque X por X_m em* (6.2.16)*). Daí, para m suficientemente grande o índice de I_m em $\mathcal{K}_m$ é igual ao índice de I em $\mathcal{K}$, ou seja:*

$$n_-\big(I_m|_{\mathcal{K}_m\times\mathcal{K}_m}\big) = n_-\big(I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}\big).$$

Demonstração. Considere o operador $F_m^\#\colon \mathcal{H}^\# \to L^2\big([a,b], I\!R^{k^*}\big)$ definido como em (6.3.15) trocando R por R_m e seja F_m a restrição de $F_m^\#$ a $\mathcal{H}$; temos que $\mathcal{K}_m = \mathrm{Ker}(\mathfrak{q}\circ F_m)$ onde $\mathfrak{q}$ é a aplicação quociente dada em (6.3.22). É fácil ver que $(F_m)_{m\ge1}$ converge para F em $\mathcal{L}\big(\mathcal{H}, L^2\big([a,b], I\!R^{k^*}\big)\big)$ e que $(I_m)_{m\ge1}$ converge para I em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$. Como $t=b$ não é (X_{red}, L_0)-focal segue do Corolário 6.3.12 que $\mathfrak{q}\circ F$ é sobrejetor e como $t=b$ não é (X,ℓ_0)-focal a Proposição 6.1.23 e o Corolário 6.3.14 implicam que $I|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}$ é não-degenerada; a conclusão segue então da Observação 5.2.85. □

Observação 6.3.21. Denote por $\mathfrak{q}$ a aplicação quociente (6.3.31); é fácil ver que o operador

$$L^2([a,b], I\!R) \ni f \longmapsto \big(\mathfrak{q}(f), \textstyle\int_a^b f\big) \in \big(L^2([a,b], I\!R)/\mathrm{Cte}\big) \oplus I\!R$$

é um isomorfismo topológico. Daí, se $v\mapsto\theta(v)$ é uma aplicação tomando valores em $L^2([a,b], I\!R)$ (definida num espaço topológico qualquer) então a continuidade de θ é equivalente à continuidade de ambas as aplicações $\mathfrak{q}\circ\theta$ e $v\mapsto\int_a^b\theta(v)$.

A forma bilinear $I^\#$ não é em geral RPCIP em todo o espaço $\mathcal{H}^\#$ (na verdade, usando o Lema 6.2.1 é fácil mostrar que $I^\#$ é RPCIP em $\mathcal{H}^\#$ se e somente se g é definida positiva). Mostraremos, no entanto, a seguir que $I^\#$ é sempre *representada por um operador de Fredholm de índice zero* em $\mathcal{H}^\#$; recorde que essa condição não depende da escolha particular de produto interno no espaço Hilbertizável $\mathcal{H}^\#$ (vide Observação 5.2.31).

Lema 6.3.22. *A forma bilinear simétrica $I^\#$ é representada por um operador de Fredholm de índice zero em $\mathcal{H}^\#$.*

Demonstração. Considere a forma bilinear simétrica

$$\overline{I}\colon H^1([a,b], I\!R^n)\times H^1([a,b], I\!R^n)\longrightarrow I\!R$$

definida pela mesma fórmula (6.3.4) que define $I^\#$ (mais precisamente, fazemos $t=b$ em (6.3.4)); daí $\overline{I}$ é uma extensão de $I^\#$. Como $\mathcal{H}^\#$ tem co-dimensão finita em $H^1([a,b], I\!R^n)$ (a saber: tal co-dimensão é $\text{co-dim}_{I\!R^n} P$), segue do Exemplo 5.2.30 que para mostrar que $I^\#$ é representada por um operador de Fredholm de índice zero em $\mathcal{H}^\#$ é suficiente mostrar que $\overline{I}$ é representada por um operador de Fredholm de índice zero em $H^1([a,b], I\!R^n)$; com esse objetivo considere o produto interno em $H^1([a,b], I\!R^n)$ dado por:

$$\langle v,w\rangle = \langle v(a), w(a)\rangle + \int_a^b \langle v'(s), w'(s)\rangle\,\mathrm{d}s, \tag{6.3.32}$$

onde os produtos $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que aparecem do lado direito da igualdade (6.3.32) são simplesmente o produto interno canônico de $I\!R^n$. O isomorfismo $g\colon I\!R^n\to I\!R^{n*}$ corresponde a um isomorfismo $g\colon I\!R^n\to I\!R^n$ quando identificamos $I\!R^n\cong I\!R^{n*}$ (através do produto interno canônico); esse último induz um isomorfismo topológico:

$$H^1([a,b], I\!R^n)\ni v\longmapsto gv\in H^1([a,b], I\!R^n), \tag{6.3.33}$$

onde $(gv)(t) = gv(t)$ para todo $t \in [a,b]$. O isomorfismo (6.3.33) representa a forma bilinear simétrica

$$(v,w) \longmapsto g\big(v(a),w(a)\big) + \int_a^b g\big(v'(s),w'(s)\big)\,\mathrm{d}s \tag{6.3.34}$$

em $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$; é fácil ver que a diferença entre (6.3.34) e $\overline{I}$ é uma forma bilinear contínua com respeito à topologia induzida por $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ em $H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Pelo Exemplo 5.2.64, vemos que $\overline{I}$ é representada por uma perturbação compacta de um isomorfismo e a conclusão segue do Corolário 5.2.29. $\square$

COROLÁRIO 6.3.23. *Se $I^\#$ é não-degenerada em $\mathcal{H}^\#$, i.e., se $\mathrm{Ker}\big(I^\#\big) = \{0\}$ então $I^\#$ é representada por um isomorfismo de $\mathcal{H}^\#$.* $\square$

Nosso objetivo agora é calcular o núcleo de $I^\#$ em $\mathcal{K}^\#$ (supondo $I^\#$ não-degenerada em $\mathcal{H}^\#$); começamos com o seguinte:

LEMA 6.3.24. *Os espaços $\mathcal{K}^\#$ e $\mathcal{S}$ são $I^\#$-ortogonais, i.e., $I^\#(v,w) = 0$ sempre que $v \in \mathcal{K}^\#$ e $w \in \mathcal{S}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Essencialmente idêntica à prova do Lema 6.2.13. $\square$

LEMA 6.3.25. *O subespaço $\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}$ é fechado em $\mathcal{H}^\#$ e sua co-dimensão é (finita e) igual à dimensão de $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}$, ou seja:*

$$\text{co-dim}_{\mathcal{H}^\#}\big(\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}\big) = \dim(\mathcal{K} \cap \mathcal{S}) < +\infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. Observe primeiramente que a aplicação $v \mapsto v(b)$ induz por passagem ao quociente um isomorfismo entre $\mathcal{S}^\#/\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}_b$, donde concluímos que

$$\dim\left(\frac{\mathcal{S}^\#}{\mathcal{S}}\right) = k, \tag{6.3.35}$$

e em particular $\mathcal{S}$ tem co-dimensão finita em $\mathcal{S}^\#$; tendo em mente a Observação 6.3.1 e o Corolário 6.3.7 segue então do Corolário 5.2.18 que $\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}$ é fechado em $\mathcal{H}^\#$. Vamos agora calcular a co-dimensão de $\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}$ em $\mathcal{H}^\#$. Pelo Corolário 6.3.7 vemos que a aplicação

$$\bar{\mathfrak{i}}\colon \frac{\mathcal{S}^\#}{\mathcal{S}} \longrightarrow \frac{\mathcal{H}^\#}{\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}}$$

induzida por passagem ao quociente da inclusão é sobrejetora; o núcleo de $\bar{\mathfrak{i}}$ é dado por:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\big(\bar{\mathfrak{i}}\big) = \frac{\big(\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}\big) \cap \mathcal{S}^\#}{\mathcal{S}} = \frac{\big(\mathcal{K}^\# \cap \mathcal{S}^\#\big) + \mathcal{S}}{\mathcal{S}} &\cong \frac{\mathcal{K}^\# \cap \mathcal{S}^\#}{\big(\mathcal{K}^\# \cap \mathcal{S}^\#\big) \cap \mathcal{S}} \\ &= \frac{\mathcal{K}^\# \cap \mathcal{S}^\#}{\mathcal{K} \cap \mathcal{S}}.\end{aligned} \tag{6.3.36}$$

Usando (6.3.36), (6.3.35) e o Corolário 6.3.8 calculamos:

$$\begin{aligned}\text{co-dim}_{\mathcal{H}^\#}\big(\mathcal{K}^\# \cap \mathcal{S}\big) &= \dim\left(\frac{\mathcal{H}^\#}{\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}}\right) = \dim\big(\mathrm{Im}(\bar{\mathfrak{i}})\big)\\ &= \dim\left(\frac{\mathcal{S}^\#}{\mathcal{S}}\right) - \dim\left(\frac{\mathcal{K}^\# \cap \mathcal{S}^\#}{\mathcal{K}\cap\mathcal{S}}\right)\\ &= k - \big(k - \dim(\mathcal{K}\cap\mathcal{S})\big) = \dim(\mathcal{K}\cap\mathcal{S}). \qquad \square\end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular o núcleo de $I^\#$ em $\mathcal{K}^\#$:

LEMA 6.3.26. *Se $I^\#$ é não-degenerada em $\mathcal{H}^\#$, i.e., se* $\mathrm{Ker}\big(I^\#\big) = \{0\}$ *então:*

$$\mathrm{Ker}\big(I^\#|_{\mathcal{K}^\#\times\mathcal{K}^\#}\big) = \mathcal{K}\cap\mathcal{S}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 6.3.24 que:

$$\mathcal{K}\cap\mathcal{S} \subset \mathrm{Ker}\big(I^\#|_{\mathcal{K}^\#\times\mathcal{K}^\#}\big);$$

para completar a demonstração é suficiente mostrar que o núcleo de $I^\#$ em $\mathcal{K}^\#$ tem dimensão menor ou igual à dimensão de $\mathcal{K}\cap\mathcal{S}$. Se $T\colon \mathcal{H}^\# \to \mathcal{H}^\#$ denota o operador linear que representa $I^\#$ (com respeito a um produto interno qualquer compatível com a topologia de $\mathcal{H}^\#$) então segue do Lema 6.3.24 que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\big(I^\#|_{\mathcal{K}^\#\times\mathcal{K}^\#}\big) &\subset \big\{v \in \mathcal{H}^\# : I^\#(v,\cdot)|_{(\mathcal{K}^\#+\mathcal{S})} = 0\big\}\\ &= T^{-1}\big((\mathcal{K}^\# + \mathcal{S})^\perp\big);\end{aligned}$$

pelo Lema 6.3.25 vemos que:

$$\dim\big((\mathcal{K}^\# + \mathcal{S})^\perp\big) = \text{co-dim}_{\mathcal{H}^\#}\big(\mathcal{K}^\# + \mathcal{S}\big) = \dim(\mathcal{K}\cap\mathcal{S})$$

e o Corolário 6.3.23 implica que T é um isomorfismo. Isso completa a demonstração. $\square$

6.3.2. O truque da reparametrização afim. Nesta subseção queremos estudar a evolução do índice de I_t em $\mathcal{K}_t$ (i.e., da função $i(t)$) e do índice de $I_t^\#$ em $\mathcal{K}_t^\#$ quando t varia em $]a,b]$; para isso vamos usar as técnicas estudadas na Subseção 5.2.4. O problema aqui é que os espaços $\mathcal{K}_t$ e $\mathcal{K}_t^\#$ são subespaços de $\mathcal{H}_t^\#$ e esse espaço depende de t. A estratégia então é usar reparametrizações afins para identificar aplicações definidas em intervalos diferentes; obteremos então identificações dos espaços $\mathcal{H}_t^\#$ com um espaço de Hilbert fixo.

Nesta subseção as convenções e notações são as mesmas da Seção 6.3 e da Subseção 6.3.1; todos os resultados da subseção são demonstrados sob a hipótese que R é uma aplicação de classe C^1 (tal hipótese será repetida em cada enunciado, por questões de clareza).

Seja $t \in\,]a,b]$; como foi discutido no Exemplo 5.1.45, temos um isomorfismo topológico

$$\phi_t\colon H^1([0,1],\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} H^1([a,t],\mathbb{R}^n)$$

que leva cada aplicação $\hat{v}\colon [0,1] \to I\!R^n$ sobre a aplicação $v\colon [a,t] \to I\!R^n$ obtida de $\hat{v}$ por *reparametrização afim*; mais explicitamente, definimos

$$\phi_t(\hat{v}) = v, \tag{6.3.37}$$

onde $v(s) = \hat{v}(u_s)$ para todo $s \in [a,t]$ e u_s é definido por:

$$u_s = u_{s,t} = \frac{s-a}{t-a}. \tag{6.3.38}$$

Com um certo abuso de notação, denotaremos também por ϕ_t o isomorfismo topológico:

$$\phi_t\colon L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big) \xrightarrow{\cong} L^2\big([a,t], I\!R^{k^*}\big)$$

definido também por (6.3.37); mais geralmente, *qualquer operador obtido por restrição de ϕ_t será denotado por ϕ_t*. Para uso posterior resolvemos (6.3.38) em termos de s e definimos:

$$s_u = s_{u,t} = a + u(t-a). \tag{6.3.39}$$

Observe que os subespaços fechados $\hat{\mathcal{H}} = \phi_t^{-1}(\mathcal{H}_t)$ e $\hat{\mathcal{H}}^{\#} = \phi_t^{-1}\big(\mathcal{H}_t^{\#}\big)$ de $H^1([0,1], I\!R^n)$ não dependem de $t \in\,]a,b]$; de fato, temos:

$$\hat{\mathcal{H}}^{\#} = \big\{\hat{v} \in H^1([0,1], I\!R^n) : \hat{v}(0) \in P\big\},$$
$$\hat{\mathcal{H}} = \big\{\hat{v} \in H^1([0,1], I\!R^n) : \hat{v}(0) \in P,\ \hat{v}(1) = 0\big\}.$$

Para todo $t \in\,]a,b]$ definimos os subespaços:

$$\hat{\mathcal{K}}_t^{\#} = \phi_t^{-1}\big(\mathcal{K}_t^{\#}\big) \subset \hat{\mathcal{H}}^{\#}, \quad \hat{\mathcal{S}}_t^{\#} = \phi_t^{-1}\big(\mathcal{S}_t^{\#}\big) \subset \hat{\mathcal{H}}^{\#},$$
$$\hat{\mathcal{K}}_t = \phi_t^{-1}(\mathcal{K}_t) \subset \hat{\mathcal{H}}, \quad \hat{\mathcal{S}}_t = \phi_t^{-1}(\mathcal{S}_t) \subset \hat{\mathcal{H}},$$

e daí segue trivialmente de (6.3.6) que $\hat{\mathcal{K}}_t = \hat{\mathcal{K}}_t^{\#} \cap \hat{\mathcal{H}}$ e $\hat{\mathcal{S}}_t = \hat{\mathcal{S}}_t^{\#} \cap \hat{\mathcal{H}}$. Definimos também:

$$\hat{I}_t^{\#} = \phi_t^*\big(I_t^{\#}\big) = I_t^{\#}(\phi_t\cdot, \phi_t\cdot), \quad \hat{I}_t = \phi_t^*(I_t) = I_t(\phi_t\cdot, \phi_t\cdot); \tag{6.3.40}$$

daí $\hat{I}_t^{\#} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}\big)$, $\hat{I}_t \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\hat{\mathcal{H}}\big)$ e $\hat{I}_t^{\#}$ é uma extensão de $\hat{I}_t$ para todo $t \in\,]a,b]$. É claro que:

$$n_-\big(\hat{I}_t|_{\hat{\mathcal{K}}_t \times \hat{\mathcal{K}}_t}\big) = n_-\big(I_t|_{\mathcal{K}_t \times \mathcal{K}_t}\big) = i(t), \quad n_-\big(\hat{I}_t^{\#}|_{\hat{\mathcal{K}}_t^{\#} \times \hat{\mathcal{K}}_t^{\#}}\big) = n_-\big(I_t^{\#}|_{\mathcal{K}_t^{\#} \times \mathcal{K}_t^{\#}}\big),$$

para todo $t \in\,]a,b]$. Temos a seguinte fórmula explícita para $\hat{I}_t^{\#}$:

$$\begin{aligned}\hat{I}_t^{\#}(\hat{v}, \hat{w}) = \int_a^t \frac{1}{(t-a)^2}\, g\big(\hat{v}'(u_s), \hat{w}'(u_s)\big) + g\big(R(s)\hat{v}(u_s), \hat{w}(u_s)\big)\, \mathrm{d}s \\ - S\big(\hat{v}(0), \hat{w}(0)\big) + \Theta\big(\hat{v}(1), \hat{w}(1)\big),\end{aligned} \tag{6.3.41}$$

para todos $\hat{v}, \hat{w} \in \hat{\mathcal{H}}^{\#}$.

Para cada $t \in\,]a,b]$ definimos um operador limitado

$$F_t^{\#}\colon \mathcal{H}_t^{\#} \longrightarrow L^2\big([a,t], I\!R^{k^*}\big)$$

correspondente ao sistema diferencial simplético $X|_{[a,t]}$ em analogia ao operador $F^{\#}$ dado em (6.3.14); mais explicitamente, $F_t^{\#}$ é definido precisamente pela mesma fórmula (6.3.15) que define $F^{\#}$, mas agora a variável s percorre apenas o intervalo $[a,t]$. Em analogia a (6.3.16) definimos também:

$$F_t = F_t^{\#}|_{\mathcal{H}_t} \colon \mathcal{H}_t \longrightarrow L^2\big([a,t], I\!R^{k^*}\big);$$

se Cte_t denota o subespaço de $L^2\big([a,t], I\!R^{k^*}\big)$ formado pelas funções constantes então obviamente, como em (6.3.17), temos:

$$\mathcal{K}_t = F_t^{-1}(\mathrm{Cte}_t), \quad \mathcal{K}_t^{\#} = (F_t^{\#})^{-1}(\mathrm{Cte}_t). \tag{6.3.42}$$

Definimos agora:

$$\hat{F}_t^{\#} = \phi_t^{-1} \circ F_t^{\#} \circ \phi_t \colon \hat{\mathcal{H}}^{\#} \longrightarrow L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big),$$
$$\hat{F}_t = \phi_t^{-1} \circ F_t \circ \phi_t \colon \hat{\mathcal{H}} \longrightarrow L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big);$$

obviamente segue de (6.3.42) que:

$$\hat{\mathcal{K}}_t = \hat{F}_t^{-1}(\mathrm{Cte}), \quad \hat{\mathcal{K}}_t^{\#} = \big(\hat{F}_t^{\#}\big)^{-1}(\mathrm{Cte}), \tag{6.3.43}$$

onde $\mathrm{Cte} \subset L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)$ denota o subespaço formado pelas funções constantes. Temos a seguinte fórmula explícita para $\hat{F}_t^{\#}$:

$$\hat{F}_t^{\#}(\hat{v})(u)_i = \frac{1}{t-a}\, g\big(\hat{v}'(u), Y_i(s_u)\big) - \int_a^{s_u} \frac{1}{t-a}\, g\big(\hat{v}'(u_r), Y_i'(r)\big) + g\big(R(r)\hat{v}(u_r), Y_i(r)\big)\, \mathrm{d}r, \tag{6.3.44}$$

para todos $\hat{v} \in \hat{\mathcal{H}}^{\#}$, $u \in [0,1]$ e $i = 1, \ldots, k$.

Vamos agora mostrar a regularidade dos objetos introduzidos até o momento nesta subseção.

Lema 6.3.27. *Se R é de classe C^1 então a aplicação*

$$\hat{I}^{\#} \colon\ ]a,b] \ni t \longmapsto \hat{I}_t^{\#} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}\big) \tag{6.3.45}$$

é de classe C^1.

Demonstração. Uma mudança de variável afim na integral em (6.3.41) nos dá a seguinte fórmula alternativa para $\hat{I}_t^{\#}$:

(6.3.46)

$$\hat{I}_t^{\#}(\hat{v},\hat{w}) = \frac{1}{t-a}\int_0^1 g\big(\hat{v}'(u), \hat{w}'(u)\big)\,\mathrm{d}u - S\big(\hat{v}(0), \hat{w}(0)\big) + \Theta\big(\hat{v}(1), \hat{w}(1)\big) + (t-a)\int_0^1 g\big(R(s_u)\hat{v}(u), \hat{w}(u)\big)\,\mathrm{d}u,$$

para todos $\hat{v}, \hat{w} \in \hat{\mathcal{H}}^{\#}$. Considere o operador linear

$$\sigma \colon C^0\big([0,1], \mathcal{L}(I\!R^n)\big) \longrightarrow \mathcal{B}\big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}\big)$$

dado por:

$$\sigma(\mathcal{R})(\hat{v},\hat{w}) = \int_0^1 g\big(\mathcal{R}(u)\hat{v}(u), \hat{w}(u)\big)\,\mathrm{d}u,$$

para todos $\mathcal{R} \in C^0\big([0,1], \mathcal{L}(I\!R^n)\big)$ e $\hat{v}, \hat{w} \in \hat{\mathcal{H}}^{\#}$; é fácil ver que σ é limitado. Como R é de classe C^1, segue do Exemplo 5.1.66 que a aplicação

$$[a,b] \ni t \longmapsto \mathcal{R}_t \in C^0\big([0,1], \mathcal{L}(I\!R^n)\big) \tag{6.3.47}$$

dada por $\mathcal{R}_t(u) = R(s_u) = R\big(a + u(t-a)\big)$, $u \in [0,1]$, é de classe C^1; daí a composta de σ com (6.3.47) é de classe C^1. Usando (6.3.46) é fácil ver que a diferença entre (6.3.45) e $t \mapsto (t-a)\sigma(\mathcal{R}_t)$ é de classe C^∞, o que completa a demonstração. $\square$

COROLÁRIO 6.3.28. *Se R é de classe C^1 então a aplicação*

$$\hat{I}\colon\ ]a,b] \ni t \longmapsto \hat{I}_t \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\hat{\mathcal{H}}\big)$$

é de classe C^1.

DEMONSTRAÇÃO. De (6.3.5) vemos que $\hat{I}_t = \hat{I}_t^{\#}|_{\hat{\mathcal{H}}\times\hat{\mathcal{H}}}$; a conclusão segue. $\square$

OBSERVAÇÃO 6.3.29. Argumentos similares aos usados na demonstração do Lema 6.3.27 mostram que se R é de classe C^1 então a aplicação

$$]a,b] \ni t \longmapsto \mathcal{J}_t = (t-a)\hat{I}_t \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\hat{\mathcal{H}}\big)$$

admite uma extensão de classe C^1 para o intervalo fechado $[a,b]$; explicitamente, tal extensão é dada por:

$$\mathcal{J}_a\big(\hat{v}, \hat{w}\big) = \int_0^1 g\big(\hat{v}'(u), \hat{w}'(u)\big)\,\mathrm{d}u, \tag{6.3.48}$$

para todos $\hat{v}, \hat{w} \in \hat{\mathcal{H}}$. Essa observação será usada na Subseção 6.3.3 a seguir.

LEMA 6.3.30. *Se R é de classe C^1 então a aplicação*

$$\hat{F}^{\#}\colon\ ]a,b] \ni t \longmapsto \hat{F}_t^{\#} \in \mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}, L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)\big) \tag{6.3.49}$$

é de classe C^1.

DEMONSTRAÇÃO. Fazendo uma mudança de variável afim na integral em (6.3.44) obtemos a seguinte fórmula alternativa para $\hat{F}_t^{\#}$:

$$\begin{aligned}\hat{F}_t^{\#}(\hat{v})(u)_i = \frac{1}{t-a}\, g\big(\hat{v}'(u), Y_i(s_u)\big) - \int_0^u g\big(\hat{v}'(x), Y_i'(s_x)\big)\\ + (t-a) g\big(R(s_x)\hat{v}(x), Y_i(s_x)\big)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{6.3.50}$$

para todos $\hat{v} \in \hat{\mathcal{H}}^{\#}$, $u \in [0,1]$ e $i = 1, \ldots, k$. Considerando identificações

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}, L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)\big) &\cong \mathcal{L}\Big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}, \bigoplus_k L^2([0,1], I\!R)\Big)\\ &\cong \bigoplus_k \mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}, L^2([0,1], I\!R)\big),\end{aligned}$$

vemos que é suficiente demonstrar que cada uma das k coordenadas de (6.3.49) é de classe C^1; com esse objetivo, definimos operadores lineares

$$\sigma_1, \sigma_2 \colon C^0([0,1], I\!R^n) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{H}}^\#, L^2([0,1], I\!R)\big)$$

e um operador bilinear

$$\sigma_3 \colon C^0\big([0,1], \mathcal{L}(I\!R^n)\big) \times C^0([0,1], I\!R^n) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{H}}^\#, L^2([0,1], I\!R)\big)$$

fazendo:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\mathcal{Y})(\hat{v})(u) &= g\big(\hat{v}'(u), \mathcal{Y}(u)\big), \\ \sigma_2\big(\overline{\mathcal{Y}}\big)(\hat{v})(u) &= \int_0^u g\big(\hat{v}'(x), \overline{\mathcal{Y}}(x)\big)\,\mathrm{d}x, \\ \sigma_3(\mathcal{R}, \mathcal{Y})(\hat{v})(u) &= \int_0^u g\big(\mathcal{R}(x)\hat{v}(x), \mathcal{Y}(x)\big)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

para todos $\hat{v} \in \hat{\mathcal{H}}^\#$ e $u \in [0,1]$. É fácil ver que os operadores σ_1, σ_2 e σ_3 são limitados; além do mais, segue de (6.3.50) que:

$$\big(\hat{F}_t^\#\big)_i = \frac{1}{t-a}\sigma_1(\mathcal{Y}_t) - \sigma_2\big(\overline{\mathcal{Y}}_t\big) - (t-a)\sigma_3(\mathcal{R}_t, \mathcal{Y}_t),$$

para todos $t \in \,]a,b]$ e $i = 1, \ldots, k$, onde:

$$\mathcal{Y}_t(u) = Y_i(s_u), \quad \overline{\mathcal{Y}}_t(u) = Y_i'(s_u), \quad \mathcal{R}_t(u) = R(s_u),$$

para todo $u \in [0,1]$ e s_u é definido em (6.3.39). Como R é de classe C^1 e Y_i é de classe C^2 segue do Exemplo 5.1.66 que as aplicações

$$[a,b] \ni t \longmapsto \mathcal{Y}_t \in C^0([0,1], I\!R^n), \quad [a,b] \ni t \longmapsto \overline{\mathcal{Y}}_t \in C^0([0,1], I\!R^n),$$
$$[a,b] \ni t \longmapsto \mathcal{R}_t \in C^0\big([0,1], \mathcal{L}(I\!R^n)\big),$$

são de classe C^1. Isso completa a demonstração. □

COROLÁRIO 6.3.31. *Se R é de classe C^1 então $\big(\hat{\mathcal{K}}_t^\#\big)_{t \in]a,b]}$ é uma família C^1 de subespaços de $\hat{\mathcal{H}}^\#$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $\hat{\mathcal{K}}_t^\# = \mathrm{Ker}\big(\mathfrak{q} \circ \hat{F}_t^\#\big)$, onde $\mathfrak{q}$ denota a aplicação quociente sobre $L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)/\mathrm{Cte}$ (recorde (6.3.43)); a conclusão segue do Corolário 6.3.6 e do Lema 5.2.78. □

COROLÁRIO 6.3.32. *Se R é de classe C^1 então o índice de $I_t^\#$ em $\mathcal{K}_t^\#$ é constante quando t percorre um subintervalo de $]a,b]$ onde $I_t^\#$ é não-degenerada e onde não existam instantes (X_{red}, L_0)-focais.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $I_t^\#$ é não-degenerada e se t não é (X_{red}, L_0)-focal então os Lemas 6.2.10 e 6.3.26 implicam que $I_t^\#$ é não-degenerada em $\mathcal{K}_t^\#$; portanto $\hat{I}_t^\#$ é não-degenerada em $\hat{\mathcal{K}}_t^\#$. A conclusão segue agora da Observação 5.2.84, tendo em mente os Lemas 6.3.18, 6.3.27 e o Corolário 6.3.31 (vide também (6.3.40) e a Observação 5.2.62). □

COROLÁRIO 6.3.33. *Se R é de classe C^1 então a aplicação*

$$\hat{F}\colon\ ]a,b] \ni t \longmapsto \hat{F}_t \in \mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{H}}, L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)\big)$$

é de classe C^1.

DEMONSTRAÇÃO. Segue trivialmente do Lema 6.3.30 e da observação que $\hat{F}_t$ é a restrição de $\hat{F}_t^{\#}$ a $\hat{\mathcal{H}}$. $\square$

COROLÁRIO 6.3.34. *Se R é de classe C^1 então $\big(\hat{\mathcal{K}}_t\big)_{t\in]a,b]}$ é uma família C^1 de subespaços de $\hat{\mathcal{H}}$ em qualquer subintervalo de $]a,b]$ que não contenha instantes (X_{red}, L_0)-focais.*

DEMONSTRAÇÃO. Similar à demonstração do Corolário 6.3.31, usando o Corolário 6.3.12 em vez do Corolário 6.3.6. $\square$

COROLÁRIO 6.3.35. *Suponha que R é de classe C^1; então a função $i(t) = n_-\big(I_t|_{\mathcal{K}_t\times\mathcal{K}_t}\big)$ é constante em qualquer subintervalo de $]a,b]$ que não contenha instantes (X,ℓ_0)-focais nem instantes (X_{red}, L_0)-focais.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $t \in\ ]a,b]$ não é (X,ℓ_0)-focal nem (X_{red}, L_0)-focal então segue da Proposição 6.1.23 e do Corolário 6.3.14 que I_t é não-degenerada em $\mathcal{K}_t$ e portanto $\hat{I}_t$ é não-degenerada em $\hat{\mathcal{K}}_t$; a conclusão é obtida então a partir da Observação 5.2.84 tendo em mente os Corolários 6.3.28 e 6.3.34 (vide também (6.3.40) e a Observação 5.2.62). $\square$

OBSERVAÇÃO 6.3.36. Argumentos similares aos usados na demonstração do Lema 6.3.30 mostram que se R é de classe C^1 então a aplicação

$$]a,b] \ni t \longmapsto \mathcal{F}_t = (t-a)F_t \in \mathcal{L}\big(\hat{\mathcal{H}}, L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)\big)$$

admite uma extensão de classe C^1 para o intervalo fechado $[a,b]$; explicitamente, tal extensão é dada por:

$$\mathcal{F}_a(\hat{v})(u)_i = g\big(\hat{v}'(u), Y_i(a)\big), \tag{6.3.51}$$

para todos $\hat{v} \in \hat{\mathcal{H}}$, $u \in [0,1]$ e $i = 1,\ldots,k$. Essa observação será usada na Subseção 6.3.3 a seguir.

No próximo lema calculamos a restrição da derivada de $t \mapsto \hat{I}_t$ ao núcleo de $\hat{I}_t$:

LEMA 6.3.37. *Denote por $\mathbb{V}_t$ o conjunto das $(X|_{[a,t]}, \ell_0)$-soluções; sejam $v, w \in \mathbb{V}_t \cap \mathcal{H}_t$ e escreva $\hat{v} = \phi_t^{-1}(v)$, $\hat{w} = \phi_t^{-1}(w)$. Se R é de classe C^1 então vale a identidade:*

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_t\right)(\hat{v},\hat{w}) = -g\big(v'(t), w'(t)\big).$$

DEMONSTRAÇÃO. O operador de *avaliação em* $(\hat{v},\hat{w})$ definido por

$$\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\hat{\mathcal{H}}) \ni \sigma \longmapsto \sigma(\hat{v},\hat{w}) \in I\!R$$

é linear limitado donde segue que:

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_t\Big)(\hat{v},\hat{w}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\hat{I}_t(\hat{v},\hat{w})\big];$$

recordando que $\hat{I}_t(\hat{v},\hat{w})$ coincide com o lado direito da igualdade em (6.3.41) calculamos (vide também Observação 6.3.39 adiante):

(6.3.52)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\hat{I}_t(\hat{v},\hat{w})\big] &= \frac{1}{(t-a)^2}\,g\big(\hat{v}'(1),\hat{w}'(1)\big) - \frac{2}{(t-a)^3}\int_a^t g\big(\hat{v}'(u_s),\hat{w}'(u_s)\big)\,\mathrm{d}s\\ &- \frac{1}{(t-a)^4}\int_a^t (s-a)\Big[g\big(\hat{v}''(u_s),\hat{w}'(u_s)\big) + g\big(\hat{v}'(u_s),\hat{w}''(u_s)\big)\Big]\,\mathrm{d}s\\ &- \frac{1}{(t-a)^2}\int_a^t (s-a)\Big[g\big(R(s)\hat{v}'(u_s),\hat{w}(u_s)\big) + g\big(R(s)\hat{v}(u_s),\hat{w}'(u_s)\big)\Big]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\hat{v}(1) = \hat{w}(1) = 0$. Reescrevendo o lado direito de (6.3.52) em termos de v, w e usando a g-simetria de $R(s)$ obtemos:

$$\begin{aligned}\text{(6.3.53)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\hat{I}_t(\hat{v},\hat{w})\big] &= g\big(v'(t),w'(t)\big) - \frac{1}{t-a}\int_a^t 2\,g\big(v'(s),w'(s)\big)\,\mathrm{d}s\\ &- \frac{1}{t-a}\int_a^t (s-a)\big[g(v'',w') + g(v',w'') + g(v',Rw) + g(Rv,w')\big]\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

onde todos os objetos que aparecem na segunda integral são avaliados no instante s. Usando o fato que $v,w \in \mathbb{V}_t$ podemos eliminar os termos envolvendo R em (6.3.53) e daí:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\hat{I}_t(\hat{v},\hat{w})\big] &= g\big(v'(t),w'(t)\big)\\ &\qquad - \frac{2}{t-a}\int_a^t g(v',w') + (s-a)\big[g(v'',w') + g(v',w'')\big]\,\mathrm{d}s\\ &= g\big(v'(t),w'(t)\big) - \frac{2}{t-a}\int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[(s-a)g(v',w')\big]\,\mathrm{d}s\\ &= -g\big(v'(t),w'(t)\big).\end{aligned}$$ □

COROLÁRIO 6.3.38. *Suponha que R é de classe C^1. Se $t_0 \in \,]a,b]$ é um instante focal não-degenerado para (X,ℓ_0) e se t_0* não *é focal para (X_{red},L_0) então:*

$$\text{(6.3.54)}\qquad i(t_0-\varepsilon) = i(t_0) + n_-\big(g|_{\mathbb{V}[t_0]^\perp\times\mathbb{V}[t_0]^\perp}\big),$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde o complemento ortogonal em $\mathbb{V}[t_0]^\perp$ é tomado com respeito a g; se $t < b$ então temos também:

$$\text{(6.3.55)}\qquad i(t_0+\varepsilon) = i(t_0) + n_+\big(g|_{\mathbb{V}[t_0]^\perp\times\mathbb{V}[t_0]^\perp}\big),$$

$$\text{(6.3.56)}\qquad i(t_0+\varepsilon) - i(t_0-\varepsilon) = \mathrm{sgn}(t_0),$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

DEMONSTRAÇÃO. Para demonstrar (6.3.55) nossa estratégia será usar o Teorema 5.2.80 para a curva $t \mapsto \hat{I}_t \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\hat{\mathcal{H}})$; para mostrar (6.3.54) usaremos o Teorema 5.2.80 para a curva $t \mapsto \hat{I}_{-t}$ e (6.3.56) seguirá então subtraindo (6.3.54) de (6.3.55) (ou do Corolário 5.2.81). Procedemos então com a verificação das hipóteses do Teorema 5.2.80. Primeiramente observe que, como t_0 não é um instante (X_{red}, L_0)-focal, então não há instantes (X_{red}, L_0)-focais numa vizinhança de t_0 em $[a, b]$; nessa vizinhança temos que $(\hat{\mathcal{K}}_t)_{t\in]a,b]}$ é uma família C^1 de subespaços de $\hat{\mathcal{H}}$ pelo Corolário 6.3.34. Sabemos que $t \mapsto \hat{I}_t$ é uma curva de classe C^1 em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\hat{\mathcal{H}})$ (vide Corolário 6.3.28) e que $\hat{I}_{t_0}$ é RPCIP em $\hat{\mathcal{K}}_{t_0}$ (vide Corolário 6.3.19 e Observação 5.2.62). Resta agora calcular a forma bilinear simétrica $\hat{I}^\dagger$; tendo em mente a Proposição 6.1.23, o Corolário 6.3.14 e o Exemplo 5.2.83 vemos que $\hat{I}^\dagger$ é simplesmente a restrição de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_t\big|_{t=t_0}$ ao espaço N dado por:

$$N = \big\{\phi_{t_0}^{-1}(v) : v \in \mathbb{V}_{t_0},\ v(t_0) = 0\big\} = \phi_{t_0}^{-1}(\mathbb{V}_{t_0} \cap \mathcal{H}_{t_0}).$$

Segue de (6.1.18) que temos um isomorfismo

$$N \ni \hat{v} \longmapsto v'(t_0) \in \mathbb{V}[t_0]^\perp \tag{6.3.57}$$

onde v denota $\phi_{t_0}(\hat{v})$; o Lema 6.3.37 nos diz então que a restrição de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_t\big|_{t=t_0}$ a N é o pull-back por (6.3.57) da restrição de $-g$ a $\mathbb{V}[t_0]^\perp$. Isso completa a demonstração. $\square$

OBSERVAÇÃO 6.3.39. Vamos justificar a validade da derivada calculada em (6.3.52) com mais cuidado. Como $v, w \in \mathbb{V}_t$, vemos que v e w são aplicações de classe C^2 no intervalo $[a, t]$ e portanto $\hat{v}$ e $\hat{w}$ são aplicações de classe C^2 no intervalo $[0, 1]$; é fácil ver que podemos estender $\hat{v}$ e $\hat{w}$ para aplicações de classe C^2 definidas em toda a reta $\mathbb{R}$ (declarando que $\hat{v}$, $\hat{w}$ devem coincidir em $[1, +\infty[$ com seus respectivos polinômios de Taylor de grau 2 em torno de 1; de modo similar definimos as extensões para $]-\infty, 0]$). Obviamente podemos também estender R para uma aplicação contínua em toda a reta; daí podemos ver o integrando em (6.3.41) como uma aplicação contínua

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \ni (s, t) \longmapsto \tau(s, t) \in \mathbb{R}$$

cuja derivada com respeito a t ainda é contínua no par (s, t). É fácil ver então que a aplicação

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \ni (t_1, t_2) \longmapsto \int_a^{t_1} \tau(s, t_2)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$$

tem derivadas parciais contínuas e portanto é de classe C^1; sua derivada ao longo da diagonal $t \mapsto (t, t)$ é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \tau(s, t)\,\mathrm{d}s = \tau(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \tau}{\partial t}(s, t)\,\mathrm{d}s,$$

para todo $t \neq a$.

LEMA 6.3.40. *Suponha que R é de classe C^1 e que $t_0 \in \,]a, b]$ é tal que $I^{\#}_{t_0}$ é não-degenerada; então:*

$$n_-\Big(I^{\#}_t\big|_{\mathcal{K}^{\#}_t \times \mathcal{K}^{\#}_t}\Big) = n_-\Big(I^{\#}_{t_0}\big|_{\mathcal{K}^{\#}_{t_0} \times \mathcal{K}^{\#}_{t_0}}\Big), \tag{6.3.58}$$

para todo $t < t_0$ suficientemente próximo de t_0. Se $t_0 < b$ então também:

$$n_-\Big(I^{\#}_t\big|_{\mathcal{K}^{\#}_t \times \mathcal{K}^{\#}_t}\Big) = n_-\Big(I^{\#}_{t_0}\big|_{\mathcal{K}^{\#}_{t_0} \times \mathcal{K}^{\#}_{t_0}}\Big) + \mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t_0), \tag{6.3.59}$$

para todo $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0, onde $\mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t_0)$ denota a multiplicidade de t_0 como instante (X_{red}, L_0)-focal (ou $\mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t_0) = 0$ se t_0 não é focal).

DEMONSTRAÇÃO. A estratégia para mostrar (6.3.59) é usar o Teorema 5.2.80 para a curva $t \mapsto \hat{I}^{\#}_t \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\hat{\mathcal{H}}^{\#}\big)$; para mostrar (6.3.58) usamos o Teorema 5.2.80 para a curva $t \mapsto \hat{I}^{\#}_{-t}$. Sabemos que $t \mapsto \hat{I}^{\#}_t$ é uma curva de classe C^1 (vide Lema 6.3.27) e que $\big(\hat{\mathcal{K}}^{\#}_t\big)_{t \in]a,b]}$ é uma família C^1 de subespaços de $\hat{\mathcal{H}}^{\#}$ (vide Corolário 6.3.31); além do mais, $\hat{I}^{\#}_{t_0}$ é RPCIP em $\hat{\mathcal{K}}^{\#}_{t_0}$ (vide Lema 6.3.18 e Observação 5.2.62). Como $I^{\#}_{t_0}$ (e portanto $\hat{I}^{\#}_{t_0}$) é não-degenerada, o Lema 6.3.26 implica que o núcleo de $\hat{I}^{\#}_{t_0}$ em $\hat{\mathcal{K}}^{\#}_{t_0}$ é o espaço $N = \hat{\mathcal{K}}_{t_0} \cap \hat{\mathcal{S}}_{t_0} = \phi_{t_0}^{-1}(\mathcal{K}_{t_0} \cap \mathcal{S}_{t_0})$; observe que, pelo Lema 6.2.10, temos $\dim(N) = \mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t_0)$. Para completar a demonstração é suficiente mostrar que a forma bilinear simétrica $\big(\hat{I}^{\#}\big)^{\dagger} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(N)$ é definida negativa. Seja então $\hat{v} \in \hat{\mathcal{K}}_{t_0} \cap \hat{\mathcal{S}}_{t_0}$ e escreva $v = \phi_{t_0}(\hat{v}) \in \mathcal{K}_{t_0} \cap \mathcal{S}_{t_0}$; pelo Lema 6.2.10 sabemos que v é da forma $v(s) = \sum_{i=1}^k f_i(s) Y_i(s)$, $s \in [a, t_0]$, onde $f = (f_1, \dots, f_k)\colon [a, t_0] \to I\!R^k$ é uma solução de $(X_{\mathrm{red}})|_{[a,t_0]}$ e $f(a) = f(t_0) = 0$. Obviamente f se estende a uma solução $f\colon [a, b] \to I\!R^k$ de X_{red}. Definimos então para cada $t \in \,]a, b]$ uma aplicação $v_t\colon [a, t] \to I\!R^n$ fazendo $v_t(s) = \sum_{i=1}^k f_i(s) Y_i(s)$ para todo $s \in [a, t]$; daí o Lema 6.2.10 implica que $v_t \in \mathcal{K}^{\#}_t$ e portanto $\hat{v}_t = \phi_t^{-1}(v_t)$ pertence a $\hat{\mathcal{K}}^{\#}_t$ para todo $t \in \,]a, b]$. Obviamente $(t, u) \mapsto \hat{v}_t(u)$ é uma aplicação de classe C^2 em $]a, b] \times [0, 1]$ e daí segue do Exemplo 5.1.66 que $t \mapsto \hat{v}_t$ é uma aplicação de classe C^1 a valores[11] no espaço de Hilbert $\hat{\mathcal{H}}^{\#}$. Pela Observação 5.2.82 a forma bilinear $\big(\hat{I}^{\#}\big)^{\dagger}$ é dada por:

$$\big(\hat{I}^{\#}\big)^{\dagger}(\hat{v}, \hat{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{I}^{\#}_t(\hat{v}_t, \hat{v}_t)\Big|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I^{\#}_t(v_t, v_t)\Big|_{t=t_0} = g\big(v'(t_0), v'(t_0)\big),$$

onde usamos (6.3.4), o fato que $v_t(s)$ não depende de t e a igualdade $v_{t_0}(t_0) = v(t_0) = 0$; calculamos então:

$$g\big(v'(t_0), v'(t_0)\big) = g\left(\sum_{i=1}^k f_i'(t_0) Y_i(t_0), \sum_{i=1}^k f_i'(t_0) Y_i(t_0)\right) \le 0,$$

[11]Sabemos até mesmo que $t \mapsto \hat{v}_t$ é uma aplicação de classe C^1 a valores no espaço de Banach $C^1([0, 1], I\!R^n)$.

observando que $f(t_0) = 0$ e que g é negativa definida em $\mathcal{D}_{t_0}$. A igualdade $g\big(v'(t_0), v'(t_0)\big) = 0$ só vale se $f'(t_0) = 0$ o que implica que f e portanto $\hat{v}$ é identicamente nula. Isso completa a demonstração. $\square$

6.3.3. O valor inicial de $\mathbf{i(t)}$. O objetivo desta subseção é calcular o índice de I_t em $\mathcal{K}_t$ (i.e., o valor de $i(t)$) para $t > a$ suficientemente próximo do instante inicial a. O conteúdo desta subseção é altamente dependente do conteúdo da Subseção 6.3.2.

LEMA 6.3.41. *Seja* $\mathrm{Cte} \subset L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)$ *o subespaço formado pelas funções constantes e denote por* $\mathfrak{q}$ *a aplicação quociente*

$$\mathfrak{q}\colon L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big) \longrightarrow L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)/\mathrm{Cte};$$

se $\mathcal{F}_a\colon \hat{\mathcal{H}} \to L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)$ *é a aplicação definida em* (6.3.51) *então* $\mathfrak{q} \circ \mathcal{F}_a$ *é sobrejetora.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $f = (f_1, \ldots, f_k) \in H^1([0,1], I\!R^k)$ e se $f(0) = f(1) = 0$ então a aplicação $\hat{v}\colon [0,1] \to I\!R^n$ definida por:

$$\hat{v}(u) = \sum_{i=1}^{k} f_i(u) Y_i(a), \quad u \in [0,1]$$

pertence a $\hat{\mathcal{H}}$; um cálculo simples mostra que:

$$\mathcal{F}_a(\hat{v})(u) = \mathfrak{B}(a) f'(u),$$

para todo $u \in [0,1]$, onde $\mathfrak{B}$ é definida em (6.2.15). Para completar a demonstração é suficiente mostrar que dado $z \in L^2\big([0,1], I\!R^{k^*}\big)$ então existem $f \in H^1([0,1], I\!R^k)$ e $c \in I\!R^{k^*}$ de modo que $f(0) = f(1) = 0$ e

$$\mathfrak{B}(a) f'(u) = z(u) + c, \tag{6.3.60}$$

para quase todo $u \in [0,1]$. Como $\mathfrak{B}(a)$ é inversível, dado $c \in I\!R^{k^*}$ a identidade (6.3.60) determina uma única aplicação $f \in H^1([0,1], I\!R^k)$ com $f(0) = 0$; o valor de $f(1)$ é dado por:

$$f(1) = \mathfrak{B}(a)^{-1}\left(\int_0^1 z(u)\,\mathrm{d}u\right) + \mathfrak{B}(a)^{-1}(c); \tag{6.3.61}$$

obviamente existe $c \in I\!R^{k^*}$ que anula o lado direito de (6.3.61), o que completa a demonstração. $\square$

COROLÁRIO 6.3.42. *Se* R *é de classe* C^1 *e* $\hat{\mathcal{K}}_a$ *é definido por:*

$$\hat{\mathcal{K}}_a = \big\{\hat{v} \in \hat{\mathcal{H}} : [0,1] \ni u \mapsto g\big(\hat{v}(u), Y\big) \text{ é uma aplicação afim, } \forall\, Y \in \mathcal{D}_a\big\}, \tag{6.3.62}$$

então $\big(\hat{\mathcal{K}}_t\big)_{t\in[a,b]}$ *é uma família* C^1 *de subespaços de* $\hat{\mathcal{H}}$ *para* t *numa vizinhança de* a *em* $[a,b]$.

DEMONSTRAÇÃO. Observe primeiramente que o espaço $\hat{\mathcal{K}}_a$ definido em (6.3.62) é o núcleo de $\mathfrak{q} \circ \mathcal{F}_a$. Segue da Observação 6.3.36 que $t \mapsto \mathfrak{q} \circ \mathcal{F}_t$ é uma aplicação de classe C^1 em $[a,b]$; como $(X_{\rm red}, L_0)$ não tem instantes focais numa vizinhança de $t = a$ (recorde Corolário 6.1.35) então segue do Corolário 6.3.12 que $\mathfrak{q} \circ \mathcal{F}_t$ é sobrejetora para $t > a$ suficientemente próximo de a. O Lema 6.3.41 nos diz que também $\mathfrak{q} \circ \mathcal{F}_a$ é sobrejetora e a conclusão segue então do Lema 5.2.78. $\square$

Nosso objetivo agora é mostrar que a restrição da forma bilinear simétrica $\mathcal{J}_a$ (recorde (6.3.48)) ao espaço $\hat{\mathcal{K}}_a$ é RPCIP; queremos também calcular o índice de $\mathcal{J}_a$ em $\hat{\mathcal{K}}_a$. Com esse objetivo, denote por $\pi(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}_a$ a projeção ortogonal com respeito a g, i.e., a projeção com respeito à decomposição em (6.3.26) (com $s = a$); seja também $g^+(a)$ o produto interno definido em (6.3.27) (com $s = a$). Usando (6.3.28) podemos escrever $\mathcal{J}_a$ em termos de $g^+(a)$ obtendo:
(6.3.63)

$$\mathcal{J}_a(\hat{v}, \hat{w}) = \int_0^1 g^+(a)\big(\hat{v}'(u), \hat{w}'(u)\big) - 2g^+(a)\big(\pi(a)\hat{v}'(u), \pi(a)\hat{w}'(u)\big)\,\mathrm{d}u;$$

podemos mostrar agora o seguinte:

LEMA 6.3.43. *A restrição de $\mathcal{J}_a$ a $\hat{\mathcal{K}}_a$ é RPCIP.*

DEMONSTRAÇÃO. Para todo $\hat{v} \in \hat{\mathcal{K}}_a$ temos que $u \mapsto \pi(a)\hat{v}'(u)$ é uma aplicação constante (vide (6.3.29) e (6.3.62)) e $\hat{v}(1) = 0$ donde:

$$\pi(a)\hat{v}'(u) = \int_0^1 \pi(a)\hat{v}'(u)\,\mathrm{d}u = -\pi(a)\hat{v}(0),$$

para todo $u \in [0,1]$; podemos então reescrever (6.3.63) sob a forma:
(6.3.64)

$$\mathcal{J}_a(\hat{v}, \hat{w}) = \int_0^1 g^+(a)\big(\hat{v}'(u), \hat{w}'(u)\big)\,\mathrm{d}u - 2g^+(a)\big(\pi(a)\hat{v}(0), \pi(a)\hat{w}(0)\big).$$

A integral do lado direito de (6.3.64) define um produto interno em $\hat{\mathcal{K}}_a$ compatível com a topologia induzida pela topologia padrão de $H^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ (pois para $\hat{v} \in \hat{\mathcal{K}}_a$ temos $\hat{v}(1) = 0$); a conclusão segue agora do Exemplo 5.2.64. $\square$

O cálculo do índice de $\mathcal{J}_a$ em $\hat{\mathcal{K}}_a$ depende do seguinte lema elementar:

LEMA 6.3.44. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno (positivo) $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $z\colon [a,b] \to V$ é uma aplicação integrável então vale a desigualdade:*

$$\Big\langle \int_a^b z(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b z(x)\,\mathrm{d}x \Big\rangle \le (b-a) \int_a^b \langle z(x), z(x) \rangle\,\mathrm{d}x;$$

a igualdade vale se e somente se z é igual quase sempre a uma aplicação constante.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(b_i)_{i=1}^r$ uma base ortonormal para V e escreva $z(x) = \sum_{i=1}^r z_i(x)b_i$; aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz do espaço de Hilbert $L^2([a,b], I\!R)$ (vide (5.1.20)) para a função $z_i\colon [a,b] \to I\!R$ e para a função constante igual a 1 em $[a,b]$ obtemos:

$$\left(\int_a^b z_i(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b z_i(x)^2\,\mathrm{d}x, \quad i = 1,\ldots,r, \tag{6.3.65}$$

sendo a igualdade válida se e somente se z_i é igual quase sempre a uma função constante; a conclusão segue somando as identidades (6.3.65) para $i = 1,\ldots,r$. □

Estamos em condições de mostrar agora o seguinte:

LEMA 6.3.45. *A restrição de $\mathcal{J}_a$ a $\hat{\mathcal{K}}_a$ é não-degenerada e possui índice igual ao índice de g em P, ou seja:*

$$n_-\big(\mathcal{J}_a|_{\hat{\mathcal{K}}_a\times\hat{\mathcal{K}}_a}\big) = n_-\big(g|_{P\times P}\big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Como g é não-degenerada em P podemos escrever $P = P_+ \oplus P_-$ com g positiva definida em P_+ e negativa definida em P_-; definimos então os seguintes subespaços de $\hat{\mathcal{K}}_a$:

$$\hat{\mathcal{K}}_+ = \big\{\hat{v} \in \hat{\mathcal{K}}_a : \hat{v}(0) \in P_+\big\} \subset \hat{\mathcal{K}}_a,$$

$$\hat{\mathcal{K}}_- = \big\{\hat{v} : \hat{v} \text{ é uma aplicação afim em } [0,1],\ \hat{v}(0) \in P_-,\ \hat{v}(1) = 0\big\} \subset \hat{\mathcal{K}}_a.$$

É fácil ver que $\hat{\mathcal{K}}_a = \hat{\mathcal{K}}_+ \oplus \hat{\mathcal{K}}_-$; se $\hat{v} \in \hat{\mathcal{K}}_-$ e $\hat{v} \ne 0$ então um cálculo simples mostra que:

$$\mathcal{J}_a(\hat{v},\hat{v}) = g\big(\hat{v}(0),\hat{v}(0)\big) < 0,$$

donde $\mathcal{J}_a$ é definida negativa em $\hat{\mathcal{K}}_-$.

Usando (6.3.64) e o Lema 6.3.44 para a aplicação $\hat{v}'\colon [0,1] \to I\!R^n$ e para o produto interno $g^+(a)$ em $I\!R^n$ obtemos para todo $\hat{v} \in \hat{\mathcal{K}}_+$:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_a(\hat{v},\hat{v}) &\ge g^+(a)\left(\int_0^1 \hat{v}'(u)\,\mathrm{d}u, \int_0^1 \hat{v}'(u)\,\mathrm{d}u\right) - 2g^+(a)\big(\pi(a)\hat{v}(0), \pi(a)\hat{v}(0)\big)\\ &= g\big(\hat{v}(0),\hat{v}(0)\big) \ge 0,\end{aligned}$$

onde usamos também (6.3.28) e o fato que $\hat{v}(1) = 0$. Temos $\mathcal{J}_a(\hat{v},\hat{v}) = 0$ se e somente se $\hat{v}'$ é igual quase sempre a uma aplicação constante (i.e., $\hat{v}$ é afim) e $\hat{v}(0) = 0$; essas duas condições implicam que $\hat{v} = 0$ e portanto $\mathcal{J}_a$ é definida positiva em $\hat{\mathcal{K}}_+$. A conclusão segue trivialmente agora do Corolário 4.1.7 e da Proposição 4.1.9. □

COROLÁRIO 6.3.46. *Se R é de classe C^1 então para $t > a$ suficientemente próximo de a o índice de I_t em $\mathcal{K}_t$ é igual ao índice de g em P ou seja:*

$$i(t) = n_-\big(g|_{P\times P}\big),$$

para $t > a$ suficientemente próximo de a.

DEMONSTRAÇÃO. Pela Observação 6.3.29, $[a,b] \ni t \mapsto \mathcal{J}_t \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\hat{\mathcal{H}}\big)$ é uma curva de classe C^1 e pelo Corolário 6.3.42, $\big(\hat{\mathcal{K}}_t\big)_{t\in[a,b]}$ é uma família C^1 de subespaços de $\hat{\mathcal{H}}$ em torno de $t = a$; note também que o Lema 6.3.43 nos diz que $\mathcal{J}_a$ é RPCIP em $\hat{\mathcal{K}}_a$. Estamos então em condições de aplicar o Teorema 5.2.80 com $t_0 = a$; como, pelo Lema 6.3.45, $\mathcal{J}_a$ é não-degenerada em $\hat{\mathcal{K}}_a$, o espaço N que aparece no enunciado do Teorema 5.2.80 é nulo e portanto:

$$i(t) = n_-\big(\mathcal{J}_t|_{\hat{\mathcal{K}}_t\times\hat{\mathcal{K}}_t}\big) = n_-\big(\mathcal{J}_a|_{\hat{\mathcal{K}}_a\times\hat{\mathcal{K}}_a}\big) = n_-\big(g|_{P\times P}\big),$$

para todo $t > a$ suficientemente próximo de a. Isso completa a demonstração. $\square$

6.4. O Teorema do Índice em geometria semi-Riemanniana

Nesta seção demonstraremos uma generalização do Teorema do Índice de Morse Clássico (da geometria Riemanniana) para o contexto da geometria semi-Riemanniana. Mais explicitamente, mostraremos que dada uma geodésica numa variedade semi-Riemanniana então a equação de Jacobi ao longo de tal geodésica pode ser interpretada como uma equação de Morse-Sturm quando consideramos uma trivialização paralela do fibrado tangente da variedade ao longo da geodésica; daí o Teorema do Índice para geometria semi-Riemanniana será uma conseqüência imediata do Teorema 6.2.17.

Usaremos apenas fatos elementares sobre variedades semi-Riemannianas nesta seção; para tais fatos e para um estudo mais completo da geometria semi-Riemanniana e Lorentziana recomendamos por exemplo as referências [**5, 43**].

Seja M uma variedade diferenciável (adotamos aqui as convenções da Seção 2.1). Uma *métrica semi-Riemanniana* em M é uma aplicação diferenciável $\mathfrak{g}$ que associa a cada ponto $m \in M$ uma forma bilinear simétrica não-degenerada no espaço tangente T_mM; a diferenciabilidade de $\mathfrak{g}$ significa que $\mathfrak{g}$ é uma seção diferenciável do fibrado vetorial $TM^* \otimes TM^*$, o que equivale a dizer que as coordenadas de $\mathfrak{g}$ com respeito a uma carta qualquer pertencente a um atlas fixado de M são diferenciáveis. O par $(M,\mathfrak{g})$ é chamado então uma *variedade semi-Riemanniana*.

OBSERVAÇÃO 6.4.1. Segue do Corolário 4.1.30 que o índice de $\mathfrak{g}_m$ é constante quando m percorre uma componente conexa de M; a possibilidade que o índice de $\mathfrak{g}_m$ seja diferente para pontos m em componentes conexas distintas de M é admitida pela nossa definição de variedade semi-Riemanniana, mas tal fenômeno é um tanto irrelevante já que trabalharemos sempre com uma geodésica fixada e uma tal geodésica tem sempre imagem contida em uma componente conexa de M.

Exatamente como na geometria Riemanniana mostra-se que numa variedade semi-Riemanniana $(M,\mathfrak{g})$ existe uma única conexão *simétrica* (i.e., com torsão nula) ∇ que torna o tensor $\mathfrak{g}$ *paralelo*, i.e., $\nabla\mathfrak{g} = 0$; tal conexão é chamada a *conexão de Levi-Civita*. Definimos o *tensor de curvatura* $\mathcal{R}$ da variedade semi-Riemanniana $(M, \mathfrak{g})$ como sendo o tensor de curvatura da conexão ∇; explicitamente:

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \tag{6.4.1}$$

para quaisquer campos diferenciáveis X, Y, Z em M. Como no caso de qualquer conexão o tensor (6.4.1) é anti-simétrico nas variáveis X, Y; a *identidade de Bianchi* para conexões simétricas implica que:

$$\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Z,X)Y + \mathcal{R}(Y,Z)X = 0. \tag{6.4.2}$$

Como em geometria Riemanniana mostra-se que o tensor $(X, Y, Z, T) \mapsto \mathfrak{g}\big(\mathcal{R}(X,Y)Z, T\big)$ é anti-simétrico nas variáveis Z e T o que juntamente com (6.4.2) implica na seguinte propriedade de simetria:

$$\mathfrak{g}\big(\mathcal{R}(X,Y)Z, T\big) = \mathfrak{g}\big(\mathcal{R}(Z,T)X, Y\big). \tag{6.4.3}$$

Sejam $t \mapsto \gamma(t) \in M$ uma curva diferenciável e $t \mapsto \mathfrak{v}(t) \in TM$ um *campo vetorial diferenciável ao longo de* γ, i.e., $\mathfrak{v}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo t; denotamos então por $\frac{\mathrm{D}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}$ a *derivada covariante de* $\mathfrak{v}$ *ao longo*[12] *de* γ. O campo tangente a γ será sempre denotado por $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ ou por γ'; muitas vezes abreviamos também a derivada covariante $\frac{\mathrm{D}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}$ pelo símbolo $\mathfrak{v}'$. Apesar da ambiguidade de notação, acreditamos que a derivada covariante de $\mathfrak{v}$ dificilmente será confundida com o vetor tangente $\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t} \in T_{\mathfrak{v}(t)}TM$ à curva $\mathfrak{v}$ na variedade TM.

Dizemos que um campo $\mathfrak{v}$ ao longo de γ é *paralelo* quando $\frac{\mathrm{D}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t} = 0$; a curva γ é dita uma *geodésica* quando o campo tangente γ' é paralelo, ou seja:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\gamma' = \gamma'' = 0.$$

Se γ é uma geodésica então um campo vetorial diferenciável $\mathfrak{v}$ ao longo de γ é dito um *campo de Jacobi* quando:

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathfrak{v}(t) = \mathcal{R}\big(\gamma'(t), \mathfrak{v}(t)\big)\gamma'(t), \tag{6.4.4}$$

para todo t. A equação (6.4.4) é chamada a *equação de Jacobi* ao longo da geodésica γ.

Seja agora $\mathcal{P} \subset M$ uma subvariedade; se $p \in \mathcal{P}$ é um ponto e $n \in T_p\mathcal{P}^\perp$ é um vetor normal a $\mathcal{P}$ (com respeito à métrica $\mathfrak{g}$) então definimos a *segunda forma fundamental* de $\mathcal{P}$ na direção n como sendo a forma bilinear simétrica $S_n^{\mathcal{P}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(T_p\mathcal{P})$ dada por:

$$S_n^{\mathcal{P}}(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \mathfrak{g}(\nabla_{\mathfrak{v}}W, n), \quad \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in T_p\mathcal{P},$$

onde W é um campo vetorial diferenciável qualquer em $\mathcal{P}$ tal que $W(p) = \mathfrak{w}$.

Fixamos agora uma subvariedade $\mathcal{P} \subset M$ e uma geodésica $\gamma\colon [a,b] \to M$ que *começa ortogonalmente a* $\mathcal{P}$, i.e., tal que $\gamma(a) \in \mathcal{P}$ e $\gamma'(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^\perp$.

[12]Se existe um campo diferenciável X em M com $v(t) = X(\gamma(t))$ para todo t então $\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\gamma'}X$.

Dizemos que $\mathfrak{v}$ é um campo $\mathcal{P}$*-Jacobi* ao longo de γ se $\mathfrak{v}$ é um campo de Jacobi ao longo de γ e se valem as condições:

$$\mathfrak{v}(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}, \quad \mathfrak{g}(\mathfrak{v}'(a), \cdot)|_{T_{\gamma(a)}\mathcal{P}} + S^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(\mathfrak{v}(a), \cdot) = 0 \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^*. \tag{6.4.5}$$

DEFINIÇÃO 6.4.2. Se $t \in \,]a, b]$ então dizemos que $\gamma(t)$ é um *ponto* $\mathcal{P}$*-focal* ao longo da geodésica $\gamma|_{[a,t]}$ se existe um campo $\mathcal{P}$-Jacobi não nulo $\mathfrak{v}$ ao longo de γ tal que $\mathfrak{v}(t) = 0$; a dimensão do espaço dos campos $\mathcal{P}$-Jacobi ao longo de γ tais que $\mathfrak{v}(t) = 0$ é chamada a *multiplicidade* do ponto $\mathcal{P}$-focal $\gamma(t)$ e é denotada por $\mathrm{mul}_\gamma(t)$. Denotamos por $\mathbb{J}$ o espaço vetorial dos campos $\mathcal{P}$-Jacobi ao longo de γ e por $\mathbb{J}[t]$ o espaço das *avaliações em* t dos campos $\mathcal{P}$-Jacobi, ou seja:

$$\mathbb{J} = \big\{\mathfrak{v} : \mathfrak{v} \text{ é um campo } \mathcal{P}\text{-Jacobi ao longo de } \gamma\big\},$$
$$\mathbb{J}[t] = \big\{\mathfrak{v}(t) : \mathfrak{v} \in \mathbb{J}\big\},$$

para $t \in [a, b]$. A *assinatura* de um ponto $\mathcal{P}$-focal $\gamma(t)$, denotada $\mathrm{sgn}_\gamma(t)$, é definida como sendo a assinatura da restrição da métrica $\mathfrak{g}$ ao espaço $\mathbb{J}[t]^\perp$ (onde o complemento ortogonal é tomado com respeito a $\mathfrak{g}$); se $\mathfrak{g}$ é não-degenerada em $\mathbb{J}[t]^\perp$ (ou, equivalentemente, em $\mathbb{J}[t]$) então dizemos que o ponto focal $\gamma(t)$ é *não-degenerado*. Quando existe apenas um número finito de instantes $t \in \,]a, b]$ tais que $\gamma(t)$ é $\mathcal{P}$-focal então definimos o *índice focal* da geodésica γ como sendo o inteiro:

$$i_{\mathrm{foc}}(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{t \in]a,b]} \mathrm{sgn}_\gamma(t),$$

onde escrevemos $\mathrm{sgn}_\gamma(t) = \mathrm{mul}_\gamma(t) = 0$ quando $\gamma(t)$ não é $\mathcal{P}$-focal.

Quando $P = \{\gamma(a)\}$ consiste de um único ponto então um campo $\mathcal{P}$-Jacobi é simplesmente um campo de Jacobi $\mathfrak{v}$ tal que $\mathfrak{v}(a) = 0$; nesse caso, os pontos $\mathcal{P}$-focais são também conhecidos como *pontos conjugados* ao longo de γ. Obviamente quando $(M, \mathfrak{g})$ é uma variedade Riemanniana então todo ponto focal $\gamma(t)$ é não-degenerado e sua multiplicidade e assinatura coincidem, i.e., $\mathrm{sgn}_\gamma(t) = \mathrm{mul}_\gamma(t)$.

Mostramos agora como a equação de Jacobi ao longo de uma geodésica pode ser associada a uma equação de Morse-Sturm; temos então a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.4.3. Denote por n a dimensão de M e sejam V_i, $i = 1, \ldots, n$, campos vetoriais paralelos ao longo de γ tais que $(V_i(t))_{i=1}^n$ é uma base de $T_{\gamma(t)}M$ para algum (e logo para todo) $t \in [a, b]$; dizemos então que $(V_i)_{i=1}^n$ é um *referencial paralelo* ao longo de γ. Se $(V_i)_{i=1}^n$ é um referencial paralelo ao longo de γ então, para cada $t \in [a, b]$, a base $(V_i(t))_{i=1}^n$ de $T_{\gamma(t)}M$ determina um isomorfismo $\mathcal{Z}_t \colon T_{\gamma(t)}M \to I\!R^n$; a família de isomorfismos $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ é chamada então uma *trivialização paralela* do fibrado tangente TM ao longo de γ.

Uma trivialização paralela $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ ao longo de γ induz um isomorfismo $\mathcal{Z}$ entre o espaço dos campos $\mathfrak{v}$ ao longo de γ e o espaço das aplicações $v \colon [a, b] \to I\!R^n$; explicitamente temos $v = \mathcal{Z}(\mathfrak{v})$ onde $v(t) = \mathcal{Z}_t(\mathfrak{v}(t))$ para todo $t \in [a,b]$. É fácil ver que $\mathcal{Z}$ relaciona a derivada covariante de $\mathfrak{v}$ com a derivada comum de v ou seja:

$$\mathcal{Z}\left(\frac{\mathrm{D}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathcal{Z}(\mathfrak{v})'.$$

Para cada $t \in [a,b]$ definimos uma forma bilinear simétrica $g(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$ e um operador linear $R(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ fazendo:

$$g(t)\big(\mathcal{Z}_t(\mathfrak{v}), \mathcal{Z}_t(\mathfrak{w})\big) = \mathfrak{g}_{\gamma(t)}(\mathfrak{v},\mathfrak{w}), \quad R(t)\big(\mathcal{Z}_t(\mathfrak{v})\big) = \mathcal{Z}_t\big(\mathcal{R}_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\mathfrak{v})\gamma'(t)\big),$$

para todos $\mathfrak{v},\mathfrak{w} \in T_{\gamma(t)}M$. Observe que $R\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação diferenciável; como a métrica $\mathfrak{g}$ é paralela temos que $g(t)$ *não depende de* t, ou seja:

$$g(t) = g \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \in [a,b].$$

Obviamente g é não-degenerada e segue de (6.4.3) que $R(t)$ é um operador g-simétrico em $\mathbb{R}^n$ para todo $t \in [a,b]$; obtemos então uma equação de Morse-Sturm (recorde Exemplo 6.1.11):

$$v''(t) = R(t)\cdot v(t). \tag{6.4.6}$$

É fácil ver que *um campo* $\mathfrak{v}$ *ao longo de* γ *é de Jacobi se e somente se* $v = \mathcal{Z}(\mathfrak{v})$ *é uma solução de* (6.4.6). Vamos agora definir condições iniciais para (6.4.6) que correspondem às condições iniciais (6.4.5) para a equação de Jacobi; definimos então um subespaço $P \subset \mathbb{R}^n$ e uma forma bilinear simétrica $S \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(P)$ fazendo:

$$P = \mathcal{Z}_a(T_{\gamma(a)}\mathcal{P}), \quad S\big(\mathcal{Z}_a(\mathfrak{v}), \mathcal{Z}_a(\mathfrak{w})\big) = S^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}(\mathfrak{v},\mathfrak{w}),$$

para todos $\mathfrak{v},\mathfrak{w} \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$. O par (P,S) define então um Lagrangeano $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ como em (6.1.10); se X denota o sistema diferencial simplético correspondente a (6.4.6) então obviamente *um campo* $\mathfrak{v}$ *ao longo de* γ *é* $\mathcal{P}$*-Jacobi se e somente se* $v = \mathcal{Z}(\mathfrak{v})$ *é uma solução do par* (X,ℓ_0). Concluímos então que, para $t \in \,]a,b]$, $\gamma(t)$ é $\mathcal{P}$-focal se e somente se t é (X,ℓ_0)-focal, sendo a multiplicidade e a assinatura de $\gamma(t)$ como ponto $\mathcal{P}$-focal iguais respectivamente à multiplicidade e a assinatura de t como instante (X,ℓ_0)-focal; além do mais, $\gamma(t)$ é um ponto $\mathcal{P}$-focal não-degenerado se e somente se t é um instante (X,ℓ_0)-focal não-degenerado. Também, a não-degenerescência da condição inicial do par (X,ℓ_0) é equivalente à não-degenerescência da métrica $\mathfrak{g}$ no espaço $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$.

O sistema (6.4.6) depende da escolha da trivialização paralela $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$, mas não sua classe de isomorfismo:

LEMA 6.4.4. *Sejam* $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$, $(\tilde{\mathcal{Z}}_t)_{t\in[a,b]}$ *trivializações paralelas de* TM *ao longo de* γ*; denote por* (X,ℓ_0), $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ *os pares correspondentes a* γ *e* $\mathcal{P}$ *definidos respectivamente através de* $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ *e* $(\tilde{\mathcal{Z}}_t)_{t\in[a,b]}$*. Então* (X,ℓ_0) *e* $(\tilde{X},\tilde{\ell}_0)$ *são isomorfos.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $t \in [a,b]$ defina:

$$Z(t) = \tilde{\mathcal{Z}}_t \circ \mathcal{Z}_t^{-1};$$

como $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ e $(\tilde{\mathcal{Z}}_t)_{t\in[a,b]}$ são ambas definidas a partir de referenciais paralelos, é fácil ver que $Z(t) = Z \in \mathrm{GL}(n, I\!R)$ é *independente de* t. Um cálculo simples mostra que Z e $W = 0$ formam as componentes de um isomorfismo $\phi\colon (X, \ell_0) \cong (\tilde{X}, \tilde{\ell}_0)$. □

Tendo em mente o Lema 6.4.4 e a Proposição 6.1.41 podemos então enunciar a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.4.5. Se a métrica $\mathfrak{g}$ é não-degenerada em $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ e se $\gamma(b)$ não é $\mathcal{P}$-focal então definimos o *índice de Maslov* da geodésica γ com respeito à subvariedade inicial $\mathcal{P} \subset M$ como sendo o índice de Maslov de qualquer par (X, ℓ_0) correspondente a γ e $\mathcal{P}$ por uma trivialização paralela de TM ao longo de γ; escrevemos:

$$i_{\mathrm{maslov}}(\gamma, \mathcal{P}) = i_{\mathrm{maslov}}(X, \ell_0).$$

Segue agora diretamente da Proposição 6.1.37 a seguinte:

PROPOSIÇÃO 6.4.6. *Suponha que* $\mathfrak{g}$ *é não-degenerada em* $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ *e que* $\gamma(b)$ *não é* $\mathcal{P}$*-focal; se todos os pontos focais ao longo de* γ *são não-degenerados então existe apenas um número finito de instantes focais ao longo de* γ *e vale a identidade:*

$$i_{\mathrm{maslov}}(\gamma, \mathcal{P}) = i_{\mathrm{foc}}(\gamma, \mathcal{P}).$$

□

COROLÁRIO 6.4.7. *Se* $(M, \mathfrak{g})$ *é uma variedade Riemanniana e se* $\gamma(b)$ *não é* $\mathcal{P}$*-focal então:*

$$i_{\mathrm{maslov}}(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{t\in]a,b[} \mathrm{mul}_\gamma(t).$$

□

Nosso objetivo agora é deduzir um Teorema do Índice para geometria semi-Riemanniana a partir do Teorema do Índice para sistemas diferenciais simpléticos. Começamos com a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.4.8. A *forma do índice* associada à geodésica γ e à subvariedade inicial $\mathcal{P}$ é a forma bilinear simétrica $I^{\mathcal{P}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H}^{\mathcal{P}})$ definida por:

$$I^{\mathcal{P}}(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \int_a^b \mathfrak{g}\big(v'(t), w'(t)\big) + \mathfrak{g}\big(\mathcal{R}\big(\gamma'(t), \mathfrak{v}(t)\big)\gamma'(t), \mathfrak{w}(t)\big)\,\mathrm{d}t - S^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}\big(\mathfrak{v}(a), \mathfrak{w}(a)\big), \tag{6.4.7}$$

para todos $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ onde $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ é o espaço (Hilbertizável) dos campos $\mathfrak{v}$ ao longo de γ de classe H^1 (vide Observação 6.4.17 adiante) tais que $\mathfrak{v}(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ e $\mathfrak{v}(b) = 0$:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{P}} = \big\{\mathfrak{v} : \mathfrak{v} \text{ é um campo de classe } H^1 \text{ ao longo de } \gamma \text{ e } \mathfrak{v}(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P},\ \mathfrak{v}(b) = 0\big\}.$$

DEFINIÇÃO 6.4.9. Seja k o índice da métrica $\mathfrak{g}$ (na componente conexa de M que contém a imagem da geodésica γ); uma *distribuição maximal negativa* $\mathcal{D}^\gamma$ ao longo de γ é uma família $(\mathcal{D}^\gamma_t)_{t\in[a,b]}$ onde para cada $t \in [a,b]$, $\mathcal{D}^\gamma_t$ é um subespaço k-dimensional de $T_{\gamma(t)}M$ onde a métrica $\mathfrak{g}_{\gamma(t)}$ é definida negativa. Diremos que $\mathcal{D}^\gamma$ é uma distribuição maximal negativa *diferenciável* se existem campos diferenciáveis $\mathcal{Y}_i$, $i = 1,\ldots,k$, ao longo de γ de modo que $(\mathcal{Y}_i(t))_{i=1}^k$ é uma base de $\mathcal{D}^\gamma_t$ para todo $t \in [a,b]$; dizemos nesse caso que $(\mathcal{Y}_i)_{i=1}^k$ é um *referencial diferenciável* para $\mathcal{D}^\gamma$.

Fixada uma distribuição maximal negativa diferenciável $\mathcal{D}^\gamma$ ao longo de γ então dizemos que um campo $\mathfrak{v}$ ao longo de γ é *$\mathcal{D}^\gamma$-horizontal* quando $\mathfrak{v}(t) \in \mathcal{D}^\gamma_t$ para todo $t \in [a,b]$; um campo absolutamente contínuo (vide Observação 6.4.17 adiante) $\mathfrak{v}$ ao longo de γ é dito um *campo de Jacobi ao longo de* $\mathcal{D}^\gamma$ se para todo campo diferenciável $\mathcal{D}^\gamma$-horizontal $\mathcal{Y}$ ao longo de γ a aplicação $t \mapsto \mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}'(t),\mathcal{Y}(t)\big)$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ e vale a identidade:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}'(t),\mathcal{Y}(t)\big) = \mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}'(t),\mathcal{Y}'(t)\big) + \mathfrak{g}\big(\mathcal{R}\big(\gamma'(t),\mathfrak{v}(t)\big)\gamma'(t),\mathcal{Y}(t)\big),$$

para (quase todo) $t \in [a,b]$. Se $\mathfrak{v}$ é de classe C^2 então $\mathfrak{v}$ é um campo de Jacobi ao longo de $\mathcal{D}^\gamma$ se e somente se temos:

$$\mathfrak{v}''(t) - \mathcal{R}\big(\gamma'(t),\mathfrak{v}(t)\big)\gamma'(t) \in (\mathcal{D}^\gamma_t)^\perp,$$

para todo $t \in [a,b]$, onde o complemento ortogonal é tomado com respeito à métrica $\mathfrak{g}$.

Definimos então subespaços $\mathcal{K}^\mathcal{P}$ e $\mathcal{S}^\mathcal{P}$ de $\mathcal{H}^\mathcal{P}$ fazendo:

$$\mathcal{K}^\mathcal{P} = \big\{\mathfrak{v} \in \mathcal{H}^\mathcal{P} : \mathfrak{v} \text{ é um campo de Jacobi ao longo de } \mathcal{D}^\gamma\big\}, \tag{6.4.8}$$

$$\mathcal{S}^\mathcal{P} = \big\{\mathfrak{v} \in \mathcal{H}^\mathcal{P} : \mathfrak{v} \text{ é } \mathcal{D}^\gamma\text{-horizontal e } \mathfrak{v}(a) = 0\big\}. \tag{6.4.9}$$

Obviamente se $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ é uma trivialização paralela de TM ao longo de γ então $\mathcal{D}_t = \mathcal{Z}_t(\mathcal{D}^\gamma_t)$, $t \in [a,b]$, define uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ para o sistema diferencial simplético X correspondente a γ através de $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$; é fácil ver também que $\mathfrak{v}$ é $\mathcal{D}^\gamma$-horizontal se e somente se $v = \mathcal{Z}(\mathfrak{v})$ é $\mathcal{D}$-horizontal e que $\mathfrak{v}$ é um campo de Jacobi ao longo de $\mathcal{D}^\gamma$ se e somente se v é uma solução de X ao longo de $\mathcal{D}$. Daí, se $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ são os espaços definidos em (6.2.16) e (6.2.17) temos:

$$\mathcal{K} = \mathcal{Z}\big(\mathcal{K}^\mathcal{P}\big), \quad \mathcal{S} = \mathcal{Z}\big(\mathcal{S}^\mathcal{P}\big).$$

Segue agora trivialmente do Teorema 6.2.17 o seguinte:

TEOREMA 6.4.10 (do índice para geometria semi-Riemanniana). *Sejam $(M,\mathfrak{g})$ uma variedade semi-Riemanniana, $\mathcal{P} \subset M$ uma subvariedade e $\gamma\colon [a,b] \to M$ uma geodésica com $\gamma(a) \in \mathcal{P}$ e $\gamma'(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^\perp$; seja dada uma distribuição maximal negativa diferenciável $\mathcal{D}^\gamma$ ao longo de γ e defina espaços $\mathcal{K}^\mathcal{P}$, $\mathcal{S}^\mathcal{P}$ como em* (6.4.8) *e* (6.4.9)*. Se $\mathfrak{g}$ é não-degenerada em*

$T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ *e se* $\gamma(b)$ *não é um ponto* $\mathcal{P}$*-focal então vale a identidade:*
(6.4.10)

$$i_{\mathrm{maslov}}(\gamma,\mathcal{P}) = n_-\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{K}^{\mathcal{P}}}\big) - n_+\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{S}^{\mathcal{P}}}\big) - n_-\big(\mathfrak{g}|_{T_{\gamma(a)}\mathcal{P}\times T_{\gamma(a)}\mathcal{P}}\big),$$

onde $I^{\mathcal{P}}$ *denota a forma do índice* (6.4.7). □

Considere um referencial diferenciável $(\mathcal{Y}_i)_{i=1}^k$ para uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}^\gamma$ ao longo de γ; se $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ é um trivialização paralela de TM ao longo de γ então obviamente $Y_i = \mathcal{Z}(\mathcal{Y}_i)$, $i = 1,\dots,k$, define um referencial diferenciável para a distribuição maximal negativa $\mathcal{D}_t = \mathcal{Z}_t\big(\mathcal{D}_t^\gamma\big)$. Podemos então considerar o sistema reduzido X_{red} associado ao referencial $(Y_i)_{i=1}^k$; os operadores $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$ usados na descrição das componentes de X_{red} são dados pela fórmula (recorde também Exemplo 6.2.12):

$$\begin{aligned}(6.4.11)\qquad \mathfrak{B}_{ij}(t) &= \mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}_i(t),\mathcal{Y}_j(t)\big),\quad \mathcal{A}_{ij}(t) = \mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}_j'(t),\mathcal{Y}_i(t)\big),\\ \mathcal{C}_{ij}(t) &= \mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}_i'(t),\mathcal{Y}_j'(t)\big) + \mathfrak{g}\big(\mathcal{R}\big(\gamma'(t),\mathcal{Y}_i(t)\big)\gamma'(t),\mathcal{Y}_j(t)\big),\end{aligned}$$

para todos $t\in[a,b]$ e $i,j = 1,\dots,k$. Segue diretamente da Proposição 6.2.23 que o termo $n_+\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{S}^{\mathcal{P}}}\big)$ que aparece em (6.4.10) é dado por:

$$n_+\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{S}^{\mathcal{P}}}\big) = \sum_{t\in]a,b[} \mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t),$$

onde $\mathrm{mul}_{\mathrm{red}}(t)$ denota a multiplicidade de t como instante (X_{red},L_0)-focal e $L_0 = \{0\}^n \oplus I\!R^{n*}$. Observe também que o Teorema 6.2.17 nos diz que os espaços $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ são $I^{\mathcal{P}}$-ortogonais e que se $t = b$ não é um instante (X_{red},L_0)-focal então $\mathcal{H}^{\mathcal{P}} = \mathcal{K}^{\mathcal{P}}\oplus\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$.

Exemplo 6.4.11. O Exemplo 6.2.26 nos fornece condições suficientes simples para que o termo $n_+\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{S}^{\mathcal{P}}}\big)$ em (6.4.10) seja nulo; de particular interesse é o caso que descrevemos a seguir. Suponha que a forma bilinear simétrica

$$(6.4.12)\qquad \mathcal{C}(t) - \mathcal{A}_{\mathrm{sim}}'(t) + \mathcal{A}_{\mathrm{ant}}(t)\circ\mathfrak{B}(t)^{-1}\circ\mathcal{A}_{\mathrm{ant}}(t)\in\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(I\!R^k)$$

seja semi-definida negativa para todo $t\in[a,b]$, onde $\mathcal{A}_{\mathrm{sim}}(t)$, $\mathcal{A}_{\mathrm{ant}}(t)$ denotam respectivamente as componentes simétrica e anti-simétrica de $\mathcal{A}(t)$ (vide (6.2.14)) e $\mathcal{A}(t)$, $\mathfrak{B}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ são dadas em (6.4.11); concluímos então que o co-índice de $I^{\mathcal{P}}$ em $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ é nulo e portanto, sob as hipóteses do Teorema 6.4.10, obtemos:

$$n_-\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{K}^{\mathcal{P}}}\big) = n_-\big(\mathfrak{g}|_{T_{\gamma(a)}\mathcal{P}\times T_{\gamma(a)}\mathcal{P}}\big) + i_{\mathrm{maslov}}(\gamma,\mathcal{P}).$$

Em particular se a variedade $\mathcal{P}$ reduz-se a um ponto então *o índice de* $I^{\mathcal{P}}$ *em* $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ *coincide com o índice de Maslov da geodésica* γ *com respeito a* $\mathcal{P}$, ou seja:

$$(6.4.13)\qquad n_-\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{K}^{\mathcal{P}}}\big) = i_{\mathrm{maslov}}(\gamma,\mathcal{P}).$$

Listamos agora alguns casos concretos em que verifica-se que (6.4.12) é semi-definida negativa:

(1) se $(M, \mathfrak{g})$ é uma variedade Riemanniana então $k = 0$ e obviamente o Teorema 6.4.10 implica (6.4.13); nesse caso o espaço $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ coincide com o domínio $\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ da forma do índice $I^{\mathcal{P}}$ e, tendo em mente também o Corolário 6.4.7, obtemos o *Teorema do Índice de Morse Clássico* como corolário do Teorema 6.4.10 (compare também com o Corolário 6.2.21 e comentários que o precedem).

(2) Se $(M, \mathfrak{g})$ é uma *variedade Lorentziana*, i.e., se $\mathfrak{g}$ tem índice 1 em todo ponto então $k = 1$ e (6.4.12) é simplesmente o número real:

$$\mathfrak{g}\big(\mathcal{R}\big(\gamma'(t), \mathcal{Y}(t)\big)\gamma'(t) - \mathcal{Y}''(t), \mathcal{Y}(t)\big) \in I\!R, \tag{6.4.14}$$

onde $\mathcal{Y}$ é um campo vetorial diferenciável ao longo de γ tal que

$$\mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}(t), \mathcal{Y}(t)\big) < 0, \tag{6.4.15}$$

para todo $t \in [a, b]$ (note que $\mathcal{Y}$ é um referencial para uma distribuição maximal negativa unidimensional). Quando (6.4.14) é menor ou igual a zero para todo $t \in [a, b]$ concluímos que o co-índice de $I^{\mathcal{P}}$ em $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ é nulo.

(3) Se $(M, \mathfrak{g})$ é Lorentziana e $\mathcal{Y}$ é um campo de Jacobi ao longo de γ satisfazendo (6.4.15) então obviamente (6.4.14) é nulo para todo t e portanto o co-índice de $I^{\mathcal{P}}$ em $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ é nulo. Nesse caso um cálculo simples mostra que o espaço $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ pode ser descrito por:

$$\mathcal{K}^{\mathcal{P}} = \big\{\mathfrak{v} \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}} : \mathfrak{g}(\mathfrak{v}', \mathcal{Y}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{v}, \mathcal{Y}') = \text{constante}\big\}. \tag{6.4.16}$$

Um caso particular interessante da situação acima ocorre quando consideramos variedades Lorentzianas estacionárias que serão discutidas na Subseção 6.4.1 adiante.

(4) Se $(M, \mathfrak{g})$ é Lorentziana e se γ é uma *geodésica de tipo tempo* (vide Definição 6.4.24 adiante), i.e., se $\mathfrak{g}\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big) < 0$ para todo $t \in [a, b]$, então $\mathcal{Y} = \gamma'$ é um campo de Jacobi ao longo de γ que satisfaz (6.4.15); estamos então na situação descrita pelo ítem (3). Note que como $\mathfrak{g}$ tem índice 1 o fato que $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ é ortogonal a $\gamma'(a)$ implica que $\mathfrak{g}$ é definida positiva em $T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ e portanto, se $\gamma(b)$ não é $\mathcal{P}$-focal, o Teorema 6.4.10 implica (6.4.13).

Observe também que de (6.4.16) segue que o espaço $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ consiste dos campos $\mathfrak{v} \in \mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ tais que $\mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}'(t), \gamma'(t)\big) = 0$ para todo $t \in [a, b]$; além do mais, observando que $t \mapsto (t - a)\gamma'(t)$ é sempre um campo de Jacobi, concluímos que $\gamma'(t) \in \mathbb{J}[t]$ e portanto $\mathbb{J}[t]^\perp \subset \big(I\!R\gamma'(t)\big)^\perp$ para todo $t \in\,]a, b]$. Como $\mathfrak{g}$ é definida positiva no complemento ortogonal de $I\!R\gamma'(t)$, a Proposição 6.4.6 nos diz que *o índice de Maslov de γ coincide com a soma das multiplicidades dos pontos $\mathcal{P}$-focais ao longo de γ*; a igualdade (6.4.13) nos diz agora que[13]:

$$n_-\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{K}^{\mathcal{P}}}\big) = \sum_{t\in]a,b[} \mathrm{mul}_\gamma(t). \tag{6.4.17}$$

Obtivemos então o *Teorema do Índice de Morse para geodésicas Lorentzianas de tipo tempo* (vide [**5**]).

(5) Suponha que $(M,\mathfrak{g})$ é uma variedade semi-Riemanniana qualquer com $n_-(\mathfrak{g}) = k$. Se $\mathcal{Y}_1,\ldots,\mathcal{Y}_k$ são campos de Jacobi ao longo de γ tais que $(\mathcal{Y}_i(t))_{i=1}^k$ é uma base de um subespaço k-dimensional $\mathfrak{g}$-negativo e se vale a condição de simetria[14]:

$$\mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}_i'(t),\mathcal{Y}_j(t)\big) = \mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}_i(t),\mathcal{Y}_j'(t)\big), \quad i,j = 1,\ldots,k, \tag{6.4.18}$$

para todo $t\in[a,b]$ então é fácil ver que a forma bilinear (6.4.12) é nula; daí $n_+\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{S}^{\mathcal{P}}}\big) = 0$. Um caso particular interessante da situação acima é o seguinte: suponha que $\mathcal{Y}_1,\ldots,\mathcal{Y}_k$ sejam campos de Killing (vide Definição 6.4.25 e Observação 6.4.26 adiante) que formem uma base de um subespaço k-dimensional $\mathfrak{g}$-negativo em cada ponto de M; suponha também que os colchetes de Lie $[\mathcal{Y}_i,\mathcal{Y}_j]$ sejam nulos para todos $i,j = 1,\ldots,k$. A simetria da conexão de Levi-Civita juntamente com a fórmula (6.4.31) nos dá então:

$$0 = \mathfrak{g}\big([\mathcal{Y}_i,\mathcal{Y}_j](t),\gamma'(t)\big) = \mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}_i'(t),\mathcal{Y}_j(t)\big) - \mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}_j'(t),\mathcal{Y}_i(t)\big),$$

e portanto a condição de simetria (6.4.18) é satisfeita. Note que na verdade usamos apenas o fato que os colchetes $[Y_i,Y_j]$ são ortogonais à geodésica γ para concluir que a condição (6.4.18) é satisfeita.

Observação 6.4.12. Denote por $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}_\infty$, $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}_\infty$ respectivamente os subespaços de $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$, $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ formados pelos campos de classe C^∞ ao longo de γ, ou seja:

$$\mathcal{K}^{\mathcal{P}}_\infty = \big\{\mathfrak{v}\in\mathcal{K}^{\mathcal{P}} : \mathfrak{v} \text{ é de classe } C^\infty\big\}, \quad \mathcal{S}^{\mathcal{P}}_\infty = \big\{\mathfrak{v}\in\mathcal{S}^{\mathcal{P}} : \mathfrak{v} \text{ é de classe } C^\infty\big\}.$$

Se $\gamma(b)$ não é $\mathcal{P}$-focal (ou se $t=b$ não é (X_{red},L_0)-focal) então a Observação 6.2.25 nos diz que:

$$n_-\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{K}^{\mathcal{P}}}\big) = n_-\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}_\infty\times\mathcal{K}^{\mathcal{P}}_\infty}\big), \quad n_+\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{S}^{\mathcal{P}}}\big) = n_+\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{P}}_\infty\times\mathcal{S}^{\mathcal{P}}_\infty}\big). \tag{6.4.19}$$

Para as aplicações em análise e para o desenvolvimento de teoremas globais de existência e multiplicidade de geodésicas (usando por exemplo a Teoria de Morse Global; vide Subseção 6.4.1 adiante) é mais interessante o estudo do índice e do co-índice de $I^{\mathcal{P}}$ nos espaços $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ constituídos de campos de classe H^1; porém, como diversos textos de geometria diferencial demonstram o Teorema do Índice de Morse em geometria Riemanniana trabalhando

[13]Vide Observação 6.2.19 para o caso que $\gamma(b)$ é $\mathcal{P}$-focal.

[14]Segue da Observação 6.4.14 que a diferença entre os dois lados de (6.4.18) é sempre constante.

apenas com campos de classe C^∞, decidimos registrar aqui também as identidades (6.4.19).

Vamos agora considerar o caso de geodésicas com extremos ortogonais a duas subvariedades de M; sejam então $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset M$ subvariedades e suponha que a geodésica γ tem extremos ortogonais a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ ou seja:

$$(6.4.20) \qquad \gamma(a) \in \mathcal{P}, \quad \gamma'(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}^\perp, \quad \gamma(b) \in \mathcal{Q}, \quad \gamma'(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}^\perp.$$

Definimos então uma forma bilinear simétrica $I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}})$ fazendo:

$$(6.4.21) \quad I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\mathfrak{v},\mathfrak{w}) = \int_a^b \mathfrak{g}\big(v'(t), w'(t)\big) + \mathfrak{g}\big(\mathcal{R}\big(\gamma'(t),\mathfrak{v}(t)\big)\gamma'(t),\mathfrak{w}(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ + S^{\mathcal{Q}}_{\gamma'(b)}\big(\mathfrak{v}(b),\mathfrak{w}(b)\big) - S^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}\big(\mathfrak{v}(a),\mathfrak{w}(a)\big),$$

para todos $\mathfrak{v},\mathfrak{w} \in \mathcal{H}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ onde $\mathcal{H}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ é o espaço dos campos $\mathfrak{v}$ de classe H^1 ao longo de γ tais que $\mathfrak{v}(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ e $\mathfrak{v}(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}$:

$$(6.4.22) \quad \mathcal{H}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = \big\{\mathfrak{v} : \mathfrak{v} \text{ é um campo de classe } H^1 \text{ ao longo de } \gamma \text{ e} \\ \mathfrak{v}(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P},\ \mathfrak{v}(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}\big\}.$$

Fixada uma distribuição maximal negativa diferenciável $\mathcal{D}^\gamma$ ao longo de γ, definimos o espaço:

$$\mathcal{K}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = \big\{\mathfrak{v} \in \mathcal{H}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} : \mathfrak{v} \text{ é um campo de Jacobi ao longo de } \mathcal{D}^\gamma\big\}.$$

Nosso objetivo agora é relacionar o índice de $I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ em $\mathcal{K}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ com o índice de $I^{\mathcal{P}}$ em $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$. Suponha então que $\gamma(b)$ não é $\mathcal{P}$-focal; definimos uma forma bilinear simétrica $\xi \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(T_{\gamma(b)}M)$ fazendo:

$$(6.4.23) \qquad \xi\big(\mathfrak{v}(b),\mathfrak{w}(b)\big) = \mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}'(b),\mathfrak{w}(b)\big),$$

para quaisquer $\mathcal{P}$-campos de Jacobi $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ao longo de γ. Observe que, como $\gamma(b)$ não é $\mathcal{P}$-focal, a aplicação $\mathfrak{v} \mapsto \mathfrak{v}(b)$ leva o espaço dos $\mathcal{P}$-campos de Jacobi ao longo de γ isomorficamente sobre $T_{\gamma(b)}M$ e portanto ξ está mesmo bem definida por (6.4.23).

Escolha uma trivialização paralela $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ ao longo de γ e defina um par (Q, S_1), com $Q \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço e $S_1 \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(Q)$ uma forma bilinear simétrica, fazendo:

$$Q = \mathcal{Z}_b(T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}), \quad S_1\big(\mathcal{Z}_b(\mathfrak{v}),\mathcal{Z}_b(\mathfrak{w})\big) = S^{\mathcal{Q}}_{\gamma'(b)}(\mathfrak{v},\mathfrak{w}),$$

para todos $\mathfrak{v},\mathfrak{w} \in T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}$. É fácil então verificar que $-\xi$ coincide com o pull-back pelo isomorfismo $\mathcal{Z}_b\colon T_{\gamma(b)}M \to \mathbb{R}^n$ da forma bilinear simétrica $\varphi_{L_1,L_0}\big(\ell(b)\big) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n)$ considerada no enunciado da Proposição 6.2.27; em particular ξ é simétrica[15]. Da Proposição 6.2.27 obtemos então a seguinte:

[15]A simetria de ξ também segue mais diretamente da Observação 6.4.14; na verdade, o leitor pode considerar mais simples demonstrar diretamente a Proposição 6.4.13 (usando a idéia da prova da Proposição 6.2.27) do que obtê-la como corolário da Proposição 6.2.27.

PROPOSIÇÃO 6.4.13. *Sejam* $(M,\mathfrak{g})$ *uma variedade semi-Riemanniana,* $\mathcal{P},\mathcal{Q}\subset M$ *subvariedades e* $\gamma\colon[a,b]\to M$ *uma geodésica com extremos ortogonais a* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$*, i.e., satisfazendo* (6.4.20)*. Se* $\gamma(b)$ *não é um ponto* $\mathcal{P}$*-focal ao longo de* γ *então vale a identidade:*

$$n_-\big(I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}\times\mathcal{K}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}}\big)=n_-\big(I^{\mathcal{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathcal{P}}\times\mathcal{K}^{\mathcal{P}}}\big)+n_-\big(S^{\mathcal{Q}}_{\gamma'(b)}+\xi|_{T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}\times T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}}\big),$$

onde ξ *é definida em* (6.4.23)*.* □

OBSERVAÇÃO 6.4.14. Se $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ são campos de Jacobi ao longo de uma geodésica γ então é fácil ver que:

$$\mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}'(t),\mathfrak{w}(t)\big)-\mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}(t),\mathfrak{w}'(t)\big)=\text{constante};\tag{6.4.24}$$

a identidade (6.4.24) segue trivialmente da equação de Jacobi e da simetria (6.4.3) do tensor de curvatura (derive os dois lados de (6.4.24)). Se $\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{w}$ são campos $\mathcal{P}$-Jacobi então segue de (6.4.5) e da simetria da segunda forma fundamental de $\mathcal{P}$ que o lado esquerdo de (6.4.24) se anula em $t=a$ e portanto:

$$\mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}'(t),\mathfrak{w}(t)\big)=\mathfrak{g}\big(\mathfrak{v}(t),\mathfrak{w}'(t)\big),\tag{6.4.25}$$

para todo $t\in[a,b]$ (compare (6.4.24) e (6.4.25) com (6.1.8) e (6.1.16) respectivamente).

OBSERVAÇÃO 6.4.15. Suponha que $(M,\mathfrak{g})$ é uma variedade Lorentziana e que γ é uma geodésica de tipo tempo; vimos no ítem (4) do Exemplo 6.4.11 que o índice de $I^{\mathcal{P}}$ no espaço dos campos $\mathfrak{v}\in\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$ que são ortogonais a γ' coincide com a soma das multiplicidades dos pontos $\mathcal{P}$-focais $\gamma(t)$, $t\in\,]a,b[$. Tal resultado foi obtido como conseqüência do Teorema 6.4.10, mas na verdade essa conclusão segue também do Corolário 6.2.21 (i.e., do "teorema do índice clássico"); para isso, em vez de considerar uma trivialização paralela do fibrado tangente TM ao longo de γ, considere uma trivialização paralela apenas do fibrado normal de γ. Mais explicitamente, consideramos campos paralelos $(V_i)_{i=1}^{n-1}$ de modo que $\big(V_i(t)\big)_{i=1}^{n-1}$ seja uma base de $\big(\mathbb{R}\gamma'(t)\big)^{\perp}$ para todo $t\in[a,b]$ (note que γ' é um campo paralelo); obtemos então uma correspondência entre campos $\mathfrak{v}$ ortogonais a γ' e aplicações $v\colon[a,b]\to\mathbb{R}^{n-1}$. A equação de Jacobi para $\mathfrak{v}$ corresponde agora a uma equação de Morse-Sturm em $\mathbb{R}^{n-1}$ e como $\mathfrak{g}$ é definida positiva em $\big(\mathbb{R}\gamma'(t)\big)^{\perp}$ segue que *g é definida positiva* em $\mathbb{R}^{n-1}$; o leitor pode convencer-se facilmente agora que o Corolário 6.2.21 implica (6.4.17). Também o *Teorema do Índice de Morse para geodésicas de tipo luz* (vide [**5**]) pode ser obtido como conseqüência do Corolário 6.2.21; uma *geodésica de tipo luz* numa variedade Lorentziana $(M,\mathfrak{g})$ é uma geodésica não constante γ tal que $\mathfrak{g}(\gamma',\gamma')=0$. Nesse caso $\gamma'(t)$ pertence ao espaço $\big(\mathbb{R}\gamma'(t)\big)^{\perp}$; consideramos então o *espaço quociente* $N_t=\big(\mathbb{R}\gamma'(t)\big)^{\perp}/\big(\mathbb{R}\gamma'(t)\big)$ munido da métrica induzida por $\mathfrak{g}$. É fácil mostrar que $\mathfrak{g}$ induz uma métrica positiva em N_t; daí, utilizando uma trivialização paralela de $N=(N_t)_{t\in[a,b]}$ juntamente com o Corolário 6.2.21, mostra-se que, se $\gamma'(a)\notin T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$, *o índice de* $I^{\mathcal{P}}$ *no espaço de campos* $\mathfrak{v}\in\mathcal{H}^{\mathcal{P}}$

que são ortogonais a γ' coincide com a soma das multiplicidades dos pontos $\mathcal{P}$-focais $\gamma(t)$, $t \in\,]a, b[$ (recorde também a Observação 4.1.25).

OBSERVAÇÃO 6.4.16. Observamos que a Proposição 6.1.39, usada em conjunto com convenientes resultados sobre dependência contínua de soluções de equações diferenciais com respeito a parâmetros, permite provar diversos resultados sobre estabilidade do índice de Maslov de geodésicas semi-Riemannianas (por exemplo, pode-se considerar problemas de perturbação da geodésica, da métrica ou da subvariedade inicial). Particular interesse aparece no caso de geodésicas Riemannianas e no caso de geodésicas Lorentzianas de tipo tempo ou luz, onde o índice de Maslov coincide simplesmente com a soma das multiplicidades dos pontos $\mathcal{P}$-focais ao longo da geodésica (vide Proposição 6.4.6, Corolário 6.4.7 e Observação 6.4.15).

OBSERVAÇÃO 6.4.17. No Exemplo 5.1.38 definimos a noção de aplicação $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $W^{k,p}$; no que segue estendemos tal noção para o caso de funções a valores em variedades.

Dizemos que uma curva $\gamma\colon [a, b] \to M$ numa variedade diferenciável qualquer M é *de classe* $W^{k,p}$ ($1 \le k < +\infty$, $p \in [1, +\infty]$) se para toda carta $\varphi\colon M \supset U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ na variedade M e para todo subintervalo $[c, d] \subset [a, b]$ com $\gamma([c, d]) \subset U$ temos que $\varphi \circ \gamma|_{[c,d]}$ é um elemento de $W^{k,p}([c, d], \mathbb{R}^n)$. Dizemos então que um campo $\mathfrak{v}$ ao longo de γ é *de classe* $W^{k,p}$ se a aplicação $\mathfrak{v}\colon [a, b] \to TM$ a valores na variedade TM é de classe $W^{k,p}$. Uma curva γ (ou um campo $\mathfrak{v}$) de classe $W^{k,2}$ é também dita *de classe* H^k, e uma curva (ou um campo) de classe $W^{1,1}$ é também chamada *absolutamente contínua*.

Usando as propriedades das aplicações absolutamente contínuas listadas no Exemplo 5.1.38 não é difícil ver que uma curva $\gamma\colon [a, b] \to M$ é de classe $W^{k,p}$ se e somente se para todo $t_0 \in [a, b]$ existe uma carta $\varphi\colon U \to \tilde{U}$ de M e um número $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi \circ \gamma|_{([t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\cap[a,b])}$ pertence ao espaço $W^{k,p}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [a, b], \mathbb{R}^n)$.

Se $\gamma\colon [a, b] \to M$ é uma curva diferenciável e se $(V_i)_{i=1}^n$ é um referencial de campos diferenciáveis ao longo de γ então um campo $\mathfrak{v}$ ao longo de γ é de classe $W^{k,p}$ se e somente se suas coordenadas no referencial $(V_i)_{i=1}^n$ são funções em $W^{k,p}([a, b], \mathbb{R})$.

OBSERVAÇÃO 6.4.18. Não é difícil mostrar que os campos de Jacobi ao longo de uma geodésica γ são precisamente aqueles campos que podem ser obtidos como *campos variacionais de variações de γ consistindo de geodésicas*. Mais explicitamente, $\mathfrak{v}$ é um campo de Jacobi ao longo de γ se e somente se existe uma aplicação diferenciável

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\, \times [a, b] \ni (s, t) \longmapsto \gamma_s(t) \in M \tag{6.4.26}$$

tal que $\gamma_0(t) = \gamma(t)$, $\gamma_s\colon [a, b] \to M$ é uma geodésica em M para todo s e $\mathfrak{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_s(t)\big|_{s=0}$ para todo $t \in [a, b]$. Além do mais, o campo $\mathfrak{v}$ é $\mathcal{P}$-Jacobi se e somente se (6.4.26) pode ser escolhida de modo que a geodésica γ_s seja ortogonal a $\mathcal{P}$ no instante inicial, i.e., $\gamma_s(a) \in \mathcal{P}$ e $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_s(a) \in T_{\gamma_s(a)}\mathcal{P}^{\perp}$ para todo s.

OBSERVAÇÃO 6.4.19. É possível munir o conjunto das curvas $\gamma\colon [a,b] \to M$ de classe C^k ($0 \le k < +\infty$) e também o conjunto das curvas $\gamma\colon [a,b] \to M$ de classe $W^{k,p}$ ($1 \le k < +\infty$, $p \in [1,+\infty]$) de uma estrutura de *variedade de Banach* (vide [**44**]); o conjunto das curvas γ de classe H^k torna-se então uma *variedade de Hilbert*. O espaço tangente num ponto γ da variedade de Banach de todas as curvas de classe $W^{k,p}$ (respectivamente, de classe C^k) em M pode ser identificado com o espaço (Banachizável) de campos $\mathfrak{v}$ de classe $W^{k,p}$ (respectivamente, de classe C^k) ao longo de γ.

Sejam agora $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ subvariedades de M; considere o conjunto $H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M)$ formado por todas as curvas $\gamma\colon [a,b] \to M$ de classe H^1 tais que $\gamma(a) \in \mathcal{P}$ e $\gamma(b) \in \mathcal{Q}$. Daí $H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M)$ é uma subvariedade da variedade de Hilbert de todas as curvas $\gamma\colon [a,b] \to M$ de classe H^1; seu espaço tangente num ponto $\gamma \in H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M)$ identifica-se com o espaço (Hilbertizável) de todos os campos $\mathfrak{v}$ ao longo de γ de classe H^1 tais que $\mathfrak{v}(a) \in T_{\gamma(a)}\mathcal{P}$ e $\mathfrak{v}(b) \in T_{\gamma(b)}\mathcal{Q}$. Se $(M,\mathfrak{g})$ é uma variedade semi-Riemanniana então definimos em $H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M)$ o *funcional ação* (conhecido também como *funcional energia* em geometria Riemanniana)

$$E\colon H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M) \longrightarrow I\!R$$

fazendo $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \mathfrak{g}\big(\gamma'(t),\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t$ para toda $\gamma \in H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M)$. Mostra-se que E é uma aplicação diferenciável e que seus pontos críticos coincidem justamente com as geodésicas $\gamma\colon [a,b] \to M$ com extremos ortogonais a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, i.e., satisfazendo (6.4.20). Se γ é um ponto crítico de E (i.e., uma geodésica ortogonal a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$) então obviamente o espaço tangente a $H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M)$ no ponto γ coincide com o espaço $\mathcal{H}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ (vide (6.4.22)) e mostra-se também que o *Hessiano* de E no ponto γ coincide com a forma do índice $I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$.

A fórmula (6.4.21) para $I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ pode também ser obtida num contexto mais ingênuo (sem de fato construir formalmente a estrutura de variedade de Hilbert em $H^1_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(M)$); toma-se uma geodésica $\gamma\colon [a,b] \to M$ com extremos ortogonais a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ e define-se

$$I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\mathfrak{v},\mathfrak{v}) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}E(\gamma_s)\Big|_{s=0}, \tag{6.4.27}$$

onde $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ é uma variação de γ (i.e., uma aplicação diferenciável como (6.4.26)) com campo variacional $\mathfrak{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_s(t)\big|_{s=0}$, onde cada γ_s é uma curva ligando $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$. A forma bilinear simétrica $I^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ obtida polarizando (6.4.27) (que coincide com (6.4.21)) é chamada a *segunda variação do funcional ação* (ou *segunda variação da energia*; vide [**10**, §2, Capítulo 9] para o caso que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são pontos).

6.4.1. Aplicação: multiplicidade geodésica em variedades Lorentzianas estacionárias. Como foi mencionado na Observação 6.4.19, o Teorema do Índice em geometria semi-Riemanniana (Teorema 6.4.10) nos dá um método para calcular o índice de uma restrição do Hessiano do funcional ação num ponto crítico desse funcional; a justificativa básica para o interesse no cálculo de índices de Hessianos de funcionais em pontos críticos é dada pela Teoria Global de Morse. Faremos nesta subseção um rápido resumo de tal teoria e explicamos como o Teorema 6.4.10 pode então produzir estimativas sobre o número de geodésicas ligando dois pontos fixados numa variedade Lorentziana estacionária.

Assumiremos nesta subseção alguma familiaridade com as noções de cálculo em variedades de Hilbert e também com algumas noções básicas de geometria Riemanniana em variedades de Hilbert; na Subseção 5.1.1 fizemos um resumo da teoria de cálculo em espaços de Banach e mencionamos que é possível a partir daí desenvolver uma teoria de cálculo em variedades de Banach bastante análogo ao cálculo em variedades de dimensão finita. Várias noções e teoremas da geometria Riemanniana em dimensão finita também generalizam-se para o caso de variedades de dimensão infinita; obviamente, somente variedades de Hilbert podem admitir métricas Riemannianas. Para um desenvolvimento da teoria do cálculo em variedades de Banach vide [**33**] e para o desenvolvimento da geometria Riemanniana em variedades de Hilbert vide [**32**]. Os resultados sobre teoria de Morse global enunciados podem ser encontrados em [**7, 39, 41, 45**].

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de Hilbert; isso significa que $\mathcal{M}$ é um conjunto munido de um atlas de cartas tomando valores em abertos de espaços de Hilbert e que as funções de transição entre tais cartas são difeomorfismos diferenciáveis (i.e., de classe C^∞) entre abertos de espaços de Hilbert. Um tal atlas induz uma topologia em $\mathcal{M}$ (de modo similar ao explicado na Seção 2.1) e supomos que tal topologia é Hausdorff; não suporemos em geral que $\mathcal{M}$ seja paracompacta ou que $\mathcal{M}$ satisfaça o segundo axioma da enumerabilidade.

Para cada $m \in \mathcal{M}$ pode-se definir um espaço tangente $T_m\mathcal{M}$ e nesse espaço tangente uma topologia que o torna um espaço Hilbertizável; note que o atlas diferenciável de $\mathcal{M}$ *não induz* um produto interno em $T_m\mathcal{M}$, i.e., $T_m\mathcal{M}$ não é *a priori* um espaço de Hilbert. Uma *métrica Riemanniana* em $\mathcal{M}$ é uma aplicação diferenciável $\mathfrak{g}$ que associa a cada ponto $m \in \mathcal{M}$ um produto interno (positivo) $\mathfrak{g}_m$ em $T_m\mathcal{M}$ cuja topologia correspondente coincida com a topologia do espaço Hilbertizável $T_m\mathcal{M}$; a diferenciabilidade[16] de $\mathfrak{g}$ significa que, escolhendo uma carta local de $\mathcal{M}$ a valores num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, a aplicação $\mathfrak{g}$ é representada por uma aplicação diferenciável definida num aberto de $\mathcal{H}$ e tomando valores em $\mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathcal{H})$.

Consideramos fixada a partir de agora uma variedade de Hilbert $\mathcal{M}$ munida de uma métrica Riemanniana $\mathfrak{g}$. Boa parte das noções usuais de geometria Riemanniana em dimensão finita generaliza-se para dimensão infinita; temos uma conexão de Levi-Civita em $\mathcal{M}$, um tensor de Curvatura, geodésicas e, quando $\mathcal{M}$ é conexa, uma *função distância* $d\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to I\!R$ definida da maneira usual: para $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ definimos $d(m_1, m_2)$ como

[16] É possível também construir globalmente um fibrado vetorial sobre $\mathcal{M}$ do qual $\mathfrak{g}$ será uma seção diferenciável; note porém que o fibrado correto *não é* $T\mathcal{M}^* \otimes T\mathcal{M}^*$.

sendo o ínfimo dos comprimentos das curvas de classe C^1 por partes que conectam m_1 e m_2. Em geral, obtemos uma estrutura de espaço métrico em cada componente conexa de $\mathcal{M}$; tal métrica é compatível com a topologia induzida pelo atlas diferenciável de $\mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{M}$ é *completa* quando cada componente conexa de $\mathcal{M}$ é um espaço métrico completo[17]. Mais geralmente, um subconjunto $S \subset \mathcal{M}$ é dito *completo* se sua interseção com cada componente conexa $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ é um espaço métrico completo (com a métrica induzida de $\mathcal{M}_0$).

Consideramos agora uma aplicação $f\colon \mathcal{M} \to I\!\!R$ de classe C^2. Dizemos que $m \in \mathcal{M}$ é um *ponto crítico* de f se $\mathrm{d}f(m) = 0$; dizemos também que $c \in I\!\!R$ é um *valor crítico* para f se existe um ponto crítico $m \in \mathcal{M}$ com $f(m) = c$. Se $m \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de f então podemos definir o *Hessiano* de f no ponto m como sendo a forma bilinear simétrica $\mathrm{d}^2 f(m) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(T_m\mathcal{M})$ definida por:

$$\mathrm{d}^2 f(m)(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \mathrm{d}^2\big(f \circ \varphi^{-1}\big)(\varphi(m))\big(\mathrm{d}\varphi_m(\mathfrak{v}), \mathrm{d}\varphi_m(\mathfrak{w})\big),$$

para todos $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in T_m\mathcal{M}$, onde φ é uma carta qualquer de $\mathcal{M}$ em torno de m. O fato que m é um ponto crítico de f implica que $\mathrm{d}^2 f(m)$ é bem definido, i.e., não depende da escolha[18] da carta φ. Podemos enunciar agora a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.4.20. Seja $m \in \mathcal{M}$ um ponto crítico de f; dizemos que m é um ponto crítico *não-degenerado* se o Hessiano de f no ponto m é uma forma bilinear simétrica não-degenerada em $T_m\mathcal{M}$. Se f possui *apenas* pontos críticos não-degenerados então dizemos que f é uma *função de Morse*.

Dado $c \in I\!\!R$ então o conjunto

$$f^{-1}\big(\,]-\infty, c]\,\big) = \big\{m \in \mathcal{M} : f(m) \le c\big\}$$

é chamado o *subnível inferior* a c de f e será denotado por f^c. A partir de agora suporemos as seguinte três condições sobre a função f:

(A) os subníveis de f são completos;
(B) f é limitada inferiormente;
(C) se $(x_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência tal que $\sup_{n\ge1} f(x_n) < +\infty$ e tal que $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{d}f(x_n)\| = 0$ então $(x_n)_{n\ge1}$ admite uma subseqüência convergente em $\mathcal{M}$.

A condição (C) é usualmente conhecida como a *condição de Palais-Smale*. Se $\mathcal{M}$ é compacta então todas as condições (A), (B), (C) acima seriam trivialmente satisfeitas; infelizmente, se $\mathcal{M}$ tem dimensão infinita então $\mathcal{M}$ nunca é compacta (e pelo Corolário 5.2.12 nem mesmo localmente compacta).

---

[17]Não é conhecida uma versão do Teorema de Hopf-Rinow para variedades de dimensão infinita e portanto deve-se observar com cuidado qual a noção de completude escolhida.

[18]Esse fato pode ser mostrado simplesmente considerando uma mudança de sistema de coordenadas ou então observando que, em qualquer sistema de coordenadas, temos $\mathrm{d}^2 f(m)(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} f(\sigma(s))\big|_{s=0}$, onde σ é qualquer curva diferenciável em $\mathcal{M}$ com $\sigma(0) = m$ e $\sigma'(0) = \mathfrak{v}$.

Usando o fluxo do gradiente de f é possível mostrar que se $[c_1, c_2] \subset I\!R$ é um intervalo que não contém valores críticos de f então o subnível f^{c_1} é um *retrato por deformação* (vide Observação 3.3.27) do subnível f^{c_2}; a existência de um ponto crítico $m \in \mathcal{M}$ com $f(m) \in \,]c_1, c_2[$ é uma obstrução para a construção de tal retração. Suponha que $f^{-1}([c_1, c_2])$ contém um único ponto crítico m de f; suponha também que $f(m) \in \,]c_1, c_2[$ e que m é um ponto crítico não-degenerado para f. Se o índice do Hessiano de f no ponto m é finito e igual a $k \in \mathbb{N}$ então mostra-se que o subnível f^{c_2} tem o mesmo tipo de homotopia do espaço obtido pela colagem ao longo do bordo de uma *k-célula* (i.e., uma bola fechada em $I\!R^k$) no subnível f^{c_1}. Isso motiva a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.4.21. Se $m \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de f então o *índice de Morse* de m (com respeito a f) é definido como o índice do Hessiano de f no ponto m, ou seja:

$$i_{\mathrm{M}}(m) = n_-\big(\mathrm{d}^2 f(m)\big) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Recordamos também a seguinte definição geral:

DEFINIÇÃO 6.4.22. Seja X um espaço topológico e seja K um corpo qualquer; para cada $k \geq 0$, denote por $H_k(X; K)$ o k-ésimo grupo de homologia singular de X com coeficientes em K (vide Observação 3.3.26). O *k-ésimo número de Betti* de X com respeito ao corpo K é a dimensão (possivelmente infinita) do K-espaço vetorial $H_k(X; K)$, ou seja:

$$\beta_k(X; K) = \dim_K\big(H_k(X; K)\big).$$

O *polinômio de Poincaré* do espaço X com respeito ao corpo K é definido por:

$$P_\lambda(X; K) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k(X; K)\lambda^k. \tag{6.4.28}$$

Observe que, apesar de (6.4.28) ser usualmente conhecido como o polinômio de Poincaré, a expressão (6.4.28) *não define em geral um polinômio*, mas sim uma *série formal em λ com coeficientes em* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Analisando o tipo de homotopia dos subníveis f^c quando c varia em $I\!R$ é possível mostrar que *se f é uma função de Morse então $\mathcal{M}$ tem o mesmo tipo de homotopia de um* CW-complexo *que possui exatamente uma célula de dimensão k para cada ponto crítico de f com índice de Morse k*. Como conseqüência obtêm-se o seguinte:

TEOREMA 6.4.23 (relações de Morse). *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de Hilbert e seja $f\colon \mathcal{M} \to I\!R$ uma função de Morse de classe C^2 satisfazendo as condições (A), (B) e (C); para cada $k \geq 0$ ($k < +\infty$) denote por $\mu_k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ o número de pontos críticos de f com índice de Morse k. Se $P_\lambda(\mathcal{M}; K)$ denota o polinômio de Poincaré de $\mathcal{M}$ com respeito a um corpo qualquer fixado K então existe uma série formal $Q_K(\lambda)$ em λ com coeficientes em* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

tal que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k \lambda^k = P_\lambda(\mathcal{M}; K) + (1+\lambda) Q_K(\lambda). \tag{6.4.29}$$

□

Uma conseqüência particularmente interessante de (6.4.29) é a desigualdade:

$$\mu_k \ge \beta_k(X; K), \quad k = 0, 1, \dots \tag{6.4.30}$$

que dá uma cota inferior para o número de pontos críticos com índice de Morse k da função f em termos da topologia da variedade $\mathcal{M}$.

Mostraremos agora como o Teorema 6.4.23 pode ser usado para se obter estimativas sobre o número de geodésicas ligando dois pontos numa variedade Lorentziana estacionária. Começamos listando algumas definições básicas.

Definição 6.4.24. Uma *variedade Lorentziana* é uma variedade semi-Riemanniana $(M, \mathfrak{g})$ onde $\mathfrak{g}$ tem índice 1 em todo ponto de M, ou seja:

$$n_-(\mathfrak{g}_m) = 1,$$

para todo $m \in M$. Um vetor $\mathfrak{v} \in TM$ tangente a uma variedade Lorentziana M é dito respectivamente *de tipo tempo*, *de tipo espaço* ou *de tipo luz* quando $\mathfrak{g}(\mathfrak{v}, \mathfrak{v})$ for respectivamente negativo, positivo ou nulo.

Definição 6.4.25. Seja $(M, \mathfrak{g})$ uma variedade semi-Riemanniana. Um campo vetorial diferenciável $\mathcal{Y}$ em M é dito um *campo de Killing* quando o fluxo de $\mathcal{Y}$ é formado por isometrias de M; explicitamente, se F é definida de modo que $t \mapsto F_t(m) = F(t, m) \in M$ é uma curva integral maximal de $\mathcal{Y}$ com $F_0(m) = m$ para todo $m \in M$, então $\mathcal{Y}$ é um campo de Killing se $\mathrm{d}F_t(m)_*(\mathfrak{g}_m) = \mathfrak{g}_{F(t,m)}$ para todo par $(t, m) \in I\!R \times M$ no domínio de F.

Uma variedade Lorentziana $(M, \mathfrak{g})$ é dita *estacionária* se M admite um campo de Killing $\mathcal{Y}$ de tipo tempo.

Observação 6.4.26. É fácil ver que um campo diferenciável $\mathcal{Y}$ numa variedade semi-Riemanniana $(M, \mathfrak{g})$ é de Killing se e somente se a *derivada de Lie* do tensor $\mathfrak{g}$ na direção de $\mathcal{Y}$ é nula, i.e., se $\mathbb{L}_{\mathcal{Y}}\mathfrak{g} = 0$. Daí um cálculo simples mostra que $\mathcal{Y}$ é de Killing se e somente se vale a relação de anti-simetria:

$$\mathfrak{g}(\nabla_{\mathfrak{v}}\mathcal{Y}, \mathfrak{w}) = -\mathfrak{g}(\nabla_{\mathfrak{w}}\mathcal{Y}, \mathfrak{v}), \tag{6.4.31}$$

para todos $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in T_m M$ e todo $m \in M$. É interessante observar também que se $\mathcal{Y}$ é um campo de Killing então para toda geodésica γ em M o campo $\mathcal{Y} \circ \gamma$ ao longo de γ é de Jacobi[19].

[19] Isso segue da caracterização dos campo de Jacobi mencionada na Observação 6.4.18; explicitamente, na notação da Definição 6.4.25, temos que $\gamma_s(t) = F_s(\gamma(t))$ é uma variação de γ com campo variacional $\mathcal{Y} \circ \gamma$ e cada γ_s é uma geodésica.

Consideramos agora fixados uma variedade Lorentziana $(M,\mathfrak{g})$ e pontos $p,q\in M$. Denotamos por $H^1_{p,q}(M)$ o conjunto das curvas $\gamma\colon[a,b]\to M$ de classe H^1 ligando p a q, ou seja:

$$H^1_{p,q}(M)=\big\{\gamma\colon[a,b]\to M:\gamma \text{ é de classe } H^1 \text{ e } \gamma(a)=p,\ \gamma(b)=q\big\}.$$

Como já foi mencionado na Observação 6.4.19, o conjunto $H^1_{p,q}(M)$ pode ser munido de uma estrutura de variedade de Hilbert de modo que para cada $\gamma\in H^1_{p,q}(M)$ o espaço tangente $T_\gamma H^1_{p,q}(M)$ seja identificado com o espaço dos campos $\mathfrak{v}$ de classe H^1 ao longo de γ tais que $\mathfrak{v}(a)=\mathfrak{v}(b)=0$; além do mais, o funcional ação $E\colon H^1_{p,q}(M)\to I\!R$ é diferenciável e seus pontos críticos coincidem com as geodésicas ligando p e q. Mencionamos também que o Hessiano de E num ponto crítico γ coincide com a forma do índice $I^{\mathcal{P}}$ definida em (6.4.7) (com $\mathcal{P}=\{p\}$, i.e., o termo envolvendo $S^{\mathcal{P}}_{\gamma'(a)}$ é nulo).

Se $\mathfrak{g}^+$ é uma métrica Riemanniana em M então é possível mostrar que o produto interno:

$$\langle\mathfrak{v},\mathfrak{w}\rangle_\gamma=\int_a^b\mathfrak{g}^+\big(\mathfrak{v}'(t),\mathfrak{w}'(t)\big)\,\mathrm{d}t,\quad \mathfrak{v},\mathfrak{w}\in T_\gamma H^1_{p,q}(M),\tag{6.4.32}$$

define uma métrica Riemanniana na variedade de Hilbert $H^1_{p,q}(M)$; em (6.4.32) o símbolo $\mathfrak{v}'$ denota a derivada covariante do campo $\mathfrak{v}$ ao longo de γ com respeito à conexão[20] de Levi-Civita da métrica Riemanniana $\mathfrak{g}^+$ em M.

Suponha agora que seja dado um campo vetorial diferenciável $\mathcal{Y}$ de tipo tempo em M; definimos uma métrica Riemanniana $\mathfrak{g}^+$ em M "revertendo" o sinal de $\mathfrak{g}$ na direção de $\mathcal{Y}$ (uma construção similar foi usada em (6.3.27)). Explicitamente, temos:

(6.4.33)

$$\mathfrak{g}^+(\mathfrak{v},\mathfrak{w})=\mathfrak{g}(\mathfrak{v},\mathfrak{w})-2\,\frac{\mathfrak{g}\big(\mathfrak{v},\mathcal{Y}(m)\big)\mathfrak{g}\big(\mathfrak{w},\mathcal{Y}(m)\big)}{\mathfrak{g}\big(\mathcal{Y}(m),\mathcal{Y}(m)\big)},\quad \mathfrak{v},\mathfrak{w}\in T_mM,\ m\in M.$$

Consideraremos então a variedade de Hilbert $H^1_{p,q}(M)$ com a métrica Riemanniana definida por (6.4.32), onde $\mathfrak{g}^+$ é definida em (6.4.33).

Segue do Lema 6.2.1 que o índice de Morse dos pontos críticos de E em $H^1_{p,q}(M)$ é sempre infinito; a idéia é então considerar uma restrição de E cujos pontos críticos ainda sejam as geodésicas ligando p a q, mas de modo que tais pontos críticos tenham índice de Morse finito.

Suporemos a partir de agora que M é uma variedade Lorentziana estacionária e que $\mathcal{Y}$ é um campo de Killing de tipo tempo em M; consideramos o seguinte subconjunto de $H^1_{p,q}(M)$:

$$\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}=\big\{\gamma\in H^1_{p,q}(M):\mathfrak{g}(\gamma',\mathcal{Y})=\text{constante}\big\}.$$

[20] Na verdade, escolhida uma conexão *qualquer* em M então (6.4.32) define uma métrica Riemanniana em $H^1_{p,q}(M)$.

Não é difícil mostrar que $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ pode ser escrito como imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável definida em $H^1_{p,q}(M)$ e portanto $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ *é uma subvariedade de* $H^1_{p,q}(M)$.

Nosso objetivo é aplicar o Teorema 6.4.23 para a variedade de Hilbert $\mathcal{M} = \mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$, munida da métrica Riemanniana induzida por (6.4.32). Mostra-se em [**21**] que os pontos críticos da restrição de E a $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ coincidem com os pontos críticos de E em $H^1_{p,q}(M)$, i.e., tais pontos críticos são as geodésicas em M ligando p a q. Se $\gamma\colon [a,b] \to M$ é uma geodésica ligando p a q então é fácil mostrar que o espaço tangente a $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ no ponto γ coincide com o espaço $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ definido em (6.4.8) (com $\mathcal{P} = \{p\}$); mais especificamente, tal espaço tangente coincide com o espaço dado em (6.4.16). Do Teorema 6.4.10, ou mais especificamente do ítem (3) do Exemplo 6.4.11 obtemos diretamente a seguinte:

PROPOSIÇÃO 6.4.27. *Se* $\gamma\colon [a,b] \to M$ *é uma geodésica com* $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ *e se* $\gamma(b)$ *não é conjugado a* $\gamma(a)$ *ao longo de* γ *(i.e., se* $\gamma(b)$ *não é* $\{p\}$*-focal) então o índice de Morse de* γ *vista como ponto crítico da restrição de* E *a* $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ *coincide com o índice de Maslov de* γ*:*

$$i_{\mathrm{M}}(\gamma) = i_{\mathrm{maslov}}(\gamma, \{p\}).$$

□

Devemos também investigar sob que condições um ponto crítico γ de E em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ é não-degenerado. A Proposição 6.1.23 implica que se q não é conjugado a p ao longo de γ então $I^{\mathcal{P}}$ é não-degenerada em $\mathcal{H}^{\mathcal{P}} = T_\gamma H^1_{p,q}(M)$; daí o Corolário 6.3.14 nos diz que $I^{\mathcal{P}}$ é não-degenerada em $\mathcal{K}^{\mathcal{P}} = T_\gamma \mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$. Obtemos então o seguinte:

LEMA 6.4.28. *Uma geodésica* $\gamma\colon [a,b] \to M$ *ligando* p *a* q *é um ponto crítico não-degenerado para* E *em* $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ *se e somente se o ponto* q *não é conjugado a* p *ao longo de* γ. □

DEFINIÇÃO 6.4.29. Dados $p, q \in M$ então dizemos que q é *conjugado* a p se existe uma geodésica $\gamma\colon [a,b] \to M$ com $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ e tal que q é conjugado (i.e., $\{p\}$-focal) a p ao longo de γ. Assim, q é não conjugado a p se e somente se q não é conjugado a p ao longo de γ *para toda* geodésica γ ligando p a q (o que ocorre em particular se não existe uma geodésica ligando p a q).

Segue então do Lema 6.4.28 que E é uma função de Morse em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ se e somente se q não é conjugado a p.

Para utilizar o Teorema 6.4.23 precisamos ainda de mais alguns ingredientes; introduzimos então a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.4.30. Dizemos que o funcional ação E é *pseudo-coercivo* em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ se dada uma seqüência $(\gamma_n)_{n\ge1}$ em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ de curvas $\gamma_n\colon [a,b] \to M$ de classe C^1 tal que $\sup_{n\ge1} E(\gamma_n) < +\infty$ então $(\gamma_n)_{n\ge1}$ admite uma subseqüência que converge uniformemente para uma curva contínua em M.

A condição de pseudo-coercividade para E em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ pode ser pensada como uma *condição de completude*[21] para M. Em [**21**] mostra-se que se E é pseudo-coercivo em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ então a restrição de E a $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ satisfaz as condições (A), (B), (C); estamos portanto dentro das hipóteses do Teorema 6.4.23. Antes de utilizar tal teorema porém, fazemos alguns comentários sobre os grupos de homologia de $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$; se $\mathcal{Y}$ é completo (i.e., tem curvas integrais definidas em $I\!R$) então usando um argumento de deformação ao longo do fluxo de $\mathcal{Y}$ mostra-se em [**21**] que $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ é um retrato por deformação de $H^1_{p,q}(M)$. Além do mais, em [**41**, §17] mostra-se que $H^1_{p,q}(M)$ tem o mesmo tipo de homotopia do espaço $\Omega_x(M)$ de laços em M com ponto base x, munido da topologia compacto-aberta; aqui x denota um ponto qualquer da componente conexa de M que contém p e q (recorde Observação 3.3.27).

Resumimos tudo que foi visto nesta subseção no seguinte:

TEOREMA 6.4.31. *Sejam $(M,\mathfrak{g})$ uma variedade Lorentziana estacionária, $\mathcal{Y}$ um campo de Killing de tipo tempo em M e $p,q\in M$ pontos não conjugados. Suponha que $\mathcal{Y}$ é completo e que o funcional ação E seja pseudo-coercivo em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$. Para cada $k\ge 0$ denote por μ_k o número de geodésicas começando em p e terminando em q que possuem índice de Maslov igual a k. Seja K um corpo qualquer e seja $P_\lambda\big(\Omega_p(M);K\big)$ o polinômio de Poincaré do espaço $\Omega_p(M)$ de laços em M com ponto base p, munido da topologia compacto aberta; daí existe uma série formal $Q_K(\lambda)$ com coeficientes em $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ tal que:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mu_k\lambda^k = P_\lambda\big(\Omega_p(M);K\big) + (1+\lambda)Q_K(\lambda).$$

Em particular, se $\beta_k\big(\Omega_p(M);K\big)$ denota o k-ésimo número de Betti do espaço $\Omega_p(M)$ com respeito ao corpo K então:

$$\mu_k \ge \beta_k,\quad k=0,1,\ldots,$$

ou seja, temos ao menos β_k geodésicas com índice de Maslov k ligando p a q em M. □

OBSERVAÇÃO 6.4.32. Fixado $p\in M$ então pode-se mostrar que os pontos conjugados a p em M são exatamente os valores críticos da *aplicação exponencial geodésica* definida num aberto do espaço tangente T_pM; segue então do Teorema de Sard que *quase todo ponto $q\in M$ é não conjugado a p*, i.e., o conjunto dos pontos $q\in M$ conjugados a p tem medida nula em M.

[21] Não existe uma noção de variedade Lorentziana completa e não há um similar do Teorema de Hopf-Rinow para variedades Lorentzianas. Em algumas situações a condição de *global hiperbolicidade* é usada como uma noção de completude; em [**21**, Apêndice B] mostra-se que a condição de pseudo-coercividade para E em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$ é estritamente mais forte do que a global hiperbolicidade para M. Em [**21**, Apêndice A] são discutidas condições suficientes (em termos de limitações sobre componentes da métrica $\mathfrak{g}$) para que E seja pseudo-coercivo em $\mathcal{N}^{\mathcal{Y}}_{p,q}$.

OBSERVAÇÃO 6.4.33. O cálculo da homologia do espaço de laços $\Omega_x(M)$ com ponto base $x \in M$ é uma questão não trivial; uma possibilidade é usar a existência da *fibração de Serre*

$$\mathfrak{p}\colon \Omega_x^1(M, M) \longrightarrow M$$

dada por $\mathfrak{p}(\gamma) = \gamma(0)$ onde $\Omega_x^1(M, M)$ denota o espaço de curvas contínuas $\gamma\colon [0,1] \to M$ tais que $\gamma(1) = x$, munido da topologia compacto-aberta. A fibra $\mathfrak{p}^{-1}(x)$ sobre o ponto $x \in M$ é justamente o espaço de laços $\Omega_x(M)$ e o espaço $\Omega_x^1(M, M)$ é contrátil; usa-se então a teoria das *seqüências espectrais* (vide [**25**]) para relacionar a homologia de M com a homologia de $\Omega_x(M)$.

6.5. O Teorema do Índice para Sistemas Hamiltonianos

Nesta seção mostraremos como sistemas diferenciais simpléticos podem ser obtidos a partir de um sistema Hamiltoniano; o Teorema 6.2.17 nos dará então como corolário um Teorema do Índice para sistemas Hamiltonianos. Faremos também nesta seção uma recordação rápida do formalismo de sistemas Hamiltonianos em variedades simpléticas e da correspondência (via transformada de Legendre) entre Hamiltonianos hiper-regulares em fibrados co-tangentes e Lagrangeanos hiper-regulares em fibrados tangentes; para uma exposição mais completa de tais conceitos recomendamos a referência [**1**].

DEFINIÇÃO 6.5.1. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável (assumimos aqui as convenções da Seção 2.1); uma *forma simplética* em $\mathcal{M}$ é uma 2-forma diferenciável ω que é fechada (i.e., $\mathrm{d}\omega = 0$) e simplética em cada ponto de $\mathcal{M}$ (i.e., ω_m é não-degenerada em $T_m\mathcal{M}$ para todo $m \in \mathcal{M}$). Dizemos então que o par (M, ω) é uma *variedade simplética*. Uma aplicação diferenciável f entre variedades simpléticas é dita um *simplectomorfismo* se a diferencial de f em cada ponto m é um simplectomorfismo do espaço tangente do domínio de f no ponto m sobre o espaço tangente do contra-domínio de f no ponto $f(m)$.

Uma subvariedade $\mathfrak{P} \subset \mathcal{M}$ é dita *isotrópica* (respectivamente, *Lagrangeana*) quando $T_m\mathfrak{P}$ é um subespaço isotrópico (respectivamente, Lagrangeano) de $T_m\mathcal{M}$ para todo $m \in \mathfrak{P}$.

Obviamente toda variedade simplética tem dimensão par; observe que $\mathfrak{P}$ é uma subvariedade isotrópica de $(\mathcal{M}, \omega)$ se e somente se ω se restringe a uma 2-forma nula em $\mathfrak{P}$. Obviamente $\mathfrak{P}$ é Lagrangeana se e somente se $\mathfrak{P}$ for isotrópica e $\dim(\mathfrak{P}) = \frac{1}{2}\dim(\mathcal{M})$.

DEFINIÇÃO 6.5.2. Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética; se $f\colon \mathcal{M} \to I\!R$ é uma função diferenciável então o *gradiente simplético* de f é definido como sendo o campo vetorial $\vec{f}$ em $\mathcal{M}$ dado por:

$$\omega(\vec{f}(m), \cdot) = \mathrm{d}f(m),$$

para todo $m \in \mathcal{M}$.

EXEMPLO 6.5.3. Obviamente todo espaço simplético (V, ω) é uma variedade simplética (onde ω é identificada com uma 2-forma constante em V).

EXEMPLO 6.5.4. Seja M uma variedade diferenciável qualquer e seja $\mathcal{M} = TM^*$ o fibrado co-tangente de M. Definimos uma 1-forma θ em $\mathcal{M}$ fazendo:

$$\theta_p(\vartheta) = p\big(d\pi_p(\vartheta)\big),$$

para todos $p \in \mathcal{M}$, $\vartheta \in T_p\mathcal{M}$, onde $\pi\colon TM^* \to M$ denota a projeção canônica. A 1-forma θ é conhecida como a *forma de Liuville* de TM^*; definimos então:

$$\omega = -\mathrm{d}\theta.$$

Obviamente ω é uma 2-forma fechada em TM^*; usando coordenadas $(q_i)_{i=1}^n$ em M e denotando por $(q_i, p_i)_{i=1}^n$ as coordenadas correspondentes[22] em TM^* então calcula-se facilmente que:

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}q_i, \quad \omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i,$$

donde vê-se que ω é uma forma simplética em $\mathcal{M} = TM^*$. Dizemos que ω é a *forma simplética canônica* do fibrado co-tangente de M.

As fibras de TM^* são subvariedades Lagrangeanas de $\mathcal{M} = TM^*$; mais geralmente, se $\mathcal{P} \subset M$ é uma subvariedade então o *anulador* de $\mathcal{P}$ definido por:

$$T\mathcal{P}^o = \big\{p \in TM^* : \pi(p) = q \in \mathcal{P},\ p|_{T_q\mathcal{P}} = 0\big\}$$

é uma subvariedade Lagrangeana de $\mathcal{M}$. Isso é uma conseqüência trivial do fato que a forma de Liuville θ se anula em $T\mathcal{P}^o$.

Seja agora $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simplética qualquer e seja $H\colon U \to I\!R$ uma função diferenciável num aberto $U \subset I\!R \times \mathcal{M}$; para cada $t \in I\!R$ denotamos por $H_t\colon U_t \to I\!R$ a função $H_t = H(t, \cdot)$ definida no aberto $U_t = \{m \in \mathcal{M} : (t, m) \in U\}$ de $\mathcal{M}$. Considerando o gradiente simplético $\vec{H}_t$ de H_t então obtemos um campo vetorial dependente do tempo $U \ni (t, m) \mapsto \vec{H}_t(m)$ em $\mathcal{M}$; diremos então que H é uma *função Hamiltoniana* (ou simplesmente um *Hamiltoniano*) na variedade simplética $\mathcal{M}$ e que $\vec{H}$ é o *campo Hamiltoniano* associado a H

O exemplo a seguir ilustra para o caso de Hamiltonianos em $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ a construção que faremos em seguida num contexto mais geral e abstrato.

EXEMPLO 6.5.5. Seja $\mathcal{M}$ o espaço $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ munido de sua forma simplética canônica ω definida em (6.1.1) (observe que ω também é a forma simplética canônica do fibrado co-tangente de $M = I\!R^n$; vide também a Observação 1.4.9). Considere uma aplicação diferenciável

$$I\!R \times I\!R^n \times I\!R^{n*} \supset U \ni (t, q, p) \longmapsto H(t, q, p) \in I\!R$$

[22]Definimos $p_i(\alpha) = \alpha\big(\frac{\partial}{\partial q_i}\big)$ para α num aberto de TM^*, onde $\big(\frac{\partial}{\partial q_i}\big)_{i=1}^n$ denota o referencial de TM correspondente à carta $(q_i)_{i=1}^n$ de M.

definida num aberto $U \subset I\!R \times I\!R^n \times I\!R^{n*}$; daí H é uma função Hamiltoniana em $\mathcal{M}$. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\text{(6.5.1)} \qquad \begin{cases} q'(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p}\big(t, q(t), p(t)\big), \\[2ex] p'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q}\big(t, q(t), p(t)\big); \end{cases}$$

dizemos que (6.5.1) são as *equações de Hamilton* associadas a H. É fácil ver que as soluções de (6.5.1) são justamente as curvas integrais do campo Hamiltoniano $\vec{H}$.

Considere agora fixada uma solução

$$[a, b] \ni t \longmapsto (q(t), p(t)) \in I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$$

de (6.5.1) e considere uma variação de (q, p) constituída de soluções de (6.5.1); explicitamente, considere uma aplicação diferenciável:

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a, b] \ni (s, t) \longmapsto (q_s(t), p_s(t)) \in I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$$

onde (q_s, p_s) é uma solução de (6.5.1) para todo s. Considere o campo variacional (v, α) associado à variação (q_s, p_s); explicitamente:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} q_s(t)\Big|_{s=0}, \quad \alpha(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} p_s(t)\Big|_{s=0},$$

para todo $t \in [a, b]$. Trocando q, p respectivamente por q_s, p_s em (6.5.1) e diferenciando com respeito a s concluímos que (v, α) é uma solução do seguintes sistema linear homogêneo de equações diferenciais ordinárias:

$$\text{(6.5.2)} \qquad \begin{cases} v'(t) = \dfrac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\big(t, q(t), p(t)\big) v(t) + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2}\big(t, q(t), p(t)\big)\alpha(t), \\[2ex] \alpha'(t) = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2}\big(t, q(t), p(t)\big) v(t) - \dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}\big(t, q(t), p(t)\big)\alpha(t). \end{cases}$$

O sistema (6.5.2) é chamado a *linearização* de (6.5.1) ao longo da solução (q, p).

Dizemos que o Hamiltoniano H é *regular* quando a forma bilinear simétrica $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t, q, p)$ em $I\!R^{n*}$ for não-degenerada para todos $(t, q, p) \in U$; nesse caso (6.5.2) é um sistema diferencial simplético X com componentes:

$$A(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\big(t, q(t), p(t)\big), \quad B(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\big(t, q(t), p(t)\big),$$

$$C(t) = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\big(t, q(t), p(t)\big).$$

Seja agora $\mathcal{P} \subset I\!R^n$ uma subvariedade; como vimos no Exemplo 6.5.4, temos que o anulador $T\mathcal{P}^o \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ de $\mathcal{P}$ é uma subvariedade Lagrangeana. Suponha que a solução (q, p) de (6.5.1) começa em $T\mathcal{P}^o$, ou seja:

$$q(a) \in \mathcal{P}, \quad p(a) \in T_{q(a)}\mathcal{P}^o;$$

obtemos então um subespaço Lagrangeano $\ell_0 \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ definido por:

$$\ell_0 = T_{(q(a),p(a))}\big(T\mathcal{P}^o\big).$$

Obviamente, se (v,α) é o campo variacional de uma variação (q_s,p_s) de (q,p) onde cada (q_s,p_s) é uma solução de (6.5.1) que começa em $T\mathcal{P}^o$ então (v,α) é uma solução do par (X,ℓ_0).

Suponha agora que o Hamiltoniano H é *hiper-regular*, i.e., a aplicação:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n*} \supset U \ni (t,q,p) \longmapsto \Big(t,q,\frac{\partial H}{\partial p}(t,q,p)\Big) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \tag{6.5.3}$$

é um difeomorfismo[23] sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Nesse caso a *transformada de Legendre* nos define uma aplicação diferenciável $L\colon V \to \mathbb{R}$ pela fórmula:

$$L\Big(t,q,\frac{\partial H}{\partial p}(t,q,p)\Big) = p\cdot\frac{\partial H}{\partial p}(t,q,p) - H(t,q,p),$$

para todos $(t,q,p) \in U$. Dizemos que L é a *função Lagrangeana* (ou simplesmente, o *Lagrangeano*) associado ao Hamiltoniano H; o *funcional ação* associado a L é a aplicação

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b L\big(t,\gamma(t),\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

definida no espaço das curvas $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tais que

$$\big(t,\gamma(t),\gamma'(t)\big) \in V,$$

para todo $t \in [a,b]$. Mostra-se (usando, por exemplo, o Teorema 5.1.64) que $\mathcal{L}$ é uma função diferenciável definida num aberto do espaço de Banach $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Considere a restrição $\mathcal{L}_{\mathcal{P},\mathfrak{q}}$ de $\mathcal{L}$ ao espaço das curvas $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tais que $\gamma(a) \in \mathcal{P}$, $\gamma(b) = \mathfrak{q}$ e $\big(t,\gamma(t),\gamma'(t)\big) \in V$ para todo $t \in [a,b]$; mostra-se então que os pontos críticos de $\mathcal{L}_{\mathcal{P},\mathfrak{q}}$ concidem justamente com as curvas $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma = q$ para alguma solução (q,p) das equações de Hamilton (6.5.1) tal que $(q(a),p(a)) \in T\mathcal{P}^o$ e $q(b) = \mathfrak{q}$. Além do mais, alguns cálculos simples mostram que o Hessiano de $\mathcal{L}_{\mathcal{P},\mathfrak{q}}$ num ponto crítico $\gamma = q$ *coincide precisamente* com a forma do índice I associada ao par (X,ℓ_0) (restrita ao espaço de campos $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1).

Seja agora $(\mathcal{M},\omega)$ uma variedade simplética e H uma função Hamiltoniana definida num aberto $U \subset \mathbb{R}\times\mathcal{M}$; denotamos por F o *fluxo* do campo dependente do tempo $\vec{H}$, ou seja, para todos $t_0 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathcal{M}$, a curva $t \mapsto F(t,t_0,m) \in \mathcal{M}$ é uma solução maximal da equação:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t,t_0,m) = \vec{H}_t\big(F(t,t_0,m)\big), \tag{6.5.4}$$

[23] Observe que a condição que H é regular é equivalente, pelo teorema da função inversa, à condição que (6.5.3) seja um difeomorfismo local.

satisfazendo a condição inicial:

$$F(t_0, t_0, m) = m.$$

Da teoria padrão de equações diferenciais ordinárias sabe-se que F é uma aplicação diferenciável definida num aberto de $I\!R \times I\!R \times \mathcal{M}$; além do mais, dados $t, t_0 \in I\!R$ a aplicação $F_{t,t_0} = F(t, t_0, \cdot)$ é um difeomorfismo diferenciável entre abertos (possivelmente vazios) de $\mathcal{M}$. Não é difícil[24] mostrar que F_{t,t_0} é um simplectomorfismo para todos $t, t_0 \in I\!R$. Fixe agora uma curva integral $\Gamma\colon [a, b] \to \mathcal{M}$ do campo Hamiltoniano $\vec{H}$; obviamente

$$\Gamma(t) = F\big(t, a, \Gamma(a)\big),$$

para todo $t \in [a, b]$. Temos a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.5.6. Seja $\vartheta\colon [a, b] \to T\mathcal{M}$ um campo ao longo de uma curva integral Γ de $\vec{H}$; dizemos que ϑ é uma *solução da linearização de* $\vec{H}$ se vale a identidade:

$$\vartheta(t) = \mathrm{d}F_{t,a}\big(\Gamma(a)\big) \cdot \vartheta(a),$$

para todo $t \in [a, b]$.

É fácil ver que ϑ é uma solução da linearização de $\vec{H}$ se e somente se ϑ é o campo variacional de uma variação de Γ constituída de curvas integrais de $\vec{H}$.

Escolha agora uma subvariedade Lagrangeana $\mathfrak{P} \subset \mathcal{M}$ e uma *distribuição Lagrangeana* $\mathfrak{L}$ em $\mathcal{M}$, i.e., $\mathfrak{L} \subset T\mathcal{M}$ é uma distribuição e $\mathfrak{L}_m$ é um subespaço Lagrangeano de $T_m\mathcal{M}$ para todo $m \in \mathcal{M}$. Suponha que Γ começa em $\mathfrak{P}$, ou seja:

$$\Gamma(a) \in \mathfrak{P}.$$

Temos então a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.5.7. Dizemos que ϑ é uma $\mathfrak{P}$*-solução da linearização de* $\vec{H}$ se ϑ é uma solução da linearização de $\vec{H}$ e $\vartheta(a) \in T_{\Gamma(a)}\mathfrak{P}$. Se $t \in \,]a, b]$ então dizemos que $\Gamma(t)$ é um *ponto* $\mathfrak{P}$*-focal* (ao longo de $\Gamma|_{[a,t]}$) se existe uma $\mathfrak{P}$-solução não nula ϑ da linearização de $\vec{H}$ tal que $\vartheta(t) \in \mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$; a dimensão do espaço das $\mathfrak{P}$-soluções ϑ da linearização de $\vec{H}$ tais que $\vartheta(t) \in \mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ é chamada a *multiplicidade* do ponto focal $\Gamma(t)$ e é denotada por $\mathrm{mul}_\Gamma(t)$.

Nosso objetivo agora é construir um sistema diferencial simplético a partir dos objetos $(\mathcal{M}, \omega, H, \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \Gamma)$; temos então a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.5.8. Sejam

$$V_i\colon [a, b] \to T\mathcal{M},\ W_i\colon [a, b] \to T\mathcal{M}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

campos diferenciáveis ao longo de Γ tais que:

$$\big(V_1(t), \ldots, V_n(t), W_1(t), \ldots, W_n(t)\big) \tag{6.5.5}$$

---

[24]No caso que H não depende do tempo isso segue diretamente da fórmula $\mathbb{L} = \mathrm{d}i + i\mathrm{d}$ para derivada de Lie de formas diferenciais; no caso geral é possível mostrar uma generalização adequada de $\mathbb{L} = \mathrm{d}i + i\mathrm{d}$ que permite obter a mesma conclusão.

é uma base simplética de $T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}$ para todo $t \in [a,b]$; suponha também que $\big(W_i(t)\big)_{i=1}^n$ é uma base de $\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ para todo $t \in [a,b]$. Dizemos então que $(V_i, W_i)_{i=1}^n$ é um $\mathfrak{L}$-*referencial simplético* ao longo de Γ. Para cada $t \in [a,b]$, a base (6.5.5) induz um simplectomorfismo

$$\psi_t\colon T_{\Gamma(t)}\mathcal{M} \longrightarrow I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$$

que leva (6.5.5) sobre a base canônica de $I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$; dizemos então que $(\psi_t)_{t\in[a,b]}$ é uma $\mathfrak{L}$-*trivialização simplética* ao longo de Γ.

É possível mostrar que $\mathfrak{L}$-trivializações simpléticas de fato existem (vide Observação 6.5.16 adiante). Observe que se $(\psi_t)_{t\in[a,b]}$ é uma $\mathfrak{L}$-trivialização simplética ao longo de Γ então:

$$\psi_t\big(\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}\big) = L_0, \quad \forall\, t \in [a,b],$$

onde L_0 denota como sempre o Lagrangeano:

$$L_0 = \{0\}^n \oplus I\!R^{n*};$$

em particular ψ_t induz por passagem ao quociente um isomorfismo:

$$\mathcal{Z}_t\colon T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)} \longrightarrow \big(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}\big)/L_0 \cong I\!R^n, \tag{6.5.6}$$

para todo $t \in [a,b]$. Podemos identificar o dual de $T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ com $\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ através do isomorfismo (recorde (1.4.13)):

$$\big(\rho_{\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}}\big)^*\colon \mathfrak{L}_{\Gamma(t)} \xrightarrow{\ \cong\ } \big(T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}\big)^*; \tag{6.5.7}$$

temos então o seguinte diagrama comutativo de isomorfismos:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}_{\Gamma(t)} \arrow[r, "(\rho_{\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}})^*"] \arrow[d, "\psi_t|_{\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}}"'] & \big(T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}\big)^* \\ I\!R^{n*} \cong L_0 \arrow[r, "(\rho_{L_0})^* \simeq \mathrm{Id}"'] & \big((I\!R^n \oplus I\!R^{n*})/L_0\big)^* \cong I\!R^{n*} \arrow[u, "\mathcal{Z}_t^*"'] \end{tikzcd} \tag{6.5.8}$$

A partir de agora identificamos sempre $\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ com o dual de $T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ através do isomorfismo (6.5.7).

A partir dos objetos $(\mathcal{M}, \omega, H, \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \Gamma)$ e de uma $\mathfrak{L}$-trivialização simplética $(\psi_t)_{t\in[a,b]}$ definimos um Lagrangeano $\ell_0 \subset I\!R^n \oplus I\!R^{n*}$ e uma aplicação diferenciável $\Phi\colon [a,b] \to \mathrm{Sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$ fazendo:

$$\ell_0 = \psi_a\big(T_{\Gamma(a)}\mathfrak{P}\big), \tag{6.5.9}$$

$$\Phi(t) = \psi_t \circ \mathrm{d}F_{t,a}\big(\Gamma(a)\big) \circ \psi_a^{-1}, \tag{6.5.10}$$

para todo $t \in [a,b]$, onde F denota o fluxo de $\vec{H}$ (vide (6.5.4)). Definimos então:

$$X(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}, \quad t \in [a,b], \tag{6.5.11}$$

e obviamente X é uma curva diferenciável em $\mathrm{sp}(I\!R^n \oplus I\!R^{n*}, \omega)$. A matriz $X(t)$ determina então componentes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ como em (6.1.2), mas ainda não podemos dizer que X é um sistema diferencial simplético; de fato, em geral não teremos que $B(t)$ é não-degenerada para todo t.

Suponha agora que seja escolhida uma outra $\mathfrak{L}$-trivialização simplética $(\tilde{\psi}_t)_{t\in[a,b]}$ e que definamos objetos $\tilde{\ell}_0$, $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{X}$ em analogia a (6.5.9), (6.5.10) e (6.5.11) respectivamente. Defina também:

$$\phi(t) = \tilde{\psi}_t \circ \psi_t^{-1}, \quad t \in [a,b];$$

daí, para cada $t \in [a,b]$, $\phi(t)$ é um simplectomorfismo de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ que preserva L_0 e portanto $\phi(t)$ determina componentes $Z(t)$ e $W(t)$ como em (6.1.34). É fácil ver que Φ e $\tilde{\Phi}$ estão relacionadas como em (6.1.30) e portanto X e $\tilde{X}$ estão relacionadas como em (6.1.32); em particular valem as identidades (6.1.37), (6.1.38) e (6.1.39). Observe também que se $\mathcal{Z}_t$ e $\tilde{\mathcal{Z}}_t$ são definidas a partir de ψ_t e $\tilde{\psi}_t$ respectivamente como em (6.5.6) então vale a identidade:

$$Z(t) = \tilde{\mathcal{Z}}_t \circ \mathcal{Z}_t^{-1}, \tag{6.5.12}$$

para todo $t \in [a,b]$. Podemos agora enunciar a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.5.9. Dados objetos $(\mathcal{M}, \omega, H, \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \Gamma)$ então, para cada $t \in [a,b]$, definimos o *Hessiano parcial* de H no instante t como sendo a forma bilinear simétrica

$$H_{\mathfrak{L}}(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\big(T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}\big)^*\big) \cong \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(\mathfrak{L}_{\Gamma(t)})$$

definida como o pull-back de $B(t) \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\mathbb{R}^{n*}\big) \cong \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}(L_0)$ através do isomorfismo:

$$\psi_t|_{\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}} \colon \mathfrak{L}_{\Gamma(t)} \longrightarrow L_0,$$

onde $(\psi_t)_{t\in[a,b]}$ é uma $\mathfrak{L}$-trivialização simplética e $B(t)$ é a componente superior direita $n \times n$ da matriz $X(t)$ definida a partir de (6.5.11).

Segue facilmente de (6.1.38), (6.5.12) e do diagrama (6.5.8) que $H_{\mathfrak{L}}(t)$ não depende da escolha da $\mathfrak{L}$-trivialização simplética $(\psi_t)_{t\in[a,b]}$.

A partir de agora denotaremos por $\mathfrak{p}$ a aplicação quociente:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(t) \colon T_{\Gamma(t)}\mathcal{M} \longrightarrow T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}. \tag{6.5.13}$$

Temos a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.5.10. Dizemos que H é *regular ao longo de* Γ se $H_{\mathfrak{L}}(t)$ é não-degenerada para todo $t \in [a,b]$; nesse caso podemos definir uma forma bilinear simétrica $H_{\mathfrak{L}}(t)^{-1}$ em $T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ para todo $t \in [a,b]$. Se H é regular ao longo de Γ então dizemos que $\mathfrak{P}$ determina *condições iniciais não-degeneradas para* H se $H_{\mathfrak{L}}(a)^{-1}$ é não-degenerada no subespaço:

$$\mathfrak{p}\big(T_{\Gamma(a)}\mathfrak{P}\big) \subset T_{\Gamma(a)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(a)}. \tag{6.5.14}$$

Observe que se H é regular ao longo de Γ então (6.5.11) define um sistema diferencial simplético X e (6.5.9) define condições iniciais Lagrangeanas para X; obviamente, ℓ_0 determina condições iniciais não-degeneradas para X se e somente se $\mathfrak{P}$ determina condições iniciais não-degeneradas para H.

A partir de agora suporemos sempre que H é regular ao longo de Γ. Temos a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.5.11. A *assinatura* de um ponto $\mathfrak{P}$-focal $\Gamma(t)$, denotada $\mathrm{sgn}_\Gamma(t)$, é definida como a assinatura da restrição de $H_{\mathfrak{L}}(t)^{-1}$ ao complemento $H_{\mathfrak{L}}(t)^{-1}$-ortogonal da imagem pela aplicação quociente $\mathfrak{p}$ do subespaço:

$$\big\{\vartheta(t) : \vartheta \text{ é } \mathfrak{P}\text{-solução da linearização de } \vec{H}\big\} \subset T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}; \tag{6.5.15}$$

dizemos que $\Gamma(t)$ é um *ponto $\mathfrak{P}$-focal não-degenerado* se a restrição de $H_{\mathfrak{L}}(t)^{-1}$ à imagem de (6.5.15) por $\mathfrak{p}$ é não-degenerada. Quando existe apenas um número finito de instantes $t \in\,]a,b]$ tais que $\Gamma(t)$ é $\mathfrak{P}$-focal então definimos o *índice focal* de Γ com respeito a $\mathfrak{P}$ como sendo o inteiro:

$$i_{\mathrm{foc}}(\Gamma,\mathfrak{P}) = \sum_{t\in]a,b]} \mathrm{sgn}_\Gamma(t),$$

onde escrevemos $\mathrm{sgn}_\Gamma(t) = \mathrm{mul}_\Gamma(t) = 0$ quando $\Gamma(t)$ não é $\mathfrak{P}$-focal.

Suponha que $\mathfrak{P}$ determina uma condição inicial não-degenerada para H e que $\Gamma(b)$ não é $\mathfrak{P}$-focal; definimos então o *índice de Maslov* de Γ com respeito a $\mathfrak{P}$ fazendo:

$$i_{\mathrm{maslov}}(\Gamma,\mathfrak{P}) = i_{\mathrm{maslov}}(X,\ell_0),$$

onde (X,ℓ_0) é o par determinado pelos objetos $(\mathcal{M},\omega,H,\mathfrak{P},\mathfrak{L},\Gamma)$ através de uma $\mathfrak{L}$-trivialização simplética $(\psi_t)_{t\in[a,b]}$.

Segue da invariância do índice de Maslov por isomorfismos de pares (vide Proposição 6.1.41) que $i_{\mathrm{maslov}}(\Gamma,\mathfrak{P})$ não depende da $\mathfrak{L}$-trivialização simplética escolhida.

Da Proposição 6.1.37 agora segue trivialmente a seguinte:

PROPOSIÇÃO 6.5.12. *Suponha que $\mathfrak{P}$ determina uma condição inicial não-degenerada para H e que $\Gamma(b)$ não é $\mathfrak{P}$-focal; se todos os pontos $\mathfrak{P}$-focais ao longo de Γ são não-degenerados então temos apenas um número finito de instantes $t \in\,]a,b]$ tais que $\Gamma(t)$ é $\mathfrak{P}$-focal e vale a identidade:*

$$i_{\mathrm{maslov}}(\Gamma,\mathfrak{P}) = i_{\mathrm{foc}}(\Gamma,\mathfrak{P}).$$

□

Queremos agora enunciar um Teorema do Índice para sistemas Hamiltonianos em variedades simpléticas. Recordando que a forma do índice é invariante por isomorfismos (vide Proposição 6.1.30) e que os espaços $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ são invariantes por isomorfismos (vide Corolário 6.2.30 e Observação 6.2.31), vemos que as definições a seguir não dependem da $\mathfrak{L}$-trivialização simplética escolhida.

DEFINIÇÃO 6.5.13. Os isomorfismos $(\mathcal{Z}_t)_{t\in[a,b]}$ induzem um isomorfismo (também denotado por $\mathcal{Z}$) entre o espaço das seções de classe H^1 (recorde Observação 6.4.17) do fibrado vetorial $T\mathcal{M}/\mathfrak{L}$ ao longo de Γ e o espaço

$H^1([a,b],\mathbb{R}^n)$; cada seção $\mathfrak{v}$ de $T\mathcal{M}/\mathfrak{L}$ ao longo de Γ corresponde à aplicação $\mathcal{Z}(\mathfrak{v}) = v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$v(t) = \mathcal{Z}_t\big(\mathfrak{v}(t)\big),$$

para todo $t \in [a,b]$. A *forma do índice* $I^{\mathfrak{P}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\mathcal{H}^{\mathfrak{P}}\big)$ é definida por:

$$I^{\mathfrak{P}}(\mathfrak{v},\mathfrak{w}) = I\big(\mathcal{Z}(\mathfrak{v}),\mathcal{Z}(\mathfrak{w})\big), \tag{6.5.16}$$

para todos $\mathfrak{v},\mathfrak{w} \in \mathcal{H}^{\mathfrak{P}}$, onde I denota a forma do índice associada ao par (X,ℓ_0) e $\mathcal{H}^{\mathfrak{P}}$ denota o espaço de todas as seções $\mathfrak{v}$ de classe H^1 (vide Observação 6.4.17) do fibrado $T\mathcal{M}/\mathfrak{L}$ ao longo de Γ tais que $\mathfrak{v}(a) \in \mathfrak{p}\big(T_{\Gamma(a)}\mathfrak{P}\big)$ e $\mathfrak{v}(b) = 0$:

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{P}} = \big\{\mathfrak{v} : \mathfrak{v} \text{ é uma seção de classe } H^1 \text{ de } T\mathcal{M}/\mathfrak{L} \text{ ao longo de } \Gamma \text{ e } \mathfrak{v}(a) \in \mathfrak{p}\big(T_{\Gamma(a)}\mathfrak{P}\big),\ \mathfrak{v}(b) = 0\big\}.$$

Uma *distribuição maximal negativa* ao longo de Γ é uma família $\mathcal{D}^\Gamma = \big(\mathcal{D}^\Gamma_t\big)_{t\in[a,b]}$ de subespaços $\mathcal{D}^\Gamma_t \subset T_{\Gamma(t)}\mathcal{M}/\mathfrak{L}_{\Gamma(t)}$ satisfazendo as condições:

- $\mathcal{D}^\Gamma_t$ depende diferenciavelmente de t, i.e., $\mathcal{D}^\Gamma$ admite um referencial diferenciável de seções de $T\mathcal{M}/\mathfrak{L}$ ao longo de Γ;
- a forma bilinear simétrica $H_{\mathfrak{L}}(t)^{-1}$ é definida negativa em $\mathcal{D}^\Gamma_t$ para todo $t \in [a,b]$;
- $n_-\big(H_{\mathfrak{L}}(t)\big) = \dim\big(\mathcal{D}^\Gamma_t\big) =$ constante, para $t \in [a,b]$.

Uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}^\Gamma$ ao longo de Γ determina uma distribuição maximal negativa $\mathcal{D}$ para X pela fórmula:

$$\mathcal{D}_t = \mathcal{Z}_t\big(\mathcal{D}^\Gamma_t\big), \quad t \in [a,b].$$

Considere os espaços $\mathcal{K},\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ definidos a partir de $\mathcal{D}$ e do par (X,ℓ_0) como em (6.2.16) e (6.2.17). Definimos então espaços $\mathcal{K}^{\mathfrak{P}},\mathcal{S}^{\mathfrak{P}} \subset \mathcal{H}^{\mathfrak{P}}$ fazendo:

$$\mathcal{K}^{\mathfrak{P}} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{K}), \quad \mathcal{S}^{\mathfrak{P}} = \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{S}). \tag{6.5.17}$$

Obviamente o espaço $\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}$ é simplesmente o espaço das seções $\mathfrak{v}$ de $T\mathcal{M}/\mathfrak{L}$ de classe H^1 ao longo de Γ tais que $\mathfrak{v}(a) = \mathfrak{v}(b) = 0$ e $\mathfrak{v}(t) \in \mathcal{D}^\Gamma_t$ para todo $t \in [a,b]$.

O Teorema 6.2.17 nos dá agora o seguinte:

TEOREMA 6.5.14 (do índice para sistemas Hamiltonianos). *Sejam* $(\mathcal{M},\omega)$ *uma variedade simplética,* $H\colon U \to \mathbb{R}$ *uma função Hamiltoniana definida num aberto* $U \subset \mathbb{R}\times\mathcal{M}$*,* $\mathfrak{P} \subset \mathcal{M}$ *uma subvariedade Lagrangeana,* $\mathfrak{L} \subset T\mathcal{M}$ *uma distribuição Lagrangeana e* $\Gamma\colon [a,b] \to \mathcal{M}$ *uma curva integral do campo Hamiltoniano* $\vec{H}$ *com* $\Gamma(a) \in \mathfrak{P}$*; suponha que* H *é regular ao longo de* Γ *e seja* $\mathcal{D}^\Gamma$ *uma distribuição maximal negativa ao longo de* Γ*. Denote por* $I^{\mathfrak{P}} \in \mathcal{B}_{\mathrm{sim}}\big(\mathcal{H}^{\mathfrak{P}}\big)$ *a forma do índice definida em* (6.5.16) *e considere os subespaços fechados* $\mathcal{K}^{\mathfrak{P}},\mathcal{S}^{\mathfrak{P}} \subset \mathcal{H}^{\mathfrak{P}}$ *definidos em* (6.5.17)*; se* $\mathfrak{P}$ *determina uma* *condição inicial não-degenerada para H e se $\Gamma(b)$ não é $\mathfrak{P}$-focal então vale a identidade:*

$$i_{\mathrm{maslov}}(\Gamma,\mathfrak{P}) = n_-\big(I^{\mathfrak{P}}|_{\mathcal{K}^{\mathfrak{P}}\times\mathcal{K}^{\mathfrak{P}}}\big) - n_+\big(I^{\mathfrak{P}}|_{\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}\times\mathcal{S}^{\mathfrak{P}}}\big) \\ - n_-\big(H_{\mathfrak{L}}(a)^{-1}|_{\mathfrak{p}(T_{\Gamma(a)}\mathfrak{P})\times\mathfrak{p}(T_{\Gamma(a)}\mathfrak{P})}\big),$$

onde $H_{\mathfrak{L}}$ denota o Hessiano parcial de H e $\mathfrak{p}$ denota a aplicação quociente (6.5.13). □

Exemplo 6.5.15. Seja M uma variedade diferenciável qualquer e considere o fibrado co-tangente $\mathcal{M} = TM^*$ de M munido de sua forma simplética canônica ω (vide Exemplo 6.5.4). Seja $\mathfrak{L}$ a *distribuição vertical* de $\mathcal{M}$, i.e., para cada $p \in TM^*$, $\mathfrak{L}_p$ é o espaço $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\pi_p) = T_p\big(T_{\pi(p)}M^*\big) \subset T_pTM^*$ tangente à fibra $T_{\pi(p)}M^*$ (onde π denota a projeção canônica $\pi\colon TM^* \to M$); daí $\mathfrak{L}$ é uma distribuição Lagrangeana em $\mathcal{M}$. Seja $\mathcal{P} \subset M$ uma subvariedade e seja $\mathfrak{P} = T\mathcal{P}^o$ o anulador de $\mathcal{P}$; vimos no Exemplo 6.5.4 que $\mathfrak{P}$ é uma subvariedade Lagrangeana de $\mathcal{M}$. Escolha uma função Hamiltoniana H num aberto $U \subset I\!R \times TM^*$ e seja $\Gamma\colon [a,b] \to TM^*$ uma curva integral do campo Hamiltoniano $\vec{H}$ com $\Gamma(a) \in \mathfrak{P}$; denote por $\gamma = \pi \circ \Gamma$ a projeção em M de Γ.

Observe que a diferencial $\mathrm{d}\pi_p$ da projeção induz um isomorfismo entre o quociente $T_p\mathcal{M}/\mathfrak{L}_p$ e o espaço tangente à base $T_{\pi(p)}M$. Mostra-se que o Hessiano parcial $H_{\mathfrak{L}}(t)$ coincide simplesmente com o Hessiano no ponto $\Gamma(t)$ da restrição da função Hamiltoniana à fibra $T_{\gamma(t)}M^* \subset \mathcal{M}$. Um Hamiltoniano é dito *regular* se para todo $p \in TM^*$ o Hessiano no ponto p da restrição de H à fibra $T_{\pi(p)}M^*$ é não-degenerado; daí, se H é regular então H é regular ao longo de Γ. Diz-se que o Hamiltoniano H é *hiper-regular* se a aplicação:

$$I\!R \times TM^* \supset U \ni (t,p) \longmapsto \Big(t, \mathrm{d}\big(H|_{U\cap(\{t\}\times T_{\pi(p)}M^*)}\big)(p)\Big) \in I\!R \times TM$$

é um difeomorfismo sobre um aberto $V \subset I\!R \times TM$; daí é possível definir uma aplicação diferenciável $L\colon V \to I\!R$ pela *transformada de Legendre*:

$$L(t,v) = p\big[\mathrm{d}\big(H|_{U\cap(\{t\}\times T_{\pi(p)}M^*)}\big)(p)\big] - H(t,q,p),$$

para todos $(t,v) \in V$, onde $v = \mathrm{d}\big(H|_{U\cap(\{t\}\times T_{\pi(p)}M^*)}\big)(p)$. Dizemos que L é a *função Lagrangeana* (ou simplesmente, o *Lagrangeano*) associado ao Hamiltoniano H; o *funcional ação* associado a L é a aplicação

$$\mathcal{L}(\mu) = \int_a^b L\big(t,\mu'(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

definida no espaço das curvas $\mu\colon [a,b] \to M$ de classe C^1 tais que $\big(t,\mu'(t)\big) \in V$ para todo $t \in [a,b]$. Escreva $\mathsf{q} = \gamma(b)$ e denote por $\mathcal{L}_{\mathcal{P},\mathsf{q}}$ a restrição de $\mathcal{L}$ ao espaço das curvas μ que começam na variedade $\mathcal{P}$ e terminam no ponto q. Mostra-se então que $\mathcal{L}$ é uma função diferenciável (numa variedade de Banach) cujos pontos críticos coincidem com as projeções em M das curvas integrais de $\vec{H}$ que ligam $\mathfrak{P}$ à fibra $T_{\mathsf{q}}M^*$; além do mais, a forma do índice

$I^{\mathfrak{P}}$ (restrita ao espaço de campos de classe C^1) coincide com o Hessiano de $\mathcal{L}_{\mathcal{P},\mathfrak{q}}$ no ponto crítico γ.

OBSERVAÇÃO 6.5.16. Abaixo exibimos um roteiro para a demonstração da existência de $\mathfrak{L}$-trivializações simpléticas ao longo de uma curva diferenciável Γ em $\mathcal{M}$; denotamos por $\mathrm{Simpl}(2n)$ o aberto de $\mathcal{B}_{\mathrm{ant}}\big(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}\big)$ constituído pelas formas simpléticas em $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$.

- Escolha uma trivialização qualquer de $T\mathcal{M}$ ao longo de Γ (por exemplo, uma trivialização paralela correspondente a uma conexão qualquer); a forma simplética ω em $\mathcal{M}$ corresponde então a uma curva $t \mapsto \Omega_t$ em $\mathrm{Simpl}(2n)$ e a distribuição Lagrangeana $\mathfrak{L}$ corresponde a uma curva $t \mapsto L_t$ no Grassmanniano de subespaços n-dimensionais de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$. Note que cada L_t é Lagrangeano com respeito a Ω_t.
- A aplicação $(T, \Omega) \mapsto T_*(\Omega)$ define uma ação transitiva do grupo $\mathrm{GL}\big(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}\big)$ em $\mathrm{Simpl}(2n)$; usando a Observação 2.1.18 em conjunto com o Corolário 2.1.15 obtemos uma curva diferenciável $t \mapsto T_t$ em $\mathrm{GL}\big(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}\big)$ tal que $(T_t)_*(\Omega_t)$ é a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ para todo $t \in [a, b]$. É possível então modificar a trivialização de $T\mathcal{M}$ ao longo de Γ de modo que Ω_t seja a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ para todo $t \in [a, b]$.
- Se Ω_t é a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ para todo $t \in [a, b]$ então $t \mapsto L_t$ é uma curva no Grassmanniano de Lagrangeanos Λ de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$; considerando a ação natural transitiva do grupo simplético de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$ em Λ e usando novamente a Observação 2.1.18 em conjunto com o Corolário 2.1.15, obtemos uma curva diferenciável $t \mapsto T_t$ de simplectomorfismos tal que $T_t(L_t) = L_0$ para todo $t \in [a, b]$. Concluímos que a trivialização de $T\mathcal{M}$ ao longo de Γ pode novamente ser modificada de modo que $L_t = L_0$ para todo $t \in [a, b]$; obtemos então a $\mathfrak{L}$-trivialização simplética desejada.

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd Edition, Benjamin/Cummings, Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.

[2] W. Ambrose, *The Index Theorem in Riemannian Geometry*, Ann. Math. **73**, vol. 1 (1961), 49–86.

[3] V. I. Arnol'd, *Characteristic Class Entering in Quantization Conditions*, Funct. Anal. Appl. **1** (1967), 1–13.

[4] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, *A Morse Index Theorem for Null Geodesics*, Duke Math. J. **46** (1979), 561–569.

[5] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1996.

[6] J. Bolton, *The Morse Index Theorem in the case of Two Variable Endpoints*, J. Diff. Geom. **12** (1977), 567–581.

[7] R. Bott, *Lectures on Morse Theory, old and new*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 331–358.

[8] R. Bott, *On the Iteration of Closed Geodesics and the Sturm Intersection Theory*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. IX, 171–206 (1956).

[9] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, 2ª ed., 1987.

[10] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (projeto Euclides), 2ª ed., 1988.

[11] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc, 1955.

[12] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980.

[13] C. Conley, E. Zehnder, *Morse-Type Index Theory for Flows and Periodic Solutions for Hamiltonian Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXXVII, 207–253 (1984).

[14] J. J. Duistermaat, *On the Morse Index in Variational Calculus*, Advances in Mathematics **21**, 173–195 (1996).

[15] J. J. Duistermaat, *Fourier Integral Operators*, Courant Institute Lecture Notes, New York, 1973.

[16] H. M. Edwards, *A Generalized Sturm Theorem*, Ann. of Math. **80** (1964), 22–57.

[17] P. J. Fernandez, *Medida e Integração*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (projeto Euclides), 1976.

[18] D. G. Figueiredo, A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Coleção Matemática Universitária, 1997.

[19] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, D. V. Tausk, *A Generalized Index Theorem for Morse–Sturm Systems and Applications to semi-Riemannian Geometry*, preprint 1999, (`LANL math.DG/9908056`), to appear in the Asian Journal of Mathematics.

[20] F. Giannoni, A. Masiello, P. Piccione, *A Morse Theory for Massive Particles and Photons by Fermat Principles in General Relativity*, accepted in Journal of Geometry and Physics, 1999. (`LANL math-ph/9905009`)

[21] F. Giannoni, P. Piccione, *An Intrinsic Approach to the Geodesical Connectedness of Stationary Lorentzian Manifolds*, Communications in Analysis and Geometry, **7**, n$^{\underline{o}}$ 1 (1999), 157–197.

[22] D. Gromoll, W. Meyer, *Periodic Geodesics on Compact Riemannian Manifolds*, J. Diff. Geom. **3** (1969), 493–510.

[23] S. W. Hawking, G. F. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1973.

[24] A. D. Helfer, *Conjugate Points on Spacelike Geodesics or Pseudo-Self-Adjoint Morse-Sturm-Liouville Systems*, Pacific J. Math. **164**, n$^{\underline{o}}$ 2 (1994), 321–340.

[25] P. J. Hilton, S. Wylie, *Homology Theory*, Cambridge University Press, 1960.

[26] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, New York, Springer, 1976 (GTM).

[27] C. S. Hönig, *Aplicações da Topologia à Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (projeto Euclides), 1976.

[28] C. S. Hönig, *Análise Funcional e Aplicações*, vol. 1, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da USP, 1970.

[29] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Mathematical Library, 2^{nd} ed., 1979.

[30] S. T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, 1959.

[31] D. Kalish, *The Morse Index Theorem where the Ends are Submanifolds*, Trans. Am. Math. Soc. **308**, n. 1 (1988), 341–348.

[32] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, De Gruyter studies in mathematics, 1982.

[33] S. Lang, *Differential Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972, Massachusetts.

[34] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (projeto Euclides), 1977.

[35] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, vol. 2, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1969.

[36] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 2, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (projeto Euclides), 1981.

[37] E. L. Lima, *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$, Editora Universidade de Brasília, 1970.

[38] Y. Long, *A Maslov-Type Index Theory for Symplectic Paths*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **10**, 47–78 (1997).

[39] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, v. **74**, 1989.

[40] F. Mercuri, P. Piccione, D. V. Tausk, *Stability of the Focal and the Geometric Index in semi-Riemannian Geometry via the Maslov Index*, Technical Report RT-MAT 99-08, Mathematics Department, University of São Paulo, Brazil, 1999. (`LANL math.DG/9905096`)

[41] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1969.

[42] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1984.

[43] B. O'Neill, *Semi–Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[44] R. S. Palais, *Foundations of Global non-Linear Analysis*, Benjamin, inc., 1968.

[45] R. S. Palais, C. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, v. **1353**, 1988.

[46] P. Piccione, D. V. Tausk, *A Note on the Morse Index Theorem for Geodesics between Submanifolds in semi-Riemannian Geometry*, J. Math. Phys. **40**, vol. 12 (1999), 6682–6688.

[47] P. Piccione, D. V. Tausk, *The Maslov Index and a Generalized Morse Index Theorem for Non Positive Definite Metrics*, preprint 2000, to appear in Comptes Rendus de l'Académie de Sciences, Paris.

[48] P. Piccione, D. V. Tausk, *An Index Theorem for non Periodic Solutions of Hamiltonian Systems*, preprint 1999 (`LANL math.DG/9908056`).

[49] P. Piccione, D. V. Tausk, *Index Theorems for Symplectic Systems*, to appear in the Proceedings of the 3rd World Conference of Nonlinear Analysts, Catania (Italy), July 18–24, 2000.

[50] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 1, Functional Analysis, revised and enlarged edition, Academic Press.

[51] S. Smale, *On the Morse Index Theorem*, J. Math. Mech. **14** (1965), 1049–1056.

[52] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, Inc., 1966.

[53] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, Publish or Perish, Inc., Boston, 1970.

[54] H. J. Sussmann, *Real-Analytic Desingularization and Subanalytic Sets: an Elementary Approach*, Transactions of the American Mathematical Society, v. **317**, n$^{\underline{\circ}}$ 2 (1990).

[55] T. Takahashi, *Correction to "The Index Theorem in Riemannian Geometry" by W. Ambrose*, Ann. of Math. **80** (1964), 538–541.

[56] F. Treves, *Introduction to Pseudodifferential Operators*, Plenum, New York, 1982.

[57] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations*, Prentice-Hall series in Mordern Analysis, 1974, New Jersey.

[58] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[59] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1966.

Lista de Símbolos

Índice Remissivo

D

E

G

I

J

L