Divergência da Soma dos Inversos dos Primos

No que segue, denotamos por $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}$ o conjunto dos números primos positivos. Temos o seguinte:

Teorema. *A série* $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ *é divergente.*

Demonstração. Para todo número natural r denotamos por $\mathcal{P}_r$ o conjunto dos números primos maiores que r. Supondo por absurdo que a série $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ seja convergente, teremos $\lim_{r\to+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}_r} \frac{1}{p} = 0$ e portanto existe um número natural r tal que $\sum_{p\in\mathcal{P}_r} \frac{1}{p} = \alpha < 1$. Como a série $\sum_{p\in\mathcal{P}_r} \frac{1}{p}$ possui apenas termos não negativos, temos:

$$\alpha^k = \prod_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p_i\in\mathcal{P}_r} \frac{1}{p_i} \Big) = \sum_{p_1,\ldots,p_k\in\mathcal{P}_r} \frac{1}{p_1\cdots p_k},$$

para todo inteiro positivo k. Como $0 < \alpha < 1$, temos:

$$\sum_{\substack{k\geq 1 \\ p_1,\ldots,p_k\in\mathcal{P}_r}} \frac{1}{p_1\cdots p_k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{p_1,\ldots,p_k\in\mathcal{P}_r} \frac{1}{p_1\cdots p_k} \Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k < +\infty.$$

Denote por $\mathcal{A}$ o conjunto dos inteiros maiores do que 1 que possuem apenas primos maiores do que r em sua fatoração; obviamente, se $n \in \mathcal{A}$ então existem $k \geq 1$ e $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}_r$ de modo que $n = p_1 \cdots p_k$. Daí:

$$\sum_{n\in\mathcal{A}} \frac{1}{n} \leq \sum_{\substack{k\geq 1 \\ p_1,\ldots,p_k\in\mathcal{P}_r}} \frac{1}{p_1\cdots p_k} < +\infty.$$

Denote por c o produto dos números primos positivos menores ou iguais a r. Obviamente, para todo inteiro positivo m temos $cm + 1 \in \mathcal{A}$; logo:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{cm+1} \leq \sum_{n\in\mathcal{A}} \frac{1}{n} < +\infty.$$

Mas comparando com a série harmônica, vemos que a série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{cm+1}$ é divergente. $\blacksquare$