# O Teorema da Função Implícita

No que segue, se $(M, d)$ é um espaço métrico, $p \in M$ e $r > 0$ então $\mathrm{B}[p; r]$ denota a bola fechada de centro $p$ e raio $r$.

**Lema 1.** *Seja $(M, d)$ um espaço métrico. Dados $\lambda \in [0, 1[$, $p \in M$ e $r > 0$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que toda contração $\phi : \mathrm{B}[p; r] \to M$ com constante de Lipschitz $\lambda$ e $d\big(\phi(p), p\big) < \varepsilon$ tem imagem contida em $\mathrm{B}[p; r]$.*

**Demonstração**. Se $x \in \mathrm{B}[p; r]$ calculamos:

$$d\big(\phi(x), p\big) \le d\big(\phi(x), \phi(p)\big) + d\big(\phi(p), p\big) < \lambda d(x, p) + \varepsilon \le \lambda r + \varepsilon.$$

Basta então escolher $\varepsilon \le r(1 - \lambda)$. ■

**Corolário 1.** *Seja $(M, d)$ um espaço métrico completo. Dados $p \in M$, $r > 0$ e $\lambda \in [0, 1[$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que toda contração $\phi : \mathrm{B}[p; r] \to M$ com constante de Lipschitz $\lambda$ e $d\big(\phi(p), p\big) < \varepsilon$ possui um único ponto fixo.*

**Demonstração**. Pelo Lema 1, podemos escolher $\varepsilon$ tal que toda contração $\phi : \mathrm{B}[p; r] \to M$ como no enunciado do corolário possui imagem contida em $\mathrm{B}[p; r]$. A conclusão segue então do Teorema do Ponto Fixo de Banach. ■

**Corolário 2.** *Sejam $(M, d)$ um espaço métrico completo, $A \subset M$ um aberto e $\lambda \in [0, 1[$. Denote por $\mathrm{Contr}_\lambda(A, M)$ o espaço das contrações $\phi : A \to M$ com constante de Lipschitz $\lambda$, munido da topologia da convergência simples. Então o conjunto $\mathcal{F}$ formado pelas contrações $\phi \in \mathrm{Contr}_\lambda(A, M)$ que admitem ponto fixo é aberto em $\mathrm{Contr}_\lambda(A, M)$. Além do mais, a função $\mathrm{Fix} : \mathcal{F} \to A$ que associa a cada $\phi \in \mathcal{F}$ seu (automaticamente único) ponto fixo é contínua.*

**Demonstração**. Em primeiro lugar, se $\phi \in \mathrm{Contr}_\lambda(A, M)$ então $\phi$ tem no máximo um ponto fixo; de fato, se $\phi(p) = p$ e $\phi(q) = q$ então:

$$d(p, q) = d\big(\phi(p), \phi(q)\big) \le \lambda d(p, q) \Longrightarrow d(p, q) = 0.$$

Sabemos então que a aplicação Fix está bem definida. Sejam agora $\phi \in \mathcal{F}$, $r > 0$ fixados e denote por $p \in A$ o ponto fixo de $\phi$. Vamos construir uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\phi$ em $\mathrm{Contr}_\lambda(A, M)$ que esteja contida em $\mathcal{F}$ e tal que toda $\psi \in \mathcal{U}$ possui seu ponto fixo em $\mathrm{B}[p; r]$. Isso mostrará simultaneamente que $\mathcal{F}$ é aberto e que Fix é contínua. Para construir $\mathcal{U}$, diminuímos $r > 0$ de modo que $\mathrm{B}[p; r] \subset A$ e escolhemos $\varepsilon > 0$ como no Corolário 1. Daí é só tomar:

$$\mathcal{U} = \big\{\psi \in \mathrm{Contr}_\lambda(A, M) : d\big(\psi(p), \phi(p)\big) = d\big(\psi(p), p\big) < \varepsilon\big\}.$$

Isso completa a demonstração. ■

No que segue, se $X$, $Y$ são espaços de Banach então $\mathrm{Lin}(X, Y)$ denota o espaço de Banach dos operadores lineares contínuos de $X$ em $Y$.

**Teorema.** *(da função implícita) Sejam $X$, $Y$, $Z$ espaços de Banach, $U \subset X$, $V \subset Y$ abertos e $f : U \times V \to Z$ uma função. Fixe $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ e defina $c = f(x_0, y_0) \in Z$. Suponha que:*

(i) *para todo $y \in V$, a função $U \ni x \mapsto f(x, y) \in Z$ é contínua;*

(ii) *para todo $x \in U$ a função $V \ni y \mapsto f(x, y) \in Z$ é diferenciável;*

(iii) *a função $\frac{\partial f}{\partial y} : U \times V \to \mathrm{Lin}(Y, Z)$ é contínua em $U \times V$;*

(iv) *o operador linear $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : Y \to Z$ é um isomorfismo.*

*Então existem abertos $U_0 \ni x_0$, $V_0 \ni y_0$ com $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ e tais que para todo $x \in U_0$ existe um único $y = \sigma(x) \in V_0$ tal que $f(x, y) = c$; além do mais, a função $\sigma : U_0 \to V_0$ é contínua.*

**Demonstração**. Para todos $x \in U$, $y \in V$ temos:

$$f(x,y) = c \Longleftrightarrow f(x,y) - c - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y \Longleftrightarrow \phi_x(y) = y, \tag{1}$$

onde, para $x \in U$, a aplicação $\phi_x : V \to Y$ é definida por:

$$\phi_x(y) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Big)^{-1}\Big[f(x,y) - c - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y\Big].$$

Afirmamos que existem $\lambda \in [0, 1[$ e vizinhanças abertas $\widetilde{U}_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ de $x_0$, $y_0$ respectivamente tais que para todo $x \in \widetilde{U}_0$ a aplicação $\phi_x|_{V_0} : V_0 \to Y$ é uma contração com constante de Lipschitz $\lambda$. De fato, como a aplicação linear contínua $\big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\big)^{-1}$ é Lipschitziana, pela desigualdade do valor médio, é suficiente mostrar que, dado $\varepsilon > 0$ então exitem vizinhanças abertas $\widetilde{U}_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ de $x_0$, $y_0$ respectivamente tais que para todo $x \in \widetilde{U}_0$ a aplicação diferenciável:

$$\tau_x(y) = f(x,y) - c - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y,$$

é tal que $\big\|\mathrm{d}\tau_x(y)\big\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_0$. Obviamente:

$$\mathrm{d}\tau_x(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

e a conclusão segue da continuidade de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Observe que para todo $x \in \widetilde{U}_0$ já sabemos que existe *no máximo um* $y \in V_0$ tal que $f(x, y) = c$, pois a contração $\phi_x|_{V_0}$ tem no máximo um ponto fixo. Usando agora a notação do Corolário 2 do Lema 1, temos que a aplicação:

$$\phi : \widetilde{U}_0 \ni x \longmapsto \phi_x|_{V_0} \in \mathrm{Contr}_\lambda(V_0, Y)$$

é contínua, onde $\mathrm{Contr}_\lambda(V_0, Y)$ é munido da topologia da convergência simples (de fato, a continuidade de $\phi$ é equivalente à continuidade de $x \mapsto \phi_x(y)$ para todo $y \in V_0$ fixado, o que segue de (i)). Como $y_0$ é um ponto fixo de $\phi_{x_0}$, segue do Corolário 2 do Lema 1 que existe uma vizinhança aberta $U_0$ de $x_0$ em $\widetilde{U}_0$ tal que $\phi_x|_{V_0} \in \mathcal{F}$ para todo $x \in U_0$, i.e., $\phi_x$ possui um único ponto fixo $y \in V_0$. Equivalentemente (vide (1)), para todo $x \in U_0$ a equação $f(x,y) = c$ possui uma única solução $y \in V_0$. Finalmente, para mostrar a continuidade de $\sigma$, simplesmente observe que $\sigma = \mathrm{Fix} \circ \phi$. ■

**Observação.** Nas condições do Teorema acima, se $x \in U_0$ é um ponto tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big) : Y \longrightarrow Z$$

é um isomorfismo e tal que $f$ é diferenciável no ponto $\big(x, \sigma(x)\big)$, então $\sigma$ é diferenciável no ponto $x$ e:

$$\mathrm{d}\sigma(x) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big)\Big)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \sigma(x)\big).$$

De fato, a diferenciabilidade de $f$ no ponto $\big(x, \sigma(x)\big)$ nos permite escrever:

$$f\big(x+h, \sigma(x)+k\big) = f\big(x, \sigma(x)\big) + \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \sigma(x)\big) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big) \cdot k + \rho(h,k)\big(\|h\| + \|k\|\big),$$

para todos $h \in X$, $k \in Y$ com $x + h \in U$, $\sigma(x) + k \in V$, onde $\rho$ é uma função contínua na origem tal que $\rho(0,0) = 0$. Fazendo $k = \sigma(x+h) - \sigma(x)$ na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \sigma(x)\big) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big)\big(\sigma(x+h) - \sigma(x)\big) \\ + \rho\big(h, \sigma(x+h) - \sigma(x)\big)\big(\|h\| + \|\sigma(x+h) - \sigma(x)\|\big) = 0, \end{aligned}$$

para todo $h \in X$ com $x + h \in U_0$, já que $f\big(x, \sigma(x)\big) = f\big(x+h, \sigma(x+h)\big) = c$. Daí:

$$\sigma(x+h) = \sigma(x) - \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big)\Big)^{-1}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \sigma(x)\big) \cdot h\Big] + r(h), \tag{2}$$

onde:

$$r(h) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big)\Big)^{-1}\big[\rho\big(h, \sigma(x+h) - \sigma(x)\big)\big]\big(\|h\| + \|\sigma(x+h) - \sigma(x)\|\big).$$

Resta agora mostrar que $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Como $\sigma$ é contínua, temos que

$$\lim_{h \to 0} \rho\big(h, \sigma(x+h) - \sigma(x)\big) = 0$$

e portanto a conclusão seguirá se mostrarmos que o quociente:

$$\frac{\|\sigma(x+h) - \sigma(x)\|}{\|h\|}$$

é limitado para $h \neq 0$ numa vizinhança da origem. De (2), obtemos:

$$\sigma(x+h) - \sigma(x) = \psi_1(h) + \psi_2(h)\|\sigma(x+h) - \sigma(x)\|, \tag{3}$$

onde:

$$\psi_1(h) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big)\Big)^{-1}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, \sigma(x)\big) \cdot h + \rho\big(h, \sigma(x+h) - \sigma(x)\big)\|h\|\Big]$$

e:

$$\psi_2(h) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \sigma(x)\big)\Big)^{-1}\big[\rho\big(h, \sigma(x+h) - \sigma(x)\big)\big].$$

Note que o quociente $\frac{\|\psi_1(h)\|}{\|h\|}$ é limitado para $h \neq 0$ numa vizinhança da origem e que $\lim_{h \to 0} \psi_2(h) = 0$. De (3) vem:

$$\|\sigma(x+h) - \sigma(x)\| \leq \|\psi_1(h)\| + \|\psi_2(h)\| \, \|\sigma(x+h) - \sigma(x)\| \leq \|\psi_1(h)\| + \frac{1}{2}\|\sigma(x+h) - \sigma(x)\|,$$

para $h \neq 0$ numa vizinhança da origem. Concluímos então que:

$$\frac{1}{2}\|\sigma(x+h) - \sigma(x)\| \leq \|\psi_1(h)\|$$

para $h \neq 0$ numa vizinhança da origem, o que termina a demonstração.