

O Triedro de Frenet

MAT-2454 - Cálculo Diferencial e Integral II

Daniel Victor Tausk

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^3 definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Assuma que γ é regular, ou seja, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Fixamos $t_0 \in I$ e para cada $t \in I$ definimos:

$$(1) \quad s = \sigma(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| \, du.$$

Para $t \geq t_0$, $\sigma(t)$ é igual ao comprimento da curva γ restrita ao intervalo $[t_0, t]$ e para $t < t_0$, $\sigma(t)$ é igual a menos o comprimento da curva γ restrita ao intervalo $[t, t_0]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (segunda versão), temos:

$$\frac{ds}{dt} = \sigma'(t) = \|\gamma'(t)\|.$$

Escrevemos também $\vec{r} = \gamma(t)$, de modo que $\gamma'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e portanto:

$$(2) \quad \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|.$$

Como $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, temos que $\sigma'(t) > 0$ para todo $t \in I$; segue que $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente e portanto podemos considerar sua inversa σ^{-1} , que é uma função de classe C^3 definida no intervalo $\sigma(I)$. Em outras palavras, podemos reescrever a identidade $s = \sigma(t)$ colocando t em função de s , obtendo $t = \sigma^{-1}(s)$; temos:

$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1}.$$

Substituindo $t = \sigma^{-1}(s)$ em $\vec{r} = \gamma(t)$, obtemos uma expressão para \vec{r} em função do parâmetro s ; de modo mais preciso, consideramos a função composta $\mu = \gamma \circ \sigma^{-1}$ e obtemos uma curva $\vec{r} = \mu(s)$. Note que:

$$(3) \quad \mu'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^{-1},$$

ou seja, $\mu'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$ é o versor do vetor tangente $\frac{d\vec{r}}{dt}$ à curva γ . Em particular $\|\mu'(s)\| = 1$. Dizemos que a curva μ é uma reparametrização por comprimento de arco de γ .

1. Exemplo. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$(4) \quad \vec{r} = \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, 0),$$

onde $R > 0$ é uma constante fixada. Temos que γ parametriza uma circunferência de raio R e centro na origem, contida no plano $z = 0$. Temos

$\gamma'(t) = (-R \operatorname{sen} t, R \operatorname{cos} t, 0)$ e portanto $\|\gamma'(t)\| = R$. Tomando $t_0 = 0$ e usando (1) obtemos:

$$s = \sigma(t) = \int_0^t R \, du = Rt.$$

Logo $t = \frac{s}{R}$. Substituindo essa relação em (4) obtemos:

$$\vec{r} = \mu(s) = \left(R \operatorname{cos} \frac{s}{R}, R \operatorname{sen} \frac{s}{R}, 0 \right),$$

onde $\mu = \gamma \circ \sigma^{-1}$. A curva μ é uma reparametrização por comprimento de arco da curva γ . Embora os cálculos envolvidos neste exemplo tenham sido muito simples, observamos que na maioria dos casos é muito difícil obter uma expressão explícita para uma reparametrização por comprimento de arco de uma dada curva regular γ .

Se interpretamos $\vec{r} = \gamma(t)$ como sendo a posição no instante t de um corpo que se movimenta pelo espaço \mathbb{R}^3 então $s = \sigma(t)$ é a distância percorrida por esse corpo desde o instante t_0 até o instante t , para $t \geq t_0$ (e $s = \sigma(t)$ é igual a menos a distância percorrida desde o instante t até o instante t_0 , para $t < t_0$). Definimos:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt}, & \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \\ v &= \frac{ds}{dt}, & a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \end{aligned}$$

Note que, na interpretação física, \vec{v} é a *velocidade vetorial*, \vec{a} é a *aceleração vetorial*, v é a *velocidade escalar* e a é a *aceleração escalar* do corpo. Com a terminologia introduzida acima, a identidade (2) fica:

$$\|\vec{v}\| = v,$$

ou seja, *a norma da velocidade vetorial coincide com a velocidade escalar*. Como veremos abaixo, não é verdade em geral que a norma da aceleração vetorial coincide com a aceleração escalar.

Definimos agora:

$$T = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Como vimos em (3), T é simplesmente o versor do vetor tangente $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, ou seja:

$$(5) \quad T = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}.$$

Chamamos T o *vetor tangente unitário* à curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Derivando a identidade $T \cdot T = 1$ com respeito a s obtemos:

$$2T \cdot \frac{dT}{ds} = 0,$$

ou seja, o vetor $\frac{dT}{ds}$ é normal ao vetor T (e portanto a $\frac{d\vec{r}}{dt}$). O vetor $\frac{dT}{ds}$ em geral não é unitário; sua norma mede, intuitivamente, o quanto o vetor tangente unitário T muda de direção. Definimos:

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|;$$

chamamos κ a *curvatura* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$.

Vamos agora obter uma fórmula para a aceleração vetorial \vec{a} . De (5) vem $\vec{v} = vT$; derivando essa identidade com respeito a t obtemos:

$$\vec{a} = aT + v \frac{dT}{dt} = aT + v \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Logo:

$$(6) \quad \vec{a} = aT + v^2 \frac{dT}{ds}.$$

Note que, como $\frac{dT}{ds}$ é normal a T , a identidade (6) nos diz que $\frac{dT}{ds} \neq 0$ se e somente se os vetores \vec{a} e T são linearmente independentes, ou seja:

$$\kappa \neq 0 \iff \frac{dT}{ds} \neq 0 \iff \vec{a} \text{ e } \vec{v} \text{ são linearmente independentes.}$$

Vamos assumir a partir de agora que o vetor $\frac{dT}{ds}$ não é nulo. Denotaremos por N o versor $\frac{dT}{ds} \left\| \frac{dT}{ds} \right\|^{-1}$ do vetor $\frac{dT}{ds}$. Chamaremos N o *vetor normal unitário* à curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Temos obviamente:

$$(7) \quad \frac{dT}{ds} = \kappa N.$$

Levando em conta (7), a identidade (6) nos dá:

$$(8) \quad \vec{a} = aT + v^2 \kappa N.$$

Fisicamente, a identidade (8) nos diz que a aceleração vetorial \vec{a} tem duas componentes; uma tangente ao movimento (ou seja, paralela a T), com norma igual à aceleração escalar a . A outra é normal ao movimento (ou seja, paralela a N) e possui norma igual a $v^2 \kappa$. A componente normal ao movimento é normalmente conhecida como *aceleração centrípeta*. Escrevendo $R = \frac{1}{\kappa}$ obtemos a fórmula mais familiar $\frac{v^2}{R}$ para a norma da aceleração centrípeta; o escalar R é conhecido como o *raio de curvatura* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Observamos que o raio de curvatura de uma circunferência coincide com seu raio (verifique!).

Usando (8) fica fácil obter uma expressão para a aceleração escalar a ; de fato, multiplicando (8) escalarmente por T e usando (5) obtemos:

$$(9) \quad a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v}.$$

Denotamos por B o produto vetorial de T por N , ou seja:

$$(10) \quad B = T \wedge N.$$

Como T e N são unitários e normais, temos que o vetor B também é unitário. Além do mais, a trinca (T, N, B) é uma *base ortonormal positivamente orientada* de \mathbb{R}^3 . O vetor B é chamado o *vetor binormal* à curva $\vec{r} = \gamma(t)$ e a base (T, N, B) é chamada o *triedro de Frenet-Serret* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Multiplicando a identidade (8) vetorialmente por $\vec{v} = vT$ obtemos:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = (vT) \wedge (aT) + (vT) \wedge (v^2\kappa N) = v^3\kappa B.$$

Como $\|B\| = 1$, $v > 0$ e $\kappa > 0$ concluímos que $\|\vec{v} \wedge \vec{a}\| = v^3\kappa$, ou seja:

$$(11) \quad \boxed{\kappa = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}{v^3} = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3},}$$

o que nos dá uma expressão para a curvatura κ que envolve apenas derivadas de \vec{r} com respeito ao parâmetro t . Note que de (5) e (8) podemos obter também uma expressão para o vetor N :

$$(12) \quad N = \frac{v\vec{a} - a\vec{v}}{v^3\kappa} = \frac{v\vec{a} - a\vec{v}}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|},$$

onde a pode ser calculado usando (9). Usando (5), (10) e (12) obtemos a seguinte expressão para a binormal B :

$$(13) \quad \boxed{B = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}.}$$

Na prática, em vez de usar (12), é mais simples calcular N usando (5) e (13), levando em conta que:

$$(14) \quad \boxed{N = B \wedge T.}$$

Nosso objetivo agora é obter as coordenadas das derivadas $\frac{dT}{ds}$, $\frac{dN}{ds}$ e $\frac{dB}{ds}$ na base (T, N, B) . Note que essa tarefa já foi realizada para a derivada $\frac{dT}{ds}$ (vide (7)). Vamos então determinar as coordenadas de $\frac{dN}{ds}$ na base (T, N, B) ; note que, como essa base é ortonormal, essas coordenadas são dadas por $\frac{dN}{ds} \cdot T$, $\frac{dN}{ds} \cdot N$ e $\frac{dN}{ds} \cdot B$. Derivando as identidades $N \cdot N = 1$ e $N \cdot T = 0$ com respeito a s obtemos:

$$2N \cdot \frac{dN}{ds} = 0, \quad \frac{dN}{ds} \cdot T + N \cdot \frac{dT}{ds} = 0.$$

Usando (7) obtemos:

$$(15) \quad N \cdot \frac{dN}{ds} = 0, \quad T \cdot \frac{dN}{ds} = -\kappa.$$

A componente de $\frac{dN}{ds}$ na direção da binormal B será chamada a *torção* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$ e será denotada por τ ; temos então:

$$(16) \quad \boxed{\tau = B \cdot \frac{dN}{ds}.}$$

De (15) e (16) vem:

$$(17) \quad \boxed{\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B.}$$

Finalmente, calculamos as coordenadas de $\frac{dB}{ds}$ na base (T, N, B) . Para isso, derivamos as identidades $B \cdot T = 0$, $B \cdot N = 0$ e $B \cdot B = 1$ com respeito a s obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{ds} \cdot T &= -B \cdot \frac{dT}{ds} = -B \cdot (\kappa N) = 0, \\ \frac{dB}{ds} \cdot N &= -B \cdot \frac{dN}{ds} = -\tau, \\ \frac{dB}{ds} \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Logo:

$$(18) \quad \boxed{\frac{dB}{ds} = -\tau N.}$$

As identidades (7), (17) e (18) são conhecidas como as *equações de Frenet-Serret*.

Vamos agora obter uma fórmula para a torção τ que envolva apenas derivadas de \vec{r} com respeito ao parâmetro t . Derivamos a identidade (8) com respeito a t :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{a}}{dt} &= \frac{da}{dt}T + a \frac{dT}{dt} + \frac{d(v^2\kappa)}{dt}N + v^2\kappa \frac{dN}{dt} \\ &= \frac{da}{dt}T + a \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{d(v^2\kappa)}{dt}N + v^2\kappa \frac{dN}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{da}{dt}T + av\kappa N + \frac{d(v^2\kappa)}{dt}N + v^3\kappa \frac{dN}{ds}. \end{aligned}$$

Na última igualdade acima utilizamos (7). Multiplicando as expressões acima escalarmente por B e levando em conta (16) obtemos:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot B = v^3\kappa\tau.$$

Usando (13) chegamos a:

$$\frac{1}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{a}) = v^3\kappa\tau.$$

Da identidade acima e de (11) obtemos finalmente a seguinte expressão para a torção:

$$(19) \quad \boxed{\tau = \frac{1}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|^2} \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{a}) = \frac{\gamma''' \cdot (\gamma' \wedge \gamma'')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} .}$$

2. **Exemplo.** Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\vec{r} = \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ct),$$

onde $R > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas. Temos que $\vec{r} = \gamma(t)$ descreve o movimento de um corpo cuja sombra no plano $z = 0$ movimenta-se pela circunferência de centro na origem e raio R em movimento circular uniforme; a sombra do corpo no eixo z segue um movimento retilíneo uniforme com velocidade igual a c vezes a velocidade angular da sombra no plano $z = 0$. Temos:

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, c), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + c^2}.$$

Usando (5) obtemos:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}} (-R \sin t, R \cos t, c).$$

Temos também:

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= (-R \cos t, -R \sin t, 0), \\ \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= (Rc \sin t, -Rc \cos t, R^2), \\ \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= R\sqrt{R^2 + c^2}. \end{aligned}$$

De (11) obtemos então:

$$\kappa(t) = \frac{R}{R^2 + c^2},$$

e de (13) obtemos:

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}} (c \sin t, -c \cos t, R).$$

Podemos agora calcular N usando (14):

$$N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

e calcular τ usando (19):

$$\tau(t) = \frac{c}{R^2 + c^2}.$$

Observamos que a curvatura κ e a torção τ da curva γ são constantes. Esse fenômeno é uma particularidade deste exemplo; em geral, a curvatura e a torção de uma curva $\vec{r} = \gamma(t)$ são funções do parâmetro t .