Aula número 1 (13/08)

(1) **Sistemas de coordenadas**.

Esta seção funciona como uma preparação psicológica para a noção de variedade diferenciável e para os enunciados das formas locais das imersões, submersões e para o teorema do posto.

Começamos com uma pergunta: qual deve ser a definição correta para o conceito de "sistema de coordenadas"? Bom, a idéia básica é a seguinte: começamos com um "mundo abstrato" X onde temos uma certa quantidade de "habitantes". Um certo habitante de X deseja usar algum sistema de coordenadas para descrever (ao menos uma parte de) X. Tal habitante deve então associar a cada ponto de X uma n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ de números reais, que seriam as "coordenadas" desse ponto x. Um bom sistema de coordenadas deve ter a propriedade que pontos diferentes possuem coordenadas diferentes (senão seria uma tremenda confusão!). Essa visão caricata do conceito de sistema de coordenadas motiva a seguinte:

Definição. *Seja X um conjunto qualquer. Um* sistema de coordenadas *em X é uma função bijetora $\varphi : U \to \widetilde{U}$, onde U é um subconjunto de X e $\widetilde{U}$ é um subconjunto aberto de $I\!R^n$ para algum n.*

A exigência de que $\widetilde{U}$ seja *aberto* em $I\!R^n$ é feita por razões técnicas e é importante na teoria de variedades diferenciáveis. Num primeiro momento, seria razoável exigir apenas que $\widetilde{U}$ fosse um subconjunto arbitrário de $I\!R^n$.

`Exemplo`. Seja $X = I\!R^n$. Fazendo $U = \widetilde{U} = I\!R^n$ e φ igual à aplicação identidade então o sistema de coordenadas $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em $X = I\!R^n$ é chamado o *sistema de coordenadas cartesianas*.

`Exemplo`. Escolha $\theta_0 \in I\!R$ e seja $U = A_{\theta_0} \subset I\!R^2$ o aberto de $I\!R^2$ cujo complementar é a semi-reta fechada $\big\{(t\cos\theta_0, t\,\mathrm{sen}\,\theta_0) : t \geq 0\big\}$. Seja $\widetilde{U} = \,]0, +\infty[\, \times \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ e defina $\varphi : U \to \widetilde{U}$ fazendo $\varphi(x, y) = (\rho, \theta)$, onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta \in \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ é determinado pelas identidades $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$. É fácil ver que a aplicação $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é de fato bijetora e é portanto um sistema de coordenadas em $I\!R^2$; esse é chamado o *sistema de coordenadas polares* (relativo à escolha de θ_0) no plano $I\!R^2$.

`Exemplo`. Escolha $\theta_0 \in I\!R$ e defina A_{θ_0} como no exemplo anterior. Considere os abertos $U = A_{\theta_0} \times I\!R \subset I\!R^3$, $\widetilde{U} = \,]0, +\infty[\, \times \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\, \times I\!R \subset I\!R^3$ e defina $\varphi : U \to \widetilde{U}$ fazendo $\varphi(x, y, z) = (\rho, \theta, z)$, onde ρ e θ são definidos a partir de x e y como no exemplo anterior. Temos que $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é um sistema de coordenadas no espaço $I\!R^3$ chamado o *sistema de coordenadas cilíndricas* (relativo à escolha de θ_0) no espaço $I\!R^3$.

`Exemplo`. Sejam $U = I\!R^3 \setminus \big(\,]-\infty, 0] \times \{0\} \times I\!R\big)$, $\widetilde{U} = \,]0, +\infty[\, \times \,]-\pi, \pi[\, \times \,]0, \pi[$ e $\varphi : U \to \widetilde{U}$ a aplicação definida por $\varphi(x, y, z) = (r, \theta, \phi)$, onde $r \in \,]0, +\infty[$, $\theta \in \,]-\pi, \pi[$ e $\phi \in \,]0, \pi[$ são os únicos escalares para os quais as relações:

$$x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = r\cos\phi,$$

são satisfeitas (note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Temos que φ é um sistema de coordenadas em $I\!R^3$ chamado o *sistema de coordenadas esféricas* do espaço $I\!R^3$.

`Exemplo`. Seja $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^n$ uma base arbitrária de $I\!R^n$. Seja $\varphi : I\!R^n \to I\!R^n$ a única transformação linear tal que $\varphi(b_i)$ é o i-ésimo vetor da base canônica de $I\!R^n$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Temos que φ é um isomorfismo e portanto um sistema de coordenadas (com $U = \widetilde{U} = I\!R^n$) em $I\!R^n$. Note que para todo $x \in I\!R^n$ temos que $\varphi(x)$ coincide precisamente com a n-upla formada pelas coordenadas de x na base $\mathfrak{B}$. Dizemos que φ é um *sistema de coordenadas linear* em $I\!R^n$. Quando $\mathfrak{B}$ é a base canônica, temos que $\varphi = \mathrm{Id}$, i.e., reobtemos as coordenadas cartesianas. Em geral, o sistema de coordenadas φ corresponde à idéia de usar "eixos de coordenadas oblíquos" e "escalas de medida arbitrárias" em cada um dos eixos. Mais geralmente, fixada uma base $\mathfrak{B}$ em $I\!R^n$ e um ponto $\mathcal{O} \in I\!R^n$ então podemos definir um sistema de coordenadas $\varphi : I\!R^n \to I\!R^n$ fazendo $\varphi(x)$ igual às coordenadas de $x - \mathcal{O}$ na base $\mathfrak{B}$. Dizemos então que φ é um *sistema de coordenadas afim com origem* $\mathcal{O}$. Quando $\mathcal{O} = 0$, estamos de volta ao caso de um sistema de coordenadas linear.

A definição de sistema de coordenadas que demos no início da seção é um tanto geral demais para nossos propósitos imediatos. De fato, observe que todos os sistemas de coordenadas mencionados nos exemplos acima se enquadram na seguinte definição mais restrita.

Definição. *Um* sistema de coordenadas de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ em $I\!R^n$ *é um difeomorfismo* $\varphi : U \to \widetilde{U}$ *de classe* C^k*, onde tanto* U *como* $\widetilde{U}$ *são abertos em* $I\!R^n$*. Por um* sistema de coordenadas de classe C^0 *em* $I\!R^n$ *entendemos simplesmente um homeomorfismo* $\varphi : U \to \widetilde{U}$*, onde* U *e* $\widetilde{U}$ *são abertos em* $I\!R^n$*.*

Observe que todos os exemplos mencionados acima são sistemas de coordenadas de classe C^∞ em $I\!R^n$.

Para finalizar, apresentamos alguns exemplos um pouco diferentes (que não correspondem a sistemas de coordenadas em $I\!R^n$).

`Exemplo`. Denote por S^2 a *esfera unitária bidimensional*, ou seja:

$$S^2 = \big\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}.$$

Seja $U \subset S^2$ o aberto (relativo a S^2) definido por:

$$U = S^2 \setminus \big(\{0\} \times [0, +\infty[\times I\!R\big),$$

i.e., U é o complementar em S^2 de um meridiano fechado. Definimos uma aplicação $\varphi : U \to I\!R^2$ fazendo $\varphi(x, y, z) = (\theta, \phi)$ onde θ é a "longitude" de (x, y, z) e ϕ é a "latitude" de (x, y, z); mais explicitamente, $\theta \in \,]-\pi, \pi[$, $\phi \in \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$ são unicamente determinados pelas relações:

$$x = \cos\phi \,\mathrm{sen}\,\theta, \quad y = -\cos\phi\cos\theta, \quad z = \mathrm{sen}\,\phi.$$

Temos que φ é uma bijeção sobre o aberto $\widetilde{U} = \,]-\pi, \pi[\times \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$ em $I\!R^2$. Portanto φ é um sistema de coordenadas na esfera unitária S^2.

`Exemplo`. Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n < +\infty$ e seja $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^n$ uma base para V. Existe uma única aplicação linear $\varphi : V \to I\!R^n$ que leva o vetor b_i sobre o i-ésimo vetor e_i da base canônica de $\mathbb{R}^n$. A aplicação φ é um isomorfismo que leva cada vetor $v \in V$ sobre a n-upla que contém as coordenadas de v na base $\mathfrak{B}$. Temos que $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas em V; diz-se que φ é um *sistema de coordenadas linear* no espaço vetorial V. Na verdade, o presente exemplo é apenas uma pequena generalização do exemplo onde mencionamos sistemas de coordenadas lineares em $\mathbb{R}^n$ (veja também o Exercício 2 para uma generalização dos sistemas de coordenadas afins). Observe no entanto que se V é um espaço vetorial real arbitrário de dimensão n então não há um *sistema de coordenadas canônico* em V (por isso um espaço vetorial real genérico de dimensão 3 é um modelo mais adequado para o "espaço físico" do que $\mathbb{R}^3$, já que o "espaço físico" não possui uma base canônica — na verdade, *espaços afins* de dimensão 3 são um modelo ainda melhor, já que o "espaço físico" não possui sequer uma *origem* canônica).

`Observação`. Quem já estudou um pouco de teoria de cardinais em cursos de teoria dos conjuntos sabe que existe uma bijeção $\varphi : S^2 \to \mathbb{R}$ da esfera unitária S^2 sobre a reta real $\mathbb{R}$ (isso segue por exemplo do teorema de Schröder–Bernstein e do fato que $\mathbb{R}^3$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$). Tal bijeção φ é a rigor um sistema de coordenadas em S^2 pela nossa definição geral, apesar do fato que esse sistema de coordenadas φ deve parecer "um tanto estranho". Quando estudarmos a noção de variedade diferenciável faremos algumas restrições adicionais sobre a noção de sistema de coordenadas que eliminam patologias desagradáveis como essa.

Definição. *Sejam X, Y conjuntos e $\varphi : U \subset X \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : V \subset Y \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ sistemas de coordenadas para X e Y respectivamente. Seja $f : X \to Y$ uma função tal que $f(U) \subset V$ e considere a função $\tilde{f} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ dada pela composição $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Dizemos que $\tilde{f}$ é a função que* representa *f com respeito aos sistemas de coordenadas φ e ψ.*

A relação entre f e $\tilde{f}$ é representada pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & V \arrow[d, "\psi", "\cong"'] \\ \widetilde{U} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \widetilde{V} \end{tikzcd}$$

o símbolo $\cong$ foi usado para indicar que φ e ψ são bijeções. No Exercício 1 pedimos para vocês relacionarem a noção acima com a noção usual da Álgebra Linear de "matrizes que representam operadores lineares em bases".

(2) **A versão linear do teorema do posto.**

Em álgebra linear é muito estudado o problema de diagonabilidade de operadores lineares $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. O problema consiste em achar uma base de V de modo que a matriz que representa T nessa base seja diagonal. Tal tarefa não é sempre realizável, i.e., existem operadores que não são diagonalizáveis. A vantagem básica de diagonalizar um operador linear é basicamente óbvia: quer-se um sistema de coordenadas no qual T seja descrito de maneira simples.

Vamos tratar aqui um problema muito mais simples do que o da diagonalização: dada uma transformação linear $T : V \to W$ (com V, W espaços vetoriais possivelmente distintos, de dimensão finita), queremos encontrar bases de V e W que tornem a representação matricial de T o mais "simples" possível. Note que mesmo quando $V = W$ tal problema é mais simples do que o problema usual de diagonalização; de fato, permitimos aqui que sejam usadas *bases diferentes* no domínio e no contra-domínio de T.

Temos o seguinte:

Teorema. *Sejam V, W espaços vetoriais com $\dim(V) = m < +\infty$ e $\dim(W) = n < +\infty$. Dada uma transformação linear $T : V \to W$ então existem bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ para V e W respectivamente de modo que a matriz $[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ que representa T com respeito a tais bases é dada (em notação de blocos) por:*

$$[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k\times(m-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & 0_{(n-k)\times(m-k)} \end{pmatrix},$$

onde I_k denota a matriz identidade $k \times k$ e $0_{\alpha\times\beta}$ denota a matriz nula $\alpha \times \beta$. Além do mais, o número k é precisamente o posto de T (i.e., a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$).

Demonstração. Em primeiro lugar, se tais bases existirem então k deve coincidir com o posto de T pois o posto de T deve ser igual ao posto da matriz $[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ (que é k). Vamos agora mostrar a existência das bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$. Escolha uma base qualquer de $\mathrm{Ker}(T)$ e complete-a até uma base de V; obtemos então uma base $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^m$ de V tal que $(b_i)_{i=k+1}^m$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T)$. Temos que $(b_i)_{i=1}^k$ é uma base para um subespaço $S \subset V$ tal que $V = S \oplus \mathrm{Ker}(T)$. Daí T leva S isomorficamente sobre $T(V) = \mathrm{Im}(T) \subset W$ (veja Exercício 3); concluímos então que $b_i' = T(b_i)$, $i = 1, \ldots, k$ nos dá uma base para a imagem de T. Escolha agora $\mathfrak{B}' = (b_i')_{i=1}^n$ como sendo um completamento qualquer de $(b_i')_{i=1}^k$ até uma base de W. Segue agora facilmente que $[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ assume a forma desejada. ■

`Observação`. Usando o resultado do Exercício 1, vemos que se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são bases como no enunciado do teorema acima e se $\varphi_{\mathfrak{B}} : V \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_{\mathfrak{B}'} : W \to \mathbb{R}^n$ são os correspondentes sistemas de coordenadas então temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_{\mathfrak{B}}"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"', "\varphi_{\mathfrak{B}'}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "F"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

onde $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k \text{ zeros}}),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Encontramos então sistemas de coordenadas (lineares) em V e W que tornam a representação de T (ou seja, F) bem simples!

`Observação`. Se $T : V \to W$ é injetora então $k = m \leq n$ e o teorema nos dá sistemas de coordenadas nos quais a representação de T é dada por:

$$F(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ zeros}}).$$

Nesse caso, podemos fazer ainda uma pequena melhora no enunciado do teorema: é possível *para toda* base $\mathfrak{B}$ de V encontrar uma base $\mathfrak{B}'$ de W na qual $[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ tem a forma desejada. De fato, se $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^m$ é uma base qualquer de V então $b'_i = T(b_i)$, $i = 1, \ldots, m$ é um conjunto linearmente independente e portanto pode ser completado a uma base $\mathfrak{B}'$ para W. Segue que $[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ é dada por:

$$[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}.$$

`Observação`. Se $T : V \to W$ é sobrejetora então $k = n \leq m$ e o teorema nos dá sistemas de coordenadas nos quais a representação de T é dada por:

$$F(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Nesse caso, podemos também fazer uma pequena melhora no enunciado do teorema: é possível *para toda* base $\mathfrak{B}'$ de W encontrar uma base $\mathfrak{B}$ de V na qual $[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ tem a forma desejada. De fato, se $\mathfrak{B}' = (b'_i)_{i=1}^n$ é uma base qualquer para W, escolha um subespaço $S \subset V$ com $V = S \oplus \mathrm{Ker}(T)$; daí $T|_S : S \to W$ é um isomorfismo e portanto $b_i = (T|_S)^{-1}(b'_i)$, $i = 1, \ldots, n$ nos dá uma base de S. Seja $(b_i)_{i=n+1}^m$ uma base qualquer de $\mathrm{Ker}(T)$, de modo que $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^n$ é uma base de V. Segue que $[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ é dada por:

$$[T]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n\times(m-n)} \end{pmatrix}.$$

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Álgebra Linear.`

1. Sejam V, W espaços vetoriais reais de dimensão finita e $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^m$, $\mathfrak{B}' = (b'_i)_{i=1}^n$ bases para V e para W respectivamente. Denote por:

$$\varphi_{\mathfrak{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \varphi_{\mathfrak{B}'} : W \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

respectivamente os sistemas de coordenadas em V e W associados a $\mathfrak{B}$ e a $\mathfrak{B}'$, i.e., $\varphi_{\mathfrak{B}}$ é o isomorfismo que leva $\mathfrak{B}$ sobre a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e $\varphi_{\mathfrak{B}'}$ é o isomorfismo que leva $\mathfrak{B}'$ sobre a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Dada uma transformação linear $T : V \to W$, denote por A a matriz real $n \times m$ que representa T com respeito às bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$, i.e., para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, A_{ij} é a i-ésima coordenada na base $\mathfrak{B}'$ do vetor $T(b_j)$; denote também por $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ o *operador de multiplicação por* A, i.e., $L_A(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$, onde interpretamos x como uma matriz coluna $m \times 1$. Mostre que o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_{\mathfrak{B}}"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"', "\varphi_{\mathfrak{B}'}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "L_A"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., mostre que $\varphi_{\mathfrak{B}'} \circ T = L_A \circ \varphi_{\mathfrak{B}}$. Isso significa que L_A é a função que representa T com respeito aos sistemas de coordenadas $\varphi_{\mathfrak{B}}$ e $\varphi_{\mathfrak{B}'}$!

2. Sejam V um espaço vetorial real e P um conjunto; seja dada também uma aplicação $\rho : V \times P \to P$ satisfazendo as seguinte propriedades:

   (i) $\rho\big(v, \rho(w, p)\big) = \rho(v + w, p)$ para todos $v, w \in V$, $p \in P$;
   (ii) $\rho(0, p) = p$ para todo $p \in P$;
   (iii) se para algum $v \in V$, $p \in P$ temos $\rho(v, p) = p$ então $v = 0$;
   (iv) para todos $p, q \in P$ existe $v \in V$ com $\rho(v, p) = q$.

A trinca (P, V, ρ) é dita um *espaço afim* e V é dito o *espaço vetorial paralelo* a tal espaço afim. Tipicamente pensa-se em P como um “conjunto de pontos” e, para $p \in P$, $v \in V$, escreve-se $p + v$ em vez de $\rho(v, p)$, i.e., diz-se que $\rho(v, p)$ é a *soma do vetor v com o ponto p*. Mostre que dados $\mathcal{O} \in P$ e $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^n$ uma base para V então para cada $p \in P$ existe um único $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $p = \mathcal{O} + \sum_{i=1}^n x_i b_i$; definindo $\varphi(p) = x$, mostre que obtêm-se uma bijeção $\varphi : P \to \mathbb{R}^n$. Diz-se que φ é o *sistema de coordenadas afim* em P com *origem* $\mathcal{O}$ e “eixos” $(b_i)_{i=1}^n$.

`Observação.` Para quem já estudou um pouco de teoria de ação de grupos: as condições impostas acima sobre $\rho : V \times P \to P$ dizem que ρ é uma *ação livre e transitiva* do grupo abeliano aditivo $(V, +)$ no conjunto P (livre = “sem pontos fixos”).

3. Sejam V, W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que as seguintes condições são equivalentes sobre um subespaço $S \subset V$:

   (i) $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus S$;

   (ii) $T|_S : S \to \mathrm{Im}(T)$ é um isomorfismo.

[*dica*: supondo (ii), para mostrar que $V = \mathrm{Ker}(T) + S$, tome $v \in V$ e olhe para o vetor $(T|_S)^{-1}\big(T(v)\big) \in S$].

Aula número 2 (15/08)

`Notação`: se V, W são espaços vetoriais (sobre um mesmo corpo de escalares), denotamos por $\mathrm{Lin}(V,W)$ o espaço dos operadores lineares $T : V \to W$.

`Notação`: se V, W são espaços vetoriais reais de dimensão finita (tipicamente $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$) e se f é uma aplicação definida num aberto de V tomando valores em W então, se f é diferenciável num ponto $x \in V$ do seu domínio, denotamos por $\mathrm{d}f(x) \in \mathrm{Lin}(V,W)$ o diferencial de f no ponto x. Se $S \subset V$ é um subespaço, denotamos por $\partial_S f(x) \in \mathrm{Lin}(S,W)$ a restrição de $\mathrm{d}f(x)$ ao subespaço S ($\partial_S f(x)$ é a *diferencial de f no ponto x ao longo do subespaço S*). Caso seja fixada pelo contexto uma decomposição em soma direta $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ então escrevemos $\partial_i f(x) = \partial_{V_i} f(x)$ ($\partial_i f(x)$ é a *diferencial parcial de f no ponto x com respeito à i-ésima variável*).

(1) **A forma local das imersões**.

Nosso objetivo agora é generalizar os resultados da aula anterior para o caso de transformações não lineares (mas diferenciáveis). Começamos com a generalização do teorema da aula anterior no caso de transformações lineares injetoras.

Definição. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável num ponto $x \in U$ e se a transformação linear $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora então dizemos que f é uma* imersão *no ponto x. Se f é diferenciável em U e se $\mathrm{d}f(x)$ é injetora para todo $x \in U$ então dizemos simplesmente que f é uma* imersão.

Obviamente só é possível que $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seja uma imersão num ponto $x \in U$ se $m \le n$.

Demonstramos agora a *forma local das imersões* que nos diz que se f é uma função de classe C^k que é uma imersão num ponto x_0 então é possível obter um sistema de coordenadas de classe C^k no contra-domínio de f em torno de $f(x_0)$ de modo que a representação de f nesse sistema de coordenadas seja dada, em alguma vizinhança de x_0, por $x \mapsto (x, 0)$.

Teorema. *(forma local das imersões) Suponha que $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e suponha que f é uma imersão num ponto $x_0 \in U$. Então existem abertos $V \subset \mathbb{R}^m$, W, $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $\varphi : W \to \widetilde{W}$ de classe C^k com $x_0 \in V \subset U$, $f(V) \subset W$ e de modo que:*

$$(\varphi \circ f)(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ zeros}}),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_m) \in V$.

Demonstração. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço (de dimensão $n - m$) tal que:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(x_0)\big) \oplus S.$$

Defina uma aplicação $G : U \times S \to I\!R^n$ fazendo:

$$G(x, y) = f(x) + y,$$

para todos $x \in U$, $y \in S$. Obviamente G é de classe C^k e a diferencial:

$$\mathrm{d}G(x_0, 0) : I\!R^m \oplus S \longrightarrow I\!R^n$$

é dada por:

$$\mathrm{d}G(x_0, 0) \cdot (h, k) = \mathrm{d}f(x_0) \cdot h + k,$$

para todos $h \in I\!R^m$, $k \in S$. Segue facilmente do fato que $\mathrm{d}f(x_0)$ é injetora e de $I\!R^n = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(x_0)\big) \oplus S$ que $\mathrm{d}G(x_0, 0)$ é um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, G leva uma vizinhança aberta de $(x_0, 0)$ em $U \times S$ (que podemos escolher da forma $V \times V'$, com $V \subset U$ e $V' \subset S$ abertos) difeomorficamente sobre uma vizinhança aberta $W = G(V \times V')$ de $G(x_0, 0) = f(x_0)$ em $I\!R^n$. Escolha agora um isomorfismo qualquer $T_0 : S \to I\!R^{n-m}$ e considere o isomorfismo $T : I\!R^m \oplus S \to I\!R^n$ definido por $T(x, y) = \big(x, T_0(y)\big)$, $x \in I\!R^m$, $y \in S$. Temos agora que a aplicação $\varphi : W \to I\!R^n$ definida por $\varphi = T \circ (G|_{V \times V'})^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre o aberto $\widetilde{W} = T(V \times V') = V \times T_0(V')$ em $I\!R^n$. Além do mais, se $x \in V$ então $(x, 0) \in V \times V'$ e:

$$G(x, 0) = f(x) \in W = G(V \times V');$$

finalmente, temos:

$$\varphi\big(f(x)\big) = \big(T \circ (G|_{V \times V'})^{-1}\big)\big(f(x)\big) = T(x, 0) = (x, 0) = (x_1, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ zeros}}),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_m) \in V$. Isso completa a demonstração. ■

`Observação`. Intuitivamente, se f é uma imersão então a imagem de f "possui a mesma dimensão" (num sentido que será feito preciso no futuro) que o domínio de f. A forma local das imersões confirma essa idéia intuitiva.

(2) **A forma local das submersões**.

Definição. *Seja $f : U \to I\!R^n$ uma função definida num aberto $U \subset I\!R^m$. Se f é diferenciável num ponto $x \in U$ e se a transformação linear $\mathrm{d}f(x) : I\!R^m \to I\!R^n$ é sobrejetora então dizemos que f é uma* submersão no ponto x. *Se f é diferenciável em U e se $\mathrm{d}f(x)$ é sobrejetora para todo $x \in U$ então dizemos simplesmente que f é uma* submersão.

Obviamente só é possível que $f : U \subset I\!R^m \to I\!R^n$ seja uma submersão num ponto $x \in U$ se $m \geq n$.

Demonstramos agora a *forma local das submersões* que nos diz que se f é uma função de classe C^k que é uma submersão num ponto z_0 então é possível obter um sistema de coordenadas de classe C^k no domínio de f em torno de z_0 de modo que a representação de f nesse sistema de coordenadas seja dada, em alguma vizinhança de z_0, pela projeção $z = (x, y) \mapsto x$.

Teorema. *(forma local das submersões) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e suponha que f é uma submersão num ponto $z_0 \in U$. Então existem abertos $V, \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ e um difeomorfismo $\varphi : V \to \widetilde{V}$ de classe C^k de modo que $z_0 \in V \subset U$ e:*

$$\big(f \circ \varphi^{-1}\big)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_n),$$

para todo $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{V}$.

Demonstração. Seja $S \subset \mathbb{R}^m$ um subespaço (de dimensão n) tal que:

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \oplus S.$$

Defina uma aplicação $G : U \to \mathbb{R}^n \oplus \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$ fazendo:

$$G(x, y) = \big(f(x, y), x\big),$$

para todos $x \in \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$, $y \in S$ tais que $(x, y) \in U \subset \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \oplus S = \mathbb{R}^m$. Obviamente G é de classe C^k e sua diferencial no ponto $z_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \oplus S$ é dada por:

$$\mathrm{d}G(x_0, y_0) \cdot (h, k) = \big(\partial_1 f(x_0, y_0) \cdot h + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot k, h\big),$$

para todos $h \in \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$, $k \in S$. Como $\partial_2 f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f(z_0)|_S : S \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, segue facilmente que:

$$\mathrm{d}G(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m = \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \oplus S \longrightarrow \mathbb{R}^n \oplus \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big),$$

é um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, G leva uma vizinhança aberta V de $z_0 = (x_0, y_0)$ em U difeomorficamente sobre uma vizinhança aberta V' de $G(z_0) = \big(f(z_0), x_0\big)$ em $\mathbb{R}^n \oplus \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$. Escolha um isomorfismo qualquer $T_0 : \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \to \mathbb{R}^{m-n}$ e considere o isomorfismo $T : \mathbb{R}^n \oplus \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \to \mathbb{R}^m$ definido por $T(u, x) = \big(u, T_0(x)\big)$, $u \in \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$. Temos agora que $\widetilde{V} = T(V')$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e que a aplicação $\varphi : V \to \widetilde{V}$ definida por:

$$\varphi = T \circ G|_V,$$

é um difeomorfismo de classe C^k. Para finalizar, seja $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{V}$. Temos que $T^{-1}(v) = (u, x) \in V'$, onde $u = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \operatorname{Ker}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$ satisfaz $T_0(x) = (v_{n+1}, \ldots, v_m)$. Daí:

$$\varphi^{-1}(v) = (G|_V)^{-1}(u, x) = (x, y),$$

onde $y \in S$ é caracterizado pelo fato que $(x, y) \in V$ e $f(x, y) = u$. A conclusão agora é obtida observando que:

$$\big(f \circ \varphi^{-1}\big)(v_1, \ldots, v_m) = \big(f \circ \varphi^{-1}\big)(v) = f(x, y) = u = (v_1, \ldots, v_n). \blacksquare$$

(3) **O teorema do posto.**

O próximo teorema generaliza tanto a forma local das imersões quanto a forma local das submersões. Ele nos diz que uma função de classe C^k cuja diferencial tem posto constante pode (em abertos suficientemente pequenos) ser representada por uma função da forma $(x, y) \mapsto (x, 0)$ em sistemas de coordenadas de classe C^k convenientemente escolhidos.

Teorema. *(do posto) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Suponha que o posto de $\mathrm{d}f(x)$ é (constante e) igual a r para todo $x \in U$, para algum $r = 0, \ldots, \min\{m, n\}$. Então para todo $z_0 \in U$ existem abertos $V, \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^m$, $W, \widetilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ e difeomorfismos $\varphi : V \to \widetilde{V}$, $\psi : W \to \widetilde{W}$ de classe C^k com $z_0 \in V \subset U$, $f(V) \subset W$ e:*

$$\psi\big[f\big(\varphi^{-1}(v_1, \ldots, v_m)\big)\big] = (v_1, \ldots, v_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r \text{ zeros}}),$$

para todo $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{V}$.

Demonstração. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço (de dimensão $n - r$) tal que:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \oplus S. \tag{1}$$

Segue então da continuidade de $\mathrm{d}f$ e do lema a seguir que $\mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z)\big) + S = \mathbb{R}^n$ para todo z em alguma vizinhança aberta V_0 de z_0 em U; como $\mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z)\big)$ tem dimensão r, obtemos:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z)\big) \oplus S, \tag{2}$$

para todo z pertencente a V_0. Seja $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$ o operador de projeção correspondente à soma direta (1). Segue de (2) e do Exercício 1 que π leva $\mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z)\big)$ isomorficamente sobre $\mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$. Concluímos então que a aplicação:

$$\pi \circ f|_{V_0} : V_0 \longrightarrow \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$$

é uma submersão (de classe C^k), já que $\mathrm{d}(\pi \circ f|_{V_0})(z) = \pi \circ \mathrm{d}f(z)$, para todo $z \in V_0$. Observe também que a injetividade da restrição de π a $\mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z)\big)$ implica que:

$$\mathrm{Ker}\big(\pi \circ \mathrm{d}f(z)\big) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(z)\big), \tag{3}$$

para todo $z \in V_0$.

Escolha um isomorfismo qualquer $T : \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \to \mathbb{R}^r$; obviamente $T \circ \pi \circ f|_{V_0}$ é ainda uma submersão. Pela forma local das submersões, existem abertos $V, \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ e um difeomorfismo $\varphi : V \to \widetilde{V}$ de classe C^k com $z_0 \in V \subset V_0$ e:

$$\big(T \circ \pi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_r), \tag{4}$$

para todo $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{V}$; podemos também supor que $\widetilde{V}$ é da forma $\widetilde{V} = \widetilde{V}_1 \times \widetilde{V}_2$, onde $\widetilde{V}_1$ é um aberto de $\mathbb{R}^r$ e $\widetilde{V}_2$ é um aberto conexo de $\mathbb{R}^{m-r}$. Diferenciando (4) num ponto $v = \varphi(z) \in \widetilde{V}$ e aplicando ao i-ésimo vetor e_i da base canônica de $\mathbb{R}^m$ obtemos:

$$\big[T \circ \pi \circ \mathrm{d}f(z) \circ \mathrm{d}\varphi(z)^{-1}\big] \cdot e_i = 0, \quad i = r+1, \ldots, m,$$

para todo $z \in V$. Como T é um isomorfismo, usando (3) e a fórmula acima concluímos que $\mathrm{d}\varphi(z)^{-1} \cdot e_i \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(z)\big)$, $i = r+1, \ldots, m$ e portanto:

$$\mathrm{d}\big(f \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(z)\big) \cdot e_i = \big[\mathrm{d}f(z) \circ \mathrm{d}\varphi(z)^{-1}\big] \cdot e_i = 0, \quad i = r+1, \ldots, m,$$

para todo $z \in V$. Segue que para todo $u \in \widetilde{V}_1 \subset \mathbb{R}^r$, a função:

$$\widetilde{V}_2 \ni u' \longmapsto f\big(\varphi^{-1}(u, u')\big) \in \mathbb{R}^n$$

definida no aberto conexo $\widetilde{V}_2 \subset \mathbb{R}^{m-r}$ possui diferencial identicamente nula e portanto é constante; isso significa que $f \circ \varphi^{-1}$ *não depende* das últimas $m - r$ variáveis, i.e., existe uma função $\alpha : \widetilde{V}_1 \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k com:

$$f \circ \varphi^{-1}(u, u') = \alpha(u), \tag{5}$$

para todos $u \in \widetilde{V}_1$, $u' \in \widetilde{V}_2$ (para definir α, escolha qualquer $u'_0 \in \widetilde{V}_2$ e ponha $\alpha(u) = f \circ \varphi^{-1}(u, u'_0)$, $u \in \widetilde{V}_1$). Considere as coordenadas $\alpha_1 : \widetilde{V}_1 \to \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big)$ e $\alpha_2 : \widetilde{V}_1 \to S$ de α com respeito à decomposição $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \oplus S$. A igualdade (4) nos diz que:

$$T\big(\alpha_1(u)\big) = u, \tag{6}$$

para todo $u \in \widetilde{V}_1$. Definimos agora o difeomorfismo $\psi : W \to \widetilde{W}$ de classe C^k fazendo $W = T^{-1}(\widetilde{V}_1) \times S \subset \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(z_0)\big) \oplus S = \mathbb{R}^n$, $\widetilde{W} = \widetilde{V}_1 \times \mathbb{R}^{n-r} \subset \mathbb{R}^n$ e:

$$\psi(w, w') = \Big(T(w), T'\big[w' - \alpha_2\big(T(w)\big)\big]\Big), \quad w \in T^{-1}(\widetilde{V}_1),\ w' \in S,$$

onde $T' : S \to \mathbb{R}^{n-r}$ é um isomorfismo qualquer. Segue agora de (5) e de (6) que $f(V) \subset W$ e que:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(u, u') = (u, 0),$$

para todos $u \in \widetilde{V}_1 \subset \mathbb{R}^r$, $u' \in \widetilde{V}_2 \subset \mathbb{R}^{m-r}$. ∎

Lema. *Sejam V, W espaços vetoriais reais de dimensão finita e $S \subset W$ um subespaço. Então o conjunto dos operadores lineares $T : V \to W$ tais que $\mathrm{Im}(T) + S = W$ é aberto em $\mathrm{Lin}(V, W)$.*

Demonstração. Considere o espaço quociente W/S e seja $q : W \to W/S$ a aplicação quociente. É fácil ver que $\mathrm{Im}(T) + S = W$ se e somente se $q \circ T : V \to W/S$ é sobrejetora. Mas a aplicação:

$$\mathrm{Lin}(V, W) \ni T \longmapsto q \circ T \in \mathrm{Lin}(V, W/S)$$

é contínua (pois é linear) e o subconjunto de $\mathrm{Lin}(V, W/S)$ formado pelas aplicações sobrejetoras é aberto (vide Exercício 2). A conclusão segue. ∎

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Álgebra Linear`.

1. Seja V um espaço vetorial e sejam V_1, V_2, V_2' subespaços de V tais que:

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad V = V_1 \oplus V_2'.$$

Denote por $\pi : V \to V_2$ a projeção em V_2 relativa à decomposição $V = V_1 \oplus V_2$ e por $\pi' : V \to V_2'$ a projeção em V_2' relativa à decomposição $V = V_1 \oplus V_2'$. Mostre que:

$$\pi'|_{V_2} : V_2 \longrightarrow V_2' \quad \text{e} \quad \pi|_{V_2'} : V_2' \longrightarrow V_2$$

são isomorfismos mutuamente inversos.

2. Dados espaços vetoriais reais de dimensão finita V, W, mostre que os conjuntos:

$$\big\{T \in \mathrm{Lin}(V, W) : T \text{ é injetora}\big\} \quad \text{e} \quad \big\{T \in \mathrm{Lin}(V, W) : T \text{ é sobrejetora}\big\},$$

são abertos em $\mathrm{Lin}(V, W)$

[*dica*: as condições de injetividade e sobrejetividade significam que um determinante menor da matriz que representa T numa base fixada é diferente de zero].

Aula número 3 (20/08)

(1) **A importância das funções de transição**.

Esta seção tem como objetivo dar mais motivação à definição de variedade diferenciável. Explicamos como um sistema de coordenadas num conjunto X pode ser usado para transferir alguma estrutura existente no espaço $\mathbb{R}^n$ para o conjunto X; mostramos então, através de um exemplo, que dois sistemas de coordenadas diferentes em X determinam a mesma estrutura em X se e somente se sua função de transição preserva a correspondente estrutura em $\mathbb{R}^n$.

Definição. *Seja X um conjunto e sejam $\varphi : U \subset X \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\psi : V \subset X \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ sistemas de coordenadas em X. A* função de transição *de φ para ψ é a função bijetora:*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n.$$

Note que se $U \cap V = \emptyset$ então a função de transição de φ para ψ é vazia.

Lema. *Sejam X um conjunto e $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ uma função bijetora. Então existe uma única estrutura de espaço vetorial real em X tal que φ é um isomorfismo.*

Demonstração. Para que φ seja um isomorfismo, as operações em X devem ser necessariamente definidas por:

$$v + w = \varphi^{-1}\big(\varphi(v) + \varphi(w)\big), \quad cv = \varphi^{-1}\big(c\varphi(v)\big),$$

para todos $v, w \in X$, $c \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que as operações acima de fato tornam X um espaço vetorial real e que φ é linear. ■

A estrutura de espaço vetorial em X que torna a bijeção φ um isomorfismo é chamada a estrutura de espaço vetorial *induzida* por φ em X.

Lema. *Sejam X um conjunto e $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$, $\psi : X \to \mathbb{R}^n$ funções bijetoras. Então φ e ψ induzem a mesma estrutura de espaço vetorial em X se e somente se a função de transição $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Denote por X_1 o espaço vetorial X com a estrutura induzida por φ e por X_2 o espaço vetorial X com a estrutura induzida por ψ. Queremos mostrar que $X_1 = X_2$ se e somente se $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um isomorfismo. Em primeiro lugar, é fácil ver que $X_1 = X_2$ se e somente se a aplicação identidade $\mathrm{Id} : X_1 \to X_2$ é um isomorfismo. Agora temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & X_2 \arrow[d, "\cong"', "\psi"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi\circ\varphi^{-1}"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

As flechas verticais no diagrama são isomorfismos; logo Id é um isomorfismo se e somente se $\psi \circ \varphi^{-1}$ o é. ■

Dois sistemas de coordenadas $\varphi : X \to I\!R^n$ e $\psi : X \to I\!R^n$ num conjunto X tais que a função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um isomorfismo são ditos *linearmente compatíveis*. É fácil ver que compatibilidade linear é uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{B}$ dos sistemas de coordenadas $\varphi : X \to I\!R^n$ (veja Exercício 1). Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ uma classe de equivalência correspondente à relação de equivalência de compatibilidade linear. Então existe uma única estrutura de espaço vetorial real em X (de dimensão n) tal que cada $\varphi \in \mathcal{A}$ é um isomorfismo. Reciprocamente, se é dada uma estrutura de espaço vetorial real em X de dimensão n então o conjunto de todos os isomorfismos $\varphi : X \to I\!R^n$ é uma classe de equivalência correspondente à relação de compatibilidade linear. Essas observações nos levam à seguinte definição alternativa para o conceito de espaço vetorial real (de dimensão n): *um espaço vetorial real é um par $(X, \mathcal{A})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ é uma classe de equivalência correspondente à relação de compatibilidade linear.*

Na seção seguinte, usamos as idéias explicadas acima para transferir para um conjunto M a "estrutura diferenciável" do $I\!R^n$, i.e., a estrutura que nos permite estudar cálculo diferencial. A noção de compatibilidade linear será substituída pela noção de compatibilidade diferenciável; de fato, as funções de transição consideradas, serão os isomorfismos do cálculo diferencial: a saber, os difeomorfismos. Um conjunto M munido de uma "estrutura diferenciável", transferida de $I\!R^n$ através de sistemas de coordenadas, será chamado uma *variedade diferenciável*. Ressaltamos uma diferença importante entre a noção de espaço vetorial e a noção de variedade diferenciável; enquanto todo espaço vetorial real de dimensão n é (globalmente) isomorfo a $I\!R^n$, uma variedade diferenciável de dimensão n é apenas *localmente* difeomorfa a $I\!R^n$, i.e., os sistemas de coordenadas que usamos para definir a "estrutura diferenciável" em M são definidos apenas em subconjuntos de M.

(2) **A noção de variedade diferenciável**.

Nesta seção introduzimos a noção de variedade diferenciável de classe C^k (consideramos ao longo da seção um valor fixado para k, $0 \le k \le \infty$).

Definição. *Seja M um conjunto e sejam $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$, $\psi : V \to \widetilde{V} \subset I\!R^n$ sistemas de coordenadas em M (i.e., φ e ψ são bijeções, U, V são subconjuntos de M e $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ são abertos em $I\!R^n$). Dizemos que φ e ψ são* compatíveis em classe C^k *(ou C^k*-compatíveis*) se $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $I\!R^n$ e a função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k (por um difeomorfismo de classe C^0 entendemos um homeomorfismo).*

Convencionamos que a aplicação vazia é um difeomorfismo de classe C^k para todo k; logo φ e ψ são sempre C^k-compatíveis se $U \cap V = \emptyset$.

`Observação`: se $n = 0$ então quaisquer sistemas de coordenadas são C^k-compatíveis, para todo k (já que toda função definida ou tomando valores em $I\!R^0 = \{0\}$ é de classe C^∞).

`Observação`: a noção de C^k-compatibilidade para sistemas de coordenadas $\varphi : U \to \widetilde{U}$ e $\psi : V \to \widetilde{V}$ faria sentido também na situação mais geral em que $\widetilde{U}$ é um aberto de $I\!R^m$ e $\widetilde{V}$ é um aberto de $I\!R^n$ (onde, a princípio, m não precisa ser igual a n). Mas se $U \cap V \ne \emptyset$, tal compatibilidade implicaria na existência de um difeomorfismo de classe C^k de um aberto não vazio de $I\!R^m$ sobre um aberto de $I\!R^n$, o que implicaria $m = n$ (no caso $k \ge 1$, isso segue do fato que a diferencial de tal difeomorfismo em qualquer ponto fornece um isomorfismo de $I\!R^m$ sobre $I\!R^n$; para o caso $k = 0$, veja o Exercício 5).

Na seção anterior vimos que a relação de compatibilidade linear é uma relação de equivalência; a noção de compatibilidade em classe C^k é reflexiva e simétrica, mas *não é transitiva*. De fato, se $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$, $\lambda : W \to \widetilde{W}$ são sistemas de coordenadas em M com φ C^k-compatível com ψ e ψ C^k-compatível com λ então só podemos garantir que a função de transição $\lambda \circ \varphi^{-1}$ seja de classe C^k em $\varphi(U \cap V \cap W)$ (veja Exercício 2). É bem possível, por exemplo, que $U \cap V = \emptyset$, $V \cap W = \emptyset$ (o que torna a C^k-compatibilidade entre φ e ψ e entre ψ e λ triviais), mas que $U \cap W \neq \emptyset$ e que φ e λ não sejam C^k-compatíveis.

Definição. *Seja M um conjunto. Um* atlas de classe C^k e dimensão n *em M é um conjunto $\mathcal{A} = \big\{\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i\big\}_{i \in I}$ de sistemas de coordenadas em M, com cada $\widetilde{U}_i$ aberto em $\mathbb{R}^n$, tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ e tal que φ_i é C^k-compatível com φ_j para todos $i, j \in I$.*

Para o resto desta seção, *convencionamos que todos os atlas são de dimensão n e que todos os sistemas de coordenadas considerados tomarão valores em abertos de $\mathbb{R}^n$.*

`Observação`: seria possível também considerar uma definição mais geral de atlas de classe C^k, onde cada φ_i tem como contra-domínio um aberto $\widetilde{U}_i$ de $\mathbb{R}^{n_i}$ ($n_i \geq 0$ podendo depender de i). Optamos por não admitir essa possibilidade. Para uma discussão mais detalhada, veja o Exercício 6.

Definição. *Um sistema de coordenadas φ em M é dito* C^k-compatível *com um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^k em M se φ é C^k-compatível com cada $\psi \in \mathcal{A}$.*

Como vimos acima, a relação de C^k-compatibilidade não é uma relação de equivalência no conjunto dos sistemas de coordenadas em M; temos porém o seguinte:

Lema. *Sejam M um conjunto e $\mathcal{A} = \big\{\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i\big\}_{i \in I}$ um atlas de classe C^k em M. Se $\psi_1 : V_1 \to \widetilde{V}_1$, $\psi_2 : V_2 \to \widetilde{V}_2$ são sistemas de coordenadas em M, ambos C^k-compatíveis com $\mathcal{A}$, então ψ_1 e ψ_2 são C^k-compatíveis.*

Demonstração. Para cada $i \in I$, temos que ψ_1 é C^k-compatível com φ_i e φ_i é C^k-compatível com ψ_2; pelo resultado do Exercício 2, $\psi_1(V_1 \cap U_i \cap V_2)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ é de classe C^k em $\psi_1(V_1 \cap U_i \cap V_2)$. Como $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, temos:

$$\psi_1(V_1 \cap V_2) = \bigcup_{i \in I} \psi_1(V_1 \cap U_i \cap V_2),$$

e logo $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Além do mais, o fato que $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ é de classe C^k em cada aberto $\psi_1(V_1 \cap U_i \cap V_2)$ implica que $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ é de classe C^k em $\psi_1(V_1 \cap V_2)$. Similarmente, mostra-se que $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = \big(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\big)^{-1}$ é de classe C^k em $\psi_2(V_1 \cap V_2)$. ■

Queremos agora definir a noção de estrutura diferenciável de classe C^k num conjunto M. A princípio, pareceria uma boa idéia definir que uma estrutura diferenciável de classe C^k num conjunto M é simplesmente o mesmo que um atlas de classe C^k em M. Temos porém um problema. Se dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ em M são tais que todo $\varphi \in \mathcal{A}_1$ é C^k-compatível com todo $\psi \in \mathcal{A}_2$ então os atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ deveriam definir a mesma estrutura diferenciável de classe C^k em M. Vamos então, dentre a classe de equivalência de todos os atlas em M que definem a mesma estrutura diferenciável de classe C^k (veja Exercício 3), escolher um representante canônico. Temos a seguinte:

Definição. *Um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^k num conjunto M é dito* maximal *se ele for um elemento maximal no conjunto de todos os atlas de classe C^k em M, parcialmente ordenado por inclusão; mais explicitamente, $\mathcal{A}$ é um atlas maximal de classe C^k se $\mathcal{A}$ não está propriamente contido em nenhum atlas de classe C^k em M.*

Lema. *Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas de classe C^k em M. Então existe um único atlas maximal de classe C^k em M contendo $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}_{\max}$ o conjunto de todos os sistemas de coordenadas em M que são C^k-compatíveis com $\mathcal{A}$. Obviamente $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$ e segue do lema anterior que $\mathcal{A}_{\max}$ é um atlas de classe C^k em M. Além do mais, é claro que $\mathcal{A}_{\max}$ é o *maior atlas de classe C^k em M contendo $\mathcal{A}$*, i.e., todo atlas de classe C^k em M contendo $\mathcal{A}$ está contido em $\mathcal{A}_{\max}$. É fácil verificar então que $\mathcal{A}_{\max}$ é o único atlas maximal de classe C^k contendo $\mathcal{A}$. ■

Em vista do lema anterior (vide também o Exercício 4), temos a seguinte:

Definição. *Uma* estrutura diferenciável de classe C^k *num conjunto M é um atlas maximal de classe C^k em M.*

Como difeomorfismos são também homeomorfismos (i.e., aplicações que preservam a estrutura diferenciável de $\mathbb{R}^n$ também preservam a estrutura topológica de $\mathbb{R}^n$) é natural esperar que um atlas de classe C^k num conjunto M possa ser usado para definir uma topologia em M. Este é o conteúdo do seguinte:

Lema. *Sejam M um conjunto e $\mathcal{A} = \big\{\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i\big\}_{i\in I}$ um atlas de classe C^k em M. Então existe um única topologia τ em M tal que cada U_i é aberto em M e cada φ_i é um homeomorfismo.*

Demonstração. Defina:

$$\tau(\mathcal{A}) = \big\{V \subset M : \varphi_i(V \cap U_i) \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n \text{ para todo } i \in I\big\}.$$

As identidades:

$$\varphi_i(\emptyset \cap U_i) = \emptyset, \quad \varphi_i(M \cap U_i) = \widetilde{U}_i,$$

$$\varphi_i\Big[\Big(\bigcup\nolimits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\Big) \cap U_i\Big] = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_i(V_\lambda \cap U_i), \quad \varphi_i(V_1 \cap V_2 \cap U_i) = \varphi_i(V_1 \cap U_i) \cap \varphi_i(V_2 \cap U_i),$$

mostram que $\tau(\mathcal{A})$ é uma topologia em M. Vamos agora mostrar que, relativamente à topologia $\tau(\mathcal{A})$, cada U_i é aberto em M e cada φ_i é um homeomorfismo. Para isso, é suficiente demonstrar a seguinte afirmação: dado $i \in I$ e $V \subset U_i$ então $V \in \tau(\mathcal{A})$ se e somente se $\varphi_i(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ (verifique que essa afirmação de fato implica na propriedade sobre $\tau(A)$ que desejamos mostrar!). Vamos mostrar tal afirmação. Sejam dados $i \in I$ e $V \subset U_i$. Obviamente, se $V \in \tau(A)$ então $\varphi_i(V) = \varphi_i(V \cap U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Reciprocamente, suponha que $\varphi_i(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Para mostrar que $V \in \tau(\mathcal{A})$, devemos mostrar que, para todo $j \in I$, $\varphi_j(V \cap U_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$; mas isso segue da igualdade:

$$\varphi_j(V \cap U_j) = \big(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big)\big(\varphi_i(V) \cap \varphi_i(U_i \cap U_j)\big),$$

e do fato que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é um homeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$.

Fica demonstrada então a existência da topologia τ como no enunciado do lema (a saber: $\tau = \tau(\mathcal{A})$). Vamos mostrar agora sua unicidade; seja então τ uma topologia em M relativamente à qual cada U_i é aberto e cada φ_i é um homeomorfismo. Vamos mostrar que necessariamente $\tau = \tau(\mathcal{A})$. Em primeiro lugar, se $V \in \tau$ então $V \cap U_i \in \tau$ para todo $i \in I$ e logo $\varphi_i(V \cap U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Isso mostra que $V \in \tau(\mathcal{A})$, i.e., $\tau \subset \tau(\mathcal{A})$. Suponha agora que $V \in \tau(\mathcal{A})$. Então $\varphi_i(V \cap U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo $i \in I$ e portanto $V \cap U_i = \varphi_i^{-1}\big(\varphi_i(V \cap U_i)\big)$ é aberto em (M, τ) para todo $i \in I$. Mas então $V = \bigcup_{i \in I} V \cap U_i$ é aberto em (M, τ). Isso mostra que $\tau(\mathcal{A}) \subset \tau$ e completa a demonstração. ■

Definição. *Se $\mathcal{A} = \big\{\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i\big\}_{i \in I}$ é um atlas de classe C^k num conjunto M então a única topologia $\tau = \tau(\mathcal{A})$ relativamente à qual cada U_i é aberto em M e cada φ_i é um homeomorfismo é chamada a topologia em M* induzida *pelo atlas $\mathcal{A}$.*

`Observação`: se dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ de classe C^k em M são tais que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas de classe C^k em M então as topologias induzidas em M por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ coincidem. De fato, é fácil ver que ambas coincidem com a topologia induzida pelo atlas $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Observe em particular que a topologia induzida por um atlas $\mathcal{A}$ coincide com a topologia induzida pelo atlas maximal que o contém.

Recordamos que uma topologia num conjunto X é dita *Hausdorff* (ou *T2*) se dois pontos distintos quaisquer de X pertencem a abertos disjuntos. Uma topologia *satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade* se ela possui uma base enumerável de abertos (recorde que uma *base de abertos* para uma topologia é uma coleção de abertos tal que qualquer aberto é união de abertos dessa coleção).

Definição. *Uma* variedade diferenciável de classe C^k e dimensão n *é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é um conjunto, $\mathcal{A}$ é um atlas maximal de classe C^k e dimensão n em M e a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.*

Quando nos referirmos à topologia de uma variedade diferenciável, estaremos sempre nos referindo à topologia induzida pelo seu atlas. As condições que impusemos sobre a topologia de uma variedade diferenciável não são necessárias ao longo de toda a teoria de variedades, mas elas são hipóteses padrão que são necessárias em diversos teoremas centrais da teoria. Sua motivação ficará mais clara ao longo do curso.

Definição. *Se $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável então um elemento $\varphi \in \mathcal{A}$ é chamado uma* carta *(ou também um* sistema de coordenadas*) na variedade $(M, \mathcal{A})$.*

Em geral, para simplificar a notação, escrevemos apenas M para denotar a variedade $(M, \mathcal{A})$. Nas próximas seções, quando M for uma variedade diferenciável e dissermos que $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é um sistema de coordenadas em M, *significaremos que φ é um elemento do atlas maximal $\mathcal{A}$* e não apenas que φ é uma bijeção arbitrária definida num subconjunto arbitrário $U \subset M$.

`Observação`: dado um conjunto M então existe um *único* atlas maximal $\mathcal{A}$ em M de dimensão zero. Ele é constituído pelo sistema de coordenadas com domínio vazio e pelos sistemas de coordenadas $\varphi_x : \{x\} \to I\!R^0 = \{0\}$, onde x percorre M. A topologia induzida por esse atlas é a topologia discreta. Tal topologia é sempre Hausdorff; ela satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade se e somente se M é enumerável. Temos então que uma variedade diferenciável de dimensão zero é unicamente determinada por um espaço topológico discreto enumerável.

`Observação`: se $M = \emptyset$ e se $\mathcal{A}$ é o atlas formado apenas pelo sistema de coordenadas com domínio vazio então $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de dimensão n e de classe C^k para todo n e todo k. A menos desse caso trivial, uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{A})$ possui uma dimensão bem definida.

`Observação`: uma variedade diferenciável de classe C^0 é também chamada de *variedade topológica* (na verdade, não se usa o termo "variedade diferenciável" nesse caso). Uma variedade topológica é muitas vezes definida como sendo um espaço topológico M, com topologia Hausdorff e satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade, e tal que todo ponto de M possui uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de $I\!R^n$. Nesse caso, o conjunto $\mathcal{A}$ de todos os homeomorfismos $\varphi : U \to \widetilde{U}$, com U aberto em M e $\widetilde{U}$ aberto em $I\!R^n$ é um atlas maximal de classe C^0 em M que induz a topologia original de M (veja Exercício 7).

(3) **Alguns exemplos simples**.

`Exemplo`: A aplicação identidade $\mathrm{Id} : I\!R^n \to I\!R^n$ é um sistema de coordenadas em $M = I\!R^n$ e o conjunto unitário $\mathcal{A} = \{\mathrm{Id}\}$ é um atlas de classe C^k em M. É fácil ver que o atlas maximal $\mathcal{A}_{\max}$ que contém $\mathcal{A}$ consiste de todos os difeomorfismos $\varphi : U \to \widetilde{U}$ de classe C^k, com U, $\widetilde{U}$ abertos em $I\!R^n$. Como Id é um homeomorfismo com domínio aberto (relativamente à topologia usual de $I\!R^n$), vemos que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em $I\!R^n$ é de fato a topologia usual. Em geral pensaremos sempre no espaço $I\!R^n$ como uma variedade diferenciável de dimensão n, munida do atlas $\mathcal{A}_{\max}$.

`Exemplo`: Se $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e se Z é um aberto de M então o conjunto $\mathcal{A}'$ de todos os elementos de $\mathcal{A}$ com domínio contido em Z é um atlas maximal de classe C^k em Z (para verificar que os domínios dos elementos $\varphi \in \mathcal{A}'$ cobrem Z você deve usar o resultado do Exercício 1 da aula número 4). A topologia induzida por $\mathcal{A}'$ em Z coincide com a topologia induzida de M. A estrutura diferenciável $\mathcal{A}'$ em Z é chamada a *estrutura diferenciável induzida* por $(M, \mathcal{A})$ em Z. Em geral, sempre consideraremos um aberto de uma variedade diferenciável como sendo uma variedade diferenciável, munida da estrutura diferenciável induzida. Observe que em particular *abertos de* $I\!R^n$ são variedades diferenciáveis de dimensão n.

`Observação`: Seja $(M, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável de classe C^k e sejam $Z_1, Z_2 \subset M$ abertos com $Z_1 \subset Z_2$. Então $(M, \mathcal{A})$ induz uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}'_1$ em Z_1 e uma estrututa diferenciável $\mathcal{A}'_2$ em Z_2. Note agora que Z_1 também é um aberto na variedade $(Z_2, \mathcal{A}'_2)$ e portanto $(Z_2, \mathcal{A}'_2)$ induz uma estrututa diferenciável em Z_1. É fácil ver que essa estrutura diferenciável coincide com $\mathcal{A}'_1$.

`Exemplo`: Se $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e se $0 \le k' \le k$ então $\mathcal{A}$ é um atlas de classe $C^{k'}$ e portanto está contido num único atlas maximal $\mathcal{A}'$ de classe $C^{k'}$. Tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A}'$ induzem a mesma topologia em M. Logo $(M, \mathcal{A}')$ é uma variedade diferenciável de classe $C^{k'}$.

`Exemplo`: Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a *esfera unitária n-dimensional*, i.e., o conjunto dos vetores x em $\mathbb{R}^{n+1}$ com norma Euclideana unitária. Denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno Euclideano de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dado $u \in S^n$ então a *projeção estereográfica de vértice* u é a bijeção:

$$p_u : S^n \setminus \{u\} \longrightarrow u^\perp = \big\{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, u\rangle = 0\big\},$$

que a cada $x \in S^n$, $x \neq u$, associa a única interseção do raio $\big\{u + t(x-u) : t \geq 0\big\}$ com o hiperplano $u^\perp$. Explicitamente:

$$p_u(x) = u - \frac{x-u}{\langle x, u\rangle - 1}, \quad x \in S^n \setminus \{u\}.$$

A inversa da aplicação p_u é dada por:

$$p_u^{-1}(v) = u + 2\frac{v-u}{\|v-u\|^2}, \quad v \in u^\perp,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana em $\mathbb{R}^{n+1}$. Escolhendo um isomorfismo qualquer $T_u : u^\perp \to \mathbb{R}^n$ então $\varphi_u = T_u \circ p_u : S^n \setminus \{u\} \to \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas em S^n. Dados $u_1, u_2 \in S^n$, é fácil escrever uma fórmula para a função de transição de φ_{u_1} para φ_{u_2}, que mostra que tal função é de classe C^∞. Logo o conjunto $\mathcal{A} = \big\{\varphi_u : u \in S^n\big\}$ é um atlas de classe C^∞ e dimensão n em S^n. Se consideramos em S^n a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$ então as aplicações φ_u são homeomorfismos definidos em abertos; logo a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em S^n coincide com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Mais adiante, quando estudarmos a noção de subvariedade, descreveremos a estrutura de variedade da esfera de maneira mais natural.

`Exemplo`: Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Então o conjunto $\mathcal{A}$ de todos os isomorfismos $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ é um atlas de classe C^∞ em V. Logo V, munido do atlas maximal que contém $\mathcal{A}$, é uma variedade diferenciável de classe C^∞. A topologia induzida por $\mathcal{A}$ em V é a topologia usual (definida por qualquer norma). Espaços vetoriais reais de dimensão finita serão sempre considerados como variedades diferenciáveis, munidos do atlas maximal que contém os sistemas de coordenadas lineares (veja o Exercício 8 para uma generalização deste exemplo para espaços afins).

`Exemplo patológico`: Sabe-se que a esfera S^n, $n \geq 1$, tem a mesma cardinalidade que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, i.e., existe uma bijeção $\varphi : S^n \to \mathbb{R}$. Se $\mathcal{A}$ é o único atlas maximal de classe C^k que contém φ então $(S^n, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e dimensão 1. Tal bijeção φ não é um homeomorfismo, se consideramos S^n com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$. Segue então que a topologia da variedade $(S^n, \mathcal{A})$ não coincide com a topologia usual da esfera. Em geral, quando considerarmos a esfera S^n como uma variedade, estaremos pensando no atlas que contém as projeções estereográficas.

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Álgebra Linear`.

1. Seja X um conjunto e seja $\mathcal{B}$ o conjunto das bijeções $\varphi : X \to I\!R^n$. Mostre que a relação de compatibilidade linear é uma relação de equivalência em $\mathcal{B}$, ou seja, mostre que a relação $\sim$ em $\mathcal{B}$ definida por:

$$\varphi \sim \psi \iff \psi \circ \varphi^{-1} \text{ é um isomorfismo de } I\!R^n,$$

é uma relação de equivalência.

`Funções de Transição e Atlas`.

2. Seja M um conjunto e sejam $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$, $\lambda : W \to \widetilde{W}$ sistemas de coordenadas em M, com $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$ abertos em $I\!R^n$. Suponha que φ seja C^k-compatível com ψ e que ψ seja C^k-compatível com λ. Mostre que $\varphi(U \cap V \cap W)$ e $\lambda(U \cap V \cap W)$ são abertos em $I\!R^n$ e que a restrição de $\lambda \circ \varphi^{-1}$ a $\varphi(U \cap V \cap W)$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre $\lambda(U \cap V \cap W)$.

[*dica*: observe que $\varphi(U \cap V \cap W)$ é a imagem inversa de $\psi(V \cap W)$ pela aplicação $\psi \circ \varphi^{-1}$ e que a restrição de $\lambda \circ \varphi^{-1}$ a $\varphi(U \cap V \cap W)$ é a composta de $\psi \circ \varphi^{-1}$ com $\lambda \circ \psi^{-1}$].

3. Seja M um conjunto e sejam $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ atlas de classe C^k em M. Mostre que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas de classe C^k em M se e somente se todo $\varphi \in \mathcal{A}_1$ é C^k-compatível com todo $\psi \in \mathcal{A}_2$. Mostre também que a relação $\sim$ definida por:

$$\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \iff \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \text{ é um atlas de classe } C^k \text{ em } M$$

é uma relação de equivalência no conjunto de todos os atlas de classe C^k em M.

4. Sejam $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ atlas de classe C^k num conjunto M. Mostre que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas de classe C^k em M se e somente se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ estão contidos no mesmo atlas maximal de classe C^k em M.

5. O *Teorema da Invariância do Domínio*, diz o seguinte: se $f : U \to I\!R^n$ é uma função contínua injetora, com $U \subset I\!R^n$ aberto, então $f(U)$ é aberto em $I\!R^n$ e $f : U \to f(U)$ é um homeomorfismo (veja, por exemplo, J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Theorem 36.5). Esse é um teorema não trivial, usualmente provado com técnicas de topologia algébrica. Assumindo esse teorema, mostre que se um aberto não vazio de $I\!R^m$ é homeomorfo a um aberto de $I\!R^n$ então $m = n$.

6. Poderíamos ter desenvolvido a teoria desta seção admitindo atlas onde os contra-domínios dos sistemas de coordenadas podem ser abertos em espaços de dimensões diferentes. Mostre que se $\mathcal{A}$ é um atlas de classe C^k num conjunto M e que se a topologia induzida por $\mathcal{A}$ torna M conexo então os contra-domínios de todos os sistemas de coordenadas $\varphi \in \mathcal{A}$ são abertos do mesmo espaço $\mathbb{R}^n$.

[*dica*: mostre que, dado $x \in M$, então existe $n = n(x) \geq 0$ tal que todos os sistemas de coordenadas $\varphi : U \to \widetilde{U}$ pertencentes a $\mathcal{A}$ com $x \in U$, são tais que $\widetilde{U}$ é um aberto de $\mathbb{R}^{n(x)}$. Mostre que a função $n : M \to \mathbb{N}$ é contínua, onde M tem a topologia induzida pelo atlas $\mathcal{A}$ e $\mathbb{N}$ tem a topologia discreta].

7. Se $\mathcal{A}$ é um atlas de classe C^0 e dimensão n num conjunto M então, relativamente à topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M, todo ponto de M possui uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$. Mostre que, dada uma topologia τ em M tal que todo ponto de M possui uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$ então existe *um único* atlas maximal $\mathcal{A}$ de classe C^0 e dimensão n em M que induz a topologia τ.

[*dica*: mostre que $\mathcal{A}$ é necessariamente o conjunto de todos os homeomorfismos $\varphi : U \to \widetilde{U}$, com U aberto em M e $\widetilde{U}$ aberto em $\mathbb{R}^n$].

8. Seja (P, V, ρ) um espaço afim (veja Exerício 2 da aula número 1), com V um espaço vetorial real de dimensão n. Para cada ponto $\mathcal{O} \in P$ e cada isomorfismo $T : V \to \mathbb{R}^n$, defina um sistema de coordenadas $\varphi_{\mathcal{O},T} : P \to \mathbb{R}^n$ em P fazendo $\varphi_{\mathcal{O},T}(p) = T(v)$, onde $v \in V$ é o único vetor tal que $p = \mathcal{O} + v$. Mostre que o conjunto:

$$\mathcal{A} = \big\{\varphi_{\mathcal{O},T} : \mathcal{O} \in P,\ T : V \to \mathbb{R}^n \text{ isomorfismo}\big\}$$

é um atlas de classe C^∞ em P.

Aula número 4 (22/08)

(1) **Funções diferenciáveis em variedades**.

Vamos agora transferir algumas noções básicas do cálculo no $\mathbb{R}^n$ para o contexto de variedades diferenciáveis.

Definição. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(0 \le k \le \infty)$. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita* de classe C^r *$(0 \le r \le k)$ se para todo $x \in M$ existem cartas $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em M e $\psi : V \to \widetilde{V}$ em N com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e tal que a função $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ que representa f com respeito às cartas φ e ψ seja de classe C^r (veja também a definição dada no final da seção 1 da aula número 1).*

Usando o fato que as cartas de uma variedade são homeomorfismos definidos em abertos, é fácil mostrar que toda função $f : M \to N$ de classe C^r é contínua (com respeito às topologias induzidas pelos atlas de M e de N). Quando $r = 0$, a condição de ser de classe C^r (no sentido da definição acima) é de fato equivalente à continuidade (veja Exercício 2).

A restrição de uma carta a um subconjunto aberto do seu domínio é novamente uma carta (veja Exercício 1). Logo, se $f : M \to N$ é contínua então, para todo $x \in M$, podemos encontrar cartas $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em M e $\psi : V \to \widetilde{V}$ em N tais que $x \in U$ e $f(U) \subset V$ (basta escolher cartas φ, ψ com $x \in U$, $f(x) \in V$ e trocar φ pela restrição de φ ao aberto $U \cap f^{-1}(V)$). Se f não é contínua, pode ocorrer que não seja possível encontrar cartas $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em M, $\psi : V \to \widetilde{V}$ em N com $x \in U$ e $f(U) \subset V$; mas, como observamos acima, se f não é contínua então f certamente não é de classe C^r. Em alguns textos, a noção de função de classe C^r é definida apenas na classe das funções que já são contínuas *a priori*; teoricamente, isso dá na mesma, já que toda função de classe C^r é contínua. A vantagem de não supor *a priori* que f seja contínua na definição de função de classe C^r é que, em exemplos concretos, não precisamos verificar a continuidade de f antes de verificar que f é de classe C^r usando as cartas.

Mostramos agora que o conceito de "ser de classe C^r" não depende das cartas escolhidas, i.e., se f é de classe C^r no sentido da definição acima então as representações de f em cartas *arbitrárias* são de classe C^r.

Lema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : M \to N$ uma função de classe C^r $(0 \le r \le k)$. Então, dadas cartas arbitrárias $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em M e $\psi : V \to \widetilde{V}$ em N com $f(U) \subset V$, temos que a função $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ que representa f com respeito às cartas φ e ψ é de classe C^r.*

Demonstração. Basta mostrar que $\tilde{f}$ é localmente de classe C^r. Seja então dado $\tilde{x} \in \widetilde{U}$ e mostremos que $\tilde{f}$ é de classe C^r numa vizinhança de $\tilde{x}$. Defina $x = \varphi^{-1}(\tilde{x})$; como f é de classe C^r, por definição, existem cartas $\varphi_1 : U_1 \to \widetilde{U}_1$ em M e $\psi_1 : V_1 \to \widetilde{V}_1$ em N com $x \in U_1$, $f(U_1) \subset V_1$ e tais que $\tilde{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ é de classe C^r. Seja $\alpha : \varphi(U \cap U_1) \to \varphi_1(U \cap U_1)$ a função de transição de φ para φ_1 e $\beta : \psi(V \cap V_1) \to \psi_1(V \cap V_1)$ a função de transição de ψ para ψ_1. Sabemos que α e β são difeomorfismos de classe C^k (e portanto de classe C^r) entre abertos do espaço Euclideano. Para concluir a demonstração, simplesmente observe que a função $\tilde{f}$ coincide com a composta $\beta^{-1} \circ \tilde{f}_1 \circ \alpha$ na vizinhança aberta $\varphi(U \cap U_1)$ de $\tilde{x}$. ■

A demonstração do Lema acima esclarece porquê só definimos funções de classe C^r em variedades de classe C^k para $r \le k$.

Teorema. *A composta de funções de classe C^r é de classe C^r, i.e., se M, N, P são variedades de classe C^k e se $f : M \to N$, $g : N \to P$ são funções de classe C^r $(0 \le r \le k)$ então $g \circ f : M \to P$ é de classe C^r.*

Demonstração. Seja dado $x \in M$. Devemos produzir uma carta em M, cujo domínio contém x, e uma carta em P, cujo domínio contém $g\big(f(x)\big)$, de modo que a representação local de $g \circ f$ nessas cartas seja de classe C^r. Como g é de classe C^r, existem cartas $\psi : V \to \widetilde{V}$ em N e $\lambda : W \to \widetilde{W}$ em P com $f(x) \in V$, $g(V) \subset W$ e $\tilde{g} = \lambda \circ g \circ \psi^{-1}$ de classe C^r. Escolha uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U}$ arbitrária em M com $x \in U$; como f é contínua, podemos, se necessário, trocar φ por uma restrição de φ de modo que $x \in U$ e $f(U) \subset V$ (usamos aqui os resultados dos Exercícios 1 e 2). A representação $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f nas cartas φ e ψ é de classe C^r (pelo Lema anterior!). A conclusão segue observando que $(g \circ f)(U) \subset W$ e que a representação de $g \circ f$ nas cartas φ e λ coincide com a composta $\tilde{g} \circ \tilde{f}$. ■

Algumas propriedades bem simples das funções de classe C^r (que em geral serão usadas sem maiores comentários) estão listadas no Exercício 3.

`Observação`: se Z é um aberto de $\mathbb{R}^n$ então Z é uma variedade diferenciável de dimensão n e a aplicação identidade $\mathrm{Id} : Z \to Z$ é uma carta em Z. Segue daí que, dada uma variedade M de classe C^k então uma função $f : M \to Z$ é de classe C^r $(0 \le r \le k)$ se e somente se para todo $x \in M$ existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em M tal que $f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \to Z$ é de classe C^r. Similarmente, uma função $f : Z \to M$ é de classe C^r se e somente se para todo $x \in Z$ existe uma vizinhança aberta U de x em Z e uma carta $\psi : V \to \widetilde{V}$ em M com $f(U) \subset V$ e $\psi \circ f|_U : U \to \widetilde{V}$ de classe C^r. Observamos também que a noção de "ser de classe C^r" em abertos do espaço Euclideano (no sentido usual do cálculo no $\mathbb{R}^n$) coincide com a noção de "ser de classe C^r" nesses abertos, vistos como variedades diferenciáveis.

Definição. *Sejam M, N variedades de classe C^k. Uma função $f : M \to N$ é dita um* difeomorfismo de classe C^r *$(0 \le r \le k)$ se f é uma bijeção de classe C^r cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ é de classe C^r. Dizemos que f é um* difeomorfismo local de classe C^r *se todo $x \in M$ possui uma vizinhança aberta $U \subset M$ tal que $f(U)$ é aberto em N e $f|_U : U \to f(U)$ é um difeomorfismo de classe C^r.*

Obviamente todo difeomorfismo (local) de classe C^r é um homeomorfismo (local); em particular, todo difeomorfismo local de classe C^r é uma *aplicação aberta*, i.e., leva abertos do domínio em abertos do contra-domínio. Observe que para $r = 0$ um difeomorfismo (local) é o mesmo que um homeomorfismo (local).

`Observação`: segue do item (d) do Exercício 3 que um difeomorfismo local $f : M \to N$ de classe C^r é um difeomorfismo de classe C^r se e somente se for bijetor.

Mostremos agora que as cartas de uma variedade M são nada mais que difeomorfismos entre abertos de M e abertos do espaço Euclideano.

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e de dimensão n. Dado um subconjunto $U \subset M$ e um aberto $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ então uma bijeção $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é uma carta de M (i.e., um elemento do atlas maximal que define a estrutura diferenciável de M) se e somente se U é um aberto de M e φ é um difeomorfismo de classe C^k.*

Demonstração. Suponha que φ é uma carta de M. Já sabemos então que U é aberto e que φ é bijetora. Podemos agora considerar as representações de φ e de φ^{-1} com respeito às cartas φ na variedade U e Id na variedade $\widetilde{U}$; ambas essas representações são iguais à função identidade de $\widetilde{U}$, que é de classe C^k. Logo φ é um difeomorfismo de classe C^k. Reciprocamente, suponha que U é aberto em M e que φ é um difeomorfismo de classe C^k. Para mostrar que φ é um elemento do atlas maximal $\mathcal{A}$ de M, basta mostrar que φ é C^k-compatível com todo elemento $\psi : V \to \widetilde{V}$ de $\mathcal{A}$. Como φ e ψ são homeomorfismos entre abertos, segue que $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. A função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^k pois ela é a representação da função $\varphi^{-1} : \widetilde{U} \to U$ de classe C^k com respeito às cartas $\mathrm{Id} : \varphi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ e $\psi|_{U \cap V} : U \cap V \to \psi(U \cap V)$. Similarmente, a função de transição $\varphi \circ \psi^{-1}$ é de classe C^k pois ela é a representação da função $\varphi : U \to \widetilde{U}$ de classe C^k com respeito às cartas $\psi|_{U \cap V} : U \cap V \to \psi(U \cap V)$ e $\mathrm{Id} : \widetilde{U} \to \widetilde{U}$. Logo $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k entre abertos e portanto φ e ψ são C^k-compatíveis. ■

`Observação`: note que até agora nunca usamos que a topologia das nossas variedades é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. De fato, todas as definições dadas até agora fazem sentido (e todos os resultados provados são válidos) para conjuntos arbitrários munidos de uma estrutura diferenciável (i.e., um atlas maximal), sem hipótese alguma sobre a topologia induzida por esse atlas. No resto desta seção usaremos os conceitos definidos e os resultados obtidos até agora na classe dos conjuntos munidos de estruturas diferenciáveis.

Corolário. *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ estruturas diferenciáveis de classe C^k num conjunto M. Então $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ se e somente se a aplicação identidade* $\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2)$ *é um difeomorfismo de classe C^k.*

Demonstração. Se $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ então Id é um difeomorfismo de classe C^k (veja o item (b) do Exercício 3). Reciprocamente, suponha que Id é um difeomorfismo de classe C^k. Seja U um aberto de M (note que Id é um homeomorfismo e portanto $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ induzem a mesma topologia em M). Seja $\mathcal{A}_1|_U$ (resp., $\mathcal{A}_2|_U$) a estrutura diferenciável induzida por $\mathcal{A}_1$ (resp., $\mathcal{A}_2$) em U. Daí $\mathrm{Id} : (U, \mathcal{A}_1|_U) \to (U, \mathcal{A}_2|_U)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Seja $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $\varphi : U \to \widetilde{U}$ uma bijeção. Temos um diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{A}_1|_U) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "1", "\varphi"'] & & (U, \mathcal{A}_2|_U) \arrow[dl, "2"', "\varphi"] \\
& \widetilde{U} &
\end{tikzcd}
$$

Temos que a flecha número 1 no diagrama é um difeomorfismo de classe C^k se e somente se a flecha número 2 o for. Segue do Lema que φ pertence a $\mathcal{A}_1$ se e somente se φ pertence a $\mathcal{A}_2$. ■

O Corolário anterior é útil quando queremos demonstrar resultados sobre unicidade de estruturas diferenciáveis satisfazendo certas condições.

Como foi explicado na aula número 3 (final da seção 1), sistemas de coordenadas num conjunto M podem ser usados para "transferir" a estrutura diferenciável do $\mathbb{R}^n$ para M. Dada uma coleção de bijeções $\big\{\varphi_i : U_i \to N_i\big\}_{i\in I}$, definidas em subconjuntos $U_i \subset M$ e tomando valores em variedades N_i então seria natural que pudéssemos usar tais bijeções para "transferir" a estrutura diferenciável das variedades N_i para M; *desde que* a coleção $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ satisfizesse condições similares às satisfeitas por um atlas, i.e., M deve ser a união dos domínios U_i e duas bijeções φ_i e φ_j deveriam ser compatíveis num sentido apropriado. Essa é a motivação para o Lema que provaremos a seguir. Observe que um caso particular interessante da situação que descrevemos é aquele em que cada N_i é um aberto de um espaço vetorial real de dimensão finita V_i. É claro que neste caso, uma bijeção $\varphi_i : U_i \to N_i$ está "muito perto" de ser um sistema de coordenadas; basta escolher um isomorfismo $T_i : V_i \to \mathbb{R}^n$ e considerar a composta $T_i \circ \varphi_i$. Ocorre que em alguns exemplos (por exemplo na construção da estrutura diferenciável do Grassmanniano, que será feita na aula seguinte) esse isomorfismo não é canônico e a exposição fica mais elegante se ele não tiver que ser explicitado na construção da estrutura diferenciável de M. Uma outra aplicação do Lema abaixo aparecerá quando estudarmos fibrados vetoriais.

Lema. *Seja M um conjunto e seja $\mathcal{B} = \big\{\varphi_i : U_i \to N_i\big\}_{i\in I}$ uma coleção de bijeções, onde cada U_i é um subconjunto de M e N_i é munido de uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}_i = \big\{\psi_{i\lambda} : V_{i\lambda} \to \widetilde{V}_{i\lambda} \subset \mathbb{R}^n\big\}_{\lambda\in\Lambda_i}$ de classe C^k. Suponha que $M = \bigcup_{i\in I} U_i$, que para todos $i, j \in I$ os conjuntos $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset N_i$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subset N_j$ sejam abertos (possivelmente vazios) e que a função $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ seja um difeomorfismo de classe C^k. Então existe uma única estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ em M de classe C^k tal que cada U_i é aberto em M e cada φ_i é um difeomorfismo de classe C^k.*

Demonstração. Mostremos primeiramente a unicidade. Sejam então $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ duas estruturas diferenciáveis de classe C^k em M que tornam cada U_i aberto e cada φ_i um difeomorfismo de classe C^k. Seja $\mathcal{A}|_{U_i}$ (resp., $\mathcal{A}'|_{U_i}$) a estrutura diferenciável induzida por $\mathcal{A}$ (resp., por $\mathcal{A}'$) em U_i. Temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(U_i, \mathcal{A}|_{U_i}) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & (U_i, \mathcal{A}'|_{U_i}) \arrow[dl, "\varphi_i"] \\
& N_i &
\end{tikzcd}$$

onde ambas as flechas φ_i são difeomorfismos de classe C^k; isso mostra que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}')$ restrita ao aberto U_i é um difeomorfismo de classe C^k. Como $M = \bigcup_{i\in I} U_i$, segue que Id é um difeomorfismo de classe C^k e logo $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Vamos agora mostrar a existência de $\mathcal{A}$. Defina:

$$\mathcal{A}_0 = \big\{\rho_{i\lambda} = \psi_{i\lambda} \circ \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(V_{i\lambda})} : \varphi_i^{-1}(V_{i\lambda}) \longrightarrow \widetilde{V}_{i\lambda}\big\}_{\lambda\in\Lambda_i, i\in I}$$

Mostraremos a seguir que $\mathcal{A}_0$ é um atlas de classe C^k em M. Vamos assumir esse fato por alguns instantes. Se $\mathcal{A}$ é o atlas maximal de classe C^k que contém $\mathcal{A}_0$ então afirmamos que cada U_i é aberto em M na topologia definida por $\mathcal{A}$ e cada φ_i é um difeomorfismo de classe C^k com respeito à estrutura diferenciável definida por $\mathcal{A}$. A igualdade $U_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_i} \varphi_i^{-1}(V_{i\lambda})$ mostra que U_i é aberto em M. Além do mais, para cada $\lambda \in \Lambda_i$, as aplicações $\rho_{i\lambda} : \varphi_i^{-1}(V_{i\lambda}) \to \widetilde{V}_{i\lambda}$ e $\psi_{i\lambda} : V_{i\lambda} \to \widetilde{V}_{i\lambda}$ são difeomorfismos de classe C^k, pois a primeira pertence ao atlas $\mathcal{A}$ de M e a segunda pertence ao atlas $\mathcal{A}_i$ de N_i. Segue que $\psi_{i\lambda}^{-1} \circ \rho_{i\lambda} = \varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(V_{i\lambda})} : \varphi_i^{-1}(V_{i\lambda}) \to V_{i\lambda}$ é um difeomorfismo de classe C^k para todo $\lambda \in \Lambda_i$. Como $U_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_i} \varphi_i^{-1}(V_{i\lambda})$ e $N_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_i} V_{i\lambda}$, concluímos que $\varphi_i : U_i \to N_i$ é um difeomorfismo de classe C^k.

Para completar a demonstração, devemos mostrar que $\mathcal{A}_0$ é um atlas de classe C^k em M. Em primeiro lugar, temos:

$$M = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{\substack{i\in I \\ \lambda\in\Lambda_i}} \varphi_i^{-1}(V_{i\lambda}).$$

Sejam dados $i, j \in I$, $\lambda \in \Lambda_i$, $\mu \in \Lambda_j$. Vamos mostrar que a função de transição de $\rho_{i\lambda}$ para $\rho_{j\mu}$ é uma função de classe C^k definida num aberto de $\mathbb{R}^n$. Isso mostrará também (trocando os papeís de $\rho_{i\lambda}$ e $\rho_{j\mu}$) que a função de transição de $\rho_{j\mu}$ para $\rho_{i\lambda}$ é uma função de classe C^k definida num aberto de $\mathbb{R}^n$. Logo ficará estabelecido que $\rho_{i\lambda}$ e $\rho_{j\mu}$ são C^k-compatíveis e que $\mathcal{A}_0$ é um atlas de classe C^k em M.

Temos que a função de transição de $\rho_{i\lambda}$ para $\rho_{j\mu}$ é dada por:

$$\rho_{j\mu} \circ \rho_{i\lambda}^{-1} = \psi_{j\mu} \circ \big(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big) \circ \psi_{i\lambda}^{-1};$$

seu domínio é:

$$\rho_{i\lambda}\big(\varphi_i^{-1}(V_{i\lambda}) \cap \varphi_j^{-1}(V_{j\mu})\big) = \psi_{i\lambda}\big[V_{i\lambda} \cap \big(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big)^{-1}(V_{j\mu})\big].$$

A conclusão segue observando que $\psi_{i\lambda} \in \mathcal{A}_i$ e $\psi_{j\mu} \in \mathcal{A}_j$ são difeomorfismos de classe C^k entre abertos e que, por hipótese, também $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k entre abertos. ■

Corolário. *Seja M um conjunto e seja $\mathcal{B} = \big\{\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i\big\}_{i\in I}$ uma coleção de bijeções, onde cada U_i é um subconjunto de M e $\widetilde{U}_i$ é um aberto de um espaço vetorial real V_i de dimensão finita n. Suponha que $M = \bigcup_{i\in I} U_i$, que para todos $i, j \in I$ os conjuntos $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$ sejam abertos (possivelmente vazios) e que a função $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ seja um difeomorfismo de classe C^k. Então existe uma única estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ em M de classe C^k tal que cada U_i é aberto em M e cada φ_i é um difeomorfismo de classe C^k.*

Demonstração. Aplique o Lema para as variedades diferenciáveis $N_i = \widetilde{U}_i$. ■

Note que tanto no Lema como no Corolário acima, não podemos concluir que a topologia induzida pelo atlas $\mathcal{A}$ em M seja Hausdorff ou que ela satisfaça o segundo axioma da enumerabilidade (mesmo que a topologia de cada N_i satisfaça essas condições).

Corolário. *Sejam* M*,* N *conjuntos,* $\varphi : M \to N$ *uma bijeção e* $\mathcal{A}'$ *um atlas maximal de classe* C^k *em* N*. Então existe um único atlas maximal* $\mathcal{A}$ *de classe* C^k *em* M *tal que* $\varphi : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{A}')$ *seja um difeomorfismo de classe* C^k*.*

Demonstração. Aplique o Lema para a coleção unitária $\{\varphi : U \to N\}$, onde $U = M$. ■

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Cartas e Atlas.`

1. Seja $\mathcal{A}$ um atlas maximal de classe C^k num conjunto M e seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ um elemento de $\mathcal{A}$. Mostre que se $\widetilde{V}$ é um aberto de $I\!R^n$ contido em $\widetilde{U}$ e se $V = \varphi^{-1}(\widetilde{V})$ então a restrição $\varphi|_V : V \to \widetilde{V}$ também pertence a $\mathcal{A}$.

[*dica*: você deve mostrar que $\varphi|_V$ é C^k-compatível com $\mathcal{A}$].

`Funções Diferenciáveis.`

2. Sejam M, N variedades de classe C^k. Mostre que toda função $f : M \to N$ de classe C^r $(0 \le r \le k)$ é contínua. Mostre também que toda função contínua $f : M \to N$ é de classe C^0 (onde "ser de classe C^0" deve ser entendido no sentido da primeira definição da seção 1, i.e., f é de classe C^0 se f admite representações contínuas em sistemas de coordenadas em torno de cada ponto de seu domínio).
3. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e $f : M \to N$ uma função. Mostre que:
   (a) se N_1 é aberto em N e $f(M) \subset N_1$ então $f : M \to N$ é de classe C^r se e somente se $f : M \to N_1$ é de classe C^r;
   (b) a aplicação identidade $\mathrm{Id} : M \to M$ é de classe C^k; mais geralmente, se M_1 é um aberto de M então a aplicação inclusão $M_1 \to M$ é de classe C^k;
   (c) se $f : M \to N$ é de classe C^r então, para todo aberto $M_1 \subset M$, a restrição $f|_{M_1} : M_1 \to N$ é de classe C^r;
   (d) se todo $x \in M$ possui uma vizinhança aberta $M_x \subset M$ tal que $f|_{M_x} : M_x \to N$ é de classe C^r então f é de classe C^r.
4. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k. Mostre que se existe um difeomorfismo local $f : M \to N$ de classe C^r então $\dim(M) = \dim(N)$.

[*dica*: para o caso $r = 0$ veja o Exercício 5 da aula número 3].

5. Seja M uma variedade diferenciável compacta não vazia de dimensão n. Mostre que não existe um difeomorfismo local $f : M \to I\!R^n$.

Aula número 5 (27/08)

(1) **Um exemplo: o Grassmanniano**.

Dados inteiros n e r com $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$, denotamos por $G_r(n)$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais r-dimensionais de $\mathbb{R}^n$. O conjunto $G_r(n)$ é conhecido como o *Grassmanniano real* de subespaços r-dimensionais de $\mathbb{R}^n$. Nesta seção vamos, a título de exemplo, construir uma estrutura de variedade diferenciável em $G_r(n)$. Esse é um bom exemplo de variedade diferenciável que não aparece de maneira natural como subconjunto de um espaço Euclideano $\mathbb{R}^N$.

Seja $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$ uma decomposição em soma direta de $\mathbb{R}^n$, com $\dim(W_0) = r$ (e portanto $\dim(W_1) = n - r$). Se $T : W_0 \to W_1$ é um operador linear então seu gráfico identifica-se com um subespaço de $\mathbb{R}^n$, a saber:

$$\mathrm{Gr}(T) = \big\{ v + Tv : v \in W_0 \big\}.$$

A aplicação $v \mapsto v + Tv$ fornece um isomorfismo de W_0 sobre $\mathrm{Gr}(T)$ e portanto $\mathrm{Gr}(T)$ tem dimensão r. Observe que $\mathrm{Gr}(T) \cap W_1 = \{0\}$ (na verdade, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Gr}(T) \oplus W_1$). Além do mais, se $V \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço r-dimensional com $V \cap W_1 = \{0\}$ (ou seja, $\mathbb{R}^n = V \oplus W_1$) então $V = \mathrm{Gr}(T)$ para uma única aplicação linear $T : W_0 \to W_1$; a saber:

$$T = (\pi_1|_V) \circ (\pi_0|_V)^{-1},$$

onde $\pi_0 : \mathbb{R}^n \to W_0$, $\pi_1 : \mathbb{R}^n \to W_1$ denotam as projeções relativas à soma direta $W_0 \oplus W_1$ (segue do resultado do Exercício 1 que a restrição de π_0 a V é de fato um isomorfismo sobre W_0). Para determinar T na prática, pegamos um ponto genérico $z \in V$ e escrevemos $z = x + y$, com $x \in W_0$, $y \in W_1$, de modo que $x = \pi_0(z)$, $y = \pi_1(z)$. Obtemos então funções $x = x(z)$ e $y = y(z)$. A aplicação T é a aplicação $y = y(x)$. Devemos então inverter a relação $x = x(z)$ obtendo $z = z(x)$ e substituir em $y = y(z)$, obtendo y em função de x. O diagrama comutativo abaixo ilustra a situação:

$$\begin{tikzcd}
y \in W_1 & V = \mathrm{Gr}(T) \ni z \arrow[l, "\pi_1|_V"'] \arrow[d, "\pi_0|_V", "\cong"'] \\
& W_0 \ni x \arrow[ul, "T"]
\end{tikzcd}$$

A discussão acima nos diz que a aplicação:

$$\mathrm{Lin}(W_0, W_1) \ni T \longmapsto \mathrm{Gr}(T) \in G_r(n; W_1)$$

é uma bijeção, onde $G_r(n; W_1)$ denota o subconjunto de $G_r(n)$ definido por:

$$G_r(n; W_1) = \big\{ V \in G_r(n) : \mathbb{R}^n = V \oplus W_1 \big\} = \big\{ V \in G_r(n) : V \cap W_1 = \{0\} \big\}.$$

Denotamos por φ_{W_0,W_1} a inversa da bijeção $T \mapsto \mathrm{Gr}(T)$; obtemos então uma aplicação bijetora:

$$\varphi_{W_0,W_1} : G_r(n; W_1) \longrightarrow \mathrm{Lin}(W_0, W_1).$$

A aplicação φ_{W_0,W_1} não é exatamente um sistema de coordenadas em $G_r(n)$, pois seu contra-domínio é um espaço vetorial real de dimensão finita que é isomorfo, mas não igual, ao espaço Euclideano $\mathbb{R}^{r(n-r)}$. A composição de φ_{W_0,W_1} com um isomorfismo qualquer entre $\mathrm{Lin}(W_0, W_1)$ e $\mathbb{R}^{r(n-r)}$ nos forneceria um sistema de coordenadas em $G_r(n)$; no entanto, tal isomorfismo não é canônico e a exposição fica mais elegante se não explicitarmos tal isomorfismo. De fato, *toda a teoria desenvolvida nas aulas anteriores funcionaria da mesma forma, se tivéssemos definido que um sistema de coordenadas num conjunto M é uma bijeção entre um subconjunto de M e um subconjunto aberto de um espaço vetorial real de dimensão finita arbitrário*. Trabalharemos então como se φ_{W_0,W_1} fosse um sistema de coordenadas em $G_r(n)$ (veja também a discussão que precede o último Lema da aula número 4 e o seu primeiro Corolário).

Como todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ possui um subespaço complementar, é fácil ver que os domínios dos sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} cobrem $G_r(n)$. Vamos então estudar a compatibilidade entre os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1}. Sejam dadas duas decomposições em soma direta $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, $\mathbb{R}^n = W_0' \oplus W_1$ de $\mathbb{R}^n$, com $\dim(W_0) = \dim(W_0') = r$ e vamos calcular a função de transição de φ_{W_0,W_1} para φ_{W_0',W_1}. Observe que os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} e φ_{W_0',W_1} tem o mesmo domínio e portanto a função de transição em questão será uma bijeção de $\mathrm{Lin}(W_0, W_1)$ sobre $\mathrm{Lin}(W_0', W_1)$ (em particular, seu domínio e contra-domínio são de fato abertos).

Seja $T \in \mathrm{Lin}(W_0, W_1)$. Queremos determinar $\varphi_{W_0',W_1}\big(\mathrm{Gr}(T)\big)$, i.e., queremos escrever $\mathrm{Gr}(T)$ como o gráfico de uma aplicação linear $\widetilde{T} : W_0' \to W_1$. Considere então um ponto genérico $z = v + Tv$ de $\mathrm{Gr}(T)$, onde $v \in W_0$. Denote por $\pi_0' : \mathbb{R}^n \to W_0'$, $\pi_1' : \mathbb{R}^n \to W_1$ as projeções correspondentes à decomposição $W_0' \oplus W_1$. Escreva $x = \pi_0'(z)$ e $y = \pi_1'(z)$; daí $y = \widetilde{T}(x)$. Temos $x = \pi_0'(v) + \pi_0'(Tv) = \pi_0'(v)$ e $y = \pi_1'(v) + \pi_1'(Tv) = \pi_1'(v) + Tv$. Pelo resultado do Exercício 1, a restrição de π_0' a W_0 é um isomorfismo sobre W_0' e portanto podemos resolver a relação $x = \pi_0'(v)$ para v obtendo $v = (\pi_0'|_{W_0})^{-1}(x)$. Substituindo em $y = \pi_1'(v) + Tv$ obtemos a expressão desejada para $\widetilde{T}$. Em resumo:

$$\varphi_{W_0',W_1} \circ \varphi_{W_0,W_1}^{-1} : \mathrm{Lin}(W_0, W_1) \ni T \longmapsto \widetilde{T} = \big(\pi_1'|_{W_0} + T\big) \circ \big(\pi_0'|_{W_0}\big)^{-1} \in \mathrm{Lin}(W_0', W_1).$$

A fórmula acima mostra que a aplicação $\varphi_{W_0',W_1} \circ \varphi_{W_0,W_1}^{-1}$ é de classe C^∞; sua inversa (que é dada por uma fórmula similar, trocando os papéis de W_0 e W_0') também é de classe C^∞. Logo os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} e φ_{W_0',W_1} são C^∞-compatíveis.

Consideramos agora decomposições em soma direta $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0 \oplus W_1'$ com $\dim(W_0) = r$ e vamos calcular a função de transição de φ_{W_0,W_1} para $\varphi_{W_0,W_1'}$. Note que os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} e $\varphi_{W_0,W_1'}$ não tem o mesmo domínio e portanto precisamos determinar também o domínio da correspondente função de transição; mais explicitamente, devemos determinar quais são as aplicações $T \in \mathrm{Lin}(W_0, W_1)$ tais que $\mathrm{Gr}(T) = \varphi_{W_0,W_1}^{-1}(T)$ pertence a $G_r(n; W_1')$, i.e., tais que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Gr}(T) \oplus W_1'$. Denote por $\pi_0' : \mathbb{R}^n \to W_0$, $\pi_1' : \mathbb{R}^n \to W_1'$ as projeções correspondentes à soma direta $W_0 \oplus W_1'$. Pelo resultado do Exercício 1, temos $I\!R^n = \mathrm{Gr}(T) \oplus W_1'$ se e somente se a restrição de π_0' a $\mathrm{Gr}(T)$ é um isomorfismo sobre W_0; como $W_0 \ni v \mapsto v + Tv \in \mathrm{Gr}(T)$ é um isomorfismo, temos:

$$I\!R^n = \mathrm{Gr}(T) \oplus W_1' \Longleftrightarrow \text{a aplicação } W_0 \ni v \mapsto \pi_0'(v + Tv) \text{ é inversível.}$$

Seja $z = v + Tv$ um ponto genérico de $\mathrm{Gr}(T)$, onde $v \in W_0$; escrevemos $x = \pi_0'(z)$ e $y = \pi_1'(z)$. Daí $x = \pi_0'(v + Tv) = v + \pi_0'(Tv)$ e $y = \pi_1'(v + Tv) = \pi_1'(Tv)$. Como vimos acima, a condição $\mathrm{Gr}(T) \in G_r(n; W_1')$ é equivalente à inversibilidade da aplicação $W_0 \ni v \mapsto x \in W_0$; logo:

$$\begin{aligned} T \in \varphi_{W_0,W_1}\big(G_r(n; W_1) \cap G_r(n; W_1')\big) &\Longleftrightarrow \mathrm{Gr}(T) \in G_r(n; W_1') \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Id} + \big(\pi_0'|_{W_1}\big) \circ T : W_0 \to W_0 \text{ é inversível.} \end{aligned}$$

Concluímos que $\varphi_{W_0,W_1}\big(G_r(n; W_1) \cap G_r(n; W_1')\big)$ é aberto em $\mathrm{Lin}(W_0, W_1)$. Quando a relação $x = x(v)$ é inversível (i.e., quando T está de fato no domínio da função de transição que queremos determinar) podemos escrever v em função de x e substituir em $y = \pi_1'(Tv)$; obtemos assim, a expressão para $y = \widetilde{T}(x)$. Em resumo:

$$\begin{aligned} \varphi_{W_0,W_1'} \circ \varphi_{W_0,W_1}^{-1} : \mathrm{Lin}(W_0, W_1) \ni T \longmapsto \widetilde{T} = \\ \big(\pi_1'|_{W_1}\big) \circ T \circ \big(\mathrm{Id} + (\pi_0'|_{W_1}) \circ T\big)^{-1} \in \mathrm{Lin}(W_0, W_1'). \end{aligned}$$

A fórmula acima mostra que a aplicação $\varphi_{W_0,W_1'} \circ \varphi_{W_0,W_1}^{-1}$ é de classe C^∞; sua inversa (que é dada por uma fórmula similar, trocando os papéis de W_1 e W_1') também é de classe C^∞. Logo os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} e $\varphi_{W_0,W_1'}$ são C^∞-compatíveis.

Considere agora duas decomposições em soma direta arbitrárias $I\!R^n = W_0 \oplus W_1$ e $I\!R^n = W_0' \oplus W_1'$, com $\dim(W_0) = \dim(W_0') = r$. Sabemos que φ_{W_0,W_1} é C^∞-compatível com φ_{W_0',W_1}; também, φ_{W_0',W_1} é C^∞-compatível com $\varphi_{W_0',W_1'}$. Como φ_{W_0,W_1} e φ_{W_0',W_1} tem o mesmo domínio, segue que φ_{W_0,W_1} é C^∞-compatível com $\varphi_{W_0',W_1'}$ (veja Exercício 3).

Mostramos então que a coleção de todos os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1}, onde (W_0, W_1) percorre o conjunto das decomposições em soma direta $I\!R^n = W_0 \oplus W_1$ com $\dim(W_0) = r$, é um atlas de classe C^∞ e de dimensão $r(n-r)$ em $G_r(n)$. Para mostrar que $G_r(n)$ munido da estrutura diferenciável dada pelo atlas maximal contendo esse atlas é uma variedade diferenciável, devemos mostrar que $G_r(n)$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Começamos com o seguinte:

Lema. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam W, W' subespaços de V com $\dim(W) = \dim(W')$. Então existe um subespaço $Z \subset V$ com $V = W \oplus Z$ e $V = W' \oplus Z$.*

Demonstração. Provamos o resultado por indução em $\dim(V) - \dim(W)$. Se $\dim(V) - \dim(W) = 0$ então $V = W = W'$ e basta tomar $Z = \{0\}$. Agora assuma o resultado válido quando $\dim(V) - \dim(W) = k$ e vamos provar o resultado para $\dim(V) - \dim(W) = k+1$. Como $\dim(V) - \dim(W) = \dim(V) - \dim(W') = k + 1 > 0$, temos que W e W' são subespaços próprios de V e portanto $V \ne W \cup W'$ (veja Exercício 2). Seja $v \in V$ com $v \notin W$ e $v \notin W'$. Denote por W_1 (resp., W_1') o subespaço gerado por W (resp., por W') e por v. Daí $\dim(V) - \dim(W_1) = \dim(V) - \dim(W_1') = k$ e pela hipótese de indução existe um subespaço $Z_1 \subset V$ com $V = W_1 \oplus Z_1$ e $V = W_1' \oplus Z_1$. Para concluir a demonstração, observe que se Z é o subespaço gerado por Z_1 e por v então $V = W \oplus Z$ e $V = W' \oplus Z$. ■

Corolário. *O Grassmanniano $G_r(n)$ é um espaço Hausdorff.*

Demonstração. Pelo Lema, dados $W_0, W_0' \in G_r(n)$, existe um subespaço $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$ e $\mathbb{R}^n = W_0' \oplus W_1$. Daí o sistema de coordenadas φ_{W_0,W_1} contém W_0 e W_0' em seu domínio. A conclusão segue do resultado do Exercício 4. ■

Lema. *O atlas em $G_r(n)$ formado pelos sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} contém um atlas finito.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}_0$ o conjunto de todos os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} onde $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, $\dim(W_0) = r$ e tanto W_0 como W_1 são gerados por vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Obviamente $\mathcal{A}_0$ é finito (precisamente, $\mathcal{A}_0$ tem $\binom{n}{r}$ elementos). Vamos mostrar que $\mathcal{A}_0$ é um atlas para $G_r(n)$. Seja dado $V \in G_r(n)$. Denote por $\mathfrak{B}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathfrak{B}'$ uma base arbitrária para V. Como $\mathfrak{B}'$ é um conjunto linearmente independente e $\mathfrak{B}$ é um conjunto de geradores para $\mathbb{R}^n$, podemos encontrar um subconjunto $\mathfrak{B}_1$ de $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B}' \cup \mathfrak{B}_1$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Seja W_1 o subespaço gerado por $\mathfrak{B}_1$ e W_0 o subespaço gerado por $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}_1$. Daí $\varphi_{W_0,W_1} \in \mathcal{A}_0$ e $\mathbb{R}^n = V \oplus W_1$, i.e., V pertence ao domínio de φ_{W_0,W_1}. ■

Corolário. *A topologia do Grassmanniano $G_r(n)$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.*

Demonstração. Segue do Lema e do resultado do Exercício 5. ■

Nós demonstramos nesta seção o seguinte:

Teorema. *O atlas maximal de classe C^∞ que contém os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} faz do Grassmanniano $G_r(n)$ uma variedade diferenciável de classe C^∞ e de dimensão $r(n-r)$.*

`Observação`: um trabalho totalmente análogo ao realizado nesta seção mostra que o *Grassmanniano complexo* formado pelos subespaços complexos r-dimensionais de $\mathbb{C}^n$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e de dimensão $2r(n-r)$. Neste caso, os sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} considerados estariam associados a decomposições $\mathbb{C}^n = W_0 \oplus W_1$, com W_0, W_1 subespaços complexos de $\mathbb{C}^n$ e $\dim(W_0) = r$. O contra-domínio de φ_{W_0,W_1} seria o espaço dos operadores lineares complexos $T : W_0 \to W_1$ (que é um espaço vetorial complexo de dimensão $r(n-r)$, mas é também um espaço vetorial real de dimensão $2r(n-r)$).

(2) **Um exemplo de aplicação diferenciável no Grassmanniano**.

Com o objetivo de apresentar um exemplo não trivial de aplicação diferenciável entre variedades, vamos mostrar nesta seção que a "aplicação complemento ortogonal" é um difeomorfismo de classe C^∞ entre Grassmannianos.

Se V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, denotamos por $V^\perp$ o complemento ortogonal de V com respeito ao produto interno Euclideano. Dado $r = 0, \ldots, n$, temos obviamente uma aplicação bijetora:

$$G_r(n) \ni V \longmapsto V^\perp \in G_{n-r}(n).$$

Vamos mostrar que a aplicação $V \mapsto V^\perp$ é de classe C^∞.

Seja W_0 um subespaço r-dimensional de $\mathbb{R}^n$ e seja $W_1 = W_0^\perp$. Daí $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$ e portanto temos um sistema de coordenadas φ_{W_0,W_1} em $G_r(n)$. Dado um operador linear $T : W_0 \to W_1$, vamos calcular o complemento ortogonal de $\mathrm{Gr}(T)$. Dados $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$, temos:

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 \in \mathrm{Gr}(T)^\perp &\Longleftrightarrow \langle w_0 + w_1, v + Tv\rangle = 0, \ \forall\, v \in W_0 \\ &\Longleftrightarrow \langle w_0, v\rangle + \langle w_1, Tv\rangle = 0, \ \forall\, v \in W_0 \\ &\Longleftrightarrow \langle w_0, v\rangle + \langle T^* w_1, v\rangle = 0, \ \forall\, v \in W_0 \\ &\Longleftrightarrow \langle w_0 + T^* w_1, v\rangle = 0, \ \forall\, v \in W_0, \end{aligned}$$

onde $T^* : W_1 \to W_0$ denota o operador transposto de T. Como $w_0 + T^* w_1 \in W_0$, concluímos que $w_0 + w_1 \in \mathrm{Gr}(T)^\perp$ se e somente se $w_0 + T^* w_1 = 0$, i.e., se e somente se $w_0 = -T^* w_1$. Segue que:

$$\mathrm{Gr}(T)^\perp = \mathrm{Gr}(-T^*).$$

A igualdade acima mostra que a aplicação $V \mapsto V^\perp$ leva o domínio de φ_{W_0,W_1} dentro do domínio do sistema de coordenadas φ_{W_1,W_0} em $G_{n-r}(n)$; além do mais, a aplicação que representa $V \mapsto V^\perp$ com respeito aos sistemas de coordenadas φ_{W_0,W_1} e φ_{W_1,W_0} é dada por:

$$\mathrm{Lin}(W_0, W_1) \ni T \longmapsto -T^* \in \mathrm{Lin}(W_1, W_0).$$

A aplicação $T \mapsto -T^*$ é obviamente de classe C^∞ (pois é linear). Além do mais, para todo $V \in G_r(n)$ podemos encontrar um sistema de coordenadas φ_{W_0,W_1} em $G_r(n)$ cujo domínio contém V e tal que $W_1 = W_0^\perp$; basta tomar $W_0 = V$ e $W_1 = V^\perp$. Isso prova que a aplicação $V \mapsto V^\perp$ é de classe C^∞.

A inversa da aplicação bijetora $G_r(n) \ni V \mapsto V^\perp \in G_{n-r}(n)$ é dada por:

$$G_{n-r}(n) \ni V \longmapsto V^\perp \in G_r(n),$$

e é portanto de classe C^∞ (basta trocar os papéis de r e $n-r$). Logo $V \mapsto V^\perp$ é um difeomorfismo de classe C^∞ entre os Grassmannianos $G_r(n)$ e $G_{n-r}(n)$.

(3) **Um conjunto com estrutura diferenciável e topologia não Hausdorff.**

Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas diferenciável em M. Veremos nesta seção um exemplo que mostra que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M nem sempre é Hausdorff. Uma condição suficiente para que a topologia induzida por um atlas seja Hausdorff é dada no Exercício 4. Em geral, uma topologia induzida por um atlas satisfaz apenas o axioma de separação T1. Recordamos que um espaço topológico X é dito *T1* (dizemos também que X *satisfaz o axioma de separação T1*) se os pontos de X são fechados, i.e., se dados $x, y \in X$ distintos então existe um aberto em X que contém x mas não contém y. Temos o seguinte:

Lema. *Se $\mathcal{A}$ é um atlas num conjunto M então a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M é T1.*

Demonstração. Sejam $x, y \in M$ pontos distintos. Queremos achar um aberto em M que contém x e não contém y. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas pertencente a $\mathcal{A}$ com $x \in U$. Se $y \notin U$, não há nada a fazer. Se $x, y \in U$ então $\varphi(y) \in \widetilde{U}$ e $\widetilde{U} \setminus \{\varphi(y)\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$; como φ é um homeomorfismo entre abertos, segue que:

$$U \setminus \{y\} = \varphi^{-1}\big(\widetilde{U} \setminus \{\varphi(y)\}\big)$$

é um aberto de M que contém x, mas não contém y. ■

Vamos agora construir uma estrutura diferenciável num conjunto M cuja topologia correspondente não é Hausdorff. Seja X o espaço topológico obtido pela união disjunta de duas cópias de $\mathbb{R}^n$, i.e., $X = \mathbb{R}^n \times \{0, 1\}$, onde $\mathbb{R}^n$ tem a topologia usual, $\{0, 1\}$ tem a topologia discreta e X tem a topologia produto (os abertos de X são da forma $\big(U_0 \times \{0\}\big) \cup \big(U_1 \times \{1\}\big)$, com U_0, U_1 abertos em $\mathbb{R}^n$). Consideramos em X a relação de equivalência $\sim$ que identifica $(x, 0)$ com $(x, 1)$ para todo $x \neq 0$; mais explicitamente:

$$(x, i) \sim (y, j) \Longleftrightarrow (x, i) = (y, j) \text{ ou } x = y \neq 0.$$

Seja $M = X/{\sim}$ o conjunto quociente; consideramos M munido da topologia quociente, i.e., $U \subset M$ é aberto se e somente se $q^{-1}(U)$ é aberto em X, onde $q : X \to M$ denota a aplicação quociente. Intuitivamente, o espaço M pode ser pensado como o espaço $\mathbb{R}^n$ "com uma origem adicional". Afirmamos que as "duas origens" de M não podem ser separadas por abertos disjuntos. De fato, é fácil verificar que, tanto as vizinhanças de $q(0, 0)$ como as vizinhanças de $q(0, 1)$ em M contém o conjunto:

$$\big\{q(x, 0) : x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0,\ \|x\| < r\big\} = \big\{q(x, 1) : x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0,\ \|x\| < r\big\},$$

para algum $r > 0$ suficientemente pequeno. Logo M não é Hausdorff.

Nosso objetivo agora é construir um atlas de classe C^∞ em M que induza a topologia de M. Começamos mostrando que q é uma aplicação aberta. De fato, se:

$$U = \big(U_0 \times \{0\}\big) \cup \big(U_1 \times \{1\}\big)$$

é um aberto de X então $q(U)$ é aberto em M, pois:

$$q^{-1}\big(q(U)\big) = \Big[\Big(U_0 \cup \big(U_1 \setminus \{0\}\big)\Big) \times \{0\}\Big] \cup \Big[\Big(U_1 \cup \big(U_0 \setminus \{0\}\big)\Big) \times \{1\}\Big]$$

é aberto em X. Como $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ é um aberto de X no qual q é injetora, segue que q leva $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ homeomorficamente sobre o aberto $q\big(\mathbb{R}^n \times \{0\}\big) = M \setminus \{q(0, 1)\}$ de M. Logo a aplicação $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto q(x, 0)$ é um homeomorfismo sobre $M \setminus \{q(0, 1)\}$; sua inversa:

$$\varphi_0 : M \setminus \{q(0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é um sistema de coordenadas em M. Similarmente, denotamos por:

$$\varphi_1 : M \setminus \{q(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

a inversa da aplicação $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto q(x, 1)$. Obviamente os domínios de φ_0 e φ_1 cobrem M. Além do mais, a função de transição de φ_0 para φ_1 é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e portanto $\mathcal{A} = \{\varphi_0, \varphi_1\}$ é um atlas de classe C^∞ em M. Como φ_0 e φ_1 são homeomorfismos definidos em abertos de M, segue que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M coincide com a topologia original que tínhamos em M (que não é Hausdorff!).

(4) **Produto de variedades diferenciáveis**.

Vamos mostrar nesta seção que o produto cartesiano de um número finito de variedades diferenciáveis tem uma estrutura natural de variedade diferenciável, de modo que uma função f a valores nesse produto seja de classe C^r se e somente se cada uma de suas coordenadas o for (propriedade análoga à satisfeita pela topologia produto, no caso de produtos de espaços topológicos). Mais precisamente, temos o seguinte:

Teorema. *Sejam $M_1, \ldots, M_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $M = \prod_{i=1}^p M_i$ seu produto cartesiano. Então existe uma única estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ de classe C^k em M tal que $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável e tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) *as projeções $\pi_i : M \to M_i$ são de classe C^k, $i = 1, \ldots, p$;*
(ii) *se N é uma variedade diferenciável de classe C^k então uma aplicação $f : N \to M$ é de classe C^k se e somente se $\pi_i \circ f : N \to M_i$ é de classe C^k para todo $i = 1, \ldots, p$.*

Além do mais, $(M, \mathcal{A})$ satisfaz também as seguintes propriedades:

(iii) *se N é uma variedade diferenciável de classe C^k então uma aplicação $f : N \to M$ é de classe C^r $(0 \le r \le k)$ se e somente se $\pi_i \circ f : N \to M_i$ é de classe C^r para todo $i = 1, \ldots, p$;*
(iv) *a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M coincide com a topologia produto;*
(v) $\dim(M) = \sum_{i=1}^p \dim(M_i)$.

Demonstração. Seja $n_i = \dim(M_i)$, $i = 1, \ldots, p$, e $n = \sum_{i=1}^p n_i$. Dado, para cada $i = 1, \ldots, p$, um sistema de coordenadas $\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ em M_i então definimos um sistema de coordenadas:

$$\varphi = \prod_{i=1}^p \varphi_i : \prod_{i=1}^p U_i \longrightarrow \prod_{i=1}^p \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$$

em M fazendo $\varphi(x_1, \ldots, x_p) = \big(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_p(x_p)\big)$, para todos $x_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, p$. Seja:

$$\mathcal{A}_0 = \Big\{ \prod_{i=1}^p \varphi_i : \varphi_i \text{ sistema de coordenadas em } M_i,\ i = 1, \ldots, p \Big\}.$$

Mostremos que $\mathcal{A}_0$ é um atlas de classe C^k em M. Em primeiro lugar, é fácil ver que os domínios dos elementos de $\mathcal{A}_0$ cobrem M. Agora dados:

$$\varphi = \prod_{i=1}^p \varphi_i : \prod_{i=1}^p U_i \longrightarrow \prod_{i=1}^p \widetilde{U}_i, \quad \psi = \prod_{i=1}^p \psi_i : \prod_{i=1}^p V_i \longrightarrow \prod_{i=1}^p \widetilde{V}_i,$$

em $\mathcal{A}_0$, vamos mostrar que φ é C^k-compatível com ψ. Para isso, basta observar que a função de transição de φ para ψ é dada por:

$$\prod_{i=1}^{p} \varphi_i(U_i \cap V_i) \ni (v_1, \ldots, v_p) \longmapsto \big((\psi_1 \circ \varphi_1^{-1})(v_1), \ldots, (\psi_p \circ \varphi_p^{-1})(v_p)\big) \in \prod_{i=1}^{p} \psi_i(U_i \cap V_i),$$

e portanto é um difeomorfismo de classe C^k entre abertos de $I\!R^n$.

Mostramos que $\mathcal{A}_0$ é um atlas de classe C^k em M. Observe agora que, relativamente à topologia produto em M, os elementos de $\mathcal{A}_0$ são homeomorfismos definidos em abertos. Logo, a topologia induzida por $\mathcal{A}_0$ em M é de fato a topologia produto. Daí o atlas maximal $\mathcal{A}$ de classe C^k que contém $\mathcal{A}_0$ satisfaz as condições (iv) e (v) do enunciado do teorema. Como cada M_i é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, segue que a topologia produto em M também é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade; logo $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k.

Mostremos que as projeções $\pi_i : M \to M_i$ são de classe C^k. De fato, dadas cartas $\varphi_j : U_j \subset M_j \to \widetilde{U}_j$, $j = 1, \ldots, p$, então a representação de π_i com respeito às cartas $\varphi = \prod_{j=1}^{p} \varphi_j$ e φ_i é simplesmente a i-ésima projeção $\prod_{j=1}^{p} \widetilde{U}_j \to \widetilde{U}_j$, que é de classe C^∞. Logo π_i é de classe C^k. Isso prova a propriedade (i). Provemos a propriedade (iii) (que obviamente implica a propriedade (ii)). Seja N uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $f : N \to M$ uma função. Defina $f_i = \pi_i \circ f$, $i = 1, \ldots, p$. Se f é de classe C^r então obviamente cada f_i é de classe C^r, pois as projeções π_i são de classe C^r. Suponha agora que cada f_i é de classe C^r e mostremos que f é de classe C^r. Seja $x \in N$ e escolha cartas $\psi : V \to \widetilde{V}$ em N e $\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i$ em M_i, com $x \in V$ e $f_i(x) \in U_i$, $i = 1, \ldots, p$. Trocando ψ pela restrição de ψ a $V \cap \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(U_i)$, se necessário, podemos assumir que $f_i(V) \subset U_i$ para todo i. Como f_i é de classe C^r, temos que a aplicação $\tilde{f}_i = \varphi_i \circ f_i \circ \psi^{-1}$ que representa f_i com respeito às cartas ψ e φ_i é de classe C^r. Agora $f(V) \subset \prod_{i=1}^{p} U_i$ e é fácil ver que a função $\tilde{f}$ que representa f com respeito às cartas ψ e $\prod_{i=1}^{p} \varphi_i$ é dada por:

$$\widetilde{V} \ni v \longmapsto \tilde{f}(v) = \big(\tilde{f}_1(v), \ldots, \tilde{f}_p(v)\big) \in \prod_{i=1}^{p} \widetilde{U}_i.$$

Logo $\tilde{f}$ é de classe C^r e portanto (como $x \in N$ é arbitrário) também f é de classe C^r.

Para completar a demonstração, falta apenas verificar a unicidade de $\mathcal{A}$ com respeito às propriedades (i) e (ii). Seja $\mathcal{A}'$ uma estrutura diferenciável de classe C^k em M tal que $(M, \mathcal{A}')$ é uma variedade diferenciável e tal que as propriedades (i) e (ii) são satisfeitas. Considere a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}')$. Como $\mathcal{A}$ satisfaz (i), segue que $\pi_i \circ \mathrm{Id}$ é de classe C^k para todo i; como $\mathcal{A}'$ satisfaz (ii), segue que Id é de classe C^k. Similarmente, mostra-se que $\mathrm{Id}^{-1} : (M, \mathcal{A}') \to (M, \mathcal{A})$ é de classe C^k. Logo Id é um difeomorfismo de classe C^k e $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. ■

Definição. *A estrutura diferenciável em $M = \prod_{i=1}^{p} M_i$ cuja existência e unicidade é garantida pelo teorema anterior é chamada de* estrutura diferenciável produto *em M.*

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Álgebra Linear`.

1. Seja V um espaço vetorial e seja $V = V_1 \oplus V_2$ uma decomposição em soma direta. Denote por $\pi_1 : V \to V_1$, $\pi_2 : V \to V_2$ as projeções correspondentes. Mostre que um subespaço $W \subset V$ é tal que $V = V_1 \oplus W$ se e somente se a restrição de π_2 a W é um isomorfismo sobre V_2.

[*dica*: a parte "somente se" segue do resultado do Exercício 1 da aula número 2].

2. Seja V um espaço vetorial e sejam $V_1, V_2 \subset V$ subespaços. Mostre que $V_1 \cup V_2$ é um subespaço de V se e somente se $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.

`Sistemas de Coordenadas`.

3. Sejam $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$, $\lambda : W \to \widetilde{W}$ sistemas de coordenadas num conjunto M. Assuma que φ é C^k-compatível com ψ, ψ é C^k-compatível com λ e que $U = V$. Mostre que φ é C^k-compatível com λ.

[*dica*: use o resultado do Exercício 2 da aula número 3].

`Topologia de Variedades`.

4. Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas em M. Mostre que se para todos $x, y \in M$ existe um sistema de coordenadas $\varphi \in \mathcal{A}$ cujo domínio contém x e y então a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M é Hausdorff.

5. Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas em M. Mostre que se $\mathcal{A}$ contém um atlas enumerável para M então a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

[*dica*: mostre o seguinte resultado de topologia: se um espaço topológico X é união enumerável de abertos que satisfazem o segundo axioma da enumerabilidade então X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade].

Aula número 6 (29/08)

(1) **O espaço tangente**.

Na aula número 4 nós definimos o conceito de função de classe C^k entre variedades diferenciáveis M, N; no entanto, nós não definimos o que é *a diferencial* de uma função $f: M \to N$ de classe C^1. Uma idéia natural seria a de definir a diferencial de f num ponto $x \in M$ como sendo a diferencial no ponto $\varphi(x)$ de uma representação $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f em cartas φ e ψ. Essa idéia é essencialmente correta, mas precisa ser aprimorada; ocorre que a diferencial de $\tilde{f}$ depende da escolha das cartas φ e ψ, e não apenas de f. O problema aqui é que precisamos primeiramente descobrir o tipo de objeto correto que deve ser a diferencial de f no ponto x. Se $f : U \to I\!R^n$ é uma função diferenciável num aberto $U \subset I\!R^m$ então a diferencial de f num ponto $x \in U$ é um operador linear $\mathrm{d}f(x) : I\!R^m \to I\!R^n$. Uma interpretação geométrica para esse operador linear pode ser obtida da seguinte forma. Tomamos uma curva diferenciável $\gamma : \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\to I\!R^m$ com imagem contida em U e $\gamma(0) = x$. A imagem de γ por f, i.e., $f \circ \gamma$, é uma curva diferenciável em $I\!R^n$ que passa por $f(x)$ no instante 0. Daí, se v é o vetor tangente a γ no instante 0, temos que $\mathrm{d}f(x) \cdot v$ é o vetor tangente a $f \circ \gamma$ no instante 0.

Vejamos agora o que ocorre no caso de funções entre superfícies regulares em $I\!R^3$. Recorde (dos cursos elementares de geometria diferencial) que uma *superfície regular* em $I\!R^3$ é um subconjunto $S \subset I\!R^3$ tal que todo $x \in S$ possui uma vizinhança aberta $A \subset I\!R^3$ tal que $A \cap S$ é a imagem de uma imersão $X : U \subset I\!R^2 \to I\!R^3$ de classe C^∞ definida num aberto $U \subset I\!R^2$ e tal que $X : U \to A \cap S$ é um homeomorfismo. A aplicação X é chamada uma *parametrização* de S em torno de x (na terminologia que estudaremos adiante, veremos que uma superfície regular em $I\!R^3$ é o mesmo que uma subvariedade de dimensão 2 de $I\!R^3$ e que a aplicação $X^{-1} : A \cap S \to U$ é uma carta na variedade S).

Dada uma função diferenciável $f : S_1 \to S_2$, onde $S_1, S_2 \subset I\!R^3$ são superfícies regulares então queremos que a diferencial de f num ponto $x \in S_1$ satisfaça a identidade:

$$\mathrm{d}f(x) \cdot \gamma'(0) = (f \circ \gamma)'(0),$$

para toda curva diferenciável γ *em* S_1 com $\gamma(0) = x$ (observe que $f \circ \gamma$ é uma curva diferenciável *em* S_2 com $(f \circ \gamma)(0) = f(x)$). Que tipo de objeto será então a diferencial de f no ponto x? Para responder a essa pergunta, recorde que o conjunto:

$$T_xS = \big\{\gamma'(0) : \gamma \text{ curva diferenciável em } S \text{ com } \gamma(0) = x\big\}$$

é conhecido como o *plano tangente* à superfície regular S no ponto x. Se X é uma parametrização de S em torno de x com $X(u, v) = x$ então T_xS coincide com a imagem da diferencial $\mathrm{d}X(u, v)$ (i.e., os vetores $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \in I\!R^3$ formam uma base de T_xS) e portanto T_xS é um subespaço vetorial bidimensional de $I\!R^3$. Espera-se então que a diferencial $\mathrm{d}f(x)$ seja um operador linear definido em T_xS_1 e tomando valores em $T_{f(x)}S_2$.

`Observação`: o plano tangente a uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ num ponto $x \in S$ é muitas vezes visualizado como sendo o plano paralelo a T_xS passando por x. Ocorre que é mais conveniente para a teoria que T_xS seja um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e não um subespaço afim.

Dadas variedades diferenciáveis M, N, o que podemos dizer sobre a diferencial num ponto $x \in M$ de uma aplicação $f : M \to N$ de classe C^1? Ela deve ser um operador linear definido num espaço vetorial associado a M e a x e tomando valores num espaço vetorial associado a N e a $f(x)$. O espaço vetorial T_xM associado a M e a x (que será chamado o *espaço tangente* a M no ponto x) deve ter um papel análogo ao papel do plano tangente a uma superfície regular. O plano tangente a uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial do ambiente $\mathbb{R}^3$ onde a superfície está; ocorre que uma variedade diferenciável M não vive em geral dentro de um espaço $\mathbb{R}^N$ e portanto não devemos esperar obter T_xM como um subespaço de algum $\mathbb{R}^N$.

Para obter a definição correta de espaço tangente a uma variedade, observamos primeiramente que se X é uma parametrização de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ com $X(u, v) = x \in S$ então a diferencial $\mathrm{d}X(u, v)$ fornece um isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ e T_xS. Se $Y = X \circ \alpha$ é uma outra parametrização de S, onde α é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^2$ com $\alpha(u', v') = (u, v)$, então o isomorfismo $\mathrm{d}Y(u', v') : \mathbb{R}^2 \to T_xS$ determinado pela parametrização Y difere do isomorfismo $\mathrm{d}X(u, v) : \mathbb{R}^2 \to T_xS$ determinado pela parametrização X por $\mathrm{d}\alpha(u', v')$; mais precisamente:

$$\mathrm{d}X(u, v)^{-1} \circ \mathrm{d}Y(u', v') = \mathrm{d}\alpha(u', v').$$

Dito de outra maneira: a matriz de mudança de base de $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$ para $\frac{\partial Y}{\partial u'}(u', v')$, $\frac{\partial Y}{\partial v'}(u', v')$ é a matriz Jacobiana de α no ponto (u', v').

Motivados pelas propriedades do plano tangente a uma superfície regular, vamos axiomatizar algumas propriedades que devemos esperar do espaço tangente a uma variedade diferenciável. Estamos interessados numa regra $\mathcal{T}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e x é um ponto de M então $\mathcal{T}(M, x)$ é um espaço vetorial real com dimensão igual à dimensão de M;

(2) se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, x é um ponto de M e se $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas em M com $x \in U$ então $\mathcal{T}(\varphi, x) : \mathcal{T}(M, x) \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, onde $n = \dim(M)$;

(3) se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, x é um ponto de M e se $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ são sistemas de coordenadas em M $(n = \dim(M))$ com $x \in U \cap V$ então $\mathcal{T}(\psi, x) \circ \mathcal{T}(\varphi, x)^{-1} = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)$, i.e., o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T}(M,x) \arrow[dl, "\mathcal{T}(\varphi,x)"'] \arrow[dr, "\mathcal{T}(\psi,x)"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\mathrm{d}(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))"'] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Note que a propriedade (3) nos diz que a função de transição entre os isomorfismos $\mathcal{T}(\varphi, x)$ e $\mathcal{T}(\psi, x)$ é a linearização da função de transição entre as cartas φ e ψ.

Nosso objetivo agora é demonstrar a existência e a unicidade de uma regra $\mathcal{T}$ satisfazendo as propriedades (1), (2) e (3). A filosofia aqui é que não importa o que seja o espaço tangente, importa apenas os axiomas que o caracterizam. Esta é uma situação análoga à que aparece no início de cursos de Análise Real. Tudo que importa saber sobre os números reais é que eles constituem um corpo ordenado completo; a escolha de uma particular construção para os números reais (usando classes de equivalência de seqüências de Cauchy de números racionais ou usando cortes de Dedekind) não é de fato importante e a apresentação de uma tal construção serve apenas para mostrar a consistência dos axiomas de corpo ordenado completo com a teoria dos conjuntos.

Vamos começar provando a unicidade de $\mathcal{T}$. Em primeiro lugar, devemos esclarecer o que isso significa. Não estamos falando de unicidade no sentido literal, mas de unicidade a menos de isomorfismos. Mas o que é um isomorfismo entre regras $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$? Um isomorfismo entre regras $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ não deve ser apenas um isomorfismo entre os espaços $\mathcal{T}(M, x)$ e $\mathcal{T}'(M, x)$; tal isomorfismo deve também relacionar $\mathcal{T}(\varphi, x)$ e $\mathcal{T}'(\varphi, x)$. A definição precisa é dada a seguir.

Definição. *Duas regras $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ satisfazendo (1), (2) e (3) são ditas* isomorfas *se para cada variedade diferenciável M de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e para cada $x \in M$ existir um isomorfismo $\rho_{M,x} : \mathcal{T}(M, x) \to \mathcal{T}'(M, x)$, de modo que para todo sistema de coordenadas $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ em M com $x \in U$ tenhamos $\mathcal{T}'(\varphi, x) \circ \rho_{M,x} = \mathcal{T}(\varphi, x)$, i.e., o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(M,x) \arrow[rr, "\rho_{M,x}"] \arrow[dr, "\mathcal{T}(\varphi,x)"'] & & \mathcal{T}'(M,x) \arrow[dl, "\mathcal{T}'(\varphi,x)"] \\
& \mathbb{R}^n &
\end{tikzcd}$$

deve ser comutativo.

Teorema. *Quaisquer regras $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ satisfazendo as propriedades (1), (2) e (3) são isomorfas.*

Demonstração. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $x \in M$. Dado um sistema de coordenadas $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ em M com $x \in U$ definimos um isomorfismo $\rho_{M,x,\varphi} : \mathcal{T}(M, x) \to \mathcal{T}'(M, x)$ fazendo $\rho_{M,x,\varphi} = \mathcal{T}'(\varphi, x)^{-1} \circ \mathcal{T}(\varphi, x)$. Daí obviamente $\mathcal{T}'(\varphi, x) \circ \rho_{M,x,\varphi} = \mathcal{T}(\varphi, x)$. Para completar a demonstração, basta verificar que $\rho_{M,x,\varphi}$ não depende de φ (de modo que podemos definir $\rho_{M,x} = \rho_{M,x,\varphi}$, com φ escolhido arbitrariamente). Seja então $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ um outro sistema de coordenadas em M com $x \in V$. Definindo $\lambda = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)$ então, pela propriedade (3) satisfeita por $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ temos:

$$\mathcal{T}(\psi, x) = \lambda \circ \mathcal{T}(\varphi, x), \quad \mathcal{T}'(\psi, x) = \lambda \circ \mathcal{T}'(\varphi, x);$$

portanto:

$$\begin{aligned}
\rho_{M,x,\psi} &= \mathcal{T}'(\psi, x)^{-1} \circ \mathcal{T}(\psi, x) = \big[\mathcal{T}'(\varphi, x)^{-1} \circ \lambda^{-1}\big] \circ \big[\lambda \circ \mathcal{T}(\varphi, x)\big] \\
&= \mathcal{T}'(\varphi, x)^{-1} \circ \mathcal{T}(\varphi, x) = \rho_{M,x,\varphi}.
\end{aligned}$$

Isso completa a demonstração. ■

Devemos agora mostrar a existência de uma regra $\mathcal{T}$ satisfazendo as propriedades (1), (2) e (3). Esse trabalho será feito nas duas próximas seções. Na seção 2 apresentamos uma construção para $\mathcal{T}$ motivada pela idéia geométrica que o espaço tangente a uma variedade M num ponto x deve coincidir com o conjunto dos "vetores tangentes" $\gamma'(0)$ a todas as curvas γ em M de classe C^1 com $\gamma(0) = x$ (compare com a definição de plano tangente a uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$). Na seção 3 apresentamos uma construção para $\mathcal{T}$ que pode ser vista como uma simples tradução para o formalismo matemático dos axiomas (1), (2) e (3).

(2) **Construindo o espaço tangente usando curvas**.

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja dado $x \in M$. Nesta seção, entendemos por uma *curva em M passando por x* uma aplicação $\gamma : I \to M$ de classe C^k com $\gamma(0) = x$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo a origem. Denotamos por $\mathcal{C}(M,x)$ o conjunto de todas as curvas em M passando por x. Dizemos que duas curvas $\gamma, \mu \in \mathcal{C}(M,x)$ são *tangentes* se existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ em M com $x \in U$ e tal que $(\varphi\circ\gamma)'(0) = (\varphi\circ\mu)'(0)$ (note que, como γ e μ são contínuas e $U \subset M$ é aberto, temos que as compostas $\varphi\circ\gamma$ e $\varphi\circ\mu$ são definidas numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}$). Observamos que, se γ e μ são tangentes então temos $(\psi\circ\gamma)'(0) = (\psi\circ\mu)'(0)$ *para toda* carta $\psi : V \to \widetilde{V}$ em M com $x \in V$. De fato, como $\psi\circ\gamma = \big(\psi\circ\varphi^{-1}\big)\circ(\varphi\circ\gamma)$ e $\psi\circ\mu = \big(\psi\circ\varphi^{-1}\big)\circ(\varphi\circ\mu)$, segue da regra da cadeia que:

$$(\psi\circ\gamma)'(0) = \mathrm{d}\big(\psi\circ\varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)\cdot(\varphi\circ\gamma)'(0) = \mathrm{d}\big(\psi\circ\varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)\cdot(\varphi\circ\mu)'(0) = (\psi\circ\mu)'(0).$$

É fácil ver que a relação $\sim$ em $\mathcal{C}(M,x)$ definida por:

$$\gamma \sim \mu \Longleftrightarrow \gamma \text{ é tangente a } \mu,$$

é uma relação de equivalência em $\mathcal{C}(M,x)$. Defina:

$$\mathcal{T}(M,x) = \mathcal{C}(M,x)/{\sim},$$

e para cada $\gamma \in \mathcal{C}(M,x)$ denote por $[\gamma] \in \mathcal{T}(M,x)$ a classe de equivalência determinada por γ.

Se $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é um sistema de coordenadas em M com $x \in U$ então temos uma aplicação $\mathcal{T}(\varphi,x)$ definida por:

$$\mathcal{T}(\varphi,x) : \mathcal{T}(M,x) \ni [\gamma] \longmapsto (\varphi\circ\gamma)'(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Segue diretamente da definição da relação de equivalência $\sim$ que $\mathcal{T}(\varphi,x)$ é realmente bem definida e é também injetora. Afirmamos que $\mathcal{T}(\varphi,x)$ é sobrejetora. De fato, dado $v \in \mathbb{R}^n$ então, como $\widetilde{U}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\varphi(x) \in \widetilde{U}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(x) + tv \in \widetilde{U}$ para todo $t \in \,]-\varepsilon,\varepsilon[$. Defina $\gamma : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \to M$ fazendo:

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) + tv\big), \quad t \in \,]-\varepsilon,\varepsilon[\,.$$

Daí γ é de classe C^k (pois $\varphi \circ \gamma$ é de classe C^∞), $\gamma(0) = x$ e obviamente $(\varphi \circ \gamma)'(0) = v$. Logo $\mathcal{T}(\varphi, x)\big([\gamma]\big) = v$. Isso prova que $\mathcal{T}(\varphi, x)$ é sobrejetora.

Devemos agora definir uma estrutura de espaço vetorial real no conjunto $\mathcal{T}(M, x)$. Como $\mathcal{T}(\varphi, x)$ é uma bijeção, existe uma única estrutura de espaço vetorial real em $\mathcal{T}(M, x)$ (de dimensão n) tal que $\mathcal{T}(\varphi, x)$ é um isomorfismo (veja aula número 3). Mostraremos agora que se $\psi : V \to \widetilde{V}$ é um sistema de coordenadas em M com $x \in V$ então:

$$\mathcal{T}(\psi, x) \circ \mathcal{T}(\varphi, x)^{-1} = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big).$$

Isso mostrará ao mesmo tempo que $\mathcal{T}$ tem a propriedade (3) e o fato que $\mathcal{T}(\varphi, x)$ e $\mathcal{T}(\psi, x)$ induzem a mesma estrutura de espaço vetorial real em $\mathcal{T}(M, x)$ (pois $\mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)$ é um isomorfismo). Para mostrar a igualdade acima, seja $v \in \mathbb{R}^n$ e seja $\gamma \in \mathcal{C}(M, x)$ tal que $\mathcal{T}(\varphi, x)\big([\gamma]\big) = v$; daí:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\psi, x)\big[\mathcal{T}(\varphi, x)^{-1}(v)\big] &= \mathcal{T}(\psi, x)\big([\gamma]\big) = (\psi \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0)\\ &= \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \cdot v,\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade acima usamos o fato que $\psi \circ \gamma = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$.

Provamos então que a regra $\mathcal{T}$ satisfaz as propriedades (1), (2) e (3) da seção 1.

(3) **Construindo o espaço tangente usando sistemas de coordenadas**.

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja dado $x \in M$. Consideramos o conjunto $\mathcal{E}(M, x)$ formado por todos os pares (φ, v), onde $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas em M com $x \in U$ e v é um vetor de $\mathbb{R}^n$. Definimos a seguinte relação $\sim$ em $\mathcal{E}(M, x)$:

$$(\varphi, v) \sim (\psi, w) \Longleftrightarrow \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \cdot v = w.$$

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato, a reflexividade segue de:

$$\mathrm{d}\big(\varphi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{d}(\mathrm{Id})\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{Id};$$

a simetria segue das igualdades:

$$\mathrm{d}\big(\varphi \circ \psi^{-1}\big)\big(\psi(x)\big) = \mathrm{d}\Big[\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)^{-1}\Big]\big(\psi(x)\big) = \Big[\mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)\Big]^{-1},$$

(recorde que a diferencial do inverso de um difeomorfismo f é dada por $\mathrm{d}f^{-1}(z) = \mathrm{d}f\big(f^{-1}(z)\big)^{-1}$). Finalmente, a transitividade de $\sim$ segue das igualdades:

$$\mathrm{d}\big(\lambda \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{d}\big[\big(\lambda \circ \psi^{-1}\big) \circ \big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big]\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{d}\big(\lambda \circ \psi^{-1}\big)\big(\psi(x)\big) \circ \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big).$$

Deixamos a verificação dos detalhes a cargo do leitor.

Definimos agora:

$$\mathcal{T}(M, x) = \mathcal{E}(M, x)/\!\sim,$$

e denotamos por $[\varphi, v] \in \mathcal{T}(M, x)$ a classe de equivalência de um par (φ, v). Para cada sistema de coordenadas $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ em M com $x \in U$, consideramos a aplicação:

$$\mathbb{R}^n \ni v \longmapsto [\varphi, v] \in \mathcal{T}(M, x). \tag{$*$}$$

Afirmamos que $(*)$ é uma bijeção. De fato, dados $v, w \in \mathbb{R}^n$ com $[\varphi, v] = [\varphi, w]$ então $(\varphi, v) \sim (\varphi, w)$ e portanto $w = \mathrm{d}\big(\varphi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \cdot v = v$, o que mostra que $(*)$ é injetora. Dado um elemento arbitrário $[\psi, w] \in \mathcal{T}(M, x)$, onde $\psi : V \to \widetilde{V}$ é um sistema de coordenadas em M com $x \in V$ e $w \in \mathbb{R}^n$, devemos agora encontrar $v \in \mathbb{R}^n$ com $[\varphi, v] = [\psi, w]$, i.e., $(\varphi, v) \sim (\psi, w)$. Para isso, basta tomar:

$$v = \big[\mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)\big]^{-1} \cdot w.$$

Mostramos então que $(*)$ é bijetora. A bijeção $\mathcal{T}(\varphi, x) : \mathcal{T}(M, x) \to \mathbb{R}^n$ é definida agora como sendo a inversa de $(*)$. Vamos agora mostrar que se $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ são sistemas de coordenadas em M com $x \in U \cap V$ então:

$$\mathcal{T}(\psi, x) \circ \mathcal{T}(\varphi, x)^{-1} = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big).$$

Como na seção anterior, isso mostrará simultaneamente a propriedade (3) de $\mathcal{T}$ e que a estrutura de espaço vetorial induzida por $\mathcal{T}(\varphi, x)$ em $\mathcal{T}(M, x)$ não depende de φ. Seja $v \in \mathbb{R}^n$. Temos $\mathcal{T}(\varphi, x)^{-1}(v) = [\varphi, v]$ e $\mathcal{T}(\psi, x)\big([\varphi, v]\big) = w \in \mathbb{R}^n$, onde $[\varphi, v] = [\psi, w]$. Mas $[\varphi, v] = [\psi, w]$ implica $(\varphi, v) \sim (\psi, w)$ e portanto:

$$w = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \cdot v,$$

pela definição da relação $\sim$.

Isso completa a demonstração do fato que $\mathcal{T}$ satisfaz as propriedades (1), (2) e (3) da seção 1.

Aula número 7 (10/09)

(1) **A diferencial de uma função entre duas variedades diferenciáveis**.

Na última aula discutimos a noção de espaço tangente a uma variedade diferenciável. Estamos aptos agora a definir a diferencial de uma função entre duas variedades diferenciáveis. Antes de tudo, temos as seguintes:

`Notações e Definições`: *a partir de agora consideramos que foi escolhida uma regra $\mathcal{T}$ satisfazendo as propriedades (1), (2) e (3) da seção 1 da aula número 6. Para cada variedade diferenciável M de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e para cada $x \in M$, o espaço vetorial real $\mathcal{T}(M, x)$ será chamado o* espaço tangente *a M no ponto x e será denotado por T_xM. Se $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas em M com $x \in U$ então o isomorfismo $\mathcal{T}(\varphi, x) : \mathcal{T}(M, x) \to \mathbb{R}^n$ será chamado o* isomorfismo induzido *pela carta φ e será denotado por $\overline{\varphi}_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$.*

A notação T_xM é a notação definitiva para o espaço tangente. A notação $\overline{\varphi}_x$ é provisória, pois depois que definirmos a diferencial de uma função entre variedades, veremos que o isomorfismo $\overline{\varphi}_x$ identifica-se com a diferencial da carta φ no ponto x (veja último Lema da seção 2).

Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : M \to N$ uma função de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. Como foi discutido na aula número 6, para cada $x \in M$, a diferencial de f no ponto x deve ser um operador linear $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$. Para defini-lo, consideramos a diferencial de uma representação $\tilde{f}$ de f em sistemas de coordenadas e usamos os isomorfismos induzidos por esses sistemas de coordenadas entre os espaços tangentes e os espaços Euclideanos para transferir a diferencial de $\tilde{f}$ para os espaços tangentes apropriados. A definição precisa é dada a seguir.

Definição. *Escolha cartas $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ em M e $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ em N com $x \in U$ e $f(U) \subset V$ (e portanto $f(x) \in V$). Seja $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ a representação de f nas cartas φ e ψ (note que $\tilde{f}$ é de classe C^k).* A diferencial de f no ponto x *é o operador linear $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ definido por:*

$$\mathrm{d}f(x) = \big(\overline{\psi}_{f(x)}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x; \tag{$*$}$$

em outras palavras, $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ é o único operador linear tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_xM \arrow[r, "\mathrm{d}f(x)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}_x"', "\cong"] & T_{f(x)}N \arrow[d, "\cong"', "\overline{\psi}_{f(x)}"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathrm{d}\tilde{f}(\varphi(x))"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Para justificar a definição acima, é necessário demonstrar que $\mathrm{d}f(x)$ não depende da escolha das cartas φ e ψ.

Sejam $\Phi : U_1 \to \widetilde{U}_1 \subset I\!R^m$ e $\Psi : V_1 \to \widetilde{V}_1 \subset I\!R^n$ cartas em M e em N, respectivamente, com $x \in U_1$ e $f(U_1) \subset V_1$. Seja $\tilde{f}_1 = \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ a representação de f nas cartas Φ e Ψ. Devemos mostrar que:

$$\big(\overline{\psi}_{f(x)}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x = \big(\overline{\Psi}_{f(x)}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\tilde{f}_1\big(\Phi(x)\big) \circ \overline{\Phi}_x. \tag{1}$$

Seja $\alpha = \Phi \circ \varphi^{-1}$ a função de transição de φ para Φ e seja $\beta = \Psi \circ \psi^{-1}$ a função de transição de ψ para Ψ. Temos que a igualdade:

$$\tilde{f}_1 = \beta \circ \tilde{f} \circ \alpha^{-1}$$

é válida na vizinhança aberta $\Phi(U \cap U_1)$ de $\Phi(x)$. Diferenciando a igualdade acima dos dois lados no ponto $\Phi(x)$ e usando a regra da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{f}_1\big(\Phi(x)\big) &= \mathrm{d}\beta\big(\psi\big(f(x)\big)\big) \circ \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) \circ \mathrm{d}(\alpha^{-1})\big(\Phi(x)\big) \\ &= \mathrm{d}\beta\big(\psi\big(f(x)\big)\big) \circ \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) \circ \mathrm{d}\alpha\big(\varphi(x)\big)^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

A propriedade (3) (seção 1, aula número 6) satisfeita pelo espaço tangente nos dá:

$$\overline{\Phi}_x = \mathrm{d}\alpha\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x, \quad \overline{\Psi}_{f(x)} = \mathrm{d}\beta\big(\psi\big(f(x)\big)\big) \circ \overline{\psi}_{f(x)}. \tag{3}$$

A igualdade (1) segue então diretamente de (2) e (3). Logo a noção de diferencial para uma função entre duas variedades diferenciáveis está bem definida.

`Observação`: algumas construções específicas para o espaço tangente permitem uma definição mais direta para $\mathrm{d}f(x)$, sem usar cartas. Por exemplo, a construção do espaço tangente usando curvas (seção 2, aula número 6) nos permite definir $\mathrm{d}f(x)\big([\gamma]\big) = [f \circ \gamma]$ (verifique que essa definição coincide de fato com a definição usando cartas que demos nesta seção!).

Definição. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, $f : M \to N$ uma função de classe C^k, $x \in M$ e $v \in T_xM$. A* derivada direcional *de f no ponto x e na direção de v é definida por:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \mathrm{d}f(x) \cdot v \in T_{f(x)}N.$$

De modo similar ao Cálculo no $I\!R^n$, temos o seguinte:

Teorema. *(regra da cadeia para variedades) Sejam M, N, P variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e sejam $f : M \to N$, $g : N \to P$ funções de classe C^k. Para todo $x \in M$ temos:*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x).$$

Demonstração. Sejam $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$, $\lambda : W \to \widetilde{W}$ cartas em M, N, P respectivamente, com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e $g(V) \subset W$. Se $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ denota a representação de f nas cartas φ e ψ e se $\tilde{g} = \lambda \circ g \circ \psi^{-1}$ denota a representação de g nas cartas ψ e λ então $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \lambda \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ é a representação de $g \circ f$ nas cartas φ e λ. Pela definição de diferencial de uma função entre duas variedades, temos:

$$\mathrm{d}f(x) = \big(\overline{\psi}_{f(x)}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x, \quad \mathrm{d}g\big(f(x)\big) = \big(\overline{\lambda}_{g(f(x))}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\tilde{g}\big(\psi\big(f(x)\big)\big) \circ \overline{\psi}_{f(x)},$$

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \big(\overline{\lambda}_{g(f(x))}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}(\tilde{g} \circ \tilde{f})\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x.$$

A conclusão segue das igualdades acima, observando que:

$$\mathrm{d}(\tilde{g} \circ \tilde{f})\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{d}\tilde{g}\big(\tilde{f}\big(\varphi(x)\big)\big) \circ \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big)$$

e que $\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) = \psi\big(f(x)\big)$. ■

(2) **Algumas observações importantes sobre o espaço tangente**.

Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular e se Z é um aberto de S então Z também é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$; além do mais, para todo $x \in Z$ temos que os planos tangentes a Z e a S no ponto x coincidem. Se M é uma variedade diferenciável e Z é um aberto de M então, dado $x \in Z$, os espaços tangentes T_xZ e T_xM não são rigorosamente iguais; na verdade, a validade de tal igualdade depende da escolha de construção para o espaço tangente que foi feita. Por exemplo, no caso da construção do espaço tangente usando curvas (seção 2, aula número 6), os conjuntos $\mathcal{C}(M,x)$ de curvas em M passando por x e $\mathcal{C}(Z,x)$ de curvas em Z passando por x não são iguais. Em primeiro lugar, um elemento $\gamma \in \mathcal{C}(M,x)$ tem contra-domínio M e um elemento $\gamma \in \mathcal{C}(Z,x)$ tem contra-domínio Z; além do mais, existem curvas em M passando por x cuja imagem não está contida em Z. Mas, se $\gamma : I \to M$ é uma curva em M passando por x então existe um intervalo aberto $J \subset I$ contendo a origem tal que $\gamma(J) \subset Z$; obviamente γ e $\gamma|_J$ são tangentes, i.e., definem a mesma classe de equivalência em T_xM. Ocorre então que existe um isomorfismo natural entre T_xZ e T_xM. Tal isomorfismo é simplesmente a diferencial da aplicação inclusão $Z \to M$. Esse fato é estabelecido abaixo, sem menção explícita a uma construção para o espaço tangente.

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $Z \subset M$ um aberto. Então, para todo $x \in Z$, a diferencial da aplicação inclusão $i : Z \to M$ no ponto x é um isomorfismo de T_xZ sobre T_xM.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em Z com $x \in U$. Daí φ também é uma carta em M. A representação $\tilde{i}$ de i com respeito às cartas φ e φ é a aplicação identidade do aberto $\widetilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$; logo $\mathrm{d}\tilde{i}\big(\varphi(x)\big)$ é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$. Denote temporariamente por $\overline{\varphi}_x^M : T_xM \to \mathbb{R}^n$ e $\overline{\varphi}_x^Z : T_xZ \to \mathbb{R}^n$ os isomorfismos induzidos pela carta φ nas variedades M e Z, respectivamente (a notação adotada no início da seção anterior é ambígua nesse caso, pois φ é uma carta tanto na variedade M como na variedade Z, mas os isomorfismos induzidos $T_xM \to \mathbb{R}^n$ e $T_xZ \to \mathbb{R}^n$ não são iguais). Pela definição de $\mathrm{d}i(x)$, temos:

$$\mathrm{d}i(x) = \big(\overline{\varphi}_x^M\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\tilde{i}\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x^Z = \big(\overline{\varphi}_x^M\big)^{-1} \circ \overline{\varphi}_x^Z.$$

Como $\overline{\varphi}_x^M$ e $\overline{\varphi}_x^Z$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}i(x)$ também é um isomorfismo. ■

Estamos em condições de adotar agora a seguinte:

`Convenção`: se M é uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e se Z é um aberto de M então, para todo $x \in Z$, identificamos o espaço tangente T_xZ com o espaço tangente T_xM através do isomorfismo dado pela diferencial da inclusão $Z \to M$ no ponto x. No que segue então, trabalharemos como se $T_xZ = T_xM$ e se a diferencial da inclusão $Z \to M$ no ponto x fosse a aplicação identidade de T_xM.

`Observação`: seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $Z \subset M$ um aberto. Dada uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ em Z (de modo que φ é também uma carta em M) então, para todo $x \in U$, a carta φ induz isomorfismos $\overline{\varphi}_x^M : T_xM \to I\!R^n$ e $\overline{\varphi}_x^Z : T_xZ \to I\!R^n$. Vimos na demonstração do Lema acima que $\mathrm{d}i(x) = \big(\overline{\varphi}_x^M\big)^{-1} \circ \overline{\varphi}_x^Z$, onde $i : Z \to M$ denota a inclusão. Em vista da convenção acima, $T_xM = T_xZ$ e $\mathrm{d}i(x)$ é a aplicação identidade de T_xM; segue então que $\overline{\varphi}_x^M = \overline{\varphi}_x^Z$, i.e., o isomorfismo $\overline{\varphi}_x : T_xM = T_xZ \to I\!R^n$ induzido pela carta φ é o mesmo, quer consideremos φ como carta em M, quer consideremos φ como carta em Z.

`Observação`: seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e sejam $Z_1, Z_2 \subset M$ abertos com $Z_1 \subset Z_2$. Denote por $i_1 : Z_1 \to M$, $i_2 : Z_2 \to M$, $i_{12} : Z_1 \to Z_2$ as aplicações inclusão. Dado $x \in Z_1$ então, pela convenção acima, identificamos T_xZ_2 com T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_2(x)$ e identificamos T_xZ_1 com T_xZ_2 através do isomorfismo $\mathrm{d}i_{12}(x)$ (já que Z_1 é um aberto na variedade Z_2). Ambas essas identificações implicam na identificação de T_xZ_1 com T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_2(x) \circ \mathrm{d}i_{12}(x)$. Ao mesmo tempo, temos uma identificação de T_xZ_1 com T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_1(x)$. Afirmamos que os isomorfismos $\mathrm{d}i_2(x) \circ \mathrm{d}i_{12}(x)$ e $\mathrm{d}i_1(x)$ coincidem; de fato, basta observar que $i_1 = i_2 \circ i_{12}$ e aplicar a regra da cadeia.

Em vista da convenção acima, temos também o seguinte resultado sobre a diferencial da restrição de uma aplicação a um aberto.

Lema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$ abertos e $f : M \to N$ uma função de classe C^k tal que $f(M_1) \subset N_1$. Se $f_1 : M_1 \to N_1$ denota a restrição de f então, para todo $x \in M_1$, temos $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f_1(x)$.*

Demonstração. Se $i : M_1 \to M$, $j : N_1 \to N$ denotam as aplicações de inclusão então $j \circ f_1 = f \circ i$. A conclusão segue então da regra da cadeia, observando que, em vista da convenção acima, $\mathrm{d}i(x)$ é a aplicação identidade de T_xM e $\mathrm{d}j\big(f(x)\big)$ é a aplicação identidade de $T_{f(x)}N$. ■

Como o conjunto dos vetores tangentes $\gamma'(0)$ às curvas γ em $I\!R^n$ passando por um certo ponto $x \in I\!R^n$ coincide com o próprio $I\!R^n$, é natural esperar que tenhamos alguma identificação entre o espaço tangente $T_xI\!R^n$ da variedade $I\!R^n$ e o espaço vetorial $I\!R^n$. Mais geralmente, se V é um espaço vetorial real de dimensão finita então V é uma variedade diferenciável (veja Exemplo da seção 3 da aula número 3) e é natural esperar que exista uma identificação natural entre T_xV e V, para todo $x \in V$. De fato, se o espaço tangente é construído usando curvas (seção 2, aula número 6) então tal isomorfismo é dado por $T_xV \ni [\gamma] \mapsto \gamma'(0) \in V$, onde $\gamma'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t}$. No lema a seguir, estabelecemos um isomorfismo entre T_xV e V sem fazer referência explícita a uma construção para o espaço tangente.

Lema. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n < +\infty$ e seja $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo (então φ é uma carta na variedade V). Para cada $x \in V$, o isomorfismo $\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}_x : T_xV \to V$ não depende de φ, i.e., se $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ é um outro isomorfismo então:*

$$\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}_x = \psi^{-1} \circ \overline{\psi}_x.$$

Demonstração. Sejam $\varphi, \psi : V \to \mathbb{R}^n$ isomorfismos. Para cada $x \in V$, a propriedade (3) (seção 1, aula número 6) satisfeita pelo espaço tangente nos dá:

$$\overline{\psi}_x = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x.$$

Como $\psi \circ \varphi^{-1}$ é linear, temos $\mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) = \psi \circ \varphi^{-1}$ e portanto:

$$\overline{\psi}_x = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}_x.$$

Logo $\psi^{-1} \circ \overline{\psi}_x = \varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}_x$. ■

Estamos em condições de adotar agora a seguinte:

`Convenção`: se V é um espaço vetorial real de dimensão $n < +\infty$ então, para todo $x \in V$, identificamos o espaço tangente T_xV da variedade V com o próprio espaço vetorial V através do isomorfismo $\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}_x : T_xV \to V$, onde $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo arbitrário (como vimos no Lema acima, $\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}_x$ não depende de φ). No que segue então, trabalharemos como se $T_xV = V$ e se $\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}_x$ fosse a aplicação identidade de V. Note que, em vista dessa convenção, o isomorfismo induzido $\overline{\varphi}_x : T_xV = V \to \mathbb{R}^n$ por uma carta linear $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ coincide com a própria carta φ.

`Observação`: como caso particular da convenção acima, identificamos $T_x\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, através do isomorfismo $\overline{\mathrm{Id}}_x : T_x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na variedade $\mathbb{R}^n$. Trabalharemos então como se $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e como se $\overline{\mathrm{Id}}_x : T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fosse a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

`Observação`: devemos agora esclarecer a ambigüidade que existe entre a noção de diferencial de funções em variedades e a de diferencial de funções no espaço Euclideano. Mais explicitamente, se V, W são espaços vetoriais reais de dimensão finita e se $f : Z \to W$ é uma aplicação de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ definida num aberto $Z \subset V$ então, para todo $x \in Z$, temos uma noção de diferencial para f no ponto x estudada em cursos de Cálculo no $\mathbb{R}^n$ que nos dá um operador linear $\mathrm{d}f(x) : V \to W$. Temos também a noção de diferencial para f no ponto x obtida considerando o aberto Z em V e o espaço vetorial W como variedades diferenciáveis; denotemos temporariamente essa segunda noção de diferencial por $\mathrm{D}f(x) : T_xZ \to T_{f(x)}W$. Em vista das convenções feitas nesta seção, temos que $T_xZ = T_xV = V$ e $T_{f(x)}W = W$. Vamos mostrar agora que $\mathrm{D}f(x) = \mathrm{d}f(x)$. Sejam $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$, $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ isomorfismos. Vamos calcular $\mathrm{D}f(x)$ usando as cartas $\varphi_0 = \varphi|_Z : Z \to \varphi(Z)$ na variedade Z e a carta ψ na variedade W; temos:

$$\mathrm{D}f(x) = \big(\overline{\psi}_{f(x)}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{(\varphi_0)}_x,$$

onde $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}$. Usando a regra da cadeia do Cálculo no $\mathbb{R}^n$ e observando que φ e ψ são lineares, obtemos:

$$\mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) = \psi \circ \mathrm{d}f(x) \circ \varphi^{-1}.$$

Pela convenção acima, temos $\overline{\psi}_{f(x)} = \psi$. A igualdade $\mathrm{D}f(x) = \mathrm{d}f(x)$ ficará demonstrada então se verificarmos que o isomorfismo $\overline{(\varphi_0)}_x : T_x Z \to \mathbb{R}^n$ coincide com φ. Isso depende de dois fatos. Em primeiro lugar, pela primeira observação desta seção, o isomorfismo $\overline{(\varphi_0)}_x : T_x Z \to \mathbb{R}^n$ induzido por φ_0 vista como carta na variedade Z coincide com o isomorfismo $\overline{(\varphi_0)}_x : T_x V \to \mathbb{R}^n$ induzido por φ_0 vista como carta na variedade V. Além do mais, segue do resultado do Exercício 1 que as cartas φ_0 e φ na variedade V induzem o mesmo isomorfismo de $T_x V$ sobre $\mathbb{R}^n$. Logo $\overline{(\varphi_0)}_x = \overline{\varphi}_x = \varphi$.

Agora que identificamos $T_x\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$, podemos apresentar a seguinte:

Definição. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to M$ uma aplicação de classe C^k. Dado $x \in U$ então a i-*ésima derivada parcial* ($i = 1, \ldots, n$) de f no ponto x é o vetor $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in T_{f(x)}M$ definido por:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \mathrm{d}f(x) \cdot e_i,$$

onde e_i denota o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se I é um aberto em $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to M$ é uma aplicação de classe C^k (quando I é um intervalo, dizemos que γ é uma curva de classe *C^k em M) então, para $t \in I$, o* vetor tangente *a γ no instante t é o vetor $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ definido por:*

$$\gamma'(t) = \mathrm{d}\gamma(t) \cdot 1.$$

O vetor tangente $\gamma'(t)$ também é denotado por $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)$.

Note que se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma função de classe C^k então a linearidade de $\mathrm{d}f(x)$ implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \mathrm{d}f(x) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i,$$

para todo $x \in U$ e todo $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Provemos agora o resultado que dará fim ao uso da notação provisória $\overline{\varphi}_x$ para o isomorfismo induzido por uma carta φ no espaço tangente $T_x M$.

Lema. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e suponha que $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ seja um sistema de coordenadas em M. Então, para todo $x \in U$, temos que a diferencial $\mathrm{d}\varphi(x) : T_x U = T_x M \to T_{\varphi(x)}\widetilde{U} = T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ coincide com o isomorfismo induzido $\overline{\varphi}_x : T_x M \to \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observamos que para calcular a diferencial $\mathrm{d}\varphi(x)$, podemos considerar φ como uma aplicação com contra-domínio em $\mathbb{R}^n$, em vez de $\widetilde{U}$ (veja o segundo Lema desta seção). Calculamos então $\mathrm{d}\varphi(x)$ usando a carta φ na variedade U e a carta $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na variedade $\mathbb{R}^n$. A representação $\widetilde{\varphi}$ da aplicação φ nas cartas φ

e Id é a aplicação de inclusão do aberto $\widetilde{U}$ em $\mathbb{R}^n$; logo $\mathrm{d}\widetilde{\varphi}\big(\varphi(x)\big)$ é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$. A diferencial de φ no ponto x é dada então por:

$$\mathrm{d}\varphi(x) = \big(\overline{\mathrm{Id}}_{\varphi(x)}\big)^{-1} \circ \mathrm{d}\widetilde{\varphi}\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x = \big(\overline{\mathrm{Id}}_{\varphi(x)}\big)^{-1} \circ \overline{\varphi}_x.$$

Vimos acima que o isomorfismo $\overline{\mathrm{Id}}_{\varphi(x)} : T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta linear $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ coincide com $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Além do mais, pela primeira observação desta seção, o isomorfismo $\overline{\varphi}_x : T_xU \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta φ da variedade U coincide com o isomorfismo $\overline{\varphi}_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta φ da variedade M. Isso completa a demonstração. ■

`Observação`: *a partir de agora abandonamos a notação provisória $\overline{\varphi}_x$ para o isomorfismo induzido pela carta φ; em vista do Lema anterior, usaremos $\mathrm{d}\varphi(x)$ em vez de $\overline{\varphi}_x$.*

`Observação`: agora a fórmula $(*)$ (veja seção 1) que originalmente foi usada para definir a diferencial de uma função entre duas variedades pode ser vista como uma conseqüência da regra da cadeia em variedades e do Lema acima.

(3) **O espaço tangente a um produto cartesiano; derivadas parciais de funções em variedades**.

Estabelecemos agora um isomorfismo entre o espaço tangente a um produto cartesiano de variedades e a soma direta dos espaços tangentes dos fatores.

Teorema. *Sejam $M_1, \ldots, M_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $M = \prod_{i=1}^p M_i$ seu produto cartesiano (munido da estrutura diferenciável produto). Denote por $\pi_i : M \to M_i$, $i = 1, \ldots, p$, a i-ésima projeção. Então, para todo $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M$, a aplicação:*

$$\rho : T_xM \ni v \longmapsto \big(\mathrm{d}\pi_1(x) \cdot v, \ldots, \mathrm{d}\pi_p(x) \cdot v\big) \in \bigoplus_{i=1}^p T_{x_i}M_i,$$

é um isomorfismo entre T_xM e a soma direta $\bigoplus_{i=1}^p T_{x_i}M_i$.

Demonstração. Seja $\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ um sistema de coordenadas em M_i com $x_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, p$; seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ o sistema de coordenadas em M definido por $\varphi = \prod_{i=1}^p \varphi_i$, onde $U = \prod_{i=1}^p U_i$, $\widetilde{U} = \prod_{i=1}^p \widetilde{U}_i$ e $n = \sum_{i=1}^p n_i$. Daí $x \in U$. Denote por $\widetilde{\pi}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i}$ a i-ésima projeção do produto $\mathbb{R}^n = \prod_{j=1}^p \mathbb{R}^{n_j}$. Para todo $i = 1, \ldots, p$, temos $\varphi_i \circ \pi_i|_U = \widetilde{\pi}_i \circ \varphi$. Diferenciando essa igualdade no ponto $x \in M$ e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$\mathrm{d}\varphi_i(x_i) \circ \mathrm{d}\pi_i(x) = \widetilde{\pi}_i \circ \mathrm{d}\varphi(x), \quad i = 1, \ldots, p,$$

já que $\mathrm{d}\widetilde{\pi}_i\big(\varphi(x)\big) = \widetilde{\pi}_i$. A igualdade acima implica que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_xM \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{d}\varphi(x)"'] & \bigoplus_{i=1}^p T_{x_i}M_i \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \prod_{i=1}^p \mathbb{R}^{n_i}
\end{tikzcd}$$

é comutativo, onde σ é definido por $\sigma(v_1, \ldots, v_p) = \big(\mathrm{d}\varphi_1(x_1) \cdot v_1, \ldots, \mathrm{d}\varphi_p(x_p) \cdot v_p\big)$. Como $\mathrm{d}\varphi_i(x_i)$ é um isomorfismo para todo $i = 1, \ldots, p$, segue facilmente que σ é um isomorfismo; como $\mathrm{d}\varphi(x)$ também é um isomorfismo, segue que $\rho = \sigma^{-1} \circ \mathrm{d}\varphi(x)$ é um isomorfismo. ■

Estamos em condições de adotar agora a seguinte:

`Convenção`: a partir de agora sempre usaremos o isomorfismo ρ definido no enunciado do Teorema acima para identificar o espaço tangente T_xM a um produto $M = \prod_{i=1}^p M_i$ com a soma direta $\bigoplus_{i=1}^p T_{x_i} M_i$, onde $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M$. Sob essa identificação a diferencial $\mathrm{d}\pi_i(x)$ da i-ésima projeção $\pi_i : M \to M_i$ é identificada com a i-ésima projeção $\bigoplus_{j=1}^p T_{x_j} M_j \to T_{x_i} M_i$.

Em vista da convenção acima temos o seguinte:

Lema. *Sejam $M_1, \ldots, M_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $M = \prod_{i=1}^p M_i$ seu produto cartesiano. Dada uma variedade diferenciável N de classe C^k, uma aplicação $f = (f_1, \ldots, f_p) : N \to M$ de classe C^k e um ponto $y \in N$ então:*

$$\mathrm{d}f(y) \cdot v = \big(\mathrm{d}f_1(y) \cdot v, \ldots, \mathrm{d}f_p(y) \cdot v\big) \in \bigoplus_{i=1}^p T_{f_i(y)} M_i,$$

para todo $v \in T_yN$.

Demonstração. Se $\pi_i : M \to M_i$ denota a i-ésima projeção então $f_i = \pi_i \circ f$. Diferenciando essa igualdade no ponto y e usando a regra da cadeia obtemos:

$$\mathrm{d}f_i(y) = \mathrm{d}\pi_i\big(f(y)\big) \circ \mathrm{d}f(y).$$

A conclusão segue do fato que $\mathrm{d}\pi_i\big(f(y)\big)$ coincide com a i-ésima projeção da soma direta $T_{f(y)}M = \bigoplus_{j=1}^p T_{f_j(y)} M_j$. ■

Lema. *Sejam $M_1, \ldots, M_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $M = \prod_{i=1}^p M_i$ seu produto cartesiano. Dado $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M$, defina uma aplicação $\mathfrak{i} : M_i \to M$ fazendo $\mathfrak{i}(y) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_p)$, para todo $y \in M_i$. Então $\mathfrak{i}$ é uma aplicação de classe C^k e sua diferencial no ponto $x_i \in M_i$ é a inclusão de $T_{x_i} M_i$ na soma direta $\bigoplus_{j=1}^p T_{x_j} M_j$, ou seja:*

$$\mathrm{d}\mathfrak{i}(x_i) : T_{x_i} M_i \ni v \longmapsto (0, \ldots, v, \ldots, 0) \in \bigoplus_{j=1}^p T_{x_j} M_j.$$

Demonstração. Para $j = 1, \ldots, n$, denote por $\pi_j : M \to M_j$ a j-ésima projeção. Então, para $j \ne i$, temos que $\pi_j \circ \mathfrak{i}$ é uma aplicação constante; pelo resultado do Exercício 4, $\pi_j \circ \mathfrak{i}$ é de classe C^k e $\mathrm{d}(\pi_j \circ \mathfrak{i})(x_i) = 0$. Temos também que $\pi_i \circ \mathfrak{i}$ é a aplicação identidade de M_i; pelo resultado do Exercício 3, $\pi_i \circ \mathfrak{i}$ é de classe C^k e $\mathrm{d}(\pi_i \circ \mathfrak{i})(x_i)$ é a aplicação identidade de $T_{x_i} M_i$. A conclusão segue do Lema anterior. ■

Corolário. *Sejam M_1, ..., M_p variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $M = \prod_{i=1}^p M_i$ seu produto cartesiano. Dada uma aplicação $f : M \to N$ de classe C^k, tomando valores numa variedade N de classe C^k, e dado $x = (x_1, \dots, x_p) \in M$ então a aplicação $g : M_i \to N$ definida por $g(y) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p)$, para todo $y \in M_i$, é de classe C^k e sua diferencial no ponto x_i coincide com a restrição a $T_{x_i}M_i$ da diferencial de f no ponto x, ou seja:*

$$\mathrm{d}g(x) \cdot v = \mathrm{d}f(x) \cdot (0, \dots, v, \dots, 0),$$

para todo $v \in T_{x_i}M_i$.

Demonstração. Defina $\mathfrak{i}$ como no Lema anterior e observe que $g = f \circ \mathfrak{i}$; a conclusão segue do Lema e da regra da cadeia. ■

Definição. *Dada uma aplicação $f : M = \prod_{i=1}^p M_i \to N$ de classe C^k, onde M_1, ..., M_p, N são variedades de classe C^k então, para todo $x = (x_1, \dots, x_p) \in M$, a restrição a $T_{x_i}M_i$ da diferencial $\mathrm{d}f(x)$ é denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) : T_{x_i}M_i \to T_{f(x)}N$ e é chamada a* i-ésima derivada parcial *de f no ponto x.*

Observe que a linearidade de $\mathrm{d}f(x)$ implica que:

$$\mathrm{d}f(x) \cdot (v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i,$$

para todo $(v_1, \dots, v_p) \in \bigoplus_{i=1}^p T_{x_i}M_i$.

(4) **Alguns teoremas básicos do cálculo; imersões e submersões**.

Demonstraremos agora a versão para variedades diferenciáveis de alguns resultados básicos do Cálculo no $\mathbb{R}^n$.

Lema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : M \to N$ um difeomorfismo de classe C^k. Então, para todo $x \in M$, a diferencial de f no ponto x é um isomorfismo de T_xM sobre $T_{f(x)}N$ e $\mathrm{d}f(x)^{-1} = \mathrm{d}(f^{-1})\big(f(x)\big)$.*

Demonstração. Basta aplicar a regra da cadeia para diferenciar a igualdade $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ no ponto x e a igualdade $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ no ponto $f(x)$ (veja também o Exercício 3). ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : M \to N$ um difeomorfismo local de classe C^k. Então, para todo $x \in M$, a diferencial de f no ponto x é um isomorfismo de T_xM sobre $T_{f(x)}N$.*

Demonstração. Seja $U \subset M$ uma vizinhança aberta de x tal que $f(U)$ é aberto em N e $f|_U : U \to f(U)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Temos que $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}(f|_U)(x)$. A conclusão segue do Lema anterior. ■

Teorema. *(da função inversa para variedades) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $f : M \to N$ uma função de classe C^k. Se $x \in M$ é tal que $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ é um isomorfismo (em particular $\dim(M) = \dim(N)$) então existe um aberto $Z \subset M$ contendo x tal que $f(Z)$ é aberto em N e $f|_Z : Z \to f(Z)$ é um difeomorfismo de classe C^k.*

Demonstração. Sejam $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ cartas em M e em N respectivamente, com $x \in U$ e $f(U) \subset V$. Seja $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ a representação de f nas cartas φ e ψ. Daí $\tilde{f} : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^k e pela regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) &= \mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}(\varphi^{-1})\big(\varphi(x)\big) \\ &= \mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big)$ e $\mathrm{d}\varphi(x)$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema da Função Inversa do Cálculo no $\mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança aberta Z_0 de $\varphi(x)$ em $\widetilde{U}$ tal que $\tilde{f}(Z_0) \subset \widetilde{V}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\tilde{f}|_{Z_0} : Z_0 \to \tilde{f}(Z_0)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Tome $Z = \varphi^{-1}(Z_0)$. Daí Z é aberto em M, $x \in Z$, $f(Z) = \psi^{-1}\big(\tilde{f}(Z_0)\big)$ é aberto em N e $f|_Z : Z \to f(Z)$ é um difeomorfismo de classe C^k, pois:

$$f|_Z = \big(\psi^{-1}|_{\tilde{f}(Z_0)}\big) \circ \big(\tilde{f}|_{Z_0}\big) \circ \big(\varphi|_Z\big). \blacksquare$$

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $f : M \to N$ uma função de classe C^k. Se $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ é um isomorfismo para todo $x \in M$ então f é um difeomorfismo local de classe C^k. Em particular, se f é injetora então f é um difeomorfismo de classe C^k sobre $f(M)$, que é um aberto de N.* $\blacksquare$

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $f : M \to N$ uma função de classe C^k. O conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $\mathrm{d}f(x)$ é um isomorfismo é aberto em M.*

Demonstração. De fato, se $\mathrm{d}f(x)$ é um isomorfismo e se Z é a vizinhança aberta de x dada pelo Teorema da Função Inversa então $\mathrm{d}f(y)$ é um isomorfismo para todo $y \in Z$. $\blacksquare$

Na verdade, o corolário acima pode ser demonstrado sem usar o Teorema da Função Inversa (veja Exercício 5).

Definição. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $f : M \to N$ uma função de classe C^k. Dizemos que f é uma* imersão no ponto $x \in M$ *(resp., uma* submersão no ponto $x \in M$*) se a diferencial $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ é injetora (resp., sobrejetora). Se f é uma imersão (resp., submersão) em todo ponto $x \in M$ então dizemos simplesmente que f é uma* imersão *(resp.,* submersão*).*

Teorema. *(forma local das imersões para variedades) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Suponha que f é uma imersão num ponto $x \in M$. Então, dada uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ em M com $x \in U$, existem uma carta $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ em N e uma vizinhança aberta $U' \subset U$ de x com $f(U') \subset V$ e tal que a representação de f com respeito às cartas $\varphi|_{U'}$ e ψ é dada por:*

$$\psi\big(f\big(\varphi^{-1}(v_1, \ldots, v_m)\big)\big) = (v_1, \ldots, v_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ zeros}}), \quad (v_1, \ldots, v_m) \in \varphi(U').$$

Demonstração. Seja $\psi_1 : V_1 \to \widetilde{V}_1 \subset \mathbb{R}^n$ uma carta arbitrária em N com $f(x) \in V_1$ e escolha uma vizinhança aberta U_1 de x em M com $U_1 \subset U$ e $f(U_1) \subset V_1$. Seja:

$$\tilde{f} = \psi_1 \circ f \circ \big(\varphi|_{U_1}\big)^{-1} : \varphi(U_1) \longrightarrow \widetilde{V}_1 \subset \mathbb{R}^n$$

a representação de f com respeito às cartas $\varphi|_{U_1}$ e ψ_1. Daí $\tilde{f}$ é uma função de classe C^k; pela regra da cadeia, temos:

$$\mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{d}\psi_1\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}.$$

Como $\mathrm{d}\psi_1\big(f(x)\big)$ e $\mathrm{d}\varphi(x)$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big)$ é injetora, i.e., $\tilde{f}$ é uma imersão no ponto $\varphi(x)$. Pela forma local das imersões do Cálculo no $\mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança aberta $U_0' \subset \varphi(U_1)$ de $\varphi(x)$ em $\mathbb{R}^m$ e um difeomorfismo $\alpha : W \to W'$ de classe C^k entre abertos $W, W' \subset \mathbb{R}^n$ de modo que $\tilde{f}(U_0') \subset W$ e:

$$\alpha\big(\tilde{f}(v_1, \ldots, v_m)\big) = (v_1, \ldots, v_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ zeros}}),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in U_0'$. Para completar a demonstração, basta tomar $U' = \varphi^{-1}(U_0')$, $V = \psi_1^{-1}(\widetilde{V}_1 \cap W)$, $\psi = \alpha \circ \psi_1|_V$, $\widetilde{V} = \alpha(\widetilde{V}_1 \cap W)$ e observar que $\psi\big(f\big(\varphi^{-1}(v)\big)\big) = \alpha\big(\tilde{f}(v)\big)$, para todo $v \in \varphi(U') = U_0'$. ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Então o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que f é uma imersão em x é aberto em M.*

Demonstração. Na notação do enunciado da forma local das imersões, temos que se f é uma imersão em x então f é uma imersão em y para todo $y \in U'$, pois $\psi \circ f \circ (\varphi|_{U'})^{-1}$ é uma imersão em $\varphi(y)$ e as cartas φ e ψ são difeomorfismos. ■

O corolário acima pode também ser demonstrado sem usar a forma local das imersões (veja Exercício 5).

Teorema. *(forma local das submersões para variedades) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Suponha que f é uma submersão num ponto $x \in M$. Então, dada uma carta $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ em N com $f(x) \in V$, existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ em M com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e tal que a representação de f com respeito às cartas φ e ψ é dada por:*

$$\psi\big(f\big(\varphi^{-1}(v_1, \ldots, v_m)\big)\big) = (v_1, \ldots, v_n), \quad (v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{U}.$$

Demonstração. Seja $\varphi_1 : U_1 \to \widetilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^m$ uma carta arbitrária em M com $x \in U_1$ e $f(U_1) \subset V$. Seja $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \widetilde{U}_1 \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ a representação de f nas cartas φ_1 e ψ. Então $\tilde{f}$ é uma aplicação de classe C^k e:

$$\mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi_1(x)\big) = \mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}\varphi_1(x)^{-1};$$

logo $\mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi_1(x)\big)$ é sobrejetora, i.e., $\tilde{f}$ é uma submersão no ponto $\varphi_1(x)$. Pela forma local das submersões do Cálculo no $\mathbb{R}^n$, existe um difeomorfismo $\alpha : W \to W'$ de classe C^k entre abertos $W, W' \subset \mathbb{R}^m$ de modo que $\varphi_1(x) \in W \subset \widetilde{U}_1$ e:

$$\tilde{f}\big(\alpha^{-1}(v_1, \ldots, v_m)\big) = (v_1, \ldots, v_n),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in W'$. Para completar a demonstração, basta tomar $U = \varphi_1^{-1}(W)$, $\varphi = \alpha \circ \varphi_1|_U$, $\widetilde{U} = W'$ e observar que $\psi\big(f\big(\varphi^{-1}(v)\big)\big) = \tilde{f}\big(\alpha^{-1}(v)\big)$, para todo $v \in \widetilde{U} = W'$. ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Então o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que f é uma submersão em x é aberto em M.*

Demonstração. Na notação do enunciado da forma local das submersões, temos que se f é uma submersão em x então f é uma submersão em y para todo $y \in U$, pois $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é uma submersão em $\varphi(y)$ e as cartas φ e ψ são difeomorfismos. ■

O corolário acima pode também ser demonstrado sem usar a forma local das submersões (veja Exercício 5).

Definição. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e $f : M \to N$ uma função de classe C^k. O* posto *de f num ponto $x \in M$ é definido como sendo o posto do operador linear $\mathrm{d}f(x)$, i.e., a dimensão da imagem de $\mathrm{d}f(x)$.*

Teorema. *(do posto para variedades) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Suponha que f tem posto igual a r em todos os pontos de M. Então, dado $x \in M$, existem cartas $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ em M e $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ em N com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e tal que a representação de f nas cartas φ e ψ é dada por:*

$$\psi\big(f\big(\varphi^{-1}(v_1, \ldots, v_m)\big)\big) = (v_1, \ldots, v_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r \text{ zeros}}), \quad (v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{U}.$$

Demonstração. Sejam $\varphi_1 : U_1 \to \widetilde{U}_1 \subset I\!R^m$, $\psi : V_1 \to \widetilde{V}_1 \subset I\!R^n$ cartas arbitrárias em M e em N respectivamente, com $x \in U_1$ e $f(U_1) \subset V_1$. Seja $\tilde{f} = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ a representação de f nas cartas φ_1 e ψ_1. Daí $\tilde{f}$ é de classe C^k e para todo $v \in \widetilde{U}_1$ temos:

$$\mathrm{d}\tilde{f}(v) = \mathrm{d}\psi_1\big(f\big(\varphi_1^{-1}(v)\big)\big) \circ \mathrm{d}f\big(\varphi_1^{-1}(v)\big) \circ \mathrm{d}\varphi_1^{-1}(v);$$

como $\mathrm{d}\psi_1\big(f\big(\varphi_1^{-1}(v)\big)\big)$ e $\mathrm{d}\varphi_1^{-1}(v)$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}\tilde{f}(v)$ tem posto r para todo $v \in \widetilde{U}_1$. Pelo Teorema do Posto do Cálculo no $I\!R^n$, existem abertos $W, W' \subset I\!R^m$, $Z, Z' \subset I\!R^n$ e difeomorfismos $\alpha : W \to W'$, $\beta : Z \to Z'$ de classe C^k, de modo que $\varphi_1(x) \in W \subset \widetilde{U}_1$, $\tilde{f}(W) \subset Z$ e:

$$\beta\big(\tilde{f}\big(\alpha^{-1}(v_1, \ldots, v_m)\big)\big) = (v_1, \ldots, v_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r \text{ zeros}}),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in W'$. Para completar a demonstração, basta tomar $U = \varphi_1^{-1}(W)$, $\varphi = \alpha \circ \varphi_1|_U$, $\widetilde{U} = W'$, $V = \psi_1^{-1}(\widetilde{V}_1 \cap Z)$, $\psi = \beta \circ \psi_1|_V$, $\widetilde{V} = \beta(\widetilde{V}_1 \cap Z)$ e observar que $\psi\big(f\big(\varphi^{-1}(v)\big)\big) = \beta\big(\tilde{f}\big(\alpha^{-1}(v)\big)\big)$, para todo $v \in \widetilde{U} = W'$. ■

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Espaço tangente`.

1. Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em M e V um aberto de M contido em U. Mostre que, para todo $x \in V$, o isomorfismo $\overline{\varphi}_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta φ coincide com o isomorfismo $\overline{(\varphi_0)}_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta $\varphi_0 = \varphi|_V : V \to \varphi(V)$.

[*dica*: observe que a função de transição de φ_0 para φ é a aplicação identidade do aberto $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$; use a propriedade (3) (seção 1, aula número 6) satisfeita pelo espaço tangente].

2. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k. Escolha $l \le k$ com $l \ge 1$ e denote por M' a variedade diferenciável de classe C^l cuja estrutura diferenciável de classe C^l é definida pelo único atlas maximal de classe C^l que contém o atlas maximal de classe C^k que define a estrutura diferenciável de M. Seja dado $x \in M$. O objetivo deste exercício é estabelecer um isomorfismo entre T_xM e T_xM'.
   (a) Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em M com $x \in U$; daí φ é também uma carta em M'. Denote por $\overline{\varphi}_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ o isomorfismo induzido por φ, vista como carta na variedade M e denote por $\overline{\varphi}'_x : T_xM' \to \mathbb{R}^n$ o isomorfismo induzido por φ, vista como carta na variedade M'. Mostre que o isomorfismo $\big(\overline{\varphi}'_x\big)^{-1} \circ \overline{\varphi}_x : T_xM \to T_xM'$ não depende da escolha da carta φ.

[*dica*: se $\psi : V \to \widetilde{V}$ é outra carta em M com $x \in V$ então, pela propriedade (3) (seção 1, aula número 6) satisfeita pelo espaço tangente, temos que $\overline{\psi}_x = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}_x$ e $\overline{\psi}'_x = \mathrm{d}\big(\psi \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) \circ \overline{\varphi}'_x$].

   (b) Usando a construção para o espaço tangente em termos de curvas (seção 2, aula número 6), mostre que o isomorfismo entre T_xM e T_xM' definido pelo item (a) leva a classe de equivalência determinada por uma curva γ em M na classe de equivalência determinada pela mesma curva γ em M'.

`Observação`: identificaremos sempre os espaços tangentes T_xM e T_xM' através do isomorfismo descrito acima.

`Diferencial de funções`.

3. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $\mathrm{Id} : M \to M$ a aplicação identidade. Mostre que $\mathrm{d}(\mathrm{Id})(x)$ é a aplicação identidade de T_xM para todo $x \in M$.

4. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($0 \le k \le \infty$). Mostre que uma aplicação constante $f : M \to N$ é de classe C^k. Se $k \ge 1$, mostre que $\mathrm{d}f(x) = 0$, para todo $x \in M$.

5. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Sejam $m = \dim(M)$, $n = \dim(N)$ e $r = \min\{m, n\}$. Mostre que o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que f tem posto r em x é aberto na variedade M.

[*dica*: observe primeiro que o conjunto dos operadores lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de posto r é aberto em $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$; note agora que se $\tilde{f}$ é uma representação de f em coordenadas então $u \mapsto \mathrm{d}\tilde{f}(u) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação contínua].

6. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Mostre que se $\mathrm{d}f(x) = 0$ para todo $x \in M$ e se M é conexa então f é constante.

[*dica*: mostre que, dado $y \in N$ então $f^{-1}(y)$ é aberto e fechado em M; para mostrar que $f^{-1}(y)$ é aberto em M, use uma representação de f em cartas e o fato que uma função definida numa bola do espaço Euclideano com diferencial nula em todo ponto é constante].

7. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um aberto, M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, e $\gamma : I \to M$, $f : M \to N$ funções de classe C^k. Mostre que $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$, para todo $t \in I$.

[*dica*: use a regra da cadeia e o fato que $\gamma'(t) = \mathrm{d}\gamma(t) \cdot 1$].

`Produtos de variedades.`

8. Sejam $V_1, \ldots, V_p$ espaços vetoriais reais de dimensão finita. Considere o produto cartesiano $V = \prod_{i=1}^p V_i$ munido da estrutura usual de espaço vetorial produto (i.e., $V \cong \bigoplus_{i=1}^p V_i$). Mostre que a estrutura de variedade canônica do espaço vetorial real V coincide com a estrutura de variedade produto em V (onde cada V_i tem sua estrutura de variedade canônica).

[*dica*: note que se $\varphi_i : V_i \to \mathbb{R}^{n_i}$ é um isomorfismo então $\varphi = \prod_{i=1}^p \varphi_i : V \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, onde $n = \sum_{i=1}^p n_i$].

9. Sejam $M_1, \ldots, M_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $Z_i \subset M_i$ um aberto, $i = 1, \ldots, p$. Mostre que se $M = \prod_{i=1}^p M_i$ e $Z = \prod_{i=1}^p Z_i$ são munidos da estrutura de variedade produto então o aberto $Z \subset M$ possui a estrutura de variedade induzida de M.

[*dica*: se φ_i é uma carta em Z_i então $\prod_{i=1}^p \varphi_i$ é uma carta em Z tanto na estrutura de variedade produto como na estrutura de variedade induzida de M].

Aula número 8 (12/09)

A aula número 8 cobriu o material das Seções (3) e (4) originalmente destinado à aula número 7.

Aula número 9 (17/09)

(1) **Inversas laterais**.

Nesta seção estudamos o problema (local) de existência de inversas laterais diferenciáveis para funções diferenciáveis em variedades. O problema de determinar quais morfismos possuem inversos laterais (i.e., à esquerda ou à direita) é em geral um problema interessante em diversas categorias (nos Exercícios 1, 4, 7, 9—12 discutimos esse problema nas categorias dos conjuntos, dos espaços vetoriais, dos módulos sobre um anel fixado e dos espaços topológicos).

Definição. *Sejam X, Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que $g : Y \to X$ é uma* inversa à esquerda *para f se $g \circ f$ é igual à aplicação identidade de X, i.e., se $g\big(f(x)\big) = x$ para todo $x \in X$. Dizemos que $g : Y \to X$ é uma* inversa à direita *para f se $f \circ g$ é igual à aplicação identidade de Y, i.e., se $f\big(g(y)\big) = y$ para todo $y \in Y$.*

Temos a seguinte condição necessária para a existência de uma inversa à esquerda de classe C^k para uma aplicação de classe C^k entre variedades:

Lema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Se f possui uma inversa à esquerda de classe C^1 (i.e., se existe $g : N \to M$ de classe C^1 com $g \circ f = \mathrm{Id}$) então f é uma imersão injetora.*

Demonstração. Pelo resultado do Exercício 1, temos que f é injetora. Provemos que f é uma imersão. Seja $g : N \to M$ uma inversa à esquerda de classe C^1 para f. Como g é de classe C^1, podemos diferenciar a igualdade $g \circ f = \mathrm{Id}$ num ponto $x \in M$ usando a regra da cadeia para obter:

$$\mathrm{d}g\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) = \mathrm{Id} : T_xM \longrightarrow T_xM.$$

Logo a diferencial $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ possui uma inversa à esquerda. Segue então que $\mathrm{d}f(x)$ é injetora, i.e., f é uma imersão no ponto x. ■

Podemos na verdade melhorar um pouco o Lema acima, obtendo uma condição necessária mais forte para a existência de uma inversa à esquerda de classe C^k. Temos a seguinte:

Definição. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é um* mergulho de classe C^k *se f é uma imersão de classe C^k e se a aplicação $f : M \to f(M)$ é um homeomorfismo (onde $f(M)$ é munida da topologia induzida de N).*

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Se f possui uma inversa à esquerda de classe C^1 então f é um mergulho.*

Demonstração. Vimos no Lema acima que f é uma imersão injetora. Além do mais, se $g : N \to M$ é uma inversa à esquerda de classe C^1 para f então a inversa da bijeção $f : M \to f(M)$ coincide com $g|_{f(M)} : f(M) \to M$, que é uma aplicação contínua. Logo $f : M \to f(M)$ é um homeomorfismo. ■

Nem toda imersão injetora é um mergulho, como se vê no seguinte:
`Exemplo`: considere a aplicação $f : \left]-1, +\infty\right[\to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (t^3 - t, t^2)$. Então f é de classe C^∞ e $f'(t) = (3t^2 - 1, 2t) \neq 0$ para todo $t \in \left]-1, +\infty\right[$. Logo f é uma imersão (por que?). Verifica-se facilmente também que f é injetora; mas f não é um mergulho. De fato, se $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $\left]-1, +\infty\right[$ que converge para -1 então $\big(f(t_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $\mathrm{Im}(f)$ que converge para $(0,1) = f(1)$. Temos então que $p_n = f(t_n) \to (0,1)$ mas $t_n = f^{-1}(p_n) \not\to f^{-1}(0,1)$. Isso mostra que a aplicação $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \left]-1, +\infty\right[$ não é contínua no ponto $(0,1)$.

Não é verdade em geral que todo mergulho de classe C^k possui um inverso à esquerda de classe C^1. Existem obstruções topológicas não triviais para a existência de tal inverso (veja Exercícios 9—11). Temos, no entanto, um resultado local.

Teorema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : M \to N$ uma imersão de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Então, para todo $x \in M$ existem abertos $U \subset M$, $V \subset N$ com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e de modo que a aplicação $f|_U : U \to V$ admite uma inversa à esquerda $g : V \to U$ de classe C^k.*

Demonstração. A idéia da prova é a seguinte. Pela forma local das imersões, f é localmente representada em cartas apropriadas pela aplicação inclusão:

$$\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n;$$

essa inclusão possui uma inversa à esquerda, a saber, a projeção $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por:

$$r(v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \ldots, v_m).$$

Obtém-se então uma inversa local à esquerda para f considerando-se a aplicação g cuja representação nas cartas em questão é (uma restrição apropriada de) r.

Vamos aos detalhes. Sejam $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : V_1 \to \widetilde{V}_1 \subset \mathbb{R}^n$ cartas em M e em N respectivamente de modo que $x \in U$, $f(U) \subset V_1$ e de modo que a representação de f nas cartas φ e ψ seja dada por:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ zeros}}),$$

para todo $(v_1,\ldots,v_m)\in\widetilde U$. Defina $r:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ como acima. Seja $\widetilde V=r^{-1}(\widetilde U)\cap\widetilde V_1$. Então $\widetilde V\subset\widetilde V_1$, $\widetilde V$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ leva $\widetilde U$ em $\widetilde V$ e $r|_{\widetilde V}:\widetilde V\to\widetilde U$ é uma inversa à esquerda de classe C^k para $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\widetilde U\to\widetilde V$. Tomando agora $V=\psi^{-1}(\widetilde V)\subset V_1$ e $g=\varphi^{-1}\circ r\circ\psi|_V:V\to U$ então $V\subset N$ é aberto, $f(U)\subset V$ e $g:V\to U$ é uma inversa à esquerda de classe C^k para $f|_U:U\to V$. ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1\le k\le\infty$) e seja $f:M\to N$ uma imersão de classe C^k. Então todo $x\in M$ possui uma vizinhança aberta $U\subset M$ tal que $f|_U:U\to N$ é um mergulho.*

Demonstração. Pelo Teorema, existem abertos $U\subset M$, $V\subset N$ com $x\in U$, $f(U)\subset V$ e de modo que $f|_U:U\to V$ possui uma inversa à esquerda de classe C^k. Por um Corolário acima, $f|_U:U\to V$ é um mergulho. Logo, também $f|_U:U\to N$ é um mergulho. ■

`Observação`: o Corolário anterior pode ser obtido diretamente da forma local das imersões. Basta observar que a inclusão $\mathbb{R}^m\cong\mathbb{R}^m\times\{0\}^{n-m}\to\mathbb{R}^n$ (assim como qualquer restrição dessa inclusão a abertos de $\mathbb{R}^m$ e de $\mathbb{R}^n$) é um mergulho e que toda imersão é localmente representada em coordenadas apropriadas por uma inclusão como essa.

Vamos agora tratar de inversas à direita. Assim como funções que possuem inversas à esquerda de classe C^1 são imersões, é natural esperar que funções que possuam inversas à direita de classe C^1 sejam submersões. No entanto, não é bem isso que ocorre; se uma aplicação $f:M\to N$ de classe C^1 possui uma inversa à direita $g:N\to M$ de classe C^1 então só podemos concluir que f é uma submersão nos pontos de $\mathrm{Im}(g)$. Para concluir que f é uma submersão devemos então exigir a existência de uma quantidade "grande o suficiente" de inversas à direita g de classe C^1 para f, de modo que as imagens dessas aplicações g cubram M. Mais precisamente, temos o seguinte:

Lema. *Sejam $M\ne\emptyset$, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1\le k\le\infty$) e seja $f:M\to N$ uma aplicação de classe C^k. Se para todo $x_0\in M$ a aplicação f admite uma inversa à direita $g:N\to M$ de classe C^1 tal que $g\big(f(x_0)\big)=x_0$ então f é uma submersão sobrejetora.*

Demonstração. Por hipótese, f admite alguma inversa à direita (aqui usamos que M é não vazia); logo, pelo resultado do Exercício 1, f é sobrejetora. Seja agora $x_0\in M$ e provemos que f é uma submersão no ponto x_0. Seja $g:N\to M$ uma inversa à direita de classe C^1 para f com $g\big(f(x_0)\big)=x_0$. Como g é de classe C^1, podemos diferenciar a igualdade $f\circ g=\mathrm{Id}$ no ponto $f(x_0)$ obtendo:

$$\mathrm{d}f(x_0)\circ\mathrm{d}g\big(f(x_0)\big)=\mathrm{Id}:T_{f(x_0)}N\longrightarrow T_{f(x_0)}N.$$

Logo a diferencial $\mathrm{d}f(x_0):T_{x_0}M\to T_{f(x_0)}N$ possui uma inversa à direita. Segue então que $\mathrm{d}f(x_0)$ é sobrejetora, i.e., f é uma submersão no ponto x_0. ■

Assim como no caso de inversas à esquerda, não é de se esperar que seja verdadeira a recíproca do Lema anterior. Temos, no entanto, uma recíproca local.

Teorema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : M \to N$ uma submersão de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Então, para todo $x \in M$ existem abertos $U \subset M$, $V \subset N$, com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e de modo que a aplicação $f|_U : U \to V$ admite uma inversa à direita $g : V \to U$ de classe C^k satisfazendo $g\big(f(x)\big) = x$.*

Demonstração. A idéia da prova é a seguinte. Pela forma local das submersões, f é localmente representada em coordenadas apropriadas pela projeção $r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nas n primeiras coordenadas de $\mathbb{R}^m$. Usamos então uma inversa à direita de r para obter uma inversa à direita local para f (uma estratégia similar à da demonstração do Teorema anterior). Ocorre que temos uma condição a mais para ser satisfeita pela inversa à direita de r: dado *a priori* um ponto arbitrário $z \in \mathbb{R}^m$, gostaríamos de obter uma inversa à direita $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ para r satisfazendo $s\big(r(z)\big) = z$. Podemos definir s fazendo então:

$$s(v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \ldots, v_n, z_{n+1}, \ldots, z_m).$$

Vamos aos detalhes. Sejam $\varphi : U_1 \to \widetilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : V_1 \to \widetilde{V}_1 \subset \mathbb{R}^n$ cartas em M e em N respectivamente de modo que $x \in U_1$, $f(U_1) \subset V_1$ e de modo que a representação de f nas cartas φ e ψ seja dada por:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_n),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{U}_1$. Seja $z = (z_1, \ldots, z_m) = \varphi(x)$ e defina $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como acima. Note que:

$$s\big[\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(z)\big] = s(z_1, \ldots, z_n) = z. \qquad (*)$$

Queremos agora definir g como sendo uma aplicação cuja representação nas cartas ψ e φ seja uma restrição apropriada de s. Precisamos então trocar o aberto $\widetilde{V}_1$ por um aberto menor $\widetilde{V}$ para garantir que $s(\widetilde{V}) \subset \widetilde{U}_1$; uma idéia natural é tomar $\widetilde{V} = s^{-1}(\widetilde{U}_1) \cap \widetilde{V}_1$. Ocorre que tal escolha não garante que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ leve $\widetilde{U}_1$ em $\widetilde{V}$. O procedimento correto é explicado abaixo.

Escolha abertos $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^{m-n}$ com $(z_1, \ldots, z_n) \in \widetilde{V}$, $(z_{n+1}, \ldots, z_m) \in \widetilde{W}$ e $\widetilde{V} \times \widetilde{W} \subset \widetilde{U}_1$. Note que:

$$\widetilde{V} = \big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(\widetilde{V} \times \widetilde{W}) \subset \widetilde{V}_1.$$

Defina $\widetilde{U} = \widetilde{V} \times \widetilde{W}$. Daí $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ é uma vizinhança aberta de $z = \varphi(x)$ contida em $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto contido em $\widetilde{V}_1$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ leva $\widetilde{U}$ em $\widetilde{V}$ e s leva $\widetilde{V}$ em $\widetilde{U}$. Além do mais, $s|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$ é uma inversa à direita de classe C^k para $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ satisfazendo a condição $(*)$. Para completar a demonstração, tome $U = \varphi^{-1}(\widetilde{U})$, $V = \psi^{-1}(\widetilde{V})$ e $g = \varphi^{-1} \circ s \circ \psi|_V : V \to U$. Daí $U \subset M$, $V \subset N$ são abertos, $x \in U$, $f(U) \subset V$, $g : V \to U$ é uma inversa à direita de classe C^k para $f|_U : U \to V$ e a condição $(*)$ implica que $g\big(f(x)\big) = x$. ■

(2) **Mudança de contra-domínio e passagem ao quociente**.

Estudamos nesta seção os problemas de mudança de contra-domínio e de definição por passagem ao quociente para aplicações diferenciáveis. Algumas questões ligadas aos resultados apresentados nesta seção são discutidas nos Exercícios 2, 3, 5, 6, 8, 13—16.

Teorema. *(princípio de mudança de contra-domínio) Sejam M, N, P variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ e $\phi : M \to N$, $f : P \to N$ aplicações de classe C^k, com ϕ uma imersão. Se $f_0 : P \to M$ é uma aplicação contínua tal que $\phi \circ f_0 = f$, i.e., tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & N \\ P \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_0"'] & M \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

comuta então f_0 é de classe C^k.

Demonstração. Seja dado $p \in P$ e vamos mostrar que f_0 é de classe C^k numa vizinhança aberta de p. Sejam $U \subset M$, $V \subset N$ abertos com $\phi(U) \subset V$, $f_0(p) \in U$ e de modo que $\phi|_U : U \to V$ admita uma inversa à esquerda $\psi : V \to U$ de classe C^k. Observe que para todo $x \in f_0^{-1}(U)$ temos $f(x) = \phi\big(f_0(x)\big) \in V$ e:

$$\psi\big(f(x)\big) = \psi\big(\phi\big(f_0(x)\big)\big) = f_0(x),$$

pois $\psi\big(\phi(y)\big) = y$, para todo $y \in U$. Logo $\psi \circ f|_{f_0^{-1}(U)} = f_0|_{f_0^{-1}(U)}$. Como $\psi \circ f|_{f_0^{-1}(U)}$ é de classe C^k e f_0 *é contínua*, segue que f_0 é de classe C^k numa vizinhança aberta do ponto p. Como $p \in M$ é arbitrário, concluímos que f_0 é de classe C^k. ■

Corolário. *Sejam M, N, P variedades diferenciáveis de classe C^k, $\phi : M \to N$ um mergulho de classe C^k e $f : P \to N$ uma aplicação de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$. Se $f_0 : P \to M$ é uma aplicação tal que $\phi \circ f_0 = f$ então f_0 é de classe C^k.*

Demonstração. Como $\phi : M \to \phi(M)$ é um homeomorfismo, a continuidade de f_0 segue da continuidade de f. Logo f_0 é de classe C^k, pelo Teorema anterior. ■

Teorema. *(princípio de definição por passagem ao quociente) Sejam M, N, P variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$, $q : M \to N$ uma submersão sobrejetora de classe C^k, $f : M \to P$ uma aplicação de classe C^k e $\bar{f} : N \to P$ uma aplicação talque $\bar{f} \circ q = f$, i.e., tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ N \arrow[r, "\bar{f}"'] & P \end{tikzcd}$$

comuta. Então $\bar{f}$ é de classe C^k.

Demonstração. Vamos mostrar que $\bar{f}$ é de classe C^k numa vizinhança aberta de um ponto arbitrário $y \in N$. Como q é sobrejetora, existe $x \in M$ com $q(x) = y$. Sejam então

$U \subset M$, $V \subset N$ abertos com $q(U) \subset V$, $x \in U$ e de modo que $q|_U : U \to V$ admite uma inversa à direita $g : V \to U$ de classe C^k (é possível até escolher g com $g(y) = x$, mas isso não será usado). Daí V é uma vizinhança aberta de $y = q(x)$ em N e para todo $z \in V$ temos:

$$\bar{f}(z) = \bar{f}\big(q\big(g(z)\big)\big) = f\big(g(z)\big),$$

i.e., $\bar{f}|_V = f \circ g$. Logo $\bar{f}$ é de classe C^k numa vizinhança aberta de y. ■

Vimos então que as submersões sobrejetoras tem um papel análogo na "categoria diferenciável" ao das aplicações quocientes na "categoria topológica" (veja Exercício 15). Na verdade, toda submersão sobrejetora é também uma aplicação quociente no sentido topológico, pois toda submersão é uma aplicação aberta (veja Exercícios 17, 18).

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Conjuntos e Funções`.

1. Sejam X, Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma função.
   (a) Supondo $X \neq \emptyset$, mostre que f é injetora se e somente se f admite uma inversa à esquerda.
   (b) Mostre que f é sobrejetora se e somente se f admite uma inversa à direita.
2. Sejam X, Y, Z conjuntos e $f : X \to Z$, $\phi : Y \to Z$ funções, com ϕ injetora. Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Z \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dotted, "f_0"'] & Y \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

   Mostre que existe uma aplicação $f_0 : X \to Y$ tal que o diagrama acima é comutativo (i.e., $\phi \circ f_0 = f$) se e somente se $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(\phi)$. Mostre também que, quando a aplicação f_0 existe, ela é única (dizemos que f_0 é obtida de f por *mudança de contra-domínio*).
3. Sejam X, Y, Z conjuntos e $f : X \to Z$, $q : X \to Y$ funções, com q sobrejetora. Observe que a relação $\sim$ em X definida por $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow q(x_1) = q(x_2)$ é uma relação de equivalência. Dizemos que a aplicação f é *compatível* com a relação de equivalência $\sim$ se $x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todos $x_1, x_2 \in X$. Considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "\bar{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

   Mostre que existe uma aplicação $\bar{f} : Y \to Z$ tal que o diagrama acima é comutativo (i.e., $\bar{f} \circ q = f$) se e somente se f é compatível com a relação de equivalência $\sim$ determinada por q. Mostre também que, quando a aplicação $\bar{f}$ existe, ela é única (dizemos que $\bar{f}$ é obtida de f por *passagem ao quociente*).

`Álgebra Linear`.

4. Sejam V, W espaços vetoriais e seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Mostre que:
   (a) T é injetora se e somente se T admite uma inversa linear à esquerda (i.e., existe uma aplicação linear $S : W \to V$ com $S \circ T = \mathrm{Id}$);

[*dica*: escolha um subespaço $Z \subset W$ com $W = \mathrm{Im}(T) \oplus Z$ e defina $S : W \to V$ fazendo $S|_{\mathrm{Im}(T)}$ igual ao inverso do isomorfismo $T : V \to \mathrm{Im}(T)$ e $S|_Z = 0$].

   (b) T é sobrejetora se e somente se T admite uma inversa linear à direita (i.e., existe uma aplicação linear $S : W \to V$ com $T \circ S = \mathrm{Id}$).

[*dica*: escolha um subespaço $Z \subset V$ com $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus Z$. Mostre que a restrição de T a Z é um isomorfismo sobre W e considere a aplicação $S = (T|_Z)^{-1} : W \to Z \subset V$].

5. Sejam V, W, Z espaços vetoriais e $T : V \to Z$, $\phi : W \to Z$ aplicações lineares, com ϕ injetora. Mostre que se $T_0 : V \to W$ é uma aplicação tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Z \\ V \arrow[ur, "T"] \arrow[r, dashed, "T_0"'] & W \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

   comuta (i.e., $\phi \circ T_0 = T$) então T_0 é linear.

`Observação`: pelo resultado do Exercício 2, observe que T_0 existe se e somente se a imagem de T estiver contida na imagem de ϕ. Além do mais, T_0 é única, se existir.

6. Sejam V, W, Z espaços vetoriais e $T : V \to Z$, $q : V \to W$ aplicações lineares, com q sobrejetora. Mostre que existe uma aplicação $\overline{T} : W \to Z$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "T"] & \\ W \arrow[r, dashed, "\overline{T}"'] & Z \end{tikzcd}$$

   comuta (i.e., $\overline{T} \circ q = T$) se e somente se $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(T)$. Mostre que a aplicação $\overline{T}$ é única quando existir; mostre também que $\overline{T}$ é necessariamente linear.

`Álgebra`.

7. Seja R um anel arbitrário e sejam V, W, R-módulos. Se $T : V \to W$ é uma aplicação linear, mostre que:
   (a) T admite uma inversa linear à esquerda se e somente se T é injetora e $\mathrm{Im}(T)$ é um *somando direto* de W (i.e., existe um submódulo $Z \subset W$ com $W = \mathrm{Im}(T) \oplus Z$);

[*dica*: supondo que T admite uma inversa à esquerda linear $S : W \to V$, mostre que $W = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(S)$].

   (b) T admite uma inversa linear à direita se e somente se T é sobrejetora e $\mathrm{Ker}(T)$ é um somando direto de V.

[*dica*: supondo que T admite uma inversa à direita linear $S : W \to V$, mostre que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(S)$].

`Observação`: a seguinte terminologia é usada na teoria de módulos. Seja R um anel, sejam V, W, Z R-módulos e $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$ aplicações lineares. Dizemos que:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} Z \longrightarrow 0$$

é uma *seqüência exata* se ϕ é injetora, ψ é sobrejetora e $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Dizemos que a seqüência exata acima *cinde* se vale uma das seguintes condições equivalentes: (i) ϕ possui inversa linear à esquerda; (ii) ψ possui inversa linear à direita; (iii) $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ é um somando direto de W.

`Observação`: se R é um corpo (ou, mais geralmente, um anel com divisão) então todo submódulo de um R-módulo V é somando direto de V (i.e., todo subespaço vetorial de um espaço vetorial V admite um subespaço complementar). Por isso, a injetividade (resp., a sobrejetividade) é suficiente para a existência de inversa linear à esquerda (resp., à direita), no caso de transformações lineares em espaços vetoriais (veja Exercício 4 acima). Se R é apenas um anel então nem todo submódulo de um R-módulo V é somando direto. Por exemplo, $2\mathbb{Z}$ é um submódulo do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$, mas não é um somando direto de $\mathbb{Z}$.

8. Mostre que o resultado dos Exercícios 5 e 6 continua verdadeiro se trocarmos nos seus enunciados as palavras "espaços vetoriais" por "R-módulos", onde R é um anel arbitrário.

`Topologia`.

9. Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto. Uma *retração* de X sobre Y é uma aplicação contínua $r : X \to Y$ tal que $r|_Y = \mathrm{Id}$, i.e., $r(y) = y$ para todo $y \in Y$. Se existe uma retração $r : X \to Y$ então dizemos que Y é um *retrato* de X. Mostre que se X é conexo (resp., conexo por arcos) então todo retrato de X é conexo (resp., conexo por arcos). Mostre também que se X é Hausdorff então todo retrato de X é fechado em X.

[*dica*: para mostrar que um retrato de um espaço Hausdorff é fechado, observe que se $r : X \to Y$ é uma retração então Y coincide com o conjunto dos pontos fixos da aplicação contínua $r : X \to X$].

`Observação`: note que uma retração $r : X \to Y$ é nada mais que uma inversa à esquerda contínua para a aplicação inclusão $Y \to X$.

10. (este é só para quem conhece a definição de homotopia e de espaço simplesmente conexo) Mostre que se Y é um retrato de um espaço topológico simplesmente conexo X então Y também é simplesmente conexo. Conclua que o círculo unitário S^1 não é um retrato do plano $I\!R^2$.

11. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Mostre que f possui uma inversa à esquerda contínua se e somente se $f : X \to f(X)$ é um homeomorfismo e $f(X)$ é um retrato de Y.

`Observação`: a partir dos resultados dos Exercícios 9, 10 e 11 é fácil exibir vários exemplos de funções contínuas injetoras que não possuem inversas à esquerda contínuas.

12. Considere a aplicação $f : I\!R \to S^1$ definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Então f é contínua e sobrejetora. O objetivo deste exercício é mostrar que f não possui uma inversa à direita contínua.
    (a) Suponha por absurdo que exista $g : S^1 \to I\!R$ contínua tal que $f \circ g = \mathrm{Id}$. Mostre que a aplicação $I\!R \ni t \mapsto g\big(f(t)\big) - t \in I\!R$ é constante.

[*dica*: mostre que $\big[g\big(f(t)\big) - t\big]/2\pi$ é inteiro para todo $t \in I\!R$].

    (b) Obtenha uma contradição a partir do resultado do item (a).

[*dica*: $g\big(f(0)\big) = g\big(f(2\pi)\big)$].

13. Sejam X um conjunto, Y um espaço topológico e $\phi : X \to Y$ uma função.
    (a) Mostre que a coleção $\big\{\phi^{-1}(U) : U \text{ aberto em } Y\big\}$ é uma topologia em X (conhecida como a *topologia induzida* por ϕ em X).
    (b) Mostre que se X é munido da topologia induzida por ϕ então $\phi : X \to Y$ é contínua.
    (c) Assuma que X é munido da topologia induzida por ϕ. Sejam Z um espaço topológico e $f_0 : Z \to X$, $f : Z \to Y$ funções tais que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Y \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_0"'] & X \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

    comuta (i.e., $\phi \circ f_0 = f$). Mostre que f é contínua se e somente se f_0 é contínua.

14. Sejam X, Y espaços topológicos e $\phi : X \to Y$ uma aplicação injetora. Mostre que X possui a topologia induzida por ϕ se e somente se $\phi : X \to \phi(X)$ é um homeomorfismo (onde $\phi(X)$ possui a topologia induzida de Y).

15. Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto e $q : X \to Y$ uma função.
   (a) Mostre que a coleção $\big\{U \subset Y : q^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\big\}$ é uma topologia em Y (conhecida como a *topologia co-induzida* por q em Y; quando Y é munido da topologia co-induzida por q diz-se também que q é uma *aplicação quociente*).
   (b) Mostre que se Y é munido da topologia co-induzida por q então $q : X \to Y$ é contínua.
   (c) Assuma que Y é munido da topologia co-induzida por q. Sejam Z um espaço topológico e $f : X \to Z$, $\bar{f} : Y \to Z$ funções tais que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\bar{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

   comuta (i.e., $\bar{f} \circ q = f$). Mostre que f é contínua se e somente se $\bar{f}$ é contínua.
16. Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $q : X \to Y$ é dita *aberta* (resp., *fechada*) se q leva abertos (resp., fechados) de X em abertos (resp., fechados) de Y. Mostre que:
(a) se q é contínua, aberta e sobrejetora então q é uma aplicação quociente (i.e., a topologia de Y é co-induzida por q);
[*dica*: q é quociente se e somente se:

$$U \subset Y \text{ é aberto} \quad \Longleftrightarrow \quad q^{-1}(U) \subset X \text{ é aberto},$$

para todo $U \subset Y$].
(b) se q é contínua, fechada e sobrejetora então q é uma aplicação quociente;
[*dica*: q é quociente se e somente se:

$$F \subset Y \text{ é fechado} \quad \Longleftrightarrow \quad q^{-1}(F) \subset X \text{ é fechado},$$

para todo $F \subset Y$].
(c) se X é compacto, Y é Hausdorff e q é contínua e sobrejetora então q é uma aplicação quociente.
[*dica*: nesse caso q é fechada].

`Imersões e Submersões.`

17. O objetivo deste exercício é mostrar que submersões são aplicações abertas.
    (a) Sejam X, $\widetilde{X}$, Y, $\widetilde{Y}$ espaços topológicos, $\varphi : X \to \widetilde{X}$, $\psi : Y \to \widetilde{Y}$ homeomorfismos e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ é uma aplicação aberta então f é uma aplicação aberta.
    (b) Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Suponha que para todo $x \in X$ existem abertos $U \subset X$, $V \subset Y$, com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e de modo que $f|_U : U \to V$ é uma aplicação aberta. Mostre que f é uma aplicação aberta.
    (c) Mostre que a projeção $\mathbb{R}^m \ni (v_1, \ldots, v_m) \mapsto (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ é uma aplicação aberta.
    (d) Use a forma local das submersões e o resultado dos itens anteriores para concluir que toda submersão é uma aplicação aberta.
18. Mostre que toda submersão sobrejetora é uma aplicação quociente (no sentido do Exercício 15).

[*dica*: use o resultado do Exercício 17 e do item (a) do Exercício 16].

Aula número 10 (19/09)

(1) **Subvariedades**.

`Convenção`: dados números naturais p, n com $0 \le p \le n$, identificaremos o espaço $I\!R^p$ com o subespaço de $I\!R^n$ gerado pelos p primeiros vetores da base canônica, i.e.:

$$I\!R^p \cong \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n : x_{p+1} = \cdots = x_n = 0\big\} \subset I\!R^n.$$

Obviamente o espaço $I\!R^0 = \{0\}$ é identificado com o subespaço nulo de $I\!R^n$.

Em termos gerais, uma subvariedade p-dimensional de uma variedade M de dimensão n é um subconjunto N de M tal que, em coordenadas apropriadas, a inclusão de N em M é representada pela inclusão de $I\!R^p$ em $I\!R^n$ (ou seja, a relação entre $I\!R^p$ e $I\!R^n$ serve como um "modelo" para a relação que existe entre uma subvariedade e uma variedade). Mais precisamente, temos a seguinte:

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e de dimensão n. Sejam $N \subset M$ um subconjunto e p um número natural com $0 \le p \le n$. Dizemos que N é uma* subvariedade de classe C^k e de dimensão p *de M se para todo $x \in N$ existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ em M com $x \in U$ e $\varphi(U \cap N) = \widetilde{U} \cap I\!R^p$; uma carta φ satisfazendo essa propriedade é chamada uma* carta de subvariedade *para N em torno de x.*

`Atenção`: uma carta de subvariedade para N *é uma carta na variedade M* e não uma carta em N.

Antes de mais nada, mostraremos um lema que permite relaxar um pouco a condição $\varphi(U \cap N) = \widetilde{U} \cap I\!R^p$ satisfeita pelas cartas de subvariedade. Ocorre que se $\varphi(U \cap N)$ é um aberto de $I\!R^p$ (talvez propriamente contido em $\widetilde{U} \cap I\!R^p$), então podemos restringir a carta φ de modo a obter uma carta de subvariedade para N (porém sem alterar a interseção do domínio de φ com N).

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $N \subset M$ um subconjunto. Suponha que $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ é uma carta de M tal que $\varphi(U \cap N)$ é um aberto de $I\!R^p$ $(0 \le p \le n)$. Então existe um aberto V em M tal que $V \subset U$, $V \cap N = U \cap N$ e tal que $\varphi(V \cap N) = \varphi(V) \cap I\!R^p$. Em particular, $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ é uma carta de subvariedade para N.*

Demonstração. Seja $\widetilde{V} = \widetilde{U} \cap \big(\varphi(U \cap N) \times I\!R^{n-p}\big)$. Como $\varphi(U \cap N)$ é aberto em $I\!R^p$, segue que $\varphi(U \cap N) \times I\!R^{n-p}$ (e portanto também $\widetilde{V}$) é aberto em $I\!R^n$. Tome $V = \varphi^{-1}(\widetilde{V})$. Daí V é aberto em M e $V \subset U$. Temos:

$$\begin{aligned}\varphi(V \cap N) &= \varphi\big(V \cap (U \cap N)\big) = \varphi(V) \cap \varphi(U \cap N) = \widetilde{V} \cap \varphi(U \cap N)\\ &= \widetilde{U} \cap \big(\varphi(U \cap N) \times I\!R^{n-p}\big) \cap \varphi(U \cap N) = \varphi(U \cap N).\end{aligned}$$

Como $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é bijetora, segue que $V \cap N = U \cap N$. Além do mais:

$$\varphi(V) \cap I\!R^p = \widetilde{V} \cap I\!R^p = \widetilde{U} \cap \big(\varphi(U \cap N) \times I\!R^{n-p}\big) \cap I\!R^p = \varphi(U \cap N). \blacksquare$$

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e de dimensão n e seja $N \subset M$ um subconjunto. Se existe um número natural p $(0 \le p \le n)$ tal que para todo $x \in N$ existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ de M com $x \in U$ e $\varphi(U \cap N)$ aberto em $\mathbb{R}^p$ então N é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão p.* ■

É de se esperar que uma subvariedade N de uma variedade M seja também em si uma variedade. Ocorre que as restrições a N das cartas de subvariedade formam um atlas para N, como explicaremos em detalhes abaixo.

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e de dimensão n e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k e de dimensão p. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta de subvariedade para N, i.e., $\varphi(U \cap N) = \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$. Daí a aplicação:

$$\varphi_0 = \varphi|_{U \cap N} : U \cap N \longrightarrow \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$$

é bijetora e seu contra-domínio $\widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$ é um aberto de $\mathbb{R}^p$. Logo φ_0 é um sistema de coordenadas no conjunto N (veja definição da seção 1 da aula número 1). Dadas duas cartas de subvariedade $\varphi : U \to \widetilde{U}$ e $\psi : V \to \widetilde{V}$ para N, mostremos que os sistemas de coordenadas correspondentes $\varphi_0 : U \cap N \to \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$ e $\psi_0 : V \cap N \to \widetilde{V} \cap \mathbb{R}^p$ em N são C^k-compatíveis. Em primeiro lugar, os conjuntos:

$$\begin{aligned}
\varphi_0\big((U \cap N) \cap (V \cap N)\big) &= \varphi\big((U \cap V) \cap (U \cap N)\big) = \varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^p,\\
\psi_0\big((U \cap N) \cap (V \cap N)\big) &= \psi\big((U \cap V) \cap (U \cap N)\big) = \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^p,
\end{aligned}$$

são abertos em $\mathbb{R}^p$, pois $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. Além do mais, a função de transição:

$$\psi_0 \circ \varphi_0^{-1} : \varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^p \longrightarrow \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^p$$

é uma restrição da função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ de φ para ψ e portanto é um difeomorfismo de classe C^k (veja Exercício 1). Mostramos então que o conjunto:

$$\mathcal{A}_0 = \big\{\varphi_0 : \varphi \text{ é uma carta de subvariedade para } N\big\},$$

é um atlas de classe C^k para N (o fato que os domínios das cartas φ_0 cobrem N segue diretamente da definição de subvariedade). Afirmamos que a topologia que $\mathcal{A}_0$ induz em N coincide com a topologia induzida de M. De fato, se $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é uma carta de subvariedade para N então, relativamente à topologia induzida por M em N, o conjunto $U \cap N$ é aberto em N e o sistema de coordenadas φ_0 é um homeomorfismo, pois é restrição de um homeomorfismo. Logo a topologia induzida por M em N faz com que os elementos de $\mathcal{A}_0$ sejam homeomorfismos definidos em abertos de N, o que mostra que as topologias induzidas em N por $\mathcal{A}_0$ e por M coincidem. Como a topologia de M é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, segue que também a topologia de N é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (veja Exercícios 2 e 3). Mostramos então o seguinte:

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k e de dimensão p ($1 \le k \le \infty$). Então o conjunto N, munido do atlas maximal $\mathcal{A}_0^{\max}$ de classe C^k que contém o atlas $\mathcal{A}_0$ definido acima, é uma variedade diferenciável de classe C^k e de dimensão p. Além do mais, a topologia da variedade N (i.e., a topologia induzida pelo atlas $\mathcal{A}_0^{\max}$ ou pelo atlas $\mathcal{A}_0$) coincide com a topologia induzida pela variedade M (i.e., a topologia $\{U \cap N : U$ aberto em $M\}$).* ■

Se $N \subset M$ é uma subvariedade então a estrutura diferenciável em N definida acima é dita *induzida* por M. A partir de agora fica subentendido (a menos de menção explícita em contrário) que toda subvariedade $N \subset M$ é munida da estrutura diferenciável induzida por M.

`Observação`: a dimensão de uma subvariedade não vazia é um número natural bem definido, i.e., se N é um subconjunto não vazio de M que é ao mesmo tempo uma subvariedade de dimensão p e uma subvariedade de dimensão p' então $p = p'$. De fato, escolha $x \in N$ e sejam $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ cartas de subvariedade para N em torno de x com $\varphi(U \cap N) = \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$ e $\psi(V \cap N) = \widetilde{V} \cap \mathbb{R}^{p'}$. Então $\varphi_0 : U \cap N \to \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$ e $\psi_0 : V \cap N \to \widetilde{V} \cap \mathbb{R}^{p'}$ são sistemas de coordenadas compatíveis em N com domínios não disjuntos, o que implica $p = p'$ (veja observação no início da seção 2 da aula número 3).

Um exemplo trivial de subvariedade de uma variedade M é um aberto de M. De fato, temos o seguinte:

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $Z \subset M$ um aberto. Então Z é uma subvariedade de M de classe C^k com $\dim(Z) = \dim(M)$. Além do mais, a estrutura diferenciável induzida por M em Z (no sentido explicado acima) coincide com a estrutura diferenciável que M induz no subconjunto aberto Z, i.e., com a estrutura diferenciável constituída pelas cartas de M com domínio contido em Z (veja Exemplo da seção 3 da aula número 3).*

Demonstração. Seja $n = \dim(M)$. Se $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é uma carta de M com $U \subset Z$ então φ é uma carta de subvariedade para Z pois:

$$\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) = \widetilde{U} = \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^n.$$

Isso mostra que Z é uma subvariedade de M com $\dim(Z) = \dim(M)$. O sistema de coordenadas φ_0 em Z correspondente à carta de subvariedade φ é *igual* a φ. Logo a estrutura diferenciável induzida por M na subvariedade Z (como explicado acima) é constituída pelas cartas de M com domínio contido em Z. ■

`Exemplo`: se M é uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e se $S \subset M$ é um subconjunto discreto (i.e., a topologia induzida por M em S é discreta) então S é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão zero. De fato, seja $x \in S$ e seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em M com $x \in U$ e $\varphi(x) = 0$ (veja Exercício 4). Como S é discreto, existe um aberto $V \subset U$ tal que $V \cap S = \{x\}$. Daí $\varphi(V \cap S) = \{0\} = \varphi(V) \cap \mathbb{R}^0$ e portanto $\varphi|_V : V \to \varphi(V)$ é uma carta de subvariedade para S em torno de x.

`Exemplo`: Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e seja $S \subset V$ um subespaço. Obviamente existe um isomorfismo $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(S) = \mathbb{R}^p$. Então φ é uma carta de subvariedade para S, o que mostra que S é uma subvariedade de V. A carta $\varphi_0 : \varphi|_S : S \to \mathbb{R}^p$ em S associada a φ é obviamente um isomorfismo e portanto a estrutura diferenciável induzida por V em S coincide com a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial S.

`Exemplo`: Seja $M = \mathbb{R}^2$ o plano e seja $N = S^1$ o círculo unitário. Escolha $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e seja $\varphi : A_{\theta_0} \to \,]0, +\infty[\, \times \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ o sistema de coordenadas polares relativo à escolha de θ_0 (veja Exemplo da seção 1 da aula número 1). Então $\varphi(A_{\theta_0} \cap S^1)$ é igual à interseção da reta $\{1\} \times \mathbb{R}$ com a imagem da carta φ. A carta φ não é exatamente uma carta de subvariedade para S^1, mas podemos corrigir o problema facilmente: defina $\varphi_1 : A_{\theta_0} \to \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\, \times \,]-1, +\infty[$ fazendo $\varphi_1(x, y) = (\theta, \rho - 1)$, onde $(\rho, \theta) = \varphi(x, y)$. Daí $\varphi_1(A_{\theta_0} \cap S^1)$ é igual à interseção de $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ com a imagem da carta φ_1. Logo φ_1 é uma carta de subvariedade para S^1 cujo domínio contém todos os pontos de S^1 exceto $(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$. Como $\theta_0 \in \mathbb{R}$ é arbitrário, temos que S^1 é uma subvariedade de classe C^∞ e de dimensão 1 do plano $\mathbb{R}^2$.

Por um raciocínio similar ao explicado no Exemplo acima, usando coordenadas esféricas em vez de polares, é possível mostrar que a esfera S^2 é uma subvariedade de classe C^∞ e de dimensão 2 do espaço $\mathbb{R}^3$. Veremos adiante nesta aula, no entanto, métodos mais simples para identificar uma subvariedade de uma variedade diferenciável, sem que seja necessário a explicitação das cartas de subvariedade.

Vamos agora relacionar a noção de subvariedade com a noção de mergulho. Temos o seguinte:

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k. Então a aplicação inclusão $i : N \to M$ é um mergulho de classe C^k (onde N é munido da estrutura diferenciável induzida de M).*

Demonstração. Mostremos em primeiro lugar que i é uma imersão de classe C^k. Seja $x \in N$ e seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta de subvariedade para N em torno de x. Seja $\varphi_0 = \varphi|_{U \cap N} : U \cap N \to \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$ a carta correspondente em N. Temos que $i(U \cap N) \subset U$ e que a representação $\tilde{i} : \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p \to \widetilde{U}$ de i com respeito às cartas φ_0 e φ é simplesmente a inclusão do aberto $\widetilde{U} \cap \mathbb{R}^p$ de $\mathbb{R}^p$ no aberto $\widetilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Logo $\tilde{i}$ é uma imersão de classe C^∞ e portanto $i|_{U \cap N} = \varphi^{-1} \circ \tilde{i} \circ \varphi_0$ é uma imersão de classe C^k, já que φ_0 e φ são difeomorfismos de classe C^k. Como $U \cap N$ é uma vizinhança aberta de x em N e x é um ponto arbitrário de N segue que i é uma imersão de classe C^k.

Resta mostrar agora que i é um homeomorfismo sobre sua imagem; devemos mostrar então que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : N \to N$ é um homeomorfismo, onde o domínio de Id é munido da topologia induzida pelo atlas de N e o contra-domínio de Id é munido da topologia induzida de M. Como ambas as topologias concidem, segue que Id é de fato um homeomorfismo. ■

Corolário. *(mudança de contra-domínio) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $P \subset N$ uma subvariedade de classe C^k e $f : M \to N$ uma aplicação com $f(M) \subset P$. Seja $f_0 : M \to P$ a aplicação que difere de f apenas no contra-domínio. Então f é de classe C^k se e somente se f_0 é de classe C^k.*

Demonstração. Segue do princípio de mudança de contra-domínio (ou do seu Corolário), provado na seção 2 da aula número 9, levando em conta que $f = i \circ f_0$, onde a inclusão $i : P \to N$ é um mergulho de classe C^k. ■

O próximo teorema é uma espécie de recíproca do teorema anterior.

Teorema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : N \to M$ um mergulho de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. Então $f(N)$ é uma subvariedade de classe C^k de M e $f : N \to f(N)$ é um difeomorfismo de classe C^k (onde $f(N)$ é munido da estrutura diferenciável induzida de M).*

Demonstração. Seja dado um ponto arbitrário de $f(N)$, digamos $f(x)$, com $x \in N$. Vamos mostrar que existe uma carta de subvariedade para $f(N)$ em torno de $f(x)$. Como f é uma imersão, existem cartas $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ em N e $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ em M com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e de modo que:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m \text{ zeros}}),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{U}$. Segue então que:

$$\psi\big(f(U)\big) = \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n.$$

Se soubéssemos que $f(U) = V \cap f(N)$ então $\psi\big(V \cap f(N)\big) = \widetilde{U}$ seria um aberto de $\mathbb{R}^m$ e portanto poderíamos restringir ψ de modo a obter uma carta de subvariedade para $f(N)$ em torno de $f(x)$ (veja Lema que sucede a Definição de subvariedade). Ocorre que a imagem de f pode interceptar V em pontos fora de $f(U)$. Nosso objetivo agora é diminuir o aberto V de modo a impedir que isso aconteça. É aqui que se usa a hipótese de que f é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Vamos aos detalhes. Como $f : N \to f(N)$ é um homeomorfismo, temos que $f(U)$ é um aberto relativo a $f(N)$ e portanto existe um aberto W em M tal que $f(U) = W \cap f(N)$. Daí $\psi|_{V \cap W} : V \cap W \to \psi(V \cap W)$ é uma carta em M cujo domínio contém $f(x)$ e:

$$\psi\big((V \cap W) \cap f(N)\big) = \psi\big(f(U)\big) = \widetilde{U}$$

é um aberto de $\mathbb{R}^m$. Pelo Lema que sucede a definição de subvariedade, existe um aberto V_1 em M contido em $V \cap W$ tal que:

$$(V \cap W) \cap f(N) = V_1 \cap f(N) \quad \text{e}$$
$$\psi\big((V \cap W) \cap f(N)\big) = \psi\big(V_1 \cap f(N)\big) = \psi(V_1) \cap \mathbb{R}^m;$$

isso significa que $\psi|_{V_1} : V_1 \to \psi(V_1)$ é uma carta de subvariedade para $f(N)$ em torno de $f(x)$. Fica demonstrado então que $f(N)$ é uma subvariedade de M. Resta agora demonstrar que $f : N \to f(N)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Seja:

$$\psi_0 = \psi|_{V_1 \cap f(N)} : V_1 \cap f(N) \longrightarrow \psi(V_1) \cap \mathbb{R}^m = \widetilde{U}$$

a carta em $f(N)$ correspondente à carta de subvariedade $\psi|_{V_1}$. Note que:

$$f(U) = V \cap f(U) = V \cap W \cap f(N) = V_1 \cap f(N),$$

e portanto faz sentido considerar a representação de $f : N \to f(N)$ com respeito às cartas φ e ψ_0 e a representação de $f^{-1} : f(N) \to N$ com respeito às cartas ψ_0 e φ. É fácil ver que essas representações são ambas iguais à aplicação identidade do aberto $\widetilde{U}$. Daí $f : N \to f(N)$ é de classe C^k na vizinhança aberta U de x em N e $f^{-1} : f(N) \to N$ é de classe C^k na vizinhança aberta $V_1 \cap f(N)$ de $f(x)$ em $f(N)$. Como $x \in N$ é arbitrário, segue que $f : N \to f(N)$ e $f^{-1} : f(N) \to N$ são aplicações de classe C^k. ■

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Um subconjunto $N \subset M$ é uma subvariedade de classe C^k se e somente se for imagem de um mergulho de classe C^k.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, a imagem de um mergulho de classe C^k é uma subvariedade de classe C^k. Reciprocamente, toda subvariedade de classe C^k é imagem de sua própria inclusão, que é um mergulho de classe C^k. ■

Corolário. *Sejam M, N variedadades diferenciáveis de classe C^k, $f : M \to N$ um difeomorfismo de classe C^k e $P \subset M$ uma subvariedade de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Então $f(P)$ é uma subvariedade de classe C^k de N e $f|_P : P \to f(P)$ é um difeomorfismo de classe C^k.*

Demonstração. Denote por $i : P \to M$ a inclusão. Como i é um mergulho de classe C^k e $f : M \to N$ é um difeomorfismo de classe C^k segue que $f \circ i = f|_P : P \to N$ é um mergulho de classe C^k. Logo, pelo Teorema anterior, $f(P)$ é uma subvariedade de N de classe C^k e $f|_P : P \to f(P)$ é um difeomorfismo de classe C^k. ■

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Um subconjunto $N \subset M$ é uma subvariedade de classe C^k de M se e somente se existe uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ de classe C^k em N tal que $(N, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e tal que a inclusão de $(N, \mathcal{A})$ em M é um mergulho de classe C^k. Além do mais, se $\mathcal{A}$ é uma tal estrutura diferenciável em N então $\mathcal{A}$ necessariamente coincide com a estrutura diferenciável induzida por M em N. Em particular, dado um subconjunto $N \subset M$, existe no máximo uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ de classe C^k em N tal que $(N, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e tal que a inclusão de $(N, \mathcal{A})$ em M é um mergulho de classe C^k.*

Demonstração. Se N é uma subvariedade de classe C^k de M então a estrutura diferenciável induzida por M em N torna N uma variedade diferenciável de classe C^k e torna a inclusão de N em M um mergulho de classe C^k. Reciprocamente, se N admite uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ de classe C^k tal que $(N, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e tal que a inclusão de $(N, \mathcal{A})$ em M é um mergulho de classe C^k então N é uma subvariedade de M de classe C^k, pois N é a imagem de um mergulho de classe C^k. Note também que o Teorema anterior nos diz que a inclusão de $(N, \mathcal{A})$ em M é um difeomorfismo de classe C^k sobre sua imagem, i.e., a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (N, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{A}')$ é um difeomorfismo de classe C^k, onde $\mathcal{A}'$ é a estrutura diferenciável induzida por M em N. Isso prova que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k, N_2 uma subvariedade de M de classe C^k e N_1 uma subvariedade de N_2 de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Então N_1 é uma subvariedade de M de classe C^k. Além do mais, se $\mathcal{A}_0$ denota a estrutura diferenciável induzida por M em N_2 então a estrutura diferenciável induzida por $(N_2, \mathcal{A}_0)$ em N_1 coincide com a estrutura diferenciável induzida por M em N_1.*

Demonstração. Denote por $i_1 : N_1 \to M$, $i_2 : N_2 \to M$ e $i_{12} : N_1 \to N_2$ as aplicações inclusão. Se N_2 é munida da estrutura diferenciável $\mathcal{A}_0$ então i_2 é um mergulho de classe C^k e se N_1 é munida da estrutura diferenciável $\mathcal{A}_1$ induzida por $(N_2, \mathcal{A}_0)$ então i_{12} é um mergulho de classe C^k. Logo $i_1 = i_2 \circ i_{12} : (N_1, \mathcal{A}_1) \to M$ é um mergulho de classe C^k (veja Exercício 6). Então $\mathcal{A}_1$ é uma estrutura diferenciável de classe C^k em N_1 tal que $(N_1, \mathcal{A}_1)$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e tal que a inclusão $i_1 : N_1 \to M$ é um mergulho de classe C^k. Segue do Corolário anterior que N_1 é uma subvariedade de classe C^k de M e que $\mathcal{A}_1$ coincide com a estrutura diferenciável induzida por M em N_1. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$), $N \subset M$ uma subvariedade de M de classe C^k e $Z \subset N$ um aberto relativo a N. Então Z é uma subvariedade de M de classe C^k. Além do mais, se $\mathcal{A}_0$ denota a estrutura diferenciável induzida por M em N então a estrutura diferenciável induzida por $(N, \mathcal{A}_0)$ no aberto $Z \subset N$ coincide com a estrutura diferenciável induzida por M em Z.*

Demonstração. É um caso particular do Corolário anterior, já que um aberto de uma variedade diferenciável é uma subvariedade. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$), $Z \subset M$ um aberto e N uma subvariedade de Z de classe C^k. Então N é uma subvariedade de M de classe C^k. Além do mais, se $\mathcal{A}_0$ denota a estrutura diferenciável induzida por M em Z então a estrutura diferenciável induzida por $(Z, \mathcal{A}_0)$ em N coincide com a estrutura diferenciável induzida por M em N.*

Demonstração. Idem ao Corolário anterior. ■

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) e sejam $N_1, N_2 \subset M$ subvariedades de classe C^k com $N_1 \subset N_2$. Então N_1 é uma subvariedade de N_2 de classe C^k.*

Demonstração. Seja $i_1 : N_1 \to M$ a aplicação inclusão. Então i_1 é um mergulho de classe C^k e $i_1(N_1) \subset N_2$. Como a aplicação inclusão $i_{12} : N_1 \to N_2$ difere de i_1 apenas pelo contra-domínio, segue do resultado do Exercício 8 que i_{12} é um mergulho de classe C^k e portanto N_1 é uma subvariedade de N_2 de classe C^k. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$), $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k e $Z \subset M$ um aberto com $N \subset Z$. Então N é uma subvariedade de Z de classe C^k.*

Demonstração. É um caso particular do Corolário anterior, já que o aberto Z é uma subvariedade de M. ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Então o gráfico de f é uma subvariedade de classe C^k de $M \times N$.*

Demonstração. De fato, seja $\phi : M \to M \times N$ a aplicação definida por $\phi(x) = \big(x, f(x)\big)$. Então ϕ é de classe C^k, pois suas duas coordenadas são de classe C^k. Além do mais, a primeira projeção $M \times N \to M$ é uma inversa à esquerda de classe C^k para ϕ e portanto ϕ é um mergulho de classe C^k. Isso mostra que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Gr}(f)$ é uma subvariedade de $M \times N$ de classe C^k. ■

O próximo lema nos diz que a noção de subvariedade é local.

Lema. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e de dimensão n, $N \subset M$ um subconjunto e p um número natural ($0 \le p \le n$). Suponha que todo $x \in N$ pertence a um aberto $V \subset M$ tal que $V \cap N$ é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão p. Então N é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão p.*

Demonstração. Sejam $x \in N$ e $V \subset M$ uma vizinhança aberta de x tal que $V \cap N$ é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão p. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta de subvariedade para $V \cap N$ em torno de x, i.e., $x \in U$ e $\varphi\big(U \cap (V \cap N)\big) = \widetilde{U} \cap I\!R^p$. Daí $\varphi|_{U \cap V} : U \cap V \to \varphi(U \cap V)$ é uma carta em M cujo domínio contém x e tal que $\varphi\big((U \cap V) \cap N\big)$ é um aberto de $I\!R^p$. Segue do Lema que sucede a definição de subvariedade que podemos restringir $\varphi|_{U \cap V}$ a uma carta de subvariedade para N em torno de x. ■

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e de dimensão n e seja $N \subset M$ um subconjunto. Seja p um número natural ($0 \le p \le n$) e suponha que para todo $x \in N$ existam uma vizinhança aberta V de x em M, uma variedade diferenciável P de classe C^k e um difeomorfismo $\varphi : V \to P$ de classe C^k tal que $\varphi(V \cap N)$ é uma subvariedade de classe C^k e de dimensão p de P. Então N é uma subvariedade de M de classe C^k.*

Demonstração. Recorde que difeomorfismos de classe C^k levam subvariedades de classe C^k em subvariedades de classe C^k. Como φ é um difeomorfismo de classe C^k e $\varphi(V \cap N)$ é uma subvariedade de P de classe C^k, segue que $V \cap N$ é uma subvariedade de V (e portanto uma subvariedade de M) de classe C^k e de dimensão p. A conclusão segue do Lema. ■

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Dado um número natural $p \le \dim(M)$ então uma* parametrização p-dimensional de classe C^k *em M é um mergulho $\sigma : A \to M$ de classe C^k definido num aberto $A \subset I\!R^p$.*

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Um subconjunto $N \subset M$ é uma subvariedade de classe C^k e de dimensão p se e somente se todo $x \in N$ possui uma vizinhança aberta $V \subset M$ tal que $V \cap N$ é imagem de uma parametrização p-dimensional de classe C^k.*

Demonstração. Suponha que para todo $x \in N$ exista um aberto $V \ni x$ em M tal que $V \cap N$ é imagem de uma parametrização p-dimensional de classe C^k. Daí $V \cap N$ é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão p (pois é imagem de um mergulho definido num aberto de $\mathbb{R}^p$). Segue do Lema que N é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão p.

Reciprocamente, suponha que N é uma subvariedade de M de classe C^k e de dimensão p. Dado $x \in N$, existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ na variedade N com $x \in U$. Como U é um aberto relativo a N, existe um aberto V em M tal que $U = V \cap N$. Temos que a aplicação $\varphi^{-1} : \widetilde{U} \to U$ é um difeomorfismo de classe C^k e que a inclusão de N em M é um mergulho de classe C^k; logo, a aplicação $\varphi^{-1} : \widetilde{U} \to M$ é um mergulho de classe C^k, i.e., uma parametrização p-dimensional de classe C^k cuja imagem é igual a $V \cap N$. ■

`Observação`: se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, $N \subset M$ é uma subvariedade de classe C^k e $\sigma : A \to M$ é uma parametrização p-dimensional de classe C^k cuja imagem é um aberto relativo a N então $\sigma^{-1} : \sigma(A) \to A$ é uma carta em N. De fato, como σ é um mergulho de classe C^k temos que $\sigma : A \to \sigma(A)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Logo $\sigma^{-1} : \sigma(A) \to A$ é um difeomorfismo de classe C^k cujo domínio é um aberto de N e o contra-domínio é um aberto de $\mathbb{R}^p$.

`Observação`: o Corolário acima nos fornece uma definição equivalente para a noção de subvariedade que é similar à definição de superfície regular em $\mathbb{R}^3$ apresentada em livros elementares de geometria diferencial. Logo, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é nada mais que uma subvariedade bidimensional de $\mathbb{R}^3$. Segue também do Corolário anterior que a noção de superfície de dimensão m e classe C^k em $\mathbb{R}^n$ definida em [Curso de Análise vol. 2, Elon Lages Lima, §13, Capítulo V], coincide com a noção de subvariedade de classe C^k e dimensão m de $\mathbb{R}^n$.

Vamos agora relacionar o espaço tangente a uma subvariedade com o espaço tangente da variedade ambiente. Se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e se $N \subset M$ é uma subvariedade então, dado $x \in N$, que relação existe entre o espaço tangente T_xN e o espaço tangente T_xM? É natural esperar que T_xN seja um subespaço de T_xM (por exemplo, o plano tangente a uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, que é o espaço tangente ao próprio $\mathbb{R}^3$). Ocorre que T_xN não é exatamente um subespaço de T_xM, mas apenas *naturalmente isomorfo* a um subespaço de T_xM. Por exemplo, se construímos o espaço tangente usando curvas (aula número 6, seção 2) então um elemento de T_xN é determinado por uma classe de equivalência de uma curva γ em N passando por x; tal curva γ também determina uma classe de equivalência que é um elemento de T_xM, mas as classes de equivalência determinadas por γ vista como curva em N e vista como curva em M não coincidem (existem tipicamente várias curvas em M que são tangentes a γ mas que não são curvas em N). Adotaremos aqui então a mesma postura que adotamos na seção 2 da aula número 7; a saber, vamos identificar T_xN com um subespaço de T_xM. Temos a seguinte:

`Convenção`: Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k. Denote por $i : N \to M$ a aplicação inclusão. Então, para todo $x \in N$, identificamos o espaço tangente T_xN com a imagem da diferencial $\mathrm{d}i(x)$ através do isomorfismo $\mathrm{d}i(x) : T_xN \to \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}i(x)\big)$. Note que, como i é um mergulho (e em particular uma imersão) temos que $\mathrm{d}i(x)$ é injetora e é portanto de fato um isomorfismo sobre sua imagem. A partir de agora trabalharemos então como se T_xN fosse um subespaço de T_xM e como se $\mathrm{d}i(x) : T_xN \to T_xM$ fosse a aplicação de inclusão de T_xN em T_xM.

Note que esta convenção é coerente com a identificação feita na seção 2 da aula número 7 com respeito ao espaço tangente a um aberto de uma variedade.

`Observação`: sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k e $N_1, N_2 \subset M$ subvariedades de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ com $N_1 \subset N_2$. Denote por $i_1 : N_1 \to M$, $i_2 : N_2 \to M$ e $i_{12} : N_1 \to N_2$ as aplicações inclusão. Para todo $x \in N_1$, temos uma identificação de T_xN_2 com um subespaço de T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_2(x)$ e temos uma identificação de T_xN_1 com um subespaço de T_xN_2 através do isomorfismo $\mathrm{d}i_{12}(x)$ (já que N_1 também é uma subvariedade de classe C^k de N_2). Ambas essas identificações implicam na identificação de T_xN_1 com um subespaço de T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_2(x) \circ \mathrm{d}i_{12}(x)$. Temos também porém uma identificação direta de T_xN_1 com um subespaço de T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_1(x)$. Afirmamos que os isomorfismos $\mathrm{d}i_2(x) \circ \mathrm{d}i_{12}(x)$ e $\mathrm{d}i_1(x)$ coincidem. De fato, isso segue da regra da cadeia observando que $i_1 = i_2 \circ i_{12}$.

`Exemplo`: sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $S \subset V$ um subespaço. Então, como vimos anteriormente, S é uma subvariedade de V. A aplicação inclusão $i : S \to V$ é linear e portanto para todo $x \in S$ temos $\mathrm{d}i(x) = i$. Logo:

$$T_xS = \mathrm{d}i(x)[T_xS] = S \subset T_xV = V.$$

Teorema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k e $P \subset M$, $Q \subset N$ subvariedades de classe C^k com $f(P) \subset Q$. Denote por $f_0 : P \to Q$ a restrição de f. Então f_0 é de classe C^k e $\mathrm{d}f_0(x) : T_xP \to T_{f(x)}Q$ é a restrição de $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$, para todo $x \in P$.*

Demonstração. Denote por $i : P \to M$, $j : Q \to N$ as aplicações inclusão. Temos $f \circ i = j \circ f_0$. Como f e i são de classe C^k, segue que $f \circ i$ é de classe C^k; além do mais, como $f \circ i$ e f_0 diferem apenas pelo contra-domínio, segue que também f_0 é de classe C^k. A relação entre as diferenciais $\mathrm{d}f_0(x)$ e $\mathrm{d}f(x)$ é obtida diferenciando a igualdade $f \circ i = j \circ f_0$ num ponto $x \in P$ usando a regra da cadeia e observando que, em vista da convenção acima, $\mathrm{d}i(x)$ e $\mathrm{d}j\big(f(x)\big)$ são aplicações inclusão. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k e $x \in N$ um ponto. Denote por $\mathcal{C}$ o conjunto das curvas $\gamma : I \to M$ de classe C^k tais que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(I) \subset N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo a origem. Então o espaço tangente a N no ponto x é dado por:*

$$T_xN = \big\{\gamma'(0) : \gamma \in \mathcal{C}\big\}.$$

Demonstração. Seja dado $v \in T_xN$. Pelo resultado do Exercício 5, existe uma curva $\gamma_0 : I \to N$ de classe C^k com $\gamma_0(0) = x$ e $\gamma_0'(0) = v$. Seja $\gamma : I \to M$ a aplicação que difere de γ_0 apenas pelo contra-domínio. Daí γ é de classe C^k e portanto $\gamma \in \mathcal{C}$. Além do mais, as aplicações $\mathrm{d}\gamma_0(0) : \mathbb{R} \to T_xN$ e $\mathrm{d}\gamma(0) : \mathbb{R} \to T_xM$ diferem apenas pelo contra-domínio e em particular $\gamma_0'(0) = \mathrm{d}\gamma_0(0) \cdot 1 = \mathrm{d}\gamma(0) \cdot 1 = \gamma'(0)$. Logo $\gamma'(0) = v$.

Reciprocamente, seja $\gamma \in \mathcal{C}$. Como a imagem de γ está contida em N, podemos considerar a aplicação $\gamma_0 : I \to N$ que difere de $\gamma : I \to M$ apenas pelo contra-domínio. Daí γ_0 é de classe C^k e $\gamma'(0) = \gamma_0'(0) \in T_xN$. ■

`Observação`: o Corolário acima implica que o espaço tangente a uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ coincide com a noção usual de plano tangente a uma superfície regular apresentada em cursos elementares de geometria diferencial. Também, a noção de espaço tangente a uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ coincide com a noção de espaço tangente a uma superfície de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ apresentada em [Curso de Análise vol. 2, Elon Lages Lima, §13, Capítulo V].

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e $f : N \to M$ um mergulho de classe C^k. Então, para todo $x \in N$ temos:*

$$T_{f(x)}f(N) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(x)\big).$$

Demonstração. Seja $f_0 : N \to f(N)$ a aplicação que difere de f apenas pelo contra-domínio. Então f_0 é um difeomorfismo de classe C^k e portanto $\mathrm{d}f_0(x)$ é um isomorfismo; em particular, a imagem de $\mathrm{d}f_0(x)$ coincide com $T_{f(x)}f(N)$. Como $\mathrm{d}f(x)$ e $\mathrm{d}f_0(x)$ só diferem pelo contra-domínio, temos que $\mathrm{d}f(x)$ e $\mathrm{d}f_0(x)$ possuem a mesma imagem. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k e $\sigma : A \to M$ uma parametrização p-dimensional de classe C^k tal que $\sigma(A)$ é um aberto relativo a N. Então, para todo $x \in A$ temos que $T_{\sigma(x)}N$ é igual à imagem de $\mathrm{d}\sigma(x) : \mathbb{R}^p \to T_{\sigma(x)}M$.*

Demonstração. Como σ é um mergulho, o Corolário anterior nos dá:

$$T_{\sigma(x)}\sigma(A) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}\sigma(x)\big);$$

mas como $\sigma(A)$ é um aberto relativo a N, temos $T_{\sigma(x)}\sigma(A) = T_{\sigma(x)}N$. ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Então, para todo $x \in M$, o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x, f(x)\big)$ coincide com o gráfico de $\mathrm{d}f(x)$.*

Demonstração. Defina $\phi : M \to M \times N$ por $\phi(x) = \big(x, f(x)\big)$. Vimos anteriormente que ϕ é um mergulho de classe C^k cuja imagem é o gráfico de f. Temos:

$$\mathrm{d}\phi(x) \cdot h = \big(h, \mathrm{d}f(x) \cdot h\big),$$

para todo $x \in M$, $h \in T_xM$. Logo, o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x, f(x)\big)$, que coincide com a imagem de $\mathrm{d}\phi(x)$, é igual ao gráfico de $\mathrm{d}f(x)$. ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k, $f : M \to N$ um difeomorfismo de classe C^k e $P \subset M$ uma subvariedade de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Então $T_{f(x)}f(P) = \mathrm{d}f(x)[T_xP]$, para todo $x \in P$.*

Demonstração. Seja $f_0 : P \to f(P)$ a restrição de f. Então f_0 é um difeomorfismo de classe C^k e portanto $\mathrm{d}f_0(x)$ é um isomorfismo; em particular, a imagem de $\mathrm{d}f_0(x)$ coincide com $T_{f(x)}f(P)$, para todo $x \in P$. Como f_0 é a restrição de f, segue que a diferencial $\mathrm{d}f_0(x) : T_xP \to T_{f(x)}f(P)$ é a restrição da diferencial $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$. A conclusão segue. ■

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k. A* codimensão *de N em M, denotada por $\mathrm{codim}_M(N)$, é definida como sendo a diferença $\dim(M) - \dim(N)$.*

Definição. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Dizemos que $c \in N$ é um* valor regular *de f se f é uma submersão em x para todo $x \in f^{-1}(c)$.*

Teorema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. Se $c \in N$ é um valor regular de f então $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M de classe C^k cuja codimensão em M é igual à dimensão de N. Além do mais, $T_x f^{-1}(c) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(x)\big)$, para todo $x \in f^{-1}(c)$.*

Demonstração. Seja dado $x \in f^{-1}(c)$ e vamos construir uma carta de subvariedade para $f^{-1}(c)$ em torno de x. Seja então $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em N com $c \in V$ e $\psi(c) = 0$ (veja Exercício 4). Pela forma local das submersões, existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ em M com $x \in U$, $f(U) \subset V$ e tal que a representação de f nas cartas φ e ψ é dada por:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_n), \tag{1}$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in \widetilde{U}$. Temos:

$$\varphi\big(U \cap f^{-1}(c)\big) = \big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big)^{-1}(0) = \widetilde{U} \cap \big(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\big).$$

Seja $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um isomorfismo qualquer que leva o subespaço $\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ sobre $\mathbb{R}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$. Então $\alpha \circ \varphi : U \to \alpha(\widetilde{U})$ é uma carta em M e:

$$(\alpha \circ \varphi)\big(U \cap f^{-1}(c)\big) = \alpha\big[\widetilde{U} \cap \big(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\big)\big] = \alpha(\widetilde{U}) \cap \mathbb{R}^{m-n},$$

ou seja $\alpha \circ \varphi$ é uma carta de subvariedade para $f^{-1}(c)$ em torno de x.

Vamos agora calcular o espaço tangente $T_x f^{-1}(c)$. Como $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é um difeomorfismo que leva $U \cap f^{-1}(c)$ sobre $\widetilde{U} \cap \big(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\big)$, temos que $\mathrm{d}\varphi(x)$ leva o espaço tangente a $U \cap f^{-1}(c)$ no ponto x (que é igual a $T_x f^{-1}(c)$) sobre o espaço tangente a $\widetilde{U} \cap \big(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\big)$ no ponto $\varphi(x)$ (que é igual a $\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$). Em símbolos:

$$\mathrm{d}\varphi(x)\big[T_x f^{-1}(c)\big] = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}. \tag{2}$$

Diferenciando (1) no ponto $\varphi(x)$ obtemos:

$$\big[\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\big](h_1, \ldots, h_m) = (h_1, \ldots, h_n),$$

para todo $(h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m$. Logo:

$$\mathrm{Ker}\big[\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\big] = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}; \tag{3}$$

como $\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big)$ e $\mathrm{d}\varphi(x)$ são isomorfismos, obtemos:

$$\mathrm{Ker}\big[\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big)\circ \mathrm{d}f(x)\circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\big] = \mathrm{Ker}\big[\mathrm{d}f(x)\circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\big] = \mathrm{d}\varphi(x)\big[\mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(x)\big)\big]. \quad (4)$$

De (3) e (4) vem:

$$\mathrm{d}\varphi(x)\big[\mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(x)\big)\big] = \{0\}^n \times I\!R^{m-n}.$$

Comparando com (2) obtemos então:

$$\mathrm{d}\varphi(x)\big[T_x f^{-1}(c)\big] = \mathrm{d}\varphi(x)\big[\mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(x)\big)\big],$$

o que implica que $T_x f^{-1}(c) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(x)\big)$ e completa a demonstração. ■

`Exemplo`: Considere a aplicação $f : I\!R^{n+1} \to I\!R$ definida por $f(x) = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno Euclideano. Então f é uma aplicação de classe C^∞ e sua diferencial é dada por $\mathrm{d}f(x)\cdot v = 2\langle x, v\rangle$, para todos $x, v \in I\!R^n$. Logo f é uma submersão em todos os pontos de $I\!R^{n+1}$, exceto a origem; em particular, qualquer $c \neq 0$ é um valor regular para f. Concluímos que a esfera n-dimensional unitária $S^n = f^{-1}(1)$ é uma subvariedade de classe C^∞ e de dimensão n de $I\!R^{n+1}$. Para $x \in S^n$, temos que o espaço tangente $T_x S^n$ é igual a $\mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(x)\big)$, i.e., $T_x S^n$ é o complemento ortogonal em $I\!R^{n+1}$ do subespaço unidimensional gerado por x. Recorde que na seção 3 da aula número 3 definimos uma estrutura diferenciável em S^n usando as projeções estereográficas como cartas. Afirmamos que a estrutura diferenciável em S^n definida naquela seção coincide com a estrutura diferenciável induzida de $I\!R^{n+1}$. Para demonstrar essa afirmação, devemos verificar que, assumindo que S^n está munida da estrutura diferenciável induzida de $I\!R^{n+1}$, então para todo $u \in S^n$ a projeção estereográfica $p_u : S^n \setminus \{u\} \to u^\perp$ de vértice u é um difeomorfismo de classe C^∞ definido num aberto de S^n. Obviamente $S^n \setminus \{u\}$ é um aberto de S^n. Para verificar que p_u é um difeomorfismo de classe C^∞, procedemos da seguinte forma. Em primeiro lugar, a fórmula que define $p_u(x)$ faz sentido para todo $x \in I\!R^{n+1}$ com $\langle x, u\rangle \neq 1$. Essa fórmula nos fornece então uma extensão de classe C^∞ de p_u para um aberto de $I\!R^{n+1}$; como p_u é a restrição dessa extensão, segue que p_u é de classe C^∞. Mostremos agora que $p_u^{-1} : u^\perp \to S^n \setminus \{u\}$ é de classe C^∞. Temos uma fórmula explícita para p_u^{-1} que mostra que a aplicação $p_u^{-1} : u^\perp \to I\!R^{n+1}$ é de classe C^∞. Como $S^n \setminus \{u\}$ é uma subvariedade de $I\!R^{n+1}$, segue que também $p_u^{-1} : u^\perp \to S^n \setminus \{u\}$ é de classe C^∞.

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Cálculo no` $I\!R^n$.

1. Sejam V, W espaços vetoriais reais de dimensão finita, $Z \subset V$ um aberto e $f : Z \to W$ uma aplicação de classe C^k. Mostre que:

   (a) se S é um subespaço de V então $f|_{S\cap Z} : S \cap Z \to W$ é uma aplicação de classe C^k definida no aberto $S \cap Z$ do espaço vetorial S. Além do mais, se $k \ge 1$, então para todo $x \in S \cap Z$, temos $\mathrm{d}(f|_{S\cap Z})(x) = \mathrm{d}f(x)|_S$.

[*dica*: $f|_{S\cap Z} = f \circ i$, onde $i : S \cap Z \to Z \subset V$ denota a inclusão].

   (b) se S' é um subespaço de W tal que $f(Z) \subset S'$ então a aplicação $f_0 : Z \to S'$ definida por $f_0(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$ (i.e., f_0 e f diferem só pelo contra-domínio) é de classe C^k. Além do mais, se $k \ge 1$ então, para todo $x \in Z$, temos $\mathrm{d}f_0(x) \cdot v = \mathrm{d}f(x) \cdot v$ para todo $v \in V$, i.e., as aplicações lineares $\mathrm{d}f(x) : V \to W$ e $\mathrm{d}f_0(x) : V \to S'$ só diferem pelo contra-domínio.

[*dica*: isso pode ser mostrado por indução em k usando a definição de diferenciabilidade, mas é mais fácil observar que $f_0 = \pi \circ f$, onde $\pi : W \to S'$ é uma projeção linear qualquer; para relacionar $\mathrm{d}f(x)$ com $\mathrm{d}f_0(x)$, use que $f = i' \circ f_0$, onde $i' : S' \to W$ denota a inclusão].

   (c) conclua dos itens (b) e (c) que se f é um difeomorfismo de classe C^k sobre um aberto $Z' = f(Z) \subset W$ e se $S \subset V$, $S' \subset W$ são subespaços com $f(S\cap Z) = S'\cap Z'$ então $f|_{S\cap Z} : S \cap Z \to S' \cap Z'$ é um difeomorfismo de classe C^k.

`Topologia.`

2. Mostre que todo subespaço de um espaço topológico Hausdorff é ainda um espaço topológico Hausdorff.

3. Mostre que se $\mathfrak{B}$ é uma base de abertos para um espaço topológico X então, para todo $Y \subset X$, $\big\{U \cap Y : U \in \mathfrak{B}\big\}$ é uma base de abertos para Y. Conclua que se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então todo $Y \subset X$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

`Cartas e espaço tangente.`

4. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $x \in M$. Mostre que existe uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em M com $x \in U$ e $\varphi(x) = 0$.

[*dica*: dado $v \in I\!R^n$ então a translação $\mathfrak{t}_v : I\!R^n \ni z \mapsto z + v \in I\!R^n$ é um difeomorfismo e portanto se $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ é uma carta em M então também $\mathfrak{t}_v \circ \varphi : U \to \mathfrak{t}_v(\widetilde{U})$ é uma carta em M].

5. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $x \in M$. Então, para todo $v \in T_xM$ existe uma curva $\gamma : \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\to M$ de classe C^k com $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$.

[*dica*: seja $\varphi : U \to \widetilde{U}$ uma carta em M com $x \in U$ e defina $\gamma(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) + t\,\mathrm{d}\varphi(x) \cdot v\big)$].

`Imersões, submersões e mergulhos.`

6. Mostre que:
   (a) a composta de imersões de classe C^k é uma imersão de classe C^k;
   (b) a composta de submersões de classe C^k é uma submersão de classe C^k;
   (c) a composta de mergulhos de classe C^k é um mergulho de classe C^k.

7. Sejam $M_1, \ldots, M_p$, $N_1, \ldots, N_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e sejam $f_i : M_i \to N_i$, $i = 1, \ldots, p$ aplicações de classe C^k. Considere a aplicação $\prod_{i=1}^p f_i : \prod_{i=1}^p M_i \to \prod_{i=1}^p N_i$ definida por:

$$\Big(\prod_{i=1}^p f_i\Big)(x_1, \ldots, x_p) = \big(f_1(x_1), \ldots, f_p(x_p)\big).$$

   Mostre que:
   (a) $\prod_{i=1}^p f_i$ é de classe C^k;
   (b) a diferencial de $\prod_{i=1}^p f_i$ num ponto $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^p M_i$ é dada por:

$$\mathrm{d}\Big(\prod_{i=1}^p f_i\Big)(x) \cdot (h_1, \ldots, h_p) = \big(\mathrm{d}f_1(x_1) \cdot h_1, \ldots, \mathrm{d}f_p(x_p) \cdot h_p\big),$$

   para todos $h_i \in T_{x_i}M_i$, $i = 1, \ldots, p$;
   (c) se $f_1, \ldots, f_p$ são imersões então $\prod_{i=1}^p f_i$ é uma imersão;
   (d) se $f_1, \ldots, f_p$ são submersões então $\prod_{i=1}^p f_i$ é uma submersão;
   (e) se $f_1, \ldots, f_p$ são mergulhos então $\prod_{i=1}^p f_i$ é um mergulho.

`Subvariedades.`

8. Sejam M, P variedades diferenciáveis de classe C^k e $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Seja $f : P \to M$ uma aplicação com imagem contida em N e denote por $f_0 : P \to N$ a aplicação que difere de f apenas pelo contra-domínio. Mostre que f é uma imersão de classe C^k (resp., um mergulho de classe C^k) se e somente se f_0 é uma imersão de classe C^k (resp., um mergulho de classe C^k).

[*dica*: note que $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}i\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f_0(x)$, para todo $x \in P$, onde $i : N \to M$ denota a inclusão; use o fato que i é uma imersão para concluir que $\mathrm{d}f(x)$ é injetora se e somente se $\mathrm{d}f_0(x)$ é injetora. Observe também que a topologia induzida em $f(P)$ por M coincide com a topologia induzida em $f(P)$ por N].

9. Sejam $M_1, \ldots, M_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k e sejam $N_i \subset M_i$, $i = 1, \ldots, p$ subvariedades de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). Então $\prod_{i=1}^p N_i$ é uma subvariedade de classe C^k de $\prod_{i=1}^p M_i$ e a estrutura diferenciável induzida em $\prod_{i=1}^p N_i$ por $\prod_{i=1}^p M_i$ coincide com a estrutura diferenciável produto (onde cada N_i possui a estrutura diferenciável induzida de M_i).

[*dica*: se $\phi_i : N_i \to M_i$ denota a inclusão então $\prod_{i=1}^p \phi_i$ é a inclusão de $\prod_{i=1}^p N_i$ em $\prod_{i=1}^p M_i$; use o resultado do item (e) do Exercício 7].

10. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e seja $S' \subset V$ um *subespaço afim*, i.e., $S' = \big\{x + v : x \in S\big\}$, onde $v \in V$ é um vetor fixado e $S \subset V$ é um subespaço vetorial. Mostre que S' é uma subvariedade de V e que $T_y S' = S \subset T_y V = V$ para todo $y \in S'$.

[*dica*: a translação $\mathfrak{t}_v : V \ni x \mapsto x + v \in V$ é um difeomorfismo de classe C^∞ e $S' = \mathfrak{t}_v(S)$; além do mais, a diferencial de $\mathfrak{t}_v$ em qualquer ponto é a aplicação identidade de V].

11. Sejam $(M, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável de classe C^k, $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k e l um número natural com $1 \le l \le k$. Seja $\mathcal{A}'$ o atlas maximal de classe C^l em M que contém o atlas maximal $\mathcal{A}$ de classe C^k. Mostre que N é uma subvariedade de classe C^l de $(M, \mathcal{A}')$. Denotando por $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}'_0$ respectivamente as estruturas diferenciáveis induzidas em N por $(M, \mathcal{A})$ e $(M, \mathcal{A}')$, mostre que $\mathcal{A}'_0$ é o atlas maximal de classe C^l em N que contém o atlas maximal $\mathcal{A}_0$ de classe C^k.

Aula número 11 **(24/09)**

`Observação`: parte do material originalmente destinado à aula número 10 foi na verdade coberto na aula número 11.

(1) **Subvariedades imersas**.

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Uma* subvariedade imersa *de M de classe C^k é uma variedade diferenciável N de classe C^k tal que N é um subconjunto de M e a aplicação inclusão de N em M é uma imersão de classe C^k.*

De maneira mais explícita: uma subvariedade imersa de M de classe C^k é um par $(N, \mathcal{A})$ onde N é um subconjunto de M e $\mathcal{A}$ é um atlas maximal de classe C^k em N, de modo que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em N é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade e de modo que a aplicação inclusão $(N, \mathcal{A}) \to M$ é uma imersão de classe C^k.

O termo "subvariedade imersa" pode às vezes provocar um pouco de confusão (apesar de ser a terminologia padrão). De fato, poderia se pensar que "subvariedades imersas" sejam um tipo de subvariedade, enquanto que na realidade temos justamente o contrário: subvariedades são um tipo particular de subvariedade imersa, como explicamos a seguir.

`Exemplo`: se N é uma subvariedade de M (no sentido da aula número 10) então a estrutura diferenciável induzida por M em N é um atlas maximal $\mathcal{A}$ de classe C^k em N tal que $(N, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e tal que a aplicação inclusão $(N, \mathcal{A}) \to M$ é um mergulho de classe C^k. Em particular, $(N, \mathcal{A})$ é uma subvariedade imersa de M de classe C^k. Logo toda subvariedade de M (munida da estrutura diferenciável induzida de M) é uma subvariedade imersa de M. Como a inclusão de uma subvariedade $N \subset M$ em M é um mergulho, as subvariedades de M são também chamadas de *subvariedades mergulhadas* de M. Veremos adiante nesta seção exemplos de subvariedades imersas que não são subvariedades.

Note que, de acordo com a Definição apresentada no início da aula número 10, uma subvariedade de M é um subconjunto $N \subset M$ (satisfazendo certas propriedades) enquanto que uma subvariedade imersa de M é um par $(N, \mathcal{A})$, onde $N \subset M$ é um subconjunto e $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferenciável (i.e., um atlas maximal) em N. Ocorre que, no caso das subvariedades, a estrutura diferenciável de N era induzida de modo natural pela variedade ambiente M, enquanto que no caso de subvariedades imersas é possível até mesmo que existam *estruturas diferenciáveis diferentes* em N que tornem N uma subvariedade imersa de M (exemplos serão apresentados mais adiante nesta seção).

Antes de começarmos a demonstrar resultados sobre subvariedades imersas, vamos identificar o espaço tangente a uma subvariedade imersa com um subespaço do espaço tangente à variedade ambiente.

`Convenção`: Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) e seja $N \subset M$ uma subvariedade imersa de classe C^k. Denote por $i : N \to M$ a aplicação inclusão. Então, para todo $x \in N$, identificamos o espaço tangente T_xN com a imagem da diferencial $\mathrm{d}i(x)$ através do isomorfismo $\mathrm{d}i(x) : T_xN \to \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}i(x)\big)$. Note que, como i é uma imersão temos que $\mathrm{d}i(x)$ é injetora e é portanto de fato um isomorfismo sobre sua imagem. A partir de agora trabalharemos então como se T_xN fosse um subespaço de T_xM e como se $\mathrm{d}i(x) : T_xN \to T_xM$ fosse a aplicação de inclusão de T_xN em T_xM.

`Observação`: sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), N_2 uma subvariedade imersa de classe C^k de M e N_1 uma subvariedade imersa de classe C^k de N_2. Denote por $i_1 : N_1 \to M$, $i_2 : N_2 \to M$ e $i_{12} : N_1 \to N_2$ as aplicações inclusão. Como i_{12} e i_2 são imersões de classe C^k, segue que $i_1 = i_2 \circ i_{12}$ é uma imersão de classe C^k e portanto N_1 é uma subvariedade imersa de M de classe C^k. Para todo $x \in N_1$, temos uma identificação de T_xN_2 com um subespaço de T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_2(x)$ e temos uma identificação de T_xN_1 com um subespaço de T_xN_2 através do isomorfismo $\mathrm{d}i_{12}(x)$. Ambas essas identificações implicam na identificação de T_xN_1 com um subespaço de T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_2(x) \circ \mathrm{d}i_{12}(x)$. Temos também porém uma identificação direta de T_xN_1 com um subespaço de T_xM através do isomorfismo $\mathrm{d}i_1(x)$. Afirmamos que os isomorfismos $\mathrm{d}i_2(x) \circ \mathrm{d}i_{12}(x)$ e $\mathrm{d}i_1(x)$ coincidem. De fato, isso segue da regra da cadeia já que $i_1 = i_2 \circ i_{12}$.

Vimos na aula número 10 que se $f : N \to M$ é um mergulho então $f(N)$ é uma subvariedade de M; além do mais, a estrutura diferenciável em $f(N)$ que torna $f : N \to f(N)$ um difeomorfismo coincide com a estrutura diferenciável induzida por M. Demonstramos abaixo um resultado similar para imersões e subvariedades imersas.

Lema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : N \to M$ uma imersão injetora de classe C^k. Então existe um único atlas maximal $\mathcal{A}$ de classe C^k em $f(N)$ tal que $\big(f(N), \mathcal{A}\big)$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e tal que $f : N \to \big(f(N), \mathcal{A}\big)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Além do mais, o par $\big(f(N), \mathcal{A}\big)$ é uma subvariedade imersa de M de classe C^k e para todo $x \in N$ o espaço tangente $T_{f(x)}f(N)$ coincide com a imagem de $\mathrm{d}f(x)$.*

Demonstração. Como a aplicação $f : N \to f(N)$ é bijetora, a existência e a unicidade de $\mathcal{A}$ seguem do último Corolário da aula número 4. Vamos mostrar agora que $\big(f(N), \mathcal{A}\big)$ é de fato uma subvariedade imersa de M de classe C^k. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ N \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\cong", "f_0"'] & & f(N) \arrow[ul, "i"'] \end{tikzcd}$$

onde $i : f(N) \to M$ denota a inclusão e $f_0 : N \to f(N)$ é a aplicação que difere de f apenas pelo contra-domínio. Como f_0 é um difeomorfismo de classe C^k e $f : N \to M$ é uma imersão de classe C^k, segue que i também é uma imersão de classe C^k e portanto $\big(f(N), \mathcal{A}\big)$ é uma subvariedade imersa de M de classe C^k. Para todo $x \in N$, temos que $\mathrm{d}f_0(x)$ é um isomorfismo e portanto sua imagem é igual a $T_{f(x)}f(N)$; como:

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}i\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f_0(x)$$

e $\mathrm{d}i\big(f(x)\big)$ é a aplicação inclusão de $T_{f(x)}f(N)$ em $T_{f(x)}M$, segue que $T_{f(x)}f(N)$ é igual à imagem de $\mathrm{d}f(x)$. ■

Teorema. *(restrição de domínio) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $P \subset M$ uma subvariedade imersa de classe C^k e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Então $f|_P : P \to N$ é de classe C^k e para todo $x \in P$ temos $\mathrm{d}(f|_P)(x) = \mathrm{d}f(x)|_{T_xP}$.*

Demonstração. Se f é de classe C^k então $f|_P = f \circ i$ é de classe C^k, pois a inclusão $i : P \to M$ é de classe C^k. Além do mais, $\mathrm{d}(f|_P)(x) = \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}i(x) = \mathrm{d}f(x)|_{T_xP}$, pois $\mathrm{d}i(x)$ é a aplicação inclusão de T_xP em T_xM. ■

Teorema. *(mudança de contra-domínio para subvariedades imersas) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $P \subset N$ uma subvariedade imersa de classe C^k e $f : M \to N$ uma aplicação com $f(M) \subset P$. Seja $f_0 : M \to P$ a aplicação que difere de f apenas pelo contra-domínio. Temos que:*

(a) *se f_0 é de classe C^k então f é de classe C^k;*

(b) *se f é de classe C^k e f_0 é contínua então f_0 é de classe C^k.*

Além do mais, se f e f_0 são de classe C^k então suas diferenciais $\mathrm{d}f(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ e $\mathrm{d}f_0(x) : T_xM \to T_{f(x)}P$ diferem apenas pelo contra-domínio.

Demonstração. O item (a) segue da igualdade $f = i \circ f_0$ e do fato que a inclusão $i : P \to N$ é de classe C^k. O item (b) segue também da igualdade $f = i \circ f_0$, do fato que i é uma imersão de classe C^k e do princípio de mudança de contra-domínio provado na seção 2 da aula número 9. Finalmente, a relação entre $\mathrm{d}f(x)$ e $\mathrm{d}f_0(x)$ segue da igualdade $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}i\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f_0(x)$ e do fato que $\mathrm{d}i\big(f(x)\big)$ é igual à aplicação inclusão de $T_{f(x)}P$ em $T_{f(x)}N$. ■

Veremos adiante nesta seção exemplos que mostram que um subconjunto $N \subset M$ pode admitir mais de uma estrutura diferenciável que o torne uma subvariedade imersa de M. No entanto, duas estruturas diferenciáveis diferentes em N que tornam N uma subvariedade imersa de M necessariamente induzem topologias diferentes em N, como se vê no seguinte:

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e sejam $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ atlas maximais de classe C^k num subconjunto $N \subset M$ de modo que $(N, \mathcal{A}_1)$ e $(N, \mathcal{A}_2)$ são subvariedades imersas de classe C^k de M. Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ induzem a mesma topologia em N então $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.*

Demonstração. Temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ (N, \mathcal{A}_1) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}"'] & & (N, \mathcal{A}_2) \arrow[ul, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

onde i_1, i_2 denotam aplicações inclusão. O fato que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ induzem a mesma topologia em N significa que Id é um homeomorfismo. Como i_1 é de classe C^k e Id é contínua, segue do Teorema anterior que Id é de classe C^k. Similarmente, como i_2 é de classe C^k e Id^{-1}

é contínua, segue que Id^{-1} é de classe C^k. Logo Id é um difeomorfismo de classe C^k e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. ■

Vamos mostrar agora que uma subvariedade $N \subset M$ não pode admitir uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ diferente da estrutura diferenciável induzida por M e que torne $(N, \mathcal{A})$ uma subvariedade imersa de M. Antes de mais nada, precisamos de um lema preparatório cuja demonstração usa o Teorema de Baire. Para comodidade do leitor, recordamos na seção seguinte a noção de conjunto magro e a demonstração do Teorema de Baire para espaços topológicos localmente compactos Hausdorff.

Lema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : M \to N$ uma imersão de classe C^1. Se $\dim(M) < \dim(N)$ então a imagem de f possui interior vazio em N. Em particular, se $N \neq \emptyset$, f não é sobrejetora.*

Demonstração. Para todo $x \in M$ podemos escolher uma vizinhança aberta U_x de x em M tal que $f|_{U_x}$ é um mergulho (veja seção 1 da aula número 9). Como M é localmente compacta (veja Exercício 8), podemos encontrar para cada $x \in M$ um aberto V_x e um compacto K_x com $x \in V_x \subset K_x \subset U_x$; da cobertura aberta $M = \bigcup_{x \in M} V_x$ podemos extrair uma subcobertura enumerável $M = \bigcup_{n=1}^{+\infty} V_{x_n}$, pois M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (veja Exercício 7). Como $f|_{U_x}$ é um mergulho de classe C^1, segue que $f(U_x)$ é uma subvariedade de classe C^1 de N com:

$$\dim\big(f(U_x)\big) = \dim(U_x) = \dim(M) < \dim(N);$$

pelo resultado do Exercício 1, $f(U_x)$ possui interior vazio em N. Daí $f(K_x)$ é um fechado com interior vazio em N e portanto $f(M) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(K_{x_n})$ é um conjunto magro. A conclusão segue do fato que N é um espaço de Baire (veja último Corolário da seção seguinte). ■

`Observação`: na verdade temos o seguinte resultado mais forte do que o resultado do Lema acima: se M, N são variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) com $\dim(M) < \dim(N)$ e se $f : M \to N$ é uma aplicação arbitrária de classe C^1 então $f(M)$ tem interior vazio em N. Isso é demonstrado usando a noção de *conjunto de medida nula* em variedades.

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k. Se $\mathcal{A}$ é um atlas maximal de classe C^k em N tal que $(N, \mathcal{A})$ é uma subvariedade imersa de classe C^k de M então $\mathcal{A}$ necessariamente coincide com a estrutura diferenciável induzida por M em N. Em particular, a inclusão de $(N, \mathcal{A})$ em M é um mergulho.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}'$ a estrutura diferenciável induzida por M em N. Temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ (N, \mathcal{A}) \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}"'] & & (N, \mathcal{A}') \arrow[ul, "i'"'] \end{tikzcd}$$

onde i, i' denotam aplicações inclusão. Como i' é um mergulho de classe C^k e i é uma aplicação de classe C^k, segue que Id também é uma aplicação de classe C^k. Além do mais, como i é uma imersão, segue que Id também é uma imersão (veja Exercício 8 da aula número 10). Em particular, a dimensão de $(N, \mathcal{A})$ é menor ou igual à dimensão de $(N, \mathcal{A}')$. Como Id é sobrejetora, segue do Lema anterior que $(N, \mathcal{A})$ e $(N, \mathcal{A}')$ possuem necessariamente a mesma dimensão. Daí para todo $x \in N$ a aplicação linear $\mathrm{d}(\mathrm{Id})(x)$ é uma injeção entre espaços vetoriais de mesma dimensão e portanto é um isomorfismo. Como Id é uma bijeção, o Teorema da Função Inversa nos diz que Id é um difeomorfismo de classe C^k e portanto $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) e $f : M \to N$ uma imersão injetora de classe C^k. Se f não é um mergulho então $f(M)$ não é uma subvariedade de N de classe C^k.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ a estrutura diferenciável de classe C^k em $f(M)$ que torna a aplicação $f : M \to f(M)$ um difeomorfismo de classe C^k. Daí $\big(f(M), \mathcal{A}\big)$ é uma subvariedade imersa de N. Suponha por absurdo que $f(M)$ seja uma subvariedade de N de classe C^k. Pelo Teorema anterior, $\mathcal{A}$ coincide com a estrutura diferenciável induzida por N em $f(M)$ e portanto a inclusão de $\big(f(M), \mathcal{A}\big)$ em N é um mergulho. Como $f : M \to \big(f(M), \mathcal{A}\big)$ é um difeomorfismo, segue que f é um mergulho, contradizendo nossas hipóteses. ■

Note que no Corolário acima podemos concluir que $f(M)$ não é sequer uma subvariedade de classe C^1 de N, pois o resultado pode ser aplicado também para $k = 1$.

`Observação`: no Lema acima (e portanto no Teorema e Corolário que o seguem) usa-se de maneira essencial o fato que a topologia das variedades diferenciáveis satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Vamos, por um momento, descartar a exigência de que variedades satisfaçam o segundo axioma da enumerabilidade. Daí é possível ter uma variedade diferenciável M, uma subvariedade $N \subset M$ de dimensão p e uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ em N tal que a inclusão $(N, \mathcal{A}) \to M$ é uma imersão mas $\mathcal{A}$ é *diferente* da estrutura diferenciável induzida por M em N (isso só pode acontecer, no entanto, se $\dim(N, \mathcal{A}) < p$). Para ver isso, note em primeiro lugar que, sem a exigência de que o segundo axioma da enumerabilidade seja satisfeito, *qualquer* conjunto X pode ser munido de uma estrutura diferenciável de classe C^∞ de modo que X torne-se uma variedade diferenciável de dimensão zero (a topologia induzida por essa estrutura diferenciável é discreta e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade se e somente se X é enumerável). Qualquer aplicação definida numa variedade de dimensão zero é uma imersão de classe C^∞ e portanto *todo* subconjunto de uma variedade diferenciável (em particular, subvariedades) pode ser visto como uma subvariedade imersa de dimensão zero e de classe C^∞. Considere também o seguinte exemplo: denote por $I\!R$ a reta real munida de sua estrutura diferenciável usual de classe C^∞ e por $I\!R_0$ a reta real munida da estrutura diferenciável de classe C^∞ tal que $\dim(I\!R_0) = 0$. Considere a variedade produto $I\!R \times I\!R_0$. Note que $\dim(I\!R \times I\!R_0) = 1$. Para todo $t \in I\!R$ temos que a aplicação $\varphi_t : I\!R \times \{t\} \to I\!R$ definida por $\varphi_t(x, t) = x$ é uma carta e é fácil ver que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : I\!R \times I\!R_0 \to I\!R^2$ (onde $I\!R^2$ é munida da sua estrutura diferenciável usual) é uma imersão de classe C^∞ (mas não um mergulho). Daí $I\!R^2$ é (trivialmente) uma subvariedade de $I\!R^2$, mas admite também uma estrutura diferenciável que o torna uma subvariedade imersa (mas não mergulhada) de $I\!R^2$.

Note, no entanto, que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ não satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, já que $\big(\mathbb{R} \times \{t\}\big)_{t\in\mathbb{R}}$ é uma família não enumerável de abertos não vazios dois a dois disjuntos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$.

Se $N \subset M$ é uma subvariedade imersa, pode não ser verdade que o espaço tangente T_xN coincide com o conjunto dos vetores tangentes às curvas de classe C^k em M que passam por x e tem imagem contida em N (exemplos serão vistos adiante nesta seção). Temos, no entanto, o seguinte:

Lema. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $N \subset M$ uma subvariedade imersa de classe C^k e $x \in N$ um ponto. Denote por $\mathcal{C}$ o conjunto das curvas $\gamma : I \to M$ de classe C^k tais que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(I) \subset N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo a origem. Então:*

$$T_xN \subset \big\{\gamma'(0) : \gamma \in \mathcal{C}\big\}.$$

Demonstração. Seja dado $v \in T_xN$. Pelo resultado do Exercício 5 da aula número 10, existe uma curva $\gamma_0 : I \to N$ de classe C^k com $\gamma_0(0) = x$ e $\gamma_0'(0) = v$. Seja $\gamma : I \to M$ a aplicação que difere de γ_0 apenas pelo contra-domínio. Daí γ é de classe C^k e portanto $\gamma \in \mathcal{C}$. Além do mais, $\gamma'(0) = \gamma_0'(0) = v$. ■

`Exemplo`: considere a aplicação $f : \,]-1,+\infty[\, \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (t^3 - t, t^2)$ (recorde Exemplo da seção 1 da aula número 9). Então f é uma imersão injetora de classe C^∞, mas não é um mergulho. Logo a imagem de f, munida da única estrutura diferenciável que torna $f : \,]-1,+\infty[\, \to f\big(]-1,+\infty[\big)$ um difeomorfismo de classe C^∞, é uma subvariedade imersa do plano $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞. Como f não é um mergulho, sua imagem não é uma subvariedade do plano (nem mesmo uma subvariedade de classe C^1).

`Exemplo`: considere a aplicação $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t)$. Então ϕ é uma imersão de classe C^∞, as aplicações $f_1 = \phi|_{]-\pi,\pi[}$ e $f_2 = \phi|_{]0,2\pi[}$ são imersões injetoras de classe C^∞ e $\operatorname{Im}(\phi) = \operatorname{Im}(f_1) = \operatorname{Im}(f_2)$ (note que ϕ é periódica com período 2π). Daí o subconjunto $N = \operatorname{Im}(\phi)$ do plano admite uma única estrutura diferenciável $\mathcal{A}_1$ de classe C^∞ tal que $f_1 : \,]-\pi,\pi[\, \to N$ é um difeomorfismo de classe C^∞; N também admite uma única estrutura diferenciável $\mathcal{A}_2$ de classe C^∞ tal que $f_2 : \,]0,2\pi[\, \to N$ é um difeomorfismo de classe C^∞. Tanto $(N, \mathcal{A}_1)$ como $(N, \mathcal{A}_2)$ são subvariedades imersas de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$. Afirmamos que $\mathcal{A}_1 \ne \mathcal{A}_2$. Para mostrar essa afirmação, verificaremos que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ não induzem a mesma topologia em N. Temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
]-\pi,\pi[\arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "\alpha"'] & &]0,2\pi[\arrow[ul, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

onde $\alpha : \,]-\pi,\pi[\, \to \,]0,2\pi[$ é definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} t + 2\pi, & -\pi < t < 0, \\ \pi, & t = 0, \\ t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ induzissem a mesma topologia em N então f_1 e f_2 seriam ambos homeomorfismos com respeito à mesma topologia em N; daí α seria também um homeomorfismo, mas α não é sequer contínua.

Observamos que as aplicações $f_1^{-1} : N \to \,]-\pi, \pi[$ e $f_2^{-1} : N \to \,]0, 2\pi[$ são descontínuas na origem. De fato, temos $f_1\big(\pi - \frac{1}{n}\big) \to 0$, mas $\pi - \frac{1}{n} \to \pi \neq f_1^{-1}(0) = 0$; similarmente, $f_2\big(\frac{1}{n}\big) \to 0$, mas $\frac{1}{n} \to 0 \neq f_2^{-1}(0) = \pi$. Logo f_1 e f_2 não são mergulhos e portanto N não é uma subvariedade do plano (nem mesmo uma subvariedade de classe C^1).

Neste exemplo podemos observar diversos fenômenos interessantes que não podem ocorrer para subvariedades mergulhadas. Note que a aplicação $f_1 : \,]-\pi, \pi[\,\to \mathbb{R}^2$ é de classe C^∞ e tem sua imagem contida na subvariedade imersa $(N, \mathcal{A}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, mas a aplicação f_1 não é sequer contínua se considerarmos seu contra-domínio em $(N, \mathcal{A}_2)$; de fato, a continuidade de $f_1 : \,]-\pi, \pi[\,\to (N, \mathcal{A}_2)$ implicaria na continuidade de α, já que $f_2 : \,]0, 2\pi[\,\to (N, \mathcal{A}_2)$ é um difeomorfismo. Note também que as subvariedades imersas $(N, \mathcal{A}_1)$ e $(N, \mathcal{A}_2)$ não possuem o mesmo espaço tangente na origem; de fato:

$$T_0(N, \mathcal{A}_1) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f_1(0)\big) = \mathbb{R}(1, 2) \neq \mathbb{R}(-1, 2) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f_2(\pi)\big) = T_0(N, \mathcal{A}_2).$$

Também, f_1 é uma curva de classe C^∞ no plano $\mathbb{R}^2$ com imagem contida em N e $f_1(0) = 0$, mas $f_1'(0) = (1, 2)$ não pertence ao espaço tangente a $(N, \mathcal{A}_2)$ na origem.

`Exemplo`: o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável e portanto admite uma única estrutura diferenciável de classe C^∞ que o torna uma variedade diferenciável de dimensão zero (veja Observação na seção 2 da aula número 3). A inclusão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é trivialmente uma imersão de classe C^∞ e portanto $\mathbb{Q}$ é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}$. Note que a topologia induzida pelo atlas de $\mathbb{Q}$ é discreta e portanto não coincide com a topologia induzida de $\mathbb{R}$, i.e., a inclusão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ não é um mergulho. Logo $\mathbb{Q}$ não é uma subvariedade de $\mathbb{R}$.

`Exemplo`: Seja $N = \,]-3, -2[\,\cup\,]-1, 1[\,\cup\,]2, 3[$ e considere a aplicação $f : N \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} (0, t + 2), & -3 < t < -2, \\ (t, 0), & -1 < t < 1, \\ (0, t - 2), & 2 < t < 3. \end{cases}$$

Então f é uma imersão de classe C^∞ e sua imagem $f(N)$ é a união do segmento aberto de extremidades $(-1, 0)$, $(1, 0)$ com o segmento aberto de extremidades $(0, -1)$, $(0, 1)$. Daí f não é um homeomorfismo sobre $f(N)$, já que N é desconexa e $f(N)$ é conexa. Temos que $f(N)$, munida da única estrutura diferenciável que torna $f : N \to f(N)$ um difeomorfismo de classe C^∞, é uma subvariedade imersa de classe C^∞ do plano $\mathbb{R}^2$; mas $f(N)$ não é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$. Note também que $f(N)$ possui três componentes conexas na sua própria topologia (induzida pelo seu atlas), mas é conexa (e até conexa por caminhos) na topologia induzida de $\mathbb{R}^2$.

`Exemplo`: denote por N o cone:

$$N = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, \ z \geq 0\big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Afirmamos que, para nenhum $k \geq 1$, existe uma estrutura diferenciável em N que torna N uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^3$ de classe C^k. Suponha por absurdo que N admite uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ que torna N uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^3$ de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$). Em primeiro lugar, afirmamos que $(N, \mathcal{A})$ possui dimensão 2. De fato, seja lá qual for a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em N, sabemos que o ponto $0 \in N$ é fechado e portanto $N' = N \setminus \{0\}$ é um aberto de N. Temos que N' é uma subvariedade de dimensão 2 e de classe C^k de $\mathbb{R}^3$, pois N' é o gráfico da função $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ni (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$, que é de classe C^∞. A estrutura diferenciável $\mathcal{A}'$ induzida por $(N, \mathcal{A})$ no aberto N' faz de $(N', \mathcal{A}')$ uma subvariedade imersa de classe C^k de $\mathbb{R}^3$. Logo $\mathcal{A}'$ coincide com a estrutura diferenciável induzida por $\mathbb{R}^3$ em N' e portanto $\dim(N, \mathcal{A}) = \dim(N', \mathcal{A}') = 2$.

Vamos agora obter uma contradição mostrando que $T_0 N = \{0\}$ (sendo que $T_0 N$ deveria ser um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^3$). Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^1 com $\gamma(I) \subset N$, $\gamma(0) = 0$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo a origem. Se $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ então $z(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ e portanto:

$$z'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{z(t) - z(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{z(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{|t|} \sqrt{\left[\frac{x(t)}{t}\right]^2 + \left[\frac{y(t)}{t}\right]^2} \; ;$$

daí:

$$\sqrt{x'(0)^2 + y'(0)^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{z(t)}{t} = z'(0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{z(t)}{t} = -\sqrt{x'(0)^2 + y'(0)^2},$$

o que implica que $x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$, i.e., $\gamma'(0) = 0$. Pelo Lema anterior, temos que $T_0 N = \{0\}$.

Mostramos agora que subvariedades imersas de codimensão zero (i.e., com dimensão igual à dimensão do ambiente) são necessariamente subconjuntos abertos.

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) e seja $(N, \mathcal{A})$ uma subvariedade imersa de classe C^k de M com $\dim(N, \mathcal{A}) = \dim(M)$. Então N é um aberto de M e $\mathcal{A}$ coincide com a estrutura diferenciável induzida por M em N.*

Demonstração. A aplicação inclusão $i : N \to M$ é uma imersão de classe C^k e portanto $\mathrm{d}i(x) : T_x N \to T_x M$ é injetora para todo $x \in N$; como $\dim(T_x N) = \dim(T_x M)$, segue que $\mathrm{d}i(x)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, $i(N) = N$ é um aberto de M e i é um difeomorfismo de classe C^k sobre sua imagem, i.e., a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (N, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{A}')$ é um difeomorfismo de classe C^k, onde $\mathcal{A}'$ denota a estrutura diferenciável induzida por M no aberto N. Logo $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. ■

`Exemplo`. seja S um subconjunto não enumerável e não aberto da reta real $\mathbb{R}$. Então, para nenhum $k \geq 1$, existe uma estrutura diferenciável em S que torna S uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}$ de classe C^k. De fato, se fosse $\dim(S) = 0$, teríamos que S seria enumerável e se fosse $\dim(S) = 1$ teríamos que S seria aberto em $\mathbb{R}$, pelo lema anterior.

(2) Recordação de topologia: espaços de Baire.

Nesta seção fazemos uma rápida recordação do teorema de Baire que foi usado na demonstração de um Lema na seção 1.

Definição. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto de X é dito* magro *em X se ele estiver contido numa união enumerável de subconjuntos fechados de X que possuem interior vazio em X. Dizemos que X é um* espaço de Baire *se todo subconjunto magro em X possui interior vazio em X.*

Lema. *Um espaço topológico X é um espaço de Baire se e somente se a interseção enumerável de abertos densos em X é um subconjunto denso de X.*

Demonstração. Obviamente X é um espaço de Baire se e somente se a união enumerável de fechados com interior vazio em X é um conjunto com interior vazio em X. A conclusão segue observando que $\big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\big)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^{\mathrm{c}}$ e que A_n é um aberto denso em X se e somente se A_n^{c} é um fechado com interior vazio em X. ■

Definição. *Um espaço topológico X é dito* localmente compacto *se todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças compactas. Mais explicitamente, X é localmente compacto, se para todo $x \in X$ e para todo aberto $U \subset X$ contendo x existe um compacto $K \subset X$ com $x \in \mathrm{int}(K) \subset K \subset U$, onde $\mathrm{int}(K)$ denota o interior de K.*

Na verdade, se X é Hausdorff então para que X seja localmente compacto é suficiente que todo ponto de X tenha ao menos uma vizinhança compacta (veja Exercício 4).

Teorema. *(Baire) Todo espaço topológico localmente compacto e Hausdorff é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de abertos densos em X. Vamos mostrar que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ é denso em X. Para isso, seja U um aberto não vazio em X e vamos mostrar que $U \cap \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ é não vazio. Nossa estratégia será construir uma seqüência decrescente de compactos não vazios $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ de modo que $K_1 \subset U$ e $K_n \subset A_n$ para todo n. Uma vez que tal seqüência for construída, teremos que a interseção $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ será um subconjunto não vazio de $U \cap \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ (veja Exercício 6) e a demonstração ficará completa. Construiremos a seqüência $(K_n)_{n\geq 1}$ indutivamente.

Em primeiro lugar note que, como X é localmente compacto, todo aberto não vazio de X contém um subconjunto compacto com interior não vazio. Agora, como A_1 é denso, segue que $U \cap A_1$ é um aberto não vazio e portanto existe um compacto $K_1 \subset U \cap A_1$ com $\mathrm{int}(K_1) \neq \emptyset$. Suponha que foram construídos compactos $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n$, com $K_i \subset A_i$ e $\mathrm{int}(K_i) \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$. Como A_{n+1} é denso, temos que $\mathrm{int}(K_n) \cap A_{n+1}$ é um aberto não vazio e portanto existe um compacto $K_{n+1} \subset \mathrm{int}(K_n) \cap A_{n+1}$ tal que $\mathrm{int}(K_{n+1}) \neq \emptyset$. Isso completa a demonstração da existência da seqüência de compactos desejada e a demonstração do Teorema. ■

Corolário. *Toda variedade diferenciável é um espaço de Baire.*

Demonstração. De fato, toda variedade diferenciável é localmente compacta e Hausdorff (veja Exercício 8). ■

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Subvariedades`.

1. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k com $\dim(N) < \dim(M)$. Mostre que N tem interior vazio em M.

[*dica*: se Z fosse um aberto não vazio de M contido em N então Z seria uma subvariedade de N com $\dim(Z) = \dim(M) > \dim(N)$].

`Topologia`.

Definição. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que dois abertos $U, V \subset X$* separam *dois subconjuntos $A, B \subset X$ se $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. Quando existem abertos $U, V \subset X$ que separam A e B dizemos que A e B* podem ser separados por abertos. *Recorde que o espaço topológico X é dito* Hausdorff *(ou* T2*) se para quaisquer pontos distintos $x, y \in X$ os conjuntos unitários $\{x\}$ e $\{y\}$ podem ser separados por abertos. Dizemos que o espaço topológico X é* regular *se dados um ponto $x \in X$ e um fechado $F \subset X$ com $x \notin F$ então os conjuntos $\{x\}$ e F podem ser separados por abertos. Dizemos que X é* normal *se quaisquer fechados disjuntos em X podem ser separados por abertos. Dizemos que X é* T3 *(resp.,* T4*) se os pontos de X são conjuntos fechados (i.e., se X é* T1*) e se X é regular (resp., normal).*

2. Mostre que um espaço topológico X é regular se e somente se todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas, i.e., se e somente se para todo $x \in X$ e para todo aberto $U \subset X$ contendo x existe um fechado contido em U que contém x em seu interior.

[*dica*: se X é regular e se U é um aberto que contém x então os conjuntos $\{x\}$ e U^{c} podem ser separados por abertos. Reciprocamente, se todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas então dados um ponto $x \in X$ e um fechado $F \subset X$ com $x \notin F$ temos que a vizinhança aberta F^{c} de x contém uma vizinhança fechada de x].

3. Seja X um espaço topológico Hausdorff. Mostre que:

   (a) dados um ponto $x \in X$ e um compacto $K \subset X$ com $x \notin K$ então $\{x\}$ e K podem ser separados por abertos;

[*dica*: para todo $y \in K$ existem abertos disjuntos U_y, V_y com $x \in U_y$ e $y \in V_y$. A cobertura aberta $K \subset \bigcup_{y \in K} V_y$ possui uma subcobertura finita $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Mostre que os abertos $\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ e $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ separam $\{x\}$ e K].

   (b) todo subconjunto compacto de X é fechado;

[*dica*: use o resultado do item (a)].

   (c) dois compactos disjuntos em X podem ser separados por abertos;

[*dica*: sejam $K, L \subset X$ compactos disjuntos. Pelo resultado do item (a), para todo $y \in L$ existem abertos disjuntos U_y, V_y com $K \subset U_y$ e $y \in V_y$. A cobertura aberta $L \subset \bigcup_{y \in L} V_y$ possui uma subcobertura finita $L \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Mostre que os abertos $\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ e $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ separam K e L].

   (d) todo espaço topológico compacto Hasdorff é normal (e portanto T4, T3 e regular).

[*dica*: use o resultado do item (c)].

4. Seja X um espaço topológico Hausdorff. Suponha que todo ponto de x possui uma vizinhança compacta (i.e., todo ponto de X pertence ao interior de um subconjunto compacto de X). Mostre que:

   (a) X é regular (e portanto T3);

[*dica*: sejam dados um ponto $x \in X$ e um fechado $F \subset X$ com $x \notin F$. Seja K uma vizinhança compacta de x. Pelo resultado do item (a) do Exercício 3, existem abertos U, $V \subset X$ que separam o ponto $\{x\}$ do compacto $F \cap K$. Mostre que $\mathrm{int}(K) \cap U$ e $V \cup K^{\mathrm{c}}$ são abertos que separam $\{x\}$ de F, onde $\mathrm{int}(K)$ denota o interior de K].

   (b) X é localmente compacto.

[*dica*: pelo resultado do Exercício 2 e do item anterior, todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas. Seja U uma vizinhança aberta de um ponto $x \in X$. Daí x possui uma vizinhança fechada F contida em U e uma vizinhança compacta K. Observe que $K \cap F$ é uma vizinhança compacta de x contida em U].

5. Seja X um espaço topológico compacto e seja $(F_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos fechados de X. Suponha que $(F_i)_{i \in I}$ possui a *propriedade da interseção finita*, i.e., para todo subconjunto finito $J \subset I$ a interseção $\bigcap_{i \in J} F_i$ é não vazia. Mostre que a interseção $\bigcap_{i \in I} F_i$ é não vazia.

[*dica*: se fosse $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ então $X = \bigcup_{i \in I} F_i^{\mathrm{c}}$ seria uma cobertura aberta de X e essa cobertura admitiria uma subcobertura finita].

6. Seja X um espaço topológico Hausdorff. Se $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ é uma seqüência decrescente de compactos não vazios, mostre que a interseção $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ é não vazia.

[*dica*: use o resultado do Exercício 5, observando que $(K_n)_{n \geq 1}$ é uma família de fechados no espaço topológico compacto K_1 que possui a propriedade da interseção finita].

7. Um espaço topológico X é dito um *espaço de Lindelöf* se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável. Mostre que se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então X é um espaço de Lindelöf.

[*dica*: seja $\mathfrak{B}$ uma base de abertos enumerável para X e seja $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta de X. Seja $\mathfrak{B}'$ o conjunto dos elementos $B \in \mathfrak{B}$ tais que $B \subset U_i$ para algum $i \in I$; escolha uma função $\iota : \mathfrak{B}' \to I$ tal que $B \subset U_{\iota(B)}$, para todo $B \in \mathfrak{B}'$. Daí $J = \iota(\mathfrak{B}')$ é um subconjunto enumerável de I e $X = \bigcup_{i \in J} U_i$].

`Topologia de variedades`.

8. Seja M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas em M. Se M é munido da topologia induzida por $\mathcal{A}$, mostre que M é localmente compacto.

[*dica*: $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto e M é localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$].

Aula número 12 **(26/09)**

A aula número 12 cobriu parte do material originalmente destinado às aulas número 10 e 11.

Aula número 13 **(01/10)**

A aula começa com comentários sobre o Teorema de Baire (veja seção 2 da aula número 11) e com a demonstração do lema que diz que se $f : M \to N$ é uma imersão de classe C^1 com $\dim(M) < \dim(N)$ então $f(M)$ tem interior vazio em N (veja seção 1 da aula número 11).

(1) **Variedades quociente**.

Em certas situações é possível definir de maneira natural uma estrutura de variedade diferenciável num quociente de uma variedade diferenciável. Mais precisamente, temos a seguinte:

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $\sim$ uma relação de equivalência em M. Denote por $M/{\sim}$ o conjunto quociente e por $q : M \to M/{\sim}$ a aplicação quociente. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma* estrutura diferenciável quociente *em $M/{\sim}$ de classe C^k se $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferenciável de classe C^k em $M/{\sim}$ tal que $(M/{\sim}, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de classe C^k (i.e., a topologia induzida por $\mathcal{A}$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade) e tal que $q : M \to (M/{\sim}, \mathcal{A})$ é uma submersão de classe C^k.*

Observamos que se $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferenciável quociente de classe C^k para o conjunto quociente $M/{\sim}$ então a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em $M/{\sim}$ coincide com a topologia quociente, i.e., a topologia co-induzida pela aplicação quociente q (veja Exercício 15 da aula número 9). De fato, isso segue da observação que uma submersão é uma aplicação aberta e do fato que toda aplicação contínua aberta e sobrejetora é uma aplicação quociente no sentido topológico (veja Exercícios 17 e 18 da aula número 9).

`Observação`: se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua aberta e sobrejetora entre espaços topológicos X, Y e se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então também Y satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (veja Exercício 1). Daí, se $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferenciável em $M/{\sim}$ que torna a aplicação quociente uma submersão, segue automaticamente que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em $M/{\sim}$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (na verdade, estamos cometendo aqui um pequeno abuso de terminologia, pois não deveríamos usar o termo "submersão" se ainda não sabemos que $(M/{\sim}, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável, i.e., se ainda não sabemos que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade; ocorre que, na verdade, o segundo axioma da enumerabilidade não é relevante na definição do conceito de submersão nem na prova de que toda submersão é uma aplicação aberta). No entanto, para verificarmos que $(M/\sim, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável é essencial verificar que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ é Hausdorff (veja seção 3 da aula número 5).

Diferentemente do caso de espaços topológicos, onde a topologia quociente em $X/\sim$ é sempre bem definida, seja lá qual for o espaço topológico X e a relação de equivalência $\sim$ em X, não é em geral verdade que um quociente $M/\sim$ de uma variedade diferenciável M admite uma estrutura diferenciável quociente. Veremos logo adiante, no entanto, que $M/\sim$ admite *no máximo uma* estrutura diferenciável quociente, i.e., a estrutura diferenciável quociente é única, quando existe. Veremos também algumas condições necessárias para a existência de estrutura diferenciável quociente em $M/\sim$ que indicam que "na maioria dos casos" tal estrutura de fato não existe. Na verdade, é difícil exibir condições suficientes gerais para a existência da estrutura diferenciável quociente. Veremos nesta seção alguns exemplos onde tal estrutura existe e apresentaremos na aula seguinte uma condição suficiente para existência da estrutura diferenciável quociente num caso bem específico.

O teorema abaixo exprime a propriedade fundamental da estrutura diferenciável quociente.

Teorema. *(definição por passagem ao quociente) Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Seja $\sim$ uma relação de equivalência em M e denote por $q : M \to M/\sim$ a aplicação quociente. Se existe uma aplicação $\bar{f} : M/\sim \to N$ tal que $\bar{f} \circ q = f$ e se $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferenciável quociente de classe C^k em $M/\sim$ então $\bar{f} : (M/\sim, \mathcal{A}) \to N$ é de classe C^k.*

Demonstração. Isso segue do princípio de definição por passagem ao quociente provado na seção 2 da aula número 9 e do fato que q é uma submersão sobrejetora. ■

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $\sim$ uma relação de equivalência em M. Denote por $M/\sim$ o conjunto quociente. Então existe* no máximo uma *estrutura diferenciável quociente de classe C^k em $M/\sim$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ estruturas diferenciáveis quocientes de classe C^k em $M/\sim$. Temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ (M/\sim, \mathcal{A}_1) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"'] & & (M/\sim, \mathcal{A}_2) \end{tikzcd}$$

onde q_1, q_2 denotam aplicações quociente. Como q_2 é de classe C^k, segue do Teorema anterior que Id é de classe C^k e como q_1 é de classe C^k, segue do Teorema anterior que Id^{-1} é de classe C^k. Logo Id é um difeomorfismo de classe C^k e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. ■

`Exemplo`: sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k e seja $f : M \to N$ uma submersão de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. Denote por $\sim$ a relação de equivalência em M determinada por f, i.e.:

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

Afirmamos que $M/\sim$ admite estrutura diferenciável quociente de classe C^k. De fato, observamos primeiramente que existe uma única aplicação $\bar{f} : M/\sim \to f(M)$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M/\sim \arrow[r, "\bar{f}"'] & f(M) \end{tikzcd}$$

comuta, onde q denota a aplicação quociente (veja Exercício 3 da aula número 9). Além do mais, é fácil ver que $\bar{f}$ é uma bijeção. Como f é uma aplicação aberta (veja Exercício 17 da aula número 9), temos que $f(M)$ é um subconjunto aberto de N e em particular $f(M)$ é uma variedade diferenciável de classe C^k; logo existe uma única estrutura diferenciável de classe C^k em $M/\sim$ que torna $M/\sim$ uma variedade diferenciável de classe C^k e que torna $\bar{f}$ um difeomorfismo de classe C^k (veja último Corolário da aula número 4). Daí, como $f : M \to f(M)$ é uma submersão de classe C^k, segue que também $q : M \to M/\sim$ é uma submersão de classe C^k. Logo temos uma estrutura diferenciável quociente de classe C^k em $M/\sim$. Observe que a variedade $M/\sim$ é difeomorfa ao aberto $f(M)$ de N.

`Exemplo`: considere a aplicação $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^2$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana em $\mathbb{R}^n$. Temos que f é uma submersão de classe C^∞ (veja último Exemplo da aula número 10). Seja $\sim$ a relação de equivalência em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ determinada por f, ou seja:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \|x\| = \|y\|.$$

Segue do Exemplo anterior que o conjunto quociente $\big(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)/\sim$ admite uma estrutura diferenciável quociente de classe C^∞ e que $\big(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)/\sim$ é difeomorfo ao intervalo aberto $]0, +\infty[$, que é a imagem de f.

A seguir apresentamos uma condição necessária para que um conjunto quociente $M/\sim$ admita uma estrutura diferenciável quociente.

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $\sim$ uma relação de equivalência em M. Denote por $M/\sim$ o conjunto quociente. Se existe uma estrutura diferenciável quociente de classe C^k em $M/\sim$ então todas as classes de equivalência correspondentes a $\sim$ são subvariedades de M e todas elas possuem a mesma dimensão.*

Demonstração. Denote por $q : M \to M/\sim$ a aplicação quociente. Então, para todo $x \in M$, a classe de equivalência de x é igual a $q^{-1}\big(q(x)\big)$. Como q é uma submersão, temos que $q(x)$ é um valor regular de q e portanto $q^{-1}\big(q(x)\big)$ é uma subvariedade de M com dimensão igual a $\dim(M) - \dim(M/\sim)$. ∎

`Exemplo`: considere a relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow |x| + |y| = |x'| + |y'|.$$

A classe de equivalência de um ponto $(x, y) \neq 0$ é um quadrado de centro na origem e diagonais paralelas aos eixos coordenados. Logo as classes de equivalência determinadas por $\sim$ não são subvariedades de $I\!R^2$ (veja Exercício 6) e portanto o conjunto quociente $I\!R^2/\!\sim$ não admite estrutura diferenciável quociente (nem mesmo de classe C^1).

`Exemplo`: considere a relação de equivalência $\sim$ em $I\!R^n$ definida por:

$$x \sim y \iff \|x\| = \|y\|,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana em $I\!R^n$. As classes de equivalência determinadas por $\sim$ são esferas centradas na origem (difeomorfas a S^{n-1}) e mais a origem. Daí, se $x \ne 0$, a classe de equivalência de x é uma subvariedade de dimensão $n-1$ e a classe de equivalência da origem (que contém apenas a origem) é uma subvariedade de $I\!R^n$ de dimensão zero. Isso mostra que se $n \ge 2$, o conjunto quociente $I\!R^n/\!\sim$ não admite estrutura diferenciável quociente (nem mesmo de classe C^1). Também para $n = 1$ é verdade que $I\!R^n/\!\sim$ não admite estrutura diferenciável quociente, mas isso não pode ser mostrado estudando a dimensão das classes de equivalência. Uma sugestão para demonstrar esse fato pode ser encontrada no Exerício 7.

`Exemplo`: considere a relação de equivalência $\sim$ em $I\!R^{n+1} \setminus \{0\}$ definida por:

$$z \sim w \iff \text{existe } \lambda \in I\!R,\ \lambda \ne 0, \text{ tal que } w = \lambda z.$$

O conjunto quociente $\big(I\!R^{n+1}\setminus\{0\}\big)/\!\sim$ é conhecido como o *espaço projetivo real n-dimensional* e é denotado por $I\!RP^n$. Temos uma identificação natural entre $I\!RP^n$ e o Grassmanniano $G_1(n+1)$ de subespaços unidimensionais de $I\!R^{n+1}$; a saber, se $z \in I\!R^{n+1}$, $z \ne 0$, então a classe de equivalência de z é dada por:

$$[z] = \big\{\lambda z : \lambda \in I\!R,\ \lambda \ne 0\big\},$$

e nós identificamos $[z]$ com o subespaço $\big\{\lambda z : \lambda \in I\!R\big\}$ de $I\!R^{n+1}$, que é um elemento de $G_1(n+1)$. Na seção 1 da aula número 5 construímos uma estrutura diferenciável de classe C^∞ no Grassmanniano $G_1(n+1)$ que o torna uma variedade diferenciável de classe C^∞ e de dimensão n. Temos então também uma estrutura diferenciável de classe C^∞ no espaço projetivo $I\!RP^n$ que o torna uma variedade diferenciável de classe C^∞ e de dimensão n. Nosso objetivo agora é demonstrar que a estrutura diferenciável de $I\!RP^n = \big(I\!R^{n+1}\setminus\{0\}\big)/\!\sim$ é uma estrutura diferenciável quociente de classe C^∞. Para isso, devemos mostrar que a aplicação quociente $q : \big(I\!R^{n+1} \setminus \{0\}\big) \to I\!RP^n$ é uma submersão de classe C^∞.

Antes de mais nada, vamos descrever um atlas conveniente para $I\!RP^n$. O leitor deve recordar a definição da estrutura diferenciável do Grassmanniano explicada na seção 1 da aula número 5. Denote por $(e_i)_{i=1}^{n+1}$ a base canônica de $I\!R^{n+1}$ e, fixado $i = 1, \ldots, n+1$, considere a decomposição em soma direta:

$$I\!R^{n+1} = W_0^i \oplus W_1^i,$$

onde W_0^i é o subespaço gerado pelo vetor e_i e W_1^i é o subespaço gerado pelos vetores e_j, $j = 1, \ldots, n+1$, $j \ne i$. Vamos identificar o espaço $\mathrm{Lin}(W_0^i, W_1^i)$ com $I\!R^n$ através do isomorfismo:

$$I\!R^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto T_x \in \mathrm{Lin}(W_0^i, W_1^i),$$

onde $T_x : W_0^i \to W_1^i$ é o operador linear tal que $T_x(e_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_n)$. Note que o gráfico de T_x é o subespaço de $\mathbb{R}^{n+1}$ gerado pelo vetor $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)$.

O domínio $G_1(n+1; W_1^i)$ da carta $\varphi_{W_0^i, W_1^i}$ associada à decomposição em soma direta $W_0^i \oplus W_1^i$ consiste dos subespaços unidimensionais de $\mathbb{R}^{n+1}$ que tem interseção nula com o hiperplano W_1^i; temos então que $G_1(n+1; W_1^i)$ identifica-se com o subconjunto A_i do espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$ definido por:

$$A_i = \big\{[z] : z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ z_i \neq 0\big\}.$$

Temos também que a carta $\varphi_{W_0^i, W_1^i} = \varphi_i : A_i \to \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\varphi_i\big([z]\big) = \Big(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\Big),$$

pois se $x = \varphi_i\big([z]\big)$ então o gráfico de T_x coincide com o subespaço de $\mathbb{R}^{n+1}$ gerado por z.

Obviamente $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ e portanto as cartas $\varphi_i : A_i \to \mathbb{R}^n$ descritas acima constituem um atlas para o espaço projetivo. Fazendo uso desse atlas, é fácil verificar agora que a aplicação quociente $q : \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big) \to \mathbb{R}P^n$ é uma submersão de classe C^∞. De fato, seja $A_i' = q^{-1}(A_i) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; temos:

$$A_i' = \big\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : z = (z_1, \ldots, z_{n+1}),\ z_i \neq 0\big\},$$

e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i'$. Basta então mostrar que $q|_{A_i'}$ é uma submersão de classe C^∞ para todo $i = 1, \ldots, n+1$. Como $q(A_i') = A_i$ e $\varphi_i : A_i \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^∞, devemos verificar que a aplicação $\rho_i = \varphi_i \circ q|_{A_i'}$ é uma submersão de classe C^∞, para todo $i = 1, \ldots, n+1$. A aplicação ρ_i é dada por:

$$A_i' \ni z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \longmapsto \rho_i(z) = \Big(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\Big) \in \mathbb{R}^n.$$

Obviamente ρ_i é de classe C^∞. Dado $z \in A_i'$, para verificar que ρ_i é uma submersão no ponto z basta notar que os vetores $\mathrm{d}\rho_i(z) \cdot e_j = \frac{\partial \rho_i}{\partial z_j}(z)$, $j = 1, \ldots, n+1$ geram $\mathbb{R}^n$; de fato, os vetores $z_i \frac{\partial \rho_i}{\partial z_j}(z)$, $j = 1, \ldots, n+1$, $j \neq i$, constituem a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Topologia`.

1. Sejam X, Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, aberta e sobrejetora. Mostre que:
   (a) se $\mathfrak{B}$ é uma base de abertos para X então $\big\{f(B) : B \in \mathfrak{B}\big\}$ é uma base de abertos para Y;
   (b) se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então Y também satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.
2. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação quociente (i.e., a topologia de Y é co-induzida por f; veja Exercício 15 da aula número 9). Seja $\sim$ a relação de equivalência em X determinada por f, i.e., $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Considere o conjunto quociente $X/\sim$ munido da topologia quociente (i.e., a topologia co-induzida pela aplicação quociente $q : X \to X/\sim$). Mostre que se f é sobrejetora então $X/\sim$ é homeomorfo a Y.

[*dica*: existe uma única aplicação $\bar{f} : X/\sim \to Y$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[rr, "\bar{f}"'] & & Y \end{tikzcd}$$

comuta; essa aplicação é bijetora e a continuidade de $\bar{f}$ e de $\bar{f}^{-1}$ segue do resultado do Exercício 15 da aula número 9].

3. Seja $n \geq 1$ e considere a aplicação $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ definida por $f(x) = \|x\|$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana. Mostre que a topologia usual de $[0, +\infty[$ é co-induzida por f da topologia usual de $\mathbb{R}^n$ (i.e., f é uma aplicação quociente, no sentido topológico).

[*dica*: como f é contínua e sobrejetora, é suficiente mostrar que f é aberta, pelo resultado do item (a) do Exercício 16 da aula número 9; note também que a restrição de f a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é uma aplicação aberta, pois é uma submersão de classe C^∞].

4. Mostre que o intervalo $[0, +\infty[$ não é uma variedade topológica (veja última observação da seção 2 da aula número 3). Em particular, para nenhum k existe um atlas de classe C^k em $[0, +\infty[$ que induza sua topologia usual.

[*dica*: se $[0, +\infty[$ fosse uma variedade topológica, poderíamos obter uma vizinhança aberta U de 0 em $[0, +\infty[$ e um homeomorfismo $\varphi : U \to I$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto; obtenha uma contradição contando as componentes conexas de $U \setminus \{0\}$ e de $I \setminus \{\varphi(0)\}$].

`Subvariedades`.

5. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $f : M \to N$ um difeomorfismo de classe C^k e $(P, \mathcal{A})$ uma subvariedade imersa de M de classe C^k. Seja $\mathcal{A}'$ a única estrutura diferenciável de classe C^k em $f(P)$ tal que $\big(f(P), \mathcal{A}'\big)$ é uma variedade diferenciável de classe C^k e tal que $f|_P : (P, \mathcal{A}) \to \big(f(P), \mathcal{A}'\big)$ é um difeomorfismo de classe C^k (veja último Corolário da aula número 4). Mostre que $\big(f(P), \mathcal{A}'\big)$ é uma subvariedade imersa de classe C^k de N.

[*dica*: $f|_P : (P, \mathcal{A}) \to N$ é uma imersão injetora de classe C^k].

6. Mostre que o quadrado $Q = \big([0,1] \times \{0,1\}\big) \cup \big(\{0,1\} \times [0,1]\big)$ não é uma subvariedade imersa (e portanto não é uma subvariedade) de classe C^1 do plano $\mathbb{R}^2$. Conclua que nenhum retângulo é uma subvariedade imersa de classe C^1 do plano $\mathbb{R}^2$.

[*dica*: para ver que Q não é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^2$, utilize uma técnica similar à usada num Exemplo da aula número 11 para mostrar que o cone não é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^3$. Observe também que qualquer retângulo em $\mathbb{R}^2$ pode ser mapeado sobre Q por um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$].

`Variedades quociente`.

7. Seja $n \ge 1$ e considere a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{R}^n$ definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \|x\| = \|y\|,$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana. Mostre que o conjunto quociente $\mathbb{R}^n/\!\sim$ não admite estrutura diferenciável quociente de classe C^k, para nenhum $k \ge 1$.

[*dica*: use o resultado dos Exercícios 2, 3 e 4].

Aula número 14 (03/10)

(1) **Quocientes por ações propriamente descontínuas de grupos**.

Nesta seção descrevemos uma situação particular onde o quociente de uma variedade diferenciável admite uma estrutura diferenciável quociente. Tal quociente é descrito em termos de ações de grupos. Recordamos portanto a seguinte:

Definição. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma* ação *de G em X é uma aplicação $\rho : G \times X \to X$ tal que $\rho(1,x) = x$ e $\rho\big(g_1, \rho(g_2,x)\big) = \rho(g_1g_2, x)$, para todos $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$, onde $1 \in G$ denota o elemento neutro.*

Tipicamente, quando uma ação $\rho : G \times X \to X$ é fixada pelo contexto, escrevemos $g \cdot x$ em vez de $\rho(g,x)$, de modo que:

$$1 \cdot x = x, \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x,$$

para todos $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$. Note que, para todo $g \in G$, a aplicação $\rho_g : X \to X$ definida por $\rho_g(x) = \rho(g,x)$ é bijetora e sua inversa é igual a $\rho_{g^{-1}}$. Se $\mathrm{Bij}(X)$ denota o grupo das bijeções $\phi : X \to X$, munido da operação de composição, obtemos então uma aplicação:

$$\bar\rho : G \ni g \longmapsto \rho_g \in \mathrm{Bij}(X);$$

é fácil ver que $\bar\rho$ é um homomorfismo de grupos. Reciprocamente, dado um homomorfismo $\bar\rho : G \to \mathrm{Bij}(X)$, é fácil ver que $\rho(g,x) = \bar\rho(g)(x)$ define uma ação de G em X.

`Observação`: uma ação de grupo no sentido da definição acima é às vezes também chamada de uma *ação à esquerda*. Uma *ação à direita* de um grupo G num conjunto X é uma aplicação $\rho : G \times X \to X$ tal que $\rho(1,x) = x$ e $\rho\big(g_1, \rho(g_2,x)\big) = \rho(g_2g_1, x)$, para todos $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$. A motivação para o nome "ação à direita" é a seguinte: se denotarmos $\rho(g,x)$ por $x \cdot g$ então as condições satisfeitas por ρ são escritas da seguinte maneira:

$$x \cdot 1 = x, \quad (x \cdot g_2) \cdot g_1 = x \cdot (g_2 g_1).$$

Note que se G é abeliano então não há diferença entre ações à esquerda ou à direita. Além do mais, se $\rho : G \times X \to X$ é uma ação à direita então $\tilde\rho(g,x) = \rho(g^{-1}, x)$ é uma ação à esquerda de G em X. Por esse motivo, restringimo-nos ao estudo das ações à esquerda.

Recordamos agora mais algumas definições padrão da teoria de ações de grupos. Dado $x \in X$ então o *subgrupo de isotropia* de x é definido por:

$$G_x = \big\{ g \in G : g \cdot x = x \big\}.$$

É fácil verificar que G_x é de fato um subgrupo de G. Quando $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X$, dizemos que a ação de G em X é *livre* ou *sem pontos fixos*. Observe que:

$$\mathrm{Ker}(\bar\rho) = \bigcap_{x \in X} G_x,$$

e portanto $\bigcap_{x\in X} G_x$ é um subgrupo normal de G. Quando $\bigcap_{x\in X} G_x = \{1\}$ (i.e., quando $\bar\rho$ é injetora) dizemos que a ação de G em X é *efetiva*. Nesse caso, $\bar\rho$ fornece um isomorfismo entre G e um subgrupo das bijeções de X. Pensamos intuitivamente então que G está sendo "realizado concretamente" em termos de transformações do conjunto X.

Associada a uma ação $\rho : G \times X \to X$ temos uma relação de equivalência em X definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{existe } g \in G, \text{ com } y = g \cdot x.$$

É fácil ver que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência em X. A classe de equivalência de um ponto $x \in X$ é chamada a *órbita* de x pela ação de G e é denotada por Gx. Temos:

$$Gx = \big\{g \cdot x : g \in G\big\}.$$

O conjunto quociente de X pela relação de equivalência $\sim$ é denotado por X/G; temos:

$$X/G = \big\{Gx : x \in X\big\}.$$

Quando a ação ρ possui uma única órbita (i.e., se para todos $x, y \in X$ existe $g \in G$ com $y = g \cdot x$) então dizemos que ρ é uma ação *transitiva*. Observamos que para todo $x \in X$ a aplicação:

$$\beta_x : G \ni g \longmapsto g \cdot x \in Gx$$

é sobrejetora. Se x possui isotropia trivial (i.e., se $G_x = \{1\}$) então β_x é também injetora. De fato, se $g \cdot x = h \cdot x$ então $h^{-1}g \in G_x$ e portanto $h = g$ (veja também o Exercício 9).

O uso da seguinte notação será conveniente:

`Notação`: se é dada uma ação de um grupo G num conjunto X e se S é um subconjunto de X escrevemos:

$$gS = \big\{g \cdot x : x \in S\big\} \subset X,$$

para todo $g \in G$.

Quando X é um espaço topológico ou uma variedade diferenciável, é mais natural estudar ações de grupos em X que sejam compatíveis com a estrutura topológica ou com a estrutura diferenciável de X. Temos então a seguinte:

Definição. *Sejam G um grupo e X um espaço topológico. Uma* ação por transformações contínuas *de G em X é uma ação $\rho : G \times X \to X$ de G no conjunto X tal que para todo $g \in G$ a bijeção $\rho_g : X \to X$ é contínua. Se X é uma variedade diferenciável de classe C^k então dizemos que ρ é uma* ação por transformações de classe C^k *se a bijeção ρ_g é de classe C^k para todo $g \in G$.*

Como $\rho_g^{-1} = \rho_{g^{-1}}$, temos que se ρ é uma ação por transformações contínuas então ρ_g é um homeomorfismo de X, para todo $g \in G$; similarmente, se ρ é uma ação por transformações de classe C^k então ρ_g é um difeomorfismo de classe C^k de X, para todo $g \in G$. Em particular, se ρ é uma ação por transformações contínuas e se $U \subset X$ é um aberto então gU também é aberto em X.

Se X é um espaço topológico então o conjunto $\mathrm{Homeo}(X)$ dos homeomorfismos de X é um subgrupo de $\mathrm{Bij}(X)$; temos então que ρ é uma ação por transformações contínuas se e somente se o homomorfismo associado $\bar{\rho}$ toma valores em $\mathrm{Homeo}(X)$. Se X é uma variedade diferenciável de classe C^k então o conjunto $\mathrm{Dif}_k(X)$ dos difeomorfismos de classe C^k de X é um subgrupo de $\mathrm{Homeo}(X)$; temos então que ρ é uma ação por transformações de classe C^k se e somente se $\bar{\rho}$ toma valores em $\mathrm{Dif}_k(X)$.

Recorde que se X é um espaço topológico e $\sim$ é uma relação de equivalência em X então a *topologia quociente* em $X/\!\sim$ é a topologia co-induzida pela aplicação quociente $q : X \to X/\!\sim$ (recorde Exercício 15 da aula número 9).

Lema. *Sejam G um grupo, X um espaço topológico e suponha que seja dada uma ação de G em X por transformações contínuas. Se X/G é munido da topologia quociente então a aplicação quociente $q : X \to X/G$ é aberta.*

Demonstração. Seja $U \subset X$ um aberto. Para mostrar que $q(U)$ é aberto em X/G, devemos verificar que $q^{-1}\big(q(U)\big)$ é aberto em X. Temos que $q^{-1}\big(q(U)\big)$ é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $x \sim y$ (i.e., $x \in Gy$) para algum $y \in U$. Daí:

$$q^{-1}\big(q(U)\big) = \bigcup_{g \in G} gU.$$

Como cada gU é aberto em X, segue que $q^{-1}\big(q(U)\big)$ também é aberto em X. ■

`Convenção`: no que segue, se X é um espaço topológico e se G é um grupo agindo em X por transformações contínuas, *assumiremos sempre que X/G é munido da topologia quociente.*

Definição. *Sejam G um grupo e X um espaço topológico. Uma ação de G em X por transformações contínuas é dita* propriamente descontínua *se valem as seguintes propriedades:*

(i) *para todo $x \in X$, existe um aberto $U \subset X$ contendo x tal que $gU \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G$, $g \ne 1$;*

(ii) *para todos $x, y \in X$ com $y \notin Gx$, existem abertos $U, V \subset X$ com $x \in U$, $y \in V$ e $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$.*

Observamos que a condição (i) implica na verdade que os abertos $(gU)_{g\in G}$ são dois a dois disjuntos. De fato, se $g, h \in G$, $g \ne h$, então:

$$gU \cap hU = h\big((h^{-1}g)U \cap U\big) = h\,\emptyset = \emptyset,$$

pois $h^{-1}g \ne 1$. Similarmente, a condição (ii) implica que $gU \cap hV = \emptyset$, para todos $g, h \in G$. De fato:

$$gU \cap hV = h\big((h^{-1}g)U \cap V\big) = h\,\emptyset = \emptyset.$$

O Lema a seguir ilustra o significado da condição (ii).

Lema. *Sejam X um espaço topológico e G um grupo. Suponha que é dada uma ação de G em X por transformações contínuas. Então a condição* (ii) *na definição de ação propriamente descontínua é satisfeita se e somente se o espaço topológico X/G é Hausdorff.*

Demonstração. Denotamos por $q : X \to X/G$ a aplicação quociente. Suponha que X/G é Hausdorff. Dados $x, y \in X$ com $y \notin Gx$ então $q(x)$, $q(y)$ são pontos distintos em X/G, donde podemos encontrar abertos disjuntos $U_0, V_0 \subset X/G$ com $q(x) \in U_0$, $q(y) \in V_0$. É fácil ver então que $U = q^{-1}(U_0)$ e $V = q^{-1}(V_0)$ são abertos em X com $x \in U$, $y \in V$ e $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$. Isso prova a condição (ii).

Reciprocamente, suponha que a condição (ii) é satisfeita. Sejam $x_0, y_0 \in X/G$ pontos distintos e escolha $x, y \in X$ com $q(x) = x_0$, $q(y) = y_0$. Daí x e y não são equivalentes, i.e., $y \notin Gx$ e portanto existem abertos U, $V \subset X$ com $x \in U$, $y \in V$ e $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$. Como a aplicação quociente q é aberta, temos que $U_0 = q(U)$ e $V_0 = q(V)$ são abertos em X/G. Obviamente $x_0 \in U_0$, $y_0 \in V_0$ e é fácil ver que U_0 e V_0 são disjuntos. Logo X/G é Hausdorff. ■

No Lema abaixo resumimos algumas propriedades simples das ações propriamente descontínuas.

Lema. *Toda ação propriamente descontínua de um grupo G num espaço topológico X é livre (i.e., sem pontos fixos) e possui órbitas discretas e fechadas. Além do mais, para que exista uma ação propriamente descontínua de algum grupo G num dado espaço topológico X é necessário que X seja Hausdorff.*

Demonstração. A condição (i) na definição de ação propriamente descontínua implica que a ação de G em X é livre e que as órbitas dessa ação são discretas (veja a observação que segue a definição de ação propriamente descontínua). Segue trivialmente da condição (ii) na definição de ação propriamente descontínua que as órbitas da ação de G em X são fechadas. Para finalizar a demonstração, suponha que existe uma ação propriamente descontínua de G em X e vamos demonstrar que X é Hausdorff. Sejam $x, y \in X$ pontos distintos. Se $y \in Gx$ então a condição (i) fornece abertos que separam x de y; a saber, se $y = g \cdot x$, $g \neq 1$, e se $U \subset X$ é um aberto contendo x como na condição (i) então $y \in gU$ e $U \cap gU = \emptyset$. Se $y \notin Gx$, a condição (ii) fornece abertos disjuntos U, $V \subset X$ com $x \in U$, $y \in V$. ■

Apresentamos agora algumas condições suficientes para que uma ação seja propriamente descontínua.

Lema. *Se X é um espaço topológico Hausdorff e G é um grupo finito então toda ação livre (i.e., sem pontos fixos) por transformações contínuas de G em X é propriamente descontínua.*

Demonstração. Vamos verificar primeiramente a condição (i). Seja dado $x \in X$. Como a ação é livre, temos que os elementos da família $(g \cdot x)_{g \in G}$ são dois a dois distintos; como X é Hausdorff e G é finito, podemos obter uma família $(U_g)_{g \in G}$ de abertos dois a dois disjuntos em X de modo que $g \cdot x \in U_g$, para todo $g \in G$ (veja Exercício 1). Daí:

$$U = \bigcap_{g \in G} g^{-1} U_g \tag{$*$}$$

é uma vizinhança aberta de x. Afirmamos que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq 1$. De fato, temos $U \subset g^{-1} U_g$ e portanto $gU \subset U_g$; além do mais, $U \subset U_1$ e $U_g \cap U_1 = \emptyset$, pois $g \neq 1$. Logo gU é disjunto de U.

Passemos à demonstração da condição (ii). Sejam dados $x, y \in X$ com $y \notin Gx$. Para todo $g \in G$, como $y \neq g \cdot x$, existem abertos disjuntos $U_g, V_g \subset X$ com $g \cdot x \in U_g$ e $y \in V_g$.

Definindo U como em $(*)$ e tomando $V = \bigcap_{g\in G} V_g$ então U é uma vizinhança aberta de x, V é uma vizinhança aberta de y e para todo $g \in G$ temos $gU \subset U_g$ e $V \subset V_g$, donde $gU \cap V = \emptyset$. ■

`Exemplo`: Seja $G = \{-1, 1\}$ um grupo de dois elementos e defina uma ação de G na esfera $S^n \subset I\!R^{n+1}$ fazendo $1 \cdot x = x$ e $(-1) \cdot x = -x$, para todo $x \in S^n$ (note que $-x$ é o ponto antípoda de x em S^n). Obviamente a ação de G em X é livre. Como G é finito e S^n é Hausdorff, a ação de G em S^n é propriamente descontínua, pelo Lema anterior. Vamos estudar o conjunto quociente S^n/G. O leitor deve recordar do último Exemplo da aula número 13 a definição do espaço projetivo $I\!RP^n$. Seja $q_1 : S^n \to I\!RP^n$ a restrição a S^n da aplicação quociente $q : \big(I\!R^{n+1} \setminus \{0\}\big) \to I\!RP^n$. Temos que q_1 é de classe C^∞, pois q é de classe C^∞. Além do mais, q_1 é sobrejetora, pois para todo $z \in I\!R^{n+1}$, $z \neq 0$, temos $q(z) = [z] = q_1\big(\frac{z}{\|z\|}\big)$. Temos que a relação de equivalência determinada por q_1 em S^n coincide com a relação de equivalência em S^n cujas classes de equivalência são as órbitas de G; em outras palavras, temos:

$$y \in Gx \Longleftrightarrow y = x \text{ ou } y = -x \Longleftrightarrow q_1(x) = q_1(y),$$

para todos $x, y \in S^n$. Vamos mostrar agora que q_1 é um difeomorfismo local (e, em particular, uma submersão). Seguirá então que q_1 induz uma bijeção de S^n/G em $I\!RP^n$ e que a estrutura diferenciável em S^n/G que torna tal bijeção um difeomorfismo de classe C^∞ é uma estrutura diferenciável quociente de classe C^∞ em S^n/G (veja o primeiro Exemplo da aula número 13). Em outras palavras, podemos identificar o quociente S^n/G com o espaço projetivo n-dimensional $I\!RP^n$ através do difeomorfismo induzido por q_1.

Vamos agora mostrar que q_1 é um difeomorfismo local. Para isso, fazemos uso do atlas $\big\{\varphi_i : A_i \to I\!R^n\big\}_{i=1}^{n+1}$ em $I\!RP^n$ construído no último exemplo da aula número 13. Como $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} q_1^{-1}(A_i)$ é uma cobertura aberta, é suficiente verificar que para todo $i = 1, \ldots, n+1$, a aplicação:

$$q_1^{-1}(A_i) \ni z \longmapsto \varphi_i\big(q_1(z)\big) = \Big(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\Big) \in I\!R^n,$$

é um difeomorfismo local de classe C^∞. Temos que $q_1^{-1}(A_i)$ é igual à união dos seguintes abertos disjuntos:

$$B_i^+ = \big\{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^n : z_i > 0\big\}, \quad B_i^- = \big\{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^n : z_i < 0\big\}.$$

Afirmamos que a restrição de $\varphi_i \circ q_1$ a B_i^+ é um difeomorfismo de classe C^∞ sobre $I\!R^n$. De fato, sua inversa é a aplicação τ_i definida por:

$$\tau_i : I\!R^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \frac{(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)}{\sqrt{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \in B_i^+,$$

e claramente τ_i é de classe C^∞. Similarmente, a restrição de $\varphi_i \circ q_1$ a B_i^- é um difeomorfismo de classe C^∞ sobre $I\!R^n$, pois sua inversa é igual a $-\tau_i$. Logo q_1 é um difeomorfismo local de classe C^∞.

Lema. *Sejam G um grupo, (X, d) um espaço métrico e suponha que seja dada uma* ação de G em X por isometrias, *i.e., uma ação de G em X tal que a aplicação $x \mapsto g \cdot x$ é uma isometria de X para todo $g \in G$. Suponha também que a ação dada de G em X seja livre e possua órbitas discretas e fechadas em X. Então essa ação é propriamente descontínua.*

Demonstração. Vamos demonstrar primeiramente a condição (i). Seja dado $x \in X$. Como a órbita que contém x é discreta, existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}(x; r) \cap Gx = \{x\}$, onde $\mathrm{B}(x; r)$ denota a bola aberta de centro x e raio r em X. Tome $U = \mathrm{B}\big(x; \frac{r}{2}\big)$. Daí U é uma vizinhança aberta de x em X e para todo $g \in G$, temos $gU = \mathrm{B}\big(g \cdot x; \frac{r}{2}\big)$, pois a bijeção de X correspondente a g é uma isometria. Se $g \neq 1$ então, como a ação é livre, temos $g \cdot x \neq x$ e portanto $g \cdot x \notin \mathrm{B}(x; r)$, i.e., $d(g \cdot x, x) \geq r$. Segue facilmente da desigualdade triangular que as bolas $U = \mathrm{B}\big(x; \frac{r}{2}\big)$ e $gU = \mathrm{B}\big(g \cdot x; \frac{r}{2}\big)$ são disjuntas.

Vamos agora demonstrar a condição (ii). Sejam dados $x, y \in X$ com $y \notin Gx$. Como a órbita Gx é fechada em X, existe $r > 0$ tal que a bola $\mathrm{B}(y; r)$ é disjunta de Gx. Tome $U = \mathrm{B}\big(x; \frac{r}{2}\big)$ e $V = \mathrm{B}\big(y; \frac{r}{2}\big)$. Daí U é uma vizinhança aberta de x, V é uma vizinhança aberta de y e para todo $g \in G$ temos $gU = \mathrm{B}\big(g \cdot x; \frac{r}{2}\big)$. Como $d(g \cdot x, y) \geq r$, segue da desigualdade triangular que $gU \cap V = \emptyset$. ∎

`Exemplo`: Seja $X = \mathbb{R}^2$ o plano e seja $G = \mathbb{Z}^2$ o grupo aditivo formado pelos pares de números inteiros. Temos uma ação de G em $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$(n, m) \cdot (t, s) = (t + n, s + m),$$

para todos $n, m \in \mathbb{Z}$, $t, s \in \mathbb{R}$. A bijeção de $\mathbb{R}^2$ correspondente a um elemento $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ é uma translação e portanto temos uma ação por isometrias. Além do mais, a órbita de um ponto $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ é simplesmente uma translação do subconjunto $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ e portanto é discreta e fechada. Também é óbvio que a ação em questão é livre. Segue então do Lema anterior que temos uma ação propriamente descontínua (o fato que essa ação é propriamente descontínua segue também do resultado do Exercício 7). Vamos estudar o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ definida por:

$$f(t, s) = \big(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s)\big),$$

onde $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ denota o círculo unitário. Temos que f é sobrejetora e de classe C^∞. Observando que a aplicação $\mathbb{R} \ni t \mapsto \big(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)\big) \in S^1$ é uma submersão (na verdade, ela é um difeomorfismo local), segue do resultado do item (d) do Exercício 7 da aula número 10 que f é uma submersão. É fácil ver que a relação de equivalência determinada por f coincide com a relação de equivalência cujas classes de equivalência são as órbitas de G; em outras palavras:

$$f(t, s) = f(t', s') \Longleftrightarrow t - t' \in \mathbb{Z} \text{ e } s - s' \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow (t', s') \in \mathbb{Z}^2(t, s),$$

para todos $(t, s), (t', s') \in \mathbb{R}^2$. Daí f induz uma bijeção entre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e $S^1 \times S^1$ e a estrutura diferenciável em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ que torna tal bijeção um difeomorfismo de classe C^∞ é uma estrutura diferenciável quociente de classe C^∞ para $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (veja o primeiro Exemplo da aula número 13). Em outras palavras, podemos identificar o quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ com o toro $S^1 \times S^1$ (veja também o Exercício 10).

Provamos agora o resultado central desta seção.

Teorema. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), G um grupo e suponha que seja dada uma ação propriamente descontínua por transformações de classe C^k de G em M. Então o conjunto quociente M/G admite uma estrutura diferenciável quociente de classe C^k. Além do mais, a aplicação quociente $q : M \to M/G$ é um difeomorfismo local de classe C^k* e $\dim(M) = \dim(M/G)$.

Demonstração. Começamos definindo um atlas em M/G. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em M tal que $gU \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G$, $g \ne 1$. Então $q(U)$ é aberto em M/G relativamente à topologia quociente; além do mais, a aplicação $q|_U : U \to q(U)$ é contínua, aberta e bijetora. Logo, $q|_U : U \to q(U)$ é um homeomorfismo. Concluímos que a aplicação $\overline{\varphi} : q(U) \to \widetilde{U}$ definida por $\overline{\varphi} = \varphi \circ (q|_U)^{-1}$ é um homeomorfismo de um aberto de M/G sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$. Temos que $\overline{\varphi}$ é um sistema de coordenadas em M/G; mostraremos que a coleção $\mathcal{A}$ de todos os sistemas de coordenadas $\overline{\varphi}$ em M/G definidos dessa forma é um atlas de classe C^k em M/G. Seguirá então que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M/G coincide com a topologia quociente. A condição (ii) na definição de ação propriamente descontínua implica que a topologia quociente em M/G é Hausdorff e, como a aplicação quociente $q : M \to M/G$ é contínua, aberta e sobrejetora, segue do resultado do Exercício 1 da aula número 13 que a topologia quociente em M/G satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Teremos então que M/G, munido do atlas maximal de classe C^k que contém $\mathcal{A}$, é uma variedade diferenciável de classe C^k. Além do mais, relativamente à essa estrutura diferenciável, temos que cada carta $\overline{\varphi}$ é um difeomorfismo de classe C^k; como $q|_U = \overline{\varphi}^{-1} \circ \varphi$, segue que $q|_U$ também é um difeomorfismo de classe C^k e portanto q é um difeomorfismo local de classe C^k. Em particular, q é uma submersão de classe C^k e portanto a estrutura diferenciável em M/G é uma estrutura diferenciável quociente de classe C^k.

Resta mostrar agora que $\mathcal{A}$ é um atlas de classe C^k em M/G. Segue da condição (i) na definição de ação propriamente descontínua que os domínios dos sistemas de coordenadas pertencentes a $\mathcal{A}$ cobrem M/G. De fato, seja $x_0 \in M/G$ e escolha $x \in M$ com $x_0 = q(x)$. Temos que x pertence a um aberto U' em M com $gU' \cap U' = \emptyset$, para todo $g \in G$, $g \ne 1$; podemos então escolher um aberto $U \subset U'$ contendo x que seja domínio de uma carta φ. Daí o sistema de coordenadas correspondente $\overline{\varphi}$ conterá x_0 em seu domínio.

Vamos agora demonstrar que quaisquer dois sistemas de coordenadas pertencentes a $\mathcal{A}$ são C^k-compatíveis. Sejam então $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ cartas em M com $gU \cap U = \emptyset$ e $gV \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$, $g \ne 1$. Sejam $\overline{\varphi} : q(U) \to \widetilde{U}$, $\overline{\psi} : q(V) \to \widetilde{V}$ os correspondentes sistemas de coordenadas em M/G. Vamos demonstrar que a função de transição de $\overline{\varphi}$ para $\overline{\psi}$ tem domínio aberto e é de classe C^k; seguirá então que tal função de transição é um difeomorfismo de classe C^k entre abertos, pois sua inversa é a função de transição de $\overline{\psi}$ para $\overline{\varphi}$ que, de modo similar, é uma função de classe C^k com domínio aberto. O domínio de $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$ é igual a:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}\big(q(U) \cap q(V)\big) &= \varphi\big[(q|_U)^{-1}\big(q(U) \cap q(V)\big)\big] = \varphi\big[U \cap q^{-1}\big(q(V)\big)\big] \\ &= \varphi\Big[U \cap \bigcup_{g \in G} gV\Big] = \bigcup_{g \in G} \varphi(U \cap gV).\end{aligned}$$

Como $\varphi(U \cap gV)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo $g \in G$, é suficiente mostrar que a restrição de $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$ a $\varphi(U \cap gV)$ é de classe C^k para todo $g \in G$. Seja $z \in \varphi(U \cap gV)$. Daí $z = \varphi(x)$ com $x \in U \cap gV$ e portanto $\overline{\varphi}^{-1}(z) = q(x)$. Temos $q(x) = q(g^{-1} \cdot x)$ e $g^{-1} \cdot x \in V$, donde $\overline{\psi}\big(q(x)\big) = \psi(g^{-1} \cdot x)$. Logo:

$$\big(\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}\big)(z) = \psi\big(g^{-1} \cdot \varphi^{-1}(z)\big),$$

para todo $z \in \varphi(U \cap gV)$. Como φ, ψ e a bijeção de M correspondente à ação de g são difeomorfismos de classe C^k, segue que $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$ é de classe C^k. ■

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Topologia`.

1. Seja X um espaço topológico Hausdorff e seja $(x_i)_{i\in I}$ uma família finita de elementos dois a dois distintos de X. Mostre que existe uma família $(U_i)_{i\in I}$ de abertos dois a dois disjuntos de X com $x_i \in U_i$ para todo $i \in I$.

[*dica*: use indução no número de elementos da família $(x_i)_{i\in I}$].

2. Seja X um espaço topológico. Mostre que X é Hausdorff se e somente se a diagonal $\Delta = \big\{(x,x) : x \in X\big\}$ é fechada em $X \times X$ (onde $X \times X$ é munido da topologia produto).

3. Sejam X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto. Recorde que um ponto $x \in X$ é dito um *ponto de acumulação* de S se para todo aberto $U \subset X$ com $x \in U$ existe $y \in X$ com $y \in U \cap S$ e $y \neq x$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (i) S é discreto e fechado em X;

   (ii) S não tem pontos de acumulação em X.

Mostre que se X é compacto então a condição (i) (ou a condição (ii)) implica que o conjunto S é finito.

Definição. *Um* grupo topológico *é um grupo G munido de uma topologia para a qual as operações de grupo:*

$$G \times G \ni (x,y) \longmapsto xy \in G, \quad G \ni x \longmapsto x^{-1} \in G,$$

são aplicações contínuas (onde $G \times G$ é munido da topologia produto).

4. Seja G um grupo topológico. Mostre que, para todo $g \in G$, as aplicações:

$$\mathfrak{l}_g : G \ni x \longmapsto gx \in G, \quad \mathfrak{r}_g : G \ni x \longmapsto xg \in G$$

   são homeomorfismos.

5. Seja G um grupo topológico e suponha que existe $g \in G$ tal que o conjunto unitário $\{g\}$ é fechado em G. Mostre que G é Hausdorff. Conclua que todo grupo topológico T1 é Hausdorff.

[*dica*: pelo resultado do Exercício 4, $\mathfrak{l}_g^{-1}$ é um homeomorfismo e portanto $\{1\}$ é fechado em G, onde $1 \in G$ denota o elemento neutro. Notando que a aplicação $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ é contínua, conclua que a diagonal Δ é fechada em $G \times G$. Use o resultado do Exercício 2].

6. Seja G um grupo topológico Hausdorff. Mostre que todo subgrupo discreto de G é fechado em G.

[*dica*: seja $H \subset G$ um subgrupo discreto e seja $U \subset G$ um aberto com $U \cap H = \{1\}$. Como a aplicação $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ é contínua, todo $g \in G$ possui uma vizinhança aberta V em G tal que $xy^{-1} \in U$, para todos $x, y \in V$. Conclua que $V \cap H$ possui *no máximo* um ponto. Usando o fato que G é Hausdorff, mostre que, se $g \notin H$, então V contém uma vizinhança aberta de g disjunta de H].

7. Seja G um grupo topológico e seja $H \subset G$ um subgrupo discreto e fechado. Mostre que a *ação por translação à esquerda*:

$$H \times G \ni (h, g) \longmapsto h \cdot g = hg \in G,$$

é propriamente descontínua.

[*dica*: seja $W \subset G$ um aberto com $W \cap H = \{1\}$. Como a aplicação $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ é contínua, todo $g \in G$ possui uma vizinhança aberta U em G tal que $xy^{-1} \in W$, para todos $x, y \in U$. Mostre que $hU \cap U = \emptyset$, para todo $h \in H$, $h \neq 1$. Sejam agora $g_1, g_2 \in G$ com $g_2 \notin Hg_1$. Como $g_2 g_1^{-1} \notin H$ e H é fechado, existe um aberto W' em G contendo $g_2 g_1^{-1}$ e disjunto de H. Use novamente a continuidade da aplicação $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ para obter abertos $U \ni g_1$, $V \ni g_2$ tais que $xy^{-1} \in W'$ para todos $y \in U$, $x \in V$. Mostre que $hU \cap V = \emptyset$, para todo $h \in H$].

8. Sejam X, Y espaços topológicos e $p : X \to Y$ uma função. Dizemos que p é um *recobrimento* se para todo $y \in Y$ existe uma vizinhança aberta U de y em Y e uma família $(V_i)_{i \in I}$ de abertos dois a dois disjuntos em X tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ e tal que $p|_{V_i} : V_i \to U$ é um homeomorfismo para todo $i \in I$. Mostre que:
   (a) se $p : X \to Y$ é um recobrimento então p é um homeomorfismo local (em particular p é contínua e aberta);
   (b) se é dada uma ação por transformações contínuas de um grupo G no espaço topológico X satisfazendo a condição (i) na definição de ação propriamente descontínua então a aplicação quociente $q : X \to X/G$ é um recobrimento.

[*dica*: se $U \subset X$ é um aberto tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq 1$, então $q^{-1}\big(q(U)\big) = \bigcup_{g \in G} gU$ e, para todo $g \in G$, a aplicação $q|_{gU} : gU \to q(U)$ é contínua, aberta e bijetora e é portanto um homeomorfismo].

`Ações de grupos.`

9. Sejam X um conjunto, G um grupo e suponha que é dada uma ação de G em X. Fixado $x \in X$, mostre que a aplicação:

$$\bar{\beta}_x : G/G_x \ni gG_x \longmapsto g \cdot x \in Gx$$

é (bem definida e) bijetora, onde $gG_x = \big\{gh : h \in G_x\big\}$ denota a coclasse à esquerda do subgrupo G_x em G contendo g e G/G_x denota o conjunto de todas as coclasses à esquerda de G_x em G (note que G/G_x não é em geral um grupo, a menos que G_x seja um subgrupo normal de G).

10. Se $S^1 \subset I\!R^2$ denota o círculo unitário então o produto cartesiano de n cópias de S^1 é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e de dimensão n conhecida como o *toro n-dimensional*. O objetivo deste exercício é mostrar que o toro bidimensional $S^1 \times S^1$ é difeomorfo a uma subvariedade de $I\!R^3$ de classe C^∞ que é usualmente conhecida como *toro* em cursos elementares de Geometria Diferencial e de Cálculo.

Sejam R, r números reais fixados com $0 < r < R$. Para todo $s \in I\!R$, denote por $A_s : I\!R^3 \to I\!R^3$ o operador correspondente à rotação de ângulo s no sentido anti-horário em torno do eixo z; mais explicitamente, $A_s : I\!R^3 \to I\!R^3$ é o operador linear que é representado na base canônica de $I\!R^3$ pela seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos s & -\operatorname{sen} s & 0 \\ \operatorname{sen} s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $\gamma : I\!R \to I\!R^3$ a parametrização usual para a circunferência de centro $(R,0,0)$ e raio r no plano xz, i.e.:

$$\gamma(t) = (R + r\cos t, 0, r\operatorname{sen} t).$$

Defina uma aplicação $g : I\!R^2 \to I\!R^3$ fazendo:

$$g(t,s) = A_s\gamma(t) = \big((R + r\cos t)\cos s, (R + r\cos t)\operatorname{sen} s, r\operatorname{sen} t\big).$$

(a) Seja $f : I\!R^2 \to S^1 \times S^1$ a aplicação definida por:

$$f(t,s) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos s, \operatorname{sen} s\big).$$

Mostre que, para todos $t, s, t', s' \in I\!R$:

$$\begin{aligned} g(t,s) = g(t',s') &\Longleftrightarrow f(t,s) = f(t',s') \\ &\Longleftrightarrow \tfrac{t-t'}{2\pi} \in \mathbb{Z} \text{ e } \tfrac{s-s'}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(b) Conclua do item (a) que existe uma única aplicação $\bar{g} : S^1 \times S^1 \to I\!R^3$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} I\!R^2 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S^1 \times S^1 \arrow[r, "\bar{g}"'] & I\!R^3 \end{tikzcd}$$

comuta. Mostre que $\bar{g}$ é de classe C^∞.

[*dica*: use o princípio de definição por passagem ao quociente provado na seção 2 da aula número 9].

(c) Mostre que $\bar{g}$ é injetora e que sua imagem é igual à imagem de g.

(d) Mostre que $\bar{g}$ é uma imersão.

[*dica*: note que $\mathrm{d}\bar{g}\big(f(t,s)\big)\circ \mathrm{d}f(t,s) = \mathrm{d}g(t,s)$, que $\mathrm{d}f(t,s)$ é um isomorfismo e que $\mathrm{d}g(t,s)$ é injetora].

(e) Conclua que $\bar{g}$ é um mergulho de classe C^∞ e portanto $\bar{g}$ fornece um difeomorfismo de classe C^∞ entre $S^1 \times S^1$ e a imagem de g, que é uma subvariedade de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$.

[*dica*: $S^1 \times S^1$ é compacto].

Aula número 15 (08/10)

(1) **O fibrado tangente**.

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. A cada ponto $x \in M$ associamos o espaço tangente T_xM, que é um espaço vetorial real com dimensão igual à dimensão de M. Denotamos por TM a união disjunta de todos os espaços tangentes a M; mais precisamente, definimos:

$$TM = \bigcup_{x \in M} \big(\{x\} \times T_xM\big).$$

O conjunto TM é chamado o *fibrado tangente* de M. O objetivo desta seção é mostrar que o conjunto TM pode ser visto de maneira natural como uma variedade diferenciável.

`Observação`: uma outra possibilidade para definir o fibrado tangente de M seria fazer $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$, desde que soubéssemos que $T_xM \cap T_yM = \emptyset$, para todos $x, y \in M$, com $x \neq y$. A validade da condição $T_xM \cap T_yM = \emptyset$ depende da construção específica para o espaço tangente que foi escolhida. Nas construções usuais, essa condição é de fato satisfeita (poderia, no entanto, ocorrer "por coincidência" alguma interseção entre T_xM e T_yM, em alguma construção atípica para o espaço tangente). Nós preferimos usar a definição $TM = \bigcup_{x \in M} \big(\{x\} \times T_xM\big)$, para evitar a necessidade de considerar a interseção de T_xM e T_yM, que não possui qualquer significado geométrico ou qualquer interesse. Apesar da definição $TM = \bigcup_{x \in M} \big(\{x\} \times T_xM\big)$, muitas vezes *identificaremos* T_xM *com o subconjunto* $\{x\} \times T_xM$ *de* TM *através da bijeção óbvia* $v \mapsto (x, v)$.

Uma das motivações para estudar o conjunto TM é a seguinte:

Definição. *Um* campo vetorial *na variedade* M *é uma aplicação* $X : M \to TM$ *tal que* $X(x) \in T_xM$, *para todo* $x \in M$.

Podemos definir uma aplicação $\pi : TM \to M$ de maneira natural fazendo:

$$\pi(x, v) = x,$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$. Dizemos que π é a *projeção canônica* do fibrado tangente TM sobre M. Obviamente π é uma aplicação sobrejetora. Observe que uma aplicação $X : M \to TM$ é um campo vetorial se e somente se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

em outras palavras, $X : M \to TM$ é um campo vetorial se e somente se a aplicação X é uma inversa à direita da projeção canônica π. Um campo vetorial em M é também chamado de uma *seção* do fibrado tangente TM.

Vamos agora definir um atlas no fibrado tangente TM. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em M. Definimos uma aplicação $T\varphi : \pi^{-1}(U) \to \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$ fazendo:

$$T\varphi(x,v) = \big(\varphi(x), \mathrm{d}\varphi(x)\cdot v\big),$$

para todos $x \in U$, $v \in T_xM$. Como a aplicação $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é bijetora e $\mathrm{d}\varphi(x) : T_xM \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para todo $x \in U$, vê-se facilmente que a aplicação $T\varphi$ é bijetora. Como $\widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$, segue que $T\varphi$ é um sistema de coordenadas em TM. Vamos mostrar que:

$$\mathcal{A} = \big\{T\varphi : \varphi \text{ carta de } M\big\}$$

é um atlas de classe C^{k-1} em TM (se $k=\infty$ entendemos que $k-1=\infty$). Em primeiro lugar, é óbvio que os domínios dos elementos de $\mathcal{A}$ cobrem TM. Sejam então $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ cartas em M e vamos mostrar que $T\varphi$ e $T\psi$ são C^{k-1}-compatíveis. Temos:

$$\begin{aligned} T\varphi\big(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\big) &= T\varphi\big(\pi^{-1}(U\cap V)\big) = \varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n,\\ T\psi\big(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\big) &= T\psi\big(\pi^{-1}(U\cap V)\big) = \psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Logo $T\varphi\big(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\big)$ e $T\psi\big(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\big)$ são abertos em $\mathbb{R}^{2n}$, pois $\varphi(U\cap V)$ e $\psi(U\cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. Se $(z,h)\in\widetilde{U}\times\mathbb{R}^n$ então $(T\varphi)^{-1}(z,h) = (x,v)$, onde $x = \varphi^{-1}(z)$ e $v = \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\cdot h$. Além do mais, se $x \in V$ então $T\psi(x,v) = \big(\psi(x), \mathrm{d}\psi(x)\cdot v\big)$. Seja $\alpha = \psi\circ\varphi^{-1}$ a função de transição de φ para ψ. Temos:

$$\mathrm{d}\psi(x)\cdot v = \Big[\mathrm{d}\psi\big(\varphi^{-1}(z)\big)\circ \mathrm{d}\varphi\big(\varphi^{-1}(z)\big)^{-1}\Big]\cdot h = \mathrm{d}\alpha(z)\cdot h.$$

Logo, a função de transição de $T\varphi$ para $T\psi$ é dada por:

$$T\psi\circ(T\varphi)^{-1} : \varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n \ni (z,h) \longmapsto \big(\alpha(z), \mathrm{d}\alpha(z)\cdot h\big) \in \psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^n.$$

Como a aplicação α é de classe C^k, segue que a função de transição $T\psi\circ(T\varphi)^{-1}$ é de classe C^{k-1} (veja Exercício 1). Analogamente, a aplicação inversa de $T\psi\circ(T\varphi)^{-1}$ (que é igual a $T\varphi\circ(T\psi)^{-1}$) é também uma aplicação de classe C^{k-1}. Isso mostra que $\mathcal{A}$ é um atlas de classe C^{k-1} em TM.

Vamos agora mostrar que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em TM é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Antes de mais nada, vamos mostrar que a projeção $\pi : TM \to M$ é contínua (onde TM é munido da topologia induzida por $\mathcal{A}$). De fato, se $U \subset M$ é o domínio de uma carta φ então $\pi^{-1}(U)$ é aberto em TM pois $\pi^{-1}(U)$ é o domínio da carta $T\varphi$. Em geral, se $U\subset M$ é um aberto arbitrário então $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, onde U_i é o domínio de uma carta em M para todo $i \in I$. Daí $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I}\pi^{-1}(U_i)$ é aberto em TM.

Vamos mostrar então que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em TM é Hausdorff. Sejam $(x,v),(y,w)\in TM$ pontos distintos. Se $x\ne y$ então, como M é Hausdorff, existem abertos disjuntos $U, V\subset M$ com $x\in U$, $y \in V$. Daí $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ são abertos disjuntos em TM contendo (x,v) e (y,w) respectivamente. Suponha agora que $x = y$. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U}$

uma carta em M com $x \in U$. Como $\mathrm{d}\varphi(x) \cdot v \neq \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w$, existem abertos disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathrm{d}\varphi(x) \cdot v \in A$ e $\mathrm{d}\varphi(x) \cdot w \in B$. Daí $(T\varphi)^{-1}\big(\widetilde{U} \times A\big)$ e $(T\varphi)^{-1}\big(\widetilde{U} \times B\big)$ são abertos disjuntos em TM contendo (x, v) e $(x, w) = (y, w)$ respectivamente.

Mostremos agora que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em TM satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Como M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, temos que o atlas maximal que define a estrutura diferenciável de M contém um atlas enumerável $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (veja Exercício 7 da aula número 11). Daí $\{T\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é um atlas enumerável para TM e portanto TM satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (veja Exercício 5 da aula número 5).

Demonstramos então o seguinte:

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e de dimensão n. Então o fibrado tangente TM, munido do atlas maximal de classe C^{k-1} que contém o atlas $\mathcal{A}$ descrito acima, é uma variedade diferenciável de classe C^{k-1} e de dimensão $2n$.* ■

A estrutura diferenciável em TM definida acima será chamada a *estrutura diferenciável usual* do fibrado tangente de M. A partir de agora, a menos de menção explícita em contrário, suporemos sempre que o fibrado tangente de uma variedade é munido de sua estrutura diferenciável usual.

Vamos agora estudar algumas propriedades simples do fibrado tangente. Começamos com o seguinte:

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. Então a projeção canônica $\pi : TM \to M$ é uma aplicação de classe C^{k-1}. Se $k \ge 2$, então π é uma submersão.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta de M e considere a carta correspondente $T\varphi$ em TM. Daí π leva o domínio de $T\varphi$ (ou seja, $\pi^{-1}(U)$) dentro do domínio de φ. É fácil ver que a representação de π com respeito às cartas $T\varphi$ e φ é dada por:

$$\varphi \circ \pi \circ (T\varphi)^{-1} : \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n \ni (z, h) \longmapsto z \in \widetilde{U}.$$

Como a projeção $(z, h) \mapsto z$ é uma submersão de classe C^∞ e φ, $T\varphi$ são difeomorfismos de classe C^{k-1}, segue que a restrição de π a $\pi^{-1}(U)$ é de classe C^{k-1} e é uma submersão se $k \ge 2$. Como a carta φ é arbitrária, obtemos a conclusão desejada. ■

Lema. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e $Z \subset M$ um aberto. Então TZ é um aberto de TM. Além do mais, a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente da variedade Z coincide com a estrutura diferenciável que TM induz no aberto TZ.*

Demonstração. Como $T_xZ = T_xM$ para todo $x \in Z$, temos que $TZ = \pi^{-1}(Z)$. Como π é contínua, segue que TZ é aberto em TM. A estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de Z é o atlas maximal de classe C^{k-1} que contém os sistemas de coordenadas da forma $T\varphi$, com $\varphi : U \to \widetilde{U}$ uma carta de Z. Mas se φ é uma carta de Z então φ também é uma carta de M e portanto $T\varphi$ é uma carta de TM com domínio contido em TZ. Logo $T\varphi$ pertence à estrutura diferenciável induzida por TM no aberto TZ. ■

Lema. *Se V é um espaço vetorial real de dimensão finita então $TV = V \times V$. Além do mais, a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de V coincide com a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real $V \times V$ (i.e., a estrutura diferenciável que contém os isomorfismos lineares entre $V \times V$ e o espaço Euclideano).*

Demonstração. Para todo $x \in V$, temos $T_xV = V$ e portanto:

$$\bigcup_{x \in V} \big(\{x\} \times T_xV\big) = V \times V.$$

Seja agora $\varphi : V \to I\!R^n$ um isomorfismo linear. Daí φ é uma carta na variedade V. Temos:

$$T\varphi : V \times V \ni (x, v) \longmapsto \big(\varphi(x), \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v\big) = \big(\varphi(x), \varphi(v)\big) \in I\!R^n \times I\!R^n.$$

Logo $T\varphi : V \times V \to I\!R^{2n}$ é um isomorfismo linear. Daí tanto a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de V quanto a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real $V \times V$ contêm o atlas $\{T\varphi\}$. Isso mostra que tais estruturas diferenciáveis em $TV = V \times V$ coincidem. ■

Corolário. *Se Z é um aberto de $I\!R^n$ então $TZ = Z \times I\!R^n$ e a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de Z coincide com a estrutura diferenciável induzida por $I\!R^{2n}$ no aberto $Z \times I\!R^n$.*

Demonstração. Segue dos dois últimos Lemas. ■

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$). Para todo $x \in M$, o espaço tangente T_xM (que identificamos com $\{x\} \times T_xM$) é uma subvariedade de classe C^{k-1} do fibrado tangente TM. Além do mais, a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real T_xM coincide com a estrutura diferenciável induzida por TM em T_xM.*

Demonstração. O fato que T_xM é uma subvariedade de classe C^{k-1} de TM segue da observação que $T_xM = \pi^{-1}(x)$, já que π é uma submersão de classe C^{k-1}. No entanto, é muito fácil construir uma carta de subvariedade para T_xM e com isso poderemos identificar rapidamente a estrutura diferenciável induzida por TM em T_xM. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta em M com $x \in U$ e considere a carta correspondente $T\varphi$ em TM. Temos:

$$T\varphi\big(\pi^{-1}(U) \cap T_xM\big) = T\varphi(T_xM) = \big\{\varphi(x)\big\} \times I\!R^n.$$

Considere o difeomorfismo $\alpha : I\!R^{2n} \to I\!R^{2n}$ de classe C^∞ definido por:

$$\alpha(z, h) = \big(h, z - \varphi(x)\big).$$

Daí $\alpha \circ T\varphi : \pi^{-1}(U) \to \alpha\big(\widetilde{U} \times I\!R^n\big)$ é uma carta em TM e:

$$(\alpha \circ T\varphi)\big(\pi^{-1}(U) \cap T_xM\big) = I\!R^n = \alpha\big(\widetilde{U} \times I\!R^n\big) \cap I\!R^n,$$

i.e., $\alpha \circ T\varphi$ é uma carta de subvariedade para T_xM. A restrição de $\alpha \circ T\varphi$ a T_xM nos fornece um sistema de coordenadas em T_xM pertencente à estrutura diferenciável induzida por TM em T_xM. Tal restrição é dada por (recorde a identificação entre T_xM e $\{x\} \times T_xM$):

$$T_xM \ni v \longmapsto (\alpha \circ T\varphi)(x, v) = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v \in I\!R^n.$$

Mas $\mathrm{d}\varphi(x) : T_xM \to I\!R^n$ é um isomorfismo linear e portanto é também um sistema de coordenadas pertencente à estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real T_xM. Concluímos então que o atlas $\big\{\mathrm{d}\varphi(x)\big\}$ em T_xM está contido tanto na estrutura diferenciável induzida por TM em T_xM como na estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real T_xM. A conclusão segue. ■

Passamos agora ao estudo de campos vetoriais em variedades. Temos a seguinte:

Definição. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e X um campo vetorial em M. Se $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ é uma carta em M então a* representação *de X* com respeito *à carta φ é a aplicação $\widetilde{X} : \widetilde{U} \to I\!R^n$ definida por:*

$$\widetilde{X}(z) = \mathrm{d}\varphi\big(\varphi^{-1}(z)\big) \cdot X\big(\varphi^{-1}(z)\big),$$

para todo $z \in \widetilde{U}$.

A cada carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ na variedade M, podemos associar de modo natural uma base de T_xM para todo $x \in U$. Mais explicitamente, temos uma única base em T_xM que é mapeada pelo isomorfismo $\mathrm{d}\varphi(x) : T_xM \to I\!R^n$ sobre a base canônica de $I\!R^n$. Essa base é muitas vezes denotada por $\big(\partial_1(x), \ldots, \partial_n(x)\big)$; temos então:

$$\partial_i(x) = \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot e_i = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}\big(\varphi(x)\big), \quad i = 1, \ldots, n,$$

onde $(e_i)_{i=1}^n$ denota a base canônica de $I\!R^n$. Note que para todo $v \in T_xM$ temos que a n-upla $\mathrm{d}\varphi(x) \cdot v \in I\!R^n$ consiste das coordenadas de v na base $\big(\partial_i(x)\big)_{i=1}^n$. Em particular, se X é um campo vetorial na variedade M e $\widetilde{X}$ é a representação de X na carta φ então, para todo $x \in U$, a n-upla $\widetilde{X}\big(\varphi(x)\big) \in I\!R^n$ consiste das coordenadas de $X(x)$ na base $\big(\partial_i(x)\big)_{i=1}^n$.

Não se deve confundir a representação de um campo vetorial X em M numa carta φ com a representação em coordenadas da aplicação $X : M \to TM$ com respeito a cartas em M e em TM. No entanto, tais representações são intimamente relacionadas, como se vê no seguinte:

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $X : M \to TM$ um campo vetorial. Se X é de classe C^{k-1} então a representação de X com respeito a qualquer carta de M é uma aplicação de classe C^{k-1}. Reciprocamente, se todo ponto de M pertence ao domínio de uma carta de M na qual a representação de X é uma aplicação de classe C^{k-1} então X é de classe C^{k-1}.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta de M e seja $T\varphi$ a carta correspondente em TM. Temos que X leva o domínio de φ dentro do domínio de $T\varphi$, i.e., $X(U) \subset \pi^{-1}(U)$; a representação da aplicação X com respeito às cartas φ e $T\varphi$ é dada por:

$$T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \ni z \longmapsto \big(z, \widetilde{X}(z)\big) \in \widetilde{U} \times I\!R^n,$$

onde $\widetilde{X}(z) = \mathrm{d}\varphi\big(\varphi^{-1}(z)\big) \cdot X\big(\varphi^{-1}(z)\big)$ denota a representação do campo vetorial X na carta φ. Temos então que $\widetilde{X}$ é de classe C^{k-1} se e somente se a restrição de X a U é de classe C^{k-1}. A conclusão segue. ■

`Observação`: em cursos de Cálculo no $I\!R^n$, um campo vetorial X num aberto $U \subset I\!R^n$ é definido como sendo uma aplicação $X : U \to I\!R^n$. Vimos que $TU = U \times I\!R^n$ e portanto um campo vetorial na variedade U (de acordo com nossa definição) é uma aplicação da forma:

$$U \ni x \longmapsto \big(x, X(x)\big) \in U \times I\!R^n.$$

Temos então uma pequena incompatibilidade de terminologia, mas que na prática não causa confusão. Note que a representação do campo vetorial $U \ni x \mapsto \big(x, X(x)\big) \in U \times I\!R^n$ com respeito à carta $\mathrm{Id} : U \to U$ é a aplicação $X : U \to I\!R^n$.

Mostramos agora que a imagem de um campo vetorial em M é uma subvariedade do fibrado tangente TM.

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$) e seja X um campo vetorial de classe C^{k-1} em M. Então a aplicação $X : M \to TM$ é um mergulho de classe C^{k-1}.*

Demonstração. Basta observar que a projeção canônica $\pi : TM \to M$ é uma inversa à esquerda de classe C^{k-1} para X (veja aula número 9). ■

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$) e seja X um campo vetorial em M de classe C^{k-1}. Então a imagem de X é uma subvariedade de TM de classe C^{k-1} e a restrição da projeção canônica $\pi : TM \to M$ a $X(M)$ é um difeomorfismo de classe C^{k-1} da imagem de X sobre M.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, X é um mergulho de classe C^{k-1} e portanto $X(M)$ é uma subvariedade de classe C^{k-1} de TM e $X : M \to X(M)$ é um difeomorfismo de classe C^{k-1}. Para concluir a demonstração, observe que $\pi|_{X(M)} : X(M) \to M$ é a aplicação inversa de $X : M \to X(M)$. ■

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$). O conjunto $M_0 = \big\{(x, 0) : x \in M\big\}$ formado pelos vetores nulos dos espaços tangentes T_xM, $x \in M$, é chamado a* seção nula *do fibrado tangente TM.*

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$). Então a seção nula M_0 do fibrado tangente TM é uma subvariedade de TM de classe C^{k-1}. Além do mais, a restrição da projeção canônica $\pi : TM \to M$ a M_0 fornece um difeomorfismo de classe C^{k-1} de M_0 sobre M.*

Demonstração. Basta aplicar o Corolário anterior para o *campo vetorial nulo*, i.e., a aplicação $X : M \to TM$ tal que $X(x)$ é o vetor nulo de T_xM, para todo $x \in M$ (veja Exercício 4). ■

Se M, N são variedades de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e se $f : M \to N$ é uma aplicação de classe C^k então podemos identificar a diferencial de f com uma aplicação de TM em TN; mais precisamente, definimos:

$$\mathrm{d}f(x, v) = \big(f(x), \mathrm{d}f(x) \cdot v\big),$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$. Temos o seguinte:

Lema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Então a aplicação $\mathrm{d}f : TM \to TN$ é de classe C^{k-1}.*

Demonstração. Sejam $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^m$, $\psi : V \to \widetilde{V} \subset I\!R^n$ cartas em M e em N respectivamente, com $f(U) \subset V$. Considere as cartas correspondentes $T\varphi$ em TM e $T\psi$ em TN. Temos que $\mathrm{d}f$ leva o domínio de $T\varphi$ (i.e., $\pi^{-1}(U)$) dentro do domínio de $T\psi$ (i.e., $\pi^{-1}(V)$). Como φ e ψ podem ser escolhidas de modo que $\pi^{-1}(U)$ contenha um ponto arbitrário dado *a priori* de TM, a demonstração ficará completa se verificarmos que a representação de $\mathrm{d}f$ com respeito às cartas $T\varphi$ e $T\psi$ é de classe C^{k-1}. Denote por $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ a representação de f com respeito às cartas φ e ψ. Seja $(z, h) \in \widetilde{U} \times I\!R^m$ e defina $(x, v) = (T\varphi)^{-1}(z, h)$, de modo que $x = \varphi^{-1}(z)$ e $v = \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot h$. Daí:

$$(T\psi \circ \mathrm{d}f)(x, v) = \Big(\psi\big(f(x)\big), \big[\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x)\big] \cdot v\Big);$$

mas:

$$\big[\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x)\big] \cdot v = \big[\mathrm{d}\psi\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\big] \cdot h = \mathrm{d}\tilde{f}(z) \cdot h.$$

Logo, a representação de $\mathrm{d}f$ com respeito às cartas $T\varphi$ e $T\psi$ é dada por:

$$T\psi \circ \mathrm{d}f \circ (T\varphi)^{-1} : \widetilde{U} \times I\!R^m \ni (z, h) \longmapsto \big(\tilde{f}(z), \mathrm{d}\tilde{f}(z) \cdot h\big) \in \widetilde{V} \times I\!R^n.$$

Como $\tilde{f}$ é de clase C^k, segue que $T\psi \circ \mathrm{d}f \circ (T\varphi)^{-1}$ é de fato uma aplicação de classe C^{k-1} (veja Exercício 1). ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) e seja $f : M \to N$ um difeomorfismo de classe C^k. Então a aplicação $\mathrm{d}f : TM \to TN$ é um difeomorfismo de classe C^{k-1}.*

Demonstração. Note que $(\mathrm{d}f)^{-1} = \mathrm{d}(f^{-1})$ e use o Lema anterior. ■

`Observação`: se $f : U \to I\!R^n$ é uma aplicação de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num aberto $U \subset I\!R^m$ então a diferencial de f é normalmente entendida em cursos de Cálculo no $I\!R^n$ como a aplicação $U \ni x \mapsto \mathrm{d}f(x) \in \mathrm{Lin}(I\!R^m, I\!R^n)$. Tal aplicação é diferente da diferencial $\mathrm{d}f : TU \to TI\!R^n$ considerada acima; de fato, a diferencial considerada acima é dada por:

$$U \times I\!R^m \ni (x, v) \longmapsto \big(f(x), \mathrm{d}f(x) \cdot v\big) \in I\!R^n \times I\!R^n.$$

Para evitar essa ambiguidade, muitas vezes a diferencial $\mathrm{d}f : TM \to TN$ de uma aplicação $f : M \to N$ é denotada por Tf e é chamada a *aplicação tangente* a f. Preferimos, no entanto, escrever $\mathrm{d}f$ em vez de Tf. Na prática, essa ambigüidade de notação raramente causa confusão.

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$) e seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k. Então TN é uma subvariedade de TM de classe C^{k-1}. Além do mais, a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de N coincide com a estrutura diferenciável induzida por TM em TN.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta de subvariedade para N, i.e., φ é uma carta de M e $\varphi(U \cap N) = \widetilde{U} \cap I\!R^p$. Como φ é um difeomorfismo que leva a subvariedade

$U \cap N$ de U na subvariedade $\widetilde{U} \cap I\!R^p$ de $\widetilde{U}$, temos que, para todo $x \in U \cap N$, a diferencial $\mathrm{d}\varphi(x)$ leva o espaço tangente a $U \cap N$ no ponto x (que coincide com T_xN) no espaço tangente a $\widetilde{U} \cap I\!R^p$ no ponto $\varphi(x)$ (que coincide com $I\!R^p$). Temos então:

$$\mathrm{d}\varphi(x)(T_xN) = I\!R^p,$$

para todo $x \in U \cap N$. Daí é fácil ver que:

$$T\varphi\big(\pi^{-1}(U) \cap TN\big) = \varphi(U \cap N) \times I\!R^p = (\widetilde{U} \cap I\!R^p) \times I\!R^p = (\widetilde{U} \times I\!R^n) \cap (I\!R^p \times I\!R^p),$$

onde identificamos $I\!R^p \times I\!R^p$ com o seguinte subespaço de $I\!R^{2n}$:

$$I\!R^p \times I\!R^p \cong \big\{(z_1, \ldots, z_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p \text{ zeros}}, h_1, \ldots, h_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p \text{ zeros}}) : z_1, \ldots, z_p, h_1, \ldots, h_p \in I\!R\big\}.$$

Seja $\alpha : I\!R^{2n} \to I\!R^{2n}$ o isomorfismo definido por:

$$\alpha(z_1, \ldots, z_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p \text{ zeros}}, h_1, \ldots, h_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p \text{ zeros}}) = (z_1, \ldots, z_p, h_1, \ldots, h_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2n-2p \text{ zeros}}).$$

Temos que α leva o subespaço $I\!R^p \times I\!R^p$ de $I\!R^{2n}$ sobre o subespaço $I\!R^{2p}$ de $I\!R^{2n}$ e portanto a carta $\alpha \circ T\varphi : \pi^{-1}(U) \to \alpha(\widetilde{U} \times I\!R^n)$ de TM satisfaz:

$$(\alpha \circ T\varphi)\big(\pi^{-1}(U) \cap TN\big) = \alpha(\widetilde{U} \times I\!R^n) \cap I\!R^{2p},$$

i.e., $\alpha \circ T\varphi$ é uma carta de subvariedade para TN. Como φ pode ser escolhida de modo que $\pi^{-1}(U)$ contenha um ponto arbitrário dado *a priori* de TN, segue que TN é uma subvariedade de TM de classe C^{k-1}.

Vamos agora mostrar que a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de N coincide com a estrutura diferenciável induzida por TM em TN. Para cada carta de subvariedade $\varphi : U \to \widetilde{U}$ para N, denotamos por $\varphi_0 = \varphi|_{U \cap N} : U \cap N \to \widetilde{U} \cap I\!R^p$ a carta correspondente a φ em N. Quando φ percorre o conjunto de todas as cartas de subvariedade para N, temos que as correspondentes cartas φ_0 em N constituem um atlas para N (contido na estrutura diferenciável induzida por M em N) e as correspondentes cartas $T\varphi_0$ em TN constituem um atlas para TN contido na estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de N. Vimos acima que a cada carta de subvariedade φ para N está também associada uma carta de subvariedade $\alpha \circ T\varphi$ para TN; tal carta restringe-se a uma carta:

$$\alpha \circ T\varphi|_{\pi^{-1}(U) \cap TN} : \pi^{-1}(U) \cap TN \longrightarrow \alpha(\widetilde{U} \times I\!R^n) \cap I\!R^{2p} \tag{1}$$

em TN e quando φ percorre o conjunto de todas as cartas de subvariedade para N, temos que as correspondentes cartas (1) em TN constituem um atlas contido na estrutura diferenciável induzida por TM em TN. Para mostrar que a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de N coincide com a estrutura diferenciável induzida por TM em TN, é suficiente verificar que a carta (1) coincide com a carta $T\varphi_0$. Tome então $x \in U \cap N$, $v \in T_xN$ e escreva $\varphi_0(x) = (z_1, \ldots, z_p)$ e $\mathrm{d}\varphi_0(x) \cdot v = (h_1, \ldots, h_p)$. Temos:

$$\varphi(x) = (z_1, \ldots, z_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p \text{ zeros}}), \quad \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v = (h_1, \ldots, h_p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p \text{ zeros}}),$$

e portanto a carta (1) de fato coincide com a carta $T\varphi_0$. ■

`Observação`: se M é uma variedade diferenciável de classe C^1 e se $N \subset M$ é uma subvariedade de M de classe C^1 então não podemos dizer que TN é uma subvariedade de TM de classe C^0, pois nós introduzimos a noção de subvariedade apenas para variedades diferenciáveis de classe C^1. No entanto, o argumento apresentado na demonstração do Teorema acima implica que a estrutura diferenciável (de classe C^0) usual do fibrado tangente de N contém um atlas formado por restrições de cartas de TM. Isso implica que a topologia de TN (induzida pelo seu atlas) coincide com a topologia induzida por TM.

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^k e X um campo vetorial em M de classe C^{k-1} tal que $X(x) \in T_xN$, para todo $x \in N$. Então $X|_N : N \to TN$ é um campo vetorial de classe C^{k-1} em N.*

Demonstração. A condição $X(x) \in T_xN$, para todo $x \in N$, significa que $X(N) \subset TN$. O fato que $X|_N : N \to TN$ é de classe C^{k-1} segue então diretamente do Teorema anterior (para o caso $k = 1$, veja a Observação que segue o Teorema). ■

Corolário. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($2 \le k \le \infty$) e seja $f : N \to M$ um mergulho de classe C^k. Então $\mathrm{d}f : TN \to TM$ é um mergulho de classe C^{k-1}.*

Demonstração. Como f é um mergulho de classe C^k, temos que $f(N)$ é uma subvariedade de M de classe C^k e a aplicação $f_0 : N \to f(N)$ que difere de f apenas pelo contradomínio é um difeomorfismo de classe C^k. Daí, pelo Teorema anterior, $T\big[f(N)\big]$ é uma subvariedade de classe C^{k-1} de TM e portanto a aplicação inclusão de $T\big[f(N)\big]$ em TM é um mergulho de classe C^{k-1}, sendo $T\big[f(N)\big]$ munida da estrutura diferenciável induzida por TM. Como f_0 é um difeomorfismo de classe C^k, temos que $\mathrm{d}f_0 : TN \to T\big[f(N)\big]$ é um difeomorfismo de classe C^{k-1}, sendo $T\big[f(N)\big]$ munida da estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de $f(N)$. Como a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de $f(N)$ coincide com a estrutura diferenciável induzida por TM em $T\big[f(N)\big]$ e como $\mathrm{d}f : TN \to TM$ é igual à composta de $\mathrm{d}f_0$ com a inclusão de $T\big[f(N)\big]$ em TM, segue que $\mathrm{d}f$ é um mergulho de classe C^{k-1}. ■

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Cálculo no` $I\!\!R^n$.

1.

(a) Seja $\phi : U \to \mathrm{Lin}(I\!\!R^m, I\!\!R^n)$ uma função de classe C^k, onde $U \subset I\!\!R^p$ é um aberto e $\mathrm{Lin}(I\!\!R^m, I\!\!R^n)$ denota o espaço vetorial das aplicações lineares $T : I\!\!R^m \to I\!\!R^n$. Mostre que a aplicação $\sigma : U \times I\!\!R^m \to I\!\!R^n$ definida por $\sigma(x, v) = \phi(x) \cdot v$ é de classe C^k. Se $k \geq 1$, mostre que a diferencial de σ é dada por:

$$\mathrm{d}\sigma(x, v) \cdot (h, t) = \big[\mathrm{d}\phi(x) \cdot h\big] \cdot v + \phi(x) \cdot t.$$

[*dica*: a função $\lambda : \mathrm{Lin}(I\!\!R^m, I\!\!R^n) \times I\!\!R^m \to I\!\!R^n$ definida por $\lambda(T, v) = T(v)$ é bilinear e $\sigma = \lambda \circ (\phi \circ \pi_1, \pi_2)$, onde π_1, π_2 denotam as projeções do produto $U \times I\!\!R^m$. Para calcular a diferencial de σ, use o fato que a diferencial da aplicação bilinear λ é dada por $\mathrm{d}\lambda(T, v) \cdot (H, w) = \lambda(T, w) + \lambda(H, v)$].

(b) Seja $f : U \to I\!\!R^n$ uma função de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) definida num aberto U de $I\!\!R^m$. Mostre que a aplicação $\sigma : U \times I\!\!R^m \to I\!\!R^n$ definida por $\sigma(x, v) = \mathrm{d}f(x) \cdot v$ é de classe C^{k-1}. Se $k \geq 2$, mostre que a diferencial de σ é dada por:

$$\mathrm{d}\sigma(x, v) \cdot (h, t) = \big[\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x) \cdot h\big] \cdot v + \mathrm{d}f(x) \cdot t.$$

[*dica*: tome $\phi = \mathrm{d}f$ no item (a)].

`Fibrado tangente.`

2. Sejam $M_1, \ldots, M_p$ variedades diferenciáveis de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, $M = \prod_{i=1}^p M_i$ o seu produto cartesiano e $\mathrm{pr}_i : M \to M_i$, $i = 1, \ldots, p$, as projeções. Mostre que a aplicação:

$$\big(\mathrm{d}(\mathrm{pr}_1), \ldots, \mathrm{d}(\mathrm{pr}_p)\big) : TM \longrightarrow \prod_{i=1}^p TM_i$$

é um difeomorfismo de classe C^{k-1}.

[*dica*: a aplicação acima é de classe C^{k-1} (veja seção 4, aula número 5) e é bijetora (veja seção 3, aula número 7). Para ver que sua inversa é de classe C^{k-1}, tome uma carta $\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i \subset I\!\!R^{n_i}$ em M_i, para $i = 1, \ldots, p$. Denote por $\pi_i : TM_i \to M_i$ a projeção canônica do fibrado tangente de M_i e por $\pi : TM \to M$ a projeção canônica do fibrado tangente de M. Daí $T\varphi_i : \pi_i^{-1}(U_i) \to \widetilde{U}_i \times I\!\!R^{n_i}$ é uma carta em TM_i, para $i = 1, \ldots, p$, $\prod_{i=1}^p \varphi_i : \prod_{i=1}^p U_i \to \prod_{i=1}^p \widetilde{U}_i$ é uma carta em M e temos também as cartas:

$$T\Big(\prod_{i=1}^p \varphi_i\Big) : \pi^{-1}\Big(\prod_{i=1}^p U_i\Big) \longrightarrow \Big(\prod_{i=1}^p \widetilde{U}_i\Big) \times \Big(\prod_{i=1}^p I\!\!R^{n_i}\Big),$$
$$\prod_{i=1}^p T\varphi_i : \prod_{i=1}^p \pi_i^{-1}(U_i) \longrightarrow \prod_{i=1}^p \big(\widetilde{U}_i \times I\!\!R^{n_i}\big),$$

nas variedades TM e $\prod_{i=1}^p TM_i$, respectivamente.

Usando o resultado do item (b) do Exercício 7 da aula número 10, verifique que a representação da aplicação $\big(\mathrm{d}(\mathrm{pr}_1), \ldots, \mathrm{d}(\mathrm{pr}_p)\big)$ com respeito às cartas $T\big(\prod_{i=1}^p \varphi_i\big)$ e $\prod_{i=1}^p T\varphi_i$ é dada por:

$$\Big(\prod_{i=1}^p \widetilde{U}_i\Big) \times \Big(\prod_{i=1}^p I\!\!R^{n_i}\Big) \ni (z_1, \ldots, z_p, h_1, \ldots, h_p) \longmapsto (z_1, h_1, \ldots, z_p, h_p) \in \prod_{i=1}^p \big(\widetilde{U}_i \times I\!\!R^{n_i}\big).$$

A aplicação acima é obviamente um difeomorfismo de classe C^∞].

`Observação`: o Exercício 2 nos diz que o fibrado tangente de um produto cartesiano de variedades diferenciáveis pode ser naturalmente identificado com o produto cartesiano dos seus fibrados tangentes.

3. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(2 \le k \le \infty)$ e $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k. Mostre que:

   (a) se f é um difeomorfismo local então $\mathrm{d}f : TM \to TN$ é um difeomorfismo local;

[*dica*: se $U \subset M$, $V \subset N$ são abertos tais que $f|_U : U \to V$ é um difeomorfismo de classe C^k então $\mathrm{d}f|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(V)$ é um difeomorfismo de classe C^{k-1}].

   (b) se f é uma imersão então $\mathrm{d}f : TM \to TN$ é uma imersão;

   (c) se f é uma submersão então $\mathrm{d}f : TM \to TN$ é uma submersão.

[*dica*: para os itens (b) e (c), sejam $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^m$ uma carta de M e $\psi : V \to \widetilde{V} \subset I\!R^n$ uma carta de N com $f(U) \subset V$. Vimos no texto que, se $\tilde{f}$ denota a representação de f com respeito às cartas φ e ψ então a representação de $\mathrm{d}f$ com respeito às cartas $T\varphi$ e $T\psi$ é dada por:

$$\widetilde{U} \times I\!R^m \ni (z, h) \longmapsto \big(\tilde{f}(z), \mathrm{d}\tilde{f}(z) \cdot h\big) \in \widetilde{V} \times I\!R^n.$$

Usando o resultado do Exercício 1, vê-se que a diferencial da aplicação acima num ponto $(z, h) \in \widetilde{U} \times I\!R^m$ é dada por:

$$I\!R^m \times I\!R^m \ni (w, t) \longmapsto \Big(\mathrm{d}\tilde{f}(z) \cdot w, \big(\mathrm{d}(\mathrm{d}\tilde{f})(z) \cdot w\big) \cdot h + \mathrm{d}\tilde{f}(z) \cdot t\Big) \in I\!R^n \times I\!R^n. \qquad (*)$$

Verifique que se a aplicação $\mathrm{d}\tilde{f}(z)$ é injetora (resp., sobrejetora) então a aplicação $(*)$ também é injetora (resp., sobrejetora)].

4. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $X : M \to TM$ o campo vetorial nulo, i.e., para todo $x \in M$, $X(x)$ é o vetor nulo de T_xM. Mostre que X é de classe C^{k-1}.

[*dica*: a representação do campo vetorial X em qualquer carta de M é uma aplicação nula].

5. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. É fácil ver que o conjunto Γ de todos os campos vetoriais em M, munido das operações:

$$(X + Y)(x) = X(x) + Y(x), \quad (cX)(x) = cX(x), \quad X, Y \in \Gamma,\ c \in I\!R,\ x \in M,$$

   é um espaço vetorial real. Mostre que o conjunto dos campos vetoriais de classe C^{k-1} em M é um subespaço de Γ.

[*dica*: se $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é uma carta em M e se $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ denotam respectivamente as representações de X e Y com respeito à carta φ então $\widetilde{X} + \widetilde{Y}$ e $c\widetilde{X}$ são respectivamente as representações com respeito à carta φ dos campos $X + Y$ e cX. Use também o resultado do Exercício 4].

6. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $X : M \to TM$ um campo vetorial contínuo. Mostre que $X : M \to X(M)$ é um homeomorfismo e que $X(M)$ é um subconjunto fechado de TM.

[*dica*: use o resultado dos Exercícios 9 e 11 da aula número 9, levando em conta que a projeção canônica $\pi : TM \to M$ é uma inversa à esquerda contínua para X].

Aula número 16 (10/10)

(1) **O Hessiano de uma função numa variedade diferenciável**.

Nesta seção generalizamos para o contexto de variedades diferenciáveis a noção de Hessiano de uma função de classe C^2. Para o caso de funções no espaço Euclideano, o Hessiano é bem definido em qualquer ponto do domínio, mas, como veremos adiante, no caso de funções em variedades diferenciáveis, o Hessiano só é bem definido nos pontos onde a diferencial da função se anula.

Começamos recordando a definição de Hessiano para funções no espaço Euclideano. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. A diferencial de f é uma aplicação definida em U e tomando valores no espaço vetorial real $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ das aplicações lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Se a diferencial $\mathrm{d}f : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é novamente uma aplicação diferenciável num ponto $x \in U$, dizemos então que f é *duas vezes diferenciável* no ponto x. Nesse caso, podemos considerar a diferencial de $\mathrm{d}f$ no ponto x:

$$\mathrm{d}^2 f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Temos $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x) \in \mathrm{Lin}\big(\mathbb{R}^m, \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)\big)$. A *diferencial de segunda ordem* ou *Hessiano* de f no ponto x é a aplicação $\mathrm{d}^{(2)} f(x) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\mathrm{d}^{(2)} f(x)(v, w) = \big(\mathrm{d}^2 f(x) \cdot v\big) \cdot w,$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^m$. Temos que $\mathrm{d}^{(2)} f(x)$ é uma aplicação bilinear (veja Exercício 1). Na verdade, o *Teorema de Schwarz* nos diz que $\mathrm{d}^{(2)} f(x)$ é uma *aplicação bilinear simétrica*, i.e., $\mathrm{d}^{(2)} f(x)(v, w) = \mathrm{d}^{(2)} f(x)(w, v)$, para todos $v, w \in \mathbb{R}^m$ (veja Curso de Análise vol. 2, Elon Lages Lima, §1, Capítulo V).

O Lema a seguir relaciona o Hessiano de f com as derivadas parciais de segunda ordem de f.

Lema. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e suponha que f seja duas vezes diferenciável num ponto $x_0 \in U$. Se $(e_i)_{i=1}^m$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^m$ então:*

$$\mathrm{d}^{(2)} f(x_0)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(x_0),$$

para todos $i, j = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Sejam $i, j = 1, \ldots, m$ fixados. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \mathrm{d}f(x) \cdot e_j,$$

para todo $x \in U$. Denote por $\lambda : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ a aplicação de *avaliação em* e_j, i.e., $\lambda(T) = T(e_j)$, para todo $T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Daí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda \circ \mathrm{d}f.$$

Diferenciando a igualdade acima dos dois lados no ponto x_0 e usando a regra da cadeia obtemos:

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(x_0) = \mathrm{d}\lambda\big(\mathrm{d}f(x_0)\big) \circ \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x_0).$$

Como λ é linear, temos $\mathrm{d}\lambda\big(\mathrm{d}f(x_0)\big) = \lambda$; avaliando então os dois lados da igualdade acima em e_i, obtemos:

$$\mathrm{d}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(x_0) \cdot e_i = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \lambda\big(\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x_0) \cdot e_i\big) = \big(\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x_0) \cdot e_i\big) \cdot e_j.$$

A conclusão segue observando que:

$$\big(\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(x_0) \cdot e_i\big) \cdot e_j = \big(\mathrm{d}^2 f(x_0) \cdot e_i\big) \cdot e_j = \mathrm{d}^{(2)} f(x_0)(e_i, e_j). \blacksquare$$

Corolário. *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável num aberto $I \subset \mathbb{R}$ e suponha que γ é duas vezes diferenciável num ponto $t_0 \in I$. Então:*

$$\gamma''(t_0) = \mathrm{d}^{(2)}\gamma(t_0)(1, 1).$$

Demonstração. Segue do Lema anterior, tomando $m = 1$. $\blacksquare$

Se $f : M \to \mathbb{R}^p$ é uma função de classe C^2 definida numa variedade diferenciável M de classe C^2 então a diferencial de f é uma aplicação de classe C^1 definida no fibrado tangente TM e tomando valores em $T\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$. Se diferenciarmos a diferencial de f num ponto $v \in TM$, obteremos uma aplicação definida em T_vTM e não uma aplicação bilinear definida num espaço tangente a M em algum ponto. Como procedemos então para definir o Hessiano de uma função $f : M \to \mathbb{R}^p$? A idéia é considerar uma representação $\tilde{f}$ de f em alguma carta φ de M, tomar o Hessiano de $\tilde{f}$ e depois "transferir de volta" a aplicação bilinear obtida no espaço Euclideano para o espaço tangente. Para formalizar esse procedimento, introduzimos a seguinte:

Definição. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $x \in M$ um ponto e $B : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear. Se $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é uma carta em M com $x \in U$ então a aplicação bilinear $\widetilde{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definida por:*

$$\widetilde{B}(h_1, h_2) = B\big(\mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot h_1, \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot h_2\big), \quad h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n,$$

é dita a aplicação bilinear que representa B com respeito à carta φ.

Obviamente, se $\widetilde{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é uma aplicação bilinear e $\varphi : U \to \widetilde{U}$ é uma carta com $x \in U$ então existe uma única aplicação bilinear $B : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}^p$ tal que $\widetilde{B}$ representa B com respeito à carta φ; de fato, B é dada por:

$$B(v_1, v_2) = \widetilde{B}\big(\mathrm{d}\varphi(x) \cdot v_1, \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v_2\big),$$

para todos $v_1, v_2 \in T_xM$.

Para definir o Hessiano de uma função $f : M \to \mathbb{R}^p$ num ponto $x \in M$ usando representações em coordenadas, precisamos verificar que tal definição não depende da carta escolhida em M. Veremos adiante que isso só é verdade quando $\mathrm{d}f(x) = 0$. Para demonstrar isso, precisamos estudar a relação entre as representações de uma aplicação bilinear $B : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}^p$ em duas cartas diferentes de M. Temos o seguinte:

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $x \in M$ um ponto. Sejam $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ cartas em M com $x \in U \cap V$ e sejam $B_1 : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}^p$, $B_2 : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}^p$ aplicações bilineares. Denote por $\widetilde{B}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a aplicação bilinear que representa B_1 com respeito à carta φ e por $\widetilde{B}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a aplicação bilinear que representa B_2 com respeito à carta ψ. Então $B_1 = B_2$ se e somente se:*

$$\widetilde{B}_2(Th_1, Th_2) = \widetilde{B}_1(h_1, h_2), \tag{$*$}$$

para todos $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$, onde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota a diferencial da função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(x)$.

Demonstração. Em primeiro lugar, observamos que:

$$T = \mathrm{d}\psi(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}.$$

Suponha que $B_1 = B_2$ e provemos $(*)$. Sejam $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ e sejam $v_1, v_2 \in T_xM$ com $h_1 = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v_1$, $h_2 = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v_2$. Daí:

$$\widetilde{B}_1(h_1, h_2) = B_1(v_1, v_2) = B_2(v_1, v_2) = \widetilde{B}_2\big(\mathrm{d}\psi(x) \cdot v_1, \mathrm{d}\psi(x) \cdot v_2\big);$$

mas:

$$\mathrm{d}\psi(x) \cdot v_1 = \big(\mathrm{d}\psi(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\big) \cdot h_1 = Th_1, \quad \mathrm{d}\psi(x) \cdot v_2 = \big(\mathrm{d}\psi(x) \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\big) \cdot h_2 = Th_2,$$

o que prova $(*)$. Suponha agora que a identidade $(*)$ é satisfeita e provemos que $B_1 = B_2$. Sejam $v_1, v_2 \in T_xM$ e defina $h_1 = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v_1$, $h_2 = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot v_2$. Daí:

$$B_1(v_1, v_2) = \widetilde{B}_1(h_1, h_2) = \widetilde{B}_2(Th_1, Th_2) = B_2\big(\mathrm{d}\psi(x)^{-1} \cdot Th_1, \mathrm{d}\psi(x)^{-1} \cdot Th_2\big);$$

mas:

$$\mathrm{d}\psi(x)^{-1} \cdot Th_1 = \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot h_1 = v_1, \quad \mathrm{d}\psi(x)^{-1} \cdot Th_2 = \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot h_2 = v_2.$$

Concluímos então que $B_1(v_1, v_2) = B_2(v_1, v_2)$. ■

Observamos que no caso $p = 1$, a condição $\widetilde{B}_2(Th_1, Th_2) = \widetilde{B}_1(h_1, h_2)$ que aparece no enunciado do Lema acima pode ser descrita em termos das representações matriciais de $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{B}_2$ e T (veja Exercício 2).

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $x \in M$ um ponto. Suponha que para toda carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ em M com $x \in U$ seja dada uma aplicação bilinear $B_\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *existe uma aplicação bilinear $B : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}^p$ tal que, para qualquer carta $\varphi : U \to \widetilde{U}$ em M com $x \in U$, temos que B_φ representa B com respeito à carta φ;*

(b) *para quaisquer cartas $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ em M com $x \in U \cap V$, temos $B_\psi\big(Th_1, Th_2\big) = B_\varphi(h_1, h_2)$, para todos $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$, onde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota a diferencial da função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(x)$.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema anterior. ■

Utilizando o Lema a seguir, seremos capazes de comparar os Hessianos de representações de uma função $f : M \to \mathbb{R}^p$ em duas cartas diferentes de M.

Lema. *Sejam $f : U \to \mathbb{R}^p$, $\alpha : V \to \mathbb{R}^m$ funções diferenciáveis definidas em abertos $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, com $\alpha(V) \subset U$. Suponha que α seja duas vezes diferenciável num ponto $x_0 \in V$ e que f seja duas vezes diferenciável no ponto $y_0 = \alpha(x_0) \in U$. Então $f \circ \alpha$ é duas vezes diferenciável no ponto x_0 e seu Hessiano nesse ponto é dado por:*

$$\mathrm{d}^{(2)}(f \circ \alpha)(x_0)(v, w) = \mathrm{d}^{(2)} f(y_0)\big(\mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot v, \mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot w\big) + \mathrm{d}f(y_0) \cdot \mathrm{d}^{(2)}\alpha(x_0)(v, w),$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Pela regra da cadeia, temos:

$$\mathrm{d}(f \circ \alpha)(x) = \mathrm{d}f\big(\alpha(x)\big) \circ \mathrm{d}\alpha(x), \tag{1}$$

para todo $x \in V$. Seja $\mathcal{C} : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \times \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ a aplicação definida por:

$$\mathcal{C}(T, S) = T \circ S.$$

Temos que $\mathcal{C}$ é bilinear e portanto de classe C^∞; além do mais, a diferencial de $\mathcal{C}$ num ponto arbitrário (T, S) é dada por:

$$\mathrm{d}\mathcal{C}(T, S) \cdot (H, K) = \mathcal{C}(H, S) + \mathcal{C}(T, K) = H \circ S + T \circ K.$$

De (1) vem:

$$\mathrm{d}(f \circ \alpha) = \mathcal{C} \circ \big((\mathrm{d}f) \circ \alpha, \mathrm{d}\alpha\big),$$

onde $\big((\mathrm{d}f) \circ \alpha, \mathrm{d}\alpha\big) : V \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \times \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota a aplicação cujas coordenadas são $(\mathrm{d}f) \circ \alpha$ e $\mathrm{d}\alpha$. Da igualdade acima vê-se que $\mathrm{d}(f \circ \alpha)$ é diferenciável no ponto x_0 e portanto $f \circ \alpha$ é duas vezes diferenciável no ponto x_0; diferenciando os dois lados da igualdade acima no ponto x_0 e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$\mathrm{d}^2(f \circ \alpha)(x_0) = \mathrm{d}\mathcal{C}\big(\mathrm{d}f(y_0), \mathrm{d}\alpha(x_0)\big) \circ \Big(\mathrm{d}\big((\mathrm{d}f) \circ \alpha\big)(x_0), \mathrm{d}^2\alpha(x_0)\Big).$$

Aplicando os dois lados da igualdade acima a um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2(f \circ \alpha)(x_0) \cdot v &= \mathrm{d}\mathcal{C}\big(\mathrm{d}f(y_0), \mathrm{d}\alpha(x_0)\big) \cdot \Big(\mathrm{d}\big((\mathrm{d}f) \circ \alpha\big)(x_0) \cdot v, \mathrm{d}^2\alpha(x_0) \cdot v\Big) \\ &= \big[\mathrm{d}\big((\mathrm{d}f) \circ \alpha\big)(x_0) \cdot v\big] \circ \mathrm{d}\alpha(x_0) + \mathrm{d}f(y_0) \circ \big(\mathrm{d}^2\alpha(x_0) \cdot v\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Note que:

$$\mathrm{d}\big((\mathrm{d}f) \circ \alpha\big)(x_0) = \mathrm{d}^2 f(y_0) \circ \mathrm{d}\alpha(x_0);$$

substituindo a igualdade acima em (2) obtemos:

$$\mathrm{d}^2(f \circ \alpha)(x_0) \cdot v = \big[\mathrm{d}^2 f(y_0) \cdot \big(\mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot v\big)\big] \circ \mathrm{d}\alpha(x_0) + \mathrm{d}f(y_0) \circ \big(\mathrm{d}^2\alpha(x_0) \cdot v\big).$$

Aplicando os dois lados da igualdade acima num vetor $w \in \mathbb{R}^n$, chegamos à igualdade:

$$\big(\mathrm{d}^2(f \circ \alpha)(x_0) \cdot v\big) \cdot w = \big[\mathrm{d}^2 f(y_0) \cdot \big(\mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot v\big)\big] \cdot \big(\mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot w\big) + \mathrm{d}f(y_0) \cdot \big[\big(\mathrm{d}^2\alpha(x_0) \cdot v\big) \cdot w\big].$$

A conclusão é obtida agora observando a relação que existe entre as aplicações lineares $\mathrm{d}^2(f \circ \alpha)(x_0)$, $\mathrm{d}^2 f(y_0)$, $\mathrm{d}^2\alpha(x_0)$ e as aplicações bilineares $\mathrm{d}^{(2)}(f \circ \alpha)(x_0)$, $\mathrm{d}^{(2)} f(y_0)$ e $\mathrm{d}^{(2)}\alpha(x_0)$, respectivamente. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$), $f : M \to I\!R^p$ uma função de classe C^2 e $x \in M$ um ponto tal que $\mathrm{d}f(x) = 0$. Então existe uma única aplicação bilinear $B : T_xM \times T_xM \to I\!R^p$ tal que, para toda carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ em M com $x \in U$, temos que a aplicação bilinear $\mathrm{d}^{(2)}\big(f \circ \varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big) : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R^p$ representa B com respeito à carta φ.*

Demonstração. Para cada carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ na variedade M com $x \in U$ definimos $B_\varphi = \mathrm{d}^{(2)}(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(x)\big)$. Daí $B_\varphi : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R^p$ é uma aplicação bilinear. Por um Corolário demonstrado anteriormente nesta seção, vemos que a existência da aplicação $B : T_xM \times T_xM \to I\!R^p$ que aparece no enunciado é equivalente à validade da seguinte propriedade: dadas cartas $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ em M com $x \in U \cap V$, vale a igualdade:

$$B_\psi(Th_1, Th_2) = B_\varphi(h_1, h_2),$$

para todos $h_1, h_2 \in I\!R^n$, onde $T : I\!R^n \to I\!R^n$ denota a diferencial da função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(x)$.

Seja $\tilde{f}_1 = f \circ \varphi^{-1}$ a representação de f com respeito à carta φ e $\tilde{f}_2 = f \circ \psi^{-1}$ a representação de f com respeito à carta ψ; se $\alpha = \psi \circ \varphi^{-1}$ denota a função de transição de φ para ψ então $\tilde{f}_2 \circ \alpha$ coincide com $\tilde{f}_1$ na vizinhança aberta $\varphi(U \cap V)$ de $\varphi(x)$. Temos então:

$$B_\varphi(h_1, h_2) = \mathrm{d}^{(2)}\tilde{f}_1\big(\varphi(x)\big)(h_1, h_2) = \mathrm{d}^{(2)}(\tilde{f}_2 \circ \alpha)\big(\varphi(x)\big)(h_1, h_2),$$

para todos $h_1, h_2 \in I\!R^n$. Levando em conta que $\alpha\big(\varphi(x)\big) = \psi(x)$ e $\mathrm{d}\alpha\big(\varphi(x)\big) = T$, o Lema anterior nos dá:

$$\begin{aligned} B_\varphi(h_1, h_2) &= \mathrm{d}^{(2)}\tilde{f}_2\big(\psi(x)\big)(Th_1, Th_2) + \mathrm{d}\tilde{f}_2\big(\psi(x)\big) \cdot \mathrm{d}^{(2)}\alpha\big(\varphi(x)\big)(h_1, h_2) \\ &= B_\psi(Th_1, Th_2) + \mathrm{d}\tilde{f}_2\big(\psi(x)\big) \cdot \mathrm{d}^{(2)}\alpha\big(\varphi(x)\big)(h_1, h_2), \end{aligned}$$

para todos $h_1, h_2 \in I\!R^n$. A igualdade $B_\varphi(h_1, h_2) = B_\psi(Th_1, Th_2)$ é obtida agora observando que:

$$\mathrm{d}\tilde{f}_2\big(\psi(x)\big) = \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}\psi(x)^{-1} = 0. \blacksquare$$

Estamos agora em condições de apresentar a definição central desta seção.

Definição. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$), $f : M \to I\!R^p$ uma função de classe C^2 e $x \in M$ um ponto tal que $\mathrm{d}f(x) = 0$. A aplicação bilinear $B : T_xM \times T_xM \to I\!R^p$ satisfazendo a propriedade que aparece no enunciado do Corolário anterior é chamada o* Hessiano *de f no ponto x e é denotada por $\mathrm{d}^{(2)}f(x)$.*

Observe que se $f : M \to I\!R^p$ é uma função de classe C^2 e $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ é uma carta em M com $x \in U$ então a definição de $\mathrm{d}^{(2)}f(x)$ nos dá diretamente a seguinte identidade:

$$\mathrm{d}^{(2)}f(x)(v, w) = \mathrm{d}^{(2)}(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(x)\big)\big(\mathrm{d}\varphi(x) \cdot v, \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w\big),$$

para todos $v, w \in T_xM$.

`Observação`: se U é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^p$ é uma função de classe C^2 então o Hessiano de f num ponto x da variedade diferenciável U no qual $\mathrm{d}f(x) = 0$ coincide com o Hessiano usual de f no ponto x do Cálculo no $\mathbb{R}^n$. Para ver isso, basta calcular o Hessiano de f na variedade U usando a carta $\mathrm{Id} : U \to U$. Note que, do ponto de vista do Cálculo no $\mathbb{R}^n$, o Hessiano de f está bem definido em todo ponto de U, mas do ponto de vista do Cálculo em Variedades o Hessiano de f só está bem definido nos pontos $x \in U$ com $\mathrm{d}f(x) = 0$.

`Observação`: o Hessiano de uma função $f : M \to \mathbb{R}^p$ num ponto $x \in M$ com $\mathrm{d}f(x) = 0$ é uma aplicação bilinear simétrica. Isso segue diretamente do fato que o Hessiano de uma função no espaço Euclideano é uma aplicação bilinear simétrica.

O Teorema seguinte (e principalmente seu Corolário) fornecem um método prático para calcular o Hessiano de uma função definida numa variedade diferenciável.

Teorema. *Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k $(2 \le k \le \infty)$, $g : N \to M$, $f : M \to \mathbb{R}^p$ aplicações de classe C^2 e $y \in N$ um ponto tal que $\mathrm{d}f\big(g(y)\big) = 0$. Então $\mathrm{d}(f \circ g)(y) = 0$ e:*

$$\mathrm{d}^{(2)}(f \circ g)(y)(v, w) = \mathrm{d}^{(2)} f\big(g(y)\big)\big(\mathrm{d}g(y) \cdot v, \mathrm{d}g(y) \cdot w\big),$$

para todos $v, w \in T_y N$.

Demonstração. Obviamente $\mathrm{d}(f \circ g)(y) = \mathrm{d}f\big(g(y)\big) \circ \mathrm{d}g(y) = 0$. Sejam $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ uma carta em M e $\psi : V \to \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ uma carta em N com $y \in V$ e $g(V) \subset U$. Denote por $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ a representação de f com respeito à carta φ e por $\tilde{g} = \varphi \circ g \circ \psi^{-1}$ a representação de g com respeito às cartas ψ e φ. Daí $\tilde{f} \circ \tilde{g} = (f \circ g) \circ \psi^{-1}$ é a representação de $f \circ g$ com respeito à carta ψ. Temos então:

$$\mathrm{d}^{(2)}(f \circ g)(y)(v, w) = \mathrm{d}^{(2)}(\tilde{f} \circ \tilde{g})\big(\psi(y)\big)\big(\mathrm{d}\psi(y) \cdot v, \mathrm{d}\psi(y) \cdot w\big), \tag{3}$$

$$\mathrm{d}^{(2)} f\big(g(y)\big)(v_0, w_0) = \mathrm{d}^{(2)} \tilde{f}\Big(\varphi\big(g(y)\big)\Big)\Big(\mathrm{d}\varphi\big(g(y)\big) \cdot v_0, \mathrm{d}\varphi\big(g(y)\big) \cdot w_0\Big), \tag{4}$$

para todos $v, w \in T_y N$, $v_0, w_0 \in T_{g(y)} M$. Como $\tilde{g}\big(\psi(y)\big) = \varphi\big(g(y)\big)$, o Lema anterior e a identidade (3) implicam:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{(2)}(f \circ g)(y)(v, w) = {} & \mathrm{d}^{(2)} \tilde{f}\Big(\varphi\big(g(y)\big)\Big)\Big(\mathrm{d}\tilde{g}\big(\psi(y)\big) \cdot \big(\mathrm{d}\psi(y) \cdot v\big), \mathrm{d}\tilde{g}\big(\psi(y)\big) \cdot \big(\mathrm{d}\psi(y) \cdot w\big)\Big) \\ & + \mathrm{d}\tilde{f}\Big(\varphi\big(g(y)\big)\Big) \cdot \mathrm{d}^{(2)}\tilde{g}\big(\psi(y)\big)\big(\mathrm{d}\psi(y) \cdot v, \mathrm{d}\psi(y) \cdot w\big).\end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}\tilde{f}\Big(\varphi\big(g(y)\big)\Big) = \mathrm{d}f\big(g(y)\big) \circ \mathrm{d}\varphi\big(g(y)\big)^{-1} = 0$, obtemos:

$$\mathrm{d}^{(2)}(f \circ g)(y)(v, w) = \mathrm{d}^{(2)} \tilde{f}\Big(\varphi\big(g(y)\big)\Big)\Big(\mathrm{d}\tilde{g}\big(\psi(y)\big) \cdot \big(\mathrm{d}\psi(y) \cdot v\big), \mathrm{d}\tilde{g}\big(\psi(y)\big) \cdot \big(\mathrm{d}\psi(y) \cdot w\big)\Big).$$

Como $\tilde{g} \circ \psi = \varphi \circ g$, temos $\mathrm{d}\tilde{g}\big(\psi(y)\big) \circ \mathrm{d}\psi(y) = \mathrm{d}\varphi\big(g(y)\big) \circ \mathrm{d}g(y)$ e portanto a igualdade acima fica:

$$\mathrm{d}^{(2)}(f \circ g)(y)(v, w) = \mathrm{d}^{(2)} \tilde{f}\Big(\varphi\big(g(y)\big)\Big)\Big(\mathrm{d}\varphi\big(g(y)\big) \cdot \big(\mathrm{d}g(y) \cdot v\big), \mathrm{d}\varphi\big(g(y)\big) \cdot \big(\mathrm{d}g(y) \cdot w\big)\Big).$$

A conclusão agora é obtida tomando $v_0 = \mathrm{d}g(y) \cdot v$ e $w_0 = \mathrm{d}g(y) \cdot w$ em (4). ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k $(2 \leq k \leq \infty)$, $f : M \to \mathbb{R}^p$ uma função de classe C^2 e $x \in M$ um ponto com $\mathrm{d}f(x) = 0$. Dado $v \in T_xM$, escolha uma aplicação $\gamma : I \to M$ de classe C^2 definida num aberto $I \subset \mathbb{R}$, com $\gamma(t) = x$ e $\gamma'(t) = v$, para algum $t \in I$. Temos então:*

$$\mathrm{d}^{(2)}f(x)(v,v) = (f \circ \gamma)''(t).$$

Demonstração. Segue do Lema anterior, observando que $\mathrm{d}^{(2)}(f \circ \gamma)(t)(1,1) = (f \circ \gamma)''(t)$ e $\mathrm{d}\gamma(t) \cdot 1 = \gamma'(t) = v$. ■

`Observação`: o Corolário acima nos permite calcular o Hessiano de f no ponto $x \in M$ em pares de vetores $v, w \in T_xM$ com $v = w$. Como o Hessiano de f é uma aplicação bilinear simétrica, é fácil ver que a seguinte fórmula nos permite calcular o Hessiano de f em pares de vetores arbitrários, caso seja conhecido o Hessiano de f em pares de vetores iguais:

$$\mathrm{d}^{(2)}f(x)(v,w) = \frac{1}{2}\big[\mathrm{d}^{(2)}f(x)(v+w,v+w) - \mathrm{d}^{(2)}f(x)(v,v) - \mathrm{d}^{(2)}f(x)(w,w)\big], \quad v, w \in T_xM.$$

A fórmula acima é conhecida como *fórmula de polarização.*

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Álgebra linear`.

Definição. *Sejam V, W, Z espaços vetoriais. Uma aplicação $B : V \times W \to Z$ é dita* bilinear *se para todo $v \in V$ a aplicação $W \ni w \mapsto B(v,w) \in Z$ é linear e para todo $w \in W$ a aplicação $V \ni v \mapsto B(v,w) \in Z$ é linear. Mais explicitamente, B é bilinear se:*

$$B(v_1 + cv_2, w) = B(v_1, w) + cB(v_2, w), \quad B(v, w_1 + cw_2) = B(v, w_1) + cB(v, w_2),$$

para todos $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$ e para todo escalar c.

Denotamos por $\mathrm{Bil}(V, W; Z)$ o conjunto de todas as aplicações bilineares $B : V \times W \to Z$. É fácil ver que $\mathrm{Bil}(V, W; Z)$ é um espaço vetorial munido das operações:

$$(B + B')(v, w) = B(v, w) + B'(v, w), \quad (cB)(v, w) = cB(v, w),$$

para todos $B, B' \in \mathrm{Bil}(V, W; Z)$, $v \in V$, $w \in W$ e todo escalar c.

Se $V = W$ escrevemos também:

$$\mathrm{Bil}(V; Z) = \mathrm{Bil}(V, W; Z).$$

1. Sejam V, W, Z espaços vetoriais. Dada uma aplicação linear $T : V \to \mathrm{Lin}(W, Z)$, mostre que a aplicação $B : V \times W \to Z$ definida por:

$$B(v, w) = T(v)(w), \quad v \in V, \ w \in W,$$

é bilinear. Mostre que a aplicação:

$$\mathrm{Lin}\big(V, \mathrm{Lin}(W, Z)\big) \ni T \longmapsto B \in \mathrm{Bil}(V, W; Z),$$

é um isomorfismo, onde B é definida em termos de T como acima.

2. Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K e $B : V \times W \to K$ uma aplicação bilinear. Se $\mathfrak{B} = (b_i)_{i=1}^n$ é uma base de V e $\mathfrak{B}' = (b_i')_{i=1}^m$ é uma base de W então a *matriz que representa a aplicação bilinear B com respeito às bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$* é a matriz $[B]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$ cuja entrada na linha i e coluna j é dada por $B(b_i, b_j')$, para todos $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.
   (a) Dados $x \in V$, $y \in W$, denote por $[x]_{\mathfrak{B}}$ a matriz coluna $n \times 1$ cujas entradas são as coordenadas de x na base $\mathfrak{B}$ e denote por $[y]_{\mathfrak{B}'}$ a matriz coluna $m \times 1$ cujas entradas são as coordenadas de y na base $\mathfrak{B}'$. Mostre que:
   $$B(x, y) = [x]_{\mathfrak{B}}^t \, [B]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} \, [y]_{\mathfrak{B}'} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \big([B]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}\big)_{ij} \big([x]_{\mathfrak{B}}\big)_i \big([y]_{\mathfrak{B}'}\big)_j,$$
   onde $[x]_{\mathfrak{B}}^t$ denota a transposta da matriz $[x]_{\mathfrak{B}}$ e matrizes 1×1 com entradas em K são identificadas com elementos de K.
   (b) Sejam $\widehat{V}$, $\widehat{W}$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo K, $T : \widehat{V} \to V$, $S : \widehat{W} \to W$ aplicações lineares e $\widehat{\mathfrak{B}}$, $\widehat{\mathfrak{B}}'$ bases de $\widehat{V}$ e $\widehat{W}$ respectivamente. Considere a aplicação $\widehat{B} : \widehat{V} \times \widehat{W} \to K$ definida por $\widehat{B}(x, y) = B(Tx, Sy)$, para todos $x \in \widehat{V}$, $y \in \widehat{W}$. Mostre que $\widehat{B}$ é bilinear e que a matriz que representa $\widehat{B}$ com respeito às bases $\widehat{\mathfrak{B}}$ e $\widehat{\mathfrak{B}}'$ é dada por:
   $$\big[\widehat{B}\big]_{\widehat{\mathfrak{B}}\widehat{\mathfrak{B}}'} = [T]_{\widehat{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}}^t \, [B]_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} \, [S]_{\widehat{\mathfrak{B}}'\mathfrak{B}'},$$
   onde $[T]_{\widehat{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}}$ denota a matriz que representa a aplicação linear T com respeito às bases $\widehat{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}$ e $[S]_{\widehat{\mathfrak{B}}'\mathfrak{B}'}$ denota a matriz que representa a aplicação linear S com respeito às bases $\widehat{\mathfrak{B}}'$, $\mathfrak{B}'$ (veja Exercício 1 da aula número 1).

Definição. *Sejam $V_1, \ldots V_k$, W espaços vetoriais. Uma aplicação $B : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ é dita* multi-linear *(ou k-*linear*) se for linear em cada variável, i.e., se dados $i = 1, \ldots, k$, $v_1 \in V_1, \ldots, v_{i-1} \in V_{i-1}$, $v_{i+1} \in V_{i+1}, \ldots, v_k \in V_k$, a aplicação:*
$$V_i \ni v \longmapsto B(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k) \in W$$
é linear. Mais explicitamente, B é multi-linear se:
$$\begin{aligned} B(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + cv_i', v_{i+1}, \ldots, v_k) &= B(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) \\ &\quad + cB(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_k), \end{aligned}$$
para todos $v_1 \in V_1, \ldots, v_k \in V_k$, $v_i' \in V_i$ e todo escalar c.

Denotamos por $\text{Mult-lin}_k(V_1, \ldots, V_k; W)$ o conjunto de todas as aplicações multi-lineares $B : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$. É fácil ver que $\text{Mult-lin}_k(V_1, \ldots, V_k; W)$ é um espaço vetorial munido das operações:
$$(B + B')(v_1, \ldots, v_k) = B(v_1, \ldots, v_k) + B'(v_1, \ldots, v_k), \quad (cB)(v_1, \ldots, v_k) = cB(v_1, \ldots, v_k),$$

para todos $B, B' \in \text{Mult-lin}_k(V_1, \ldots, V_k; W)$, $v_1 \in V_1$, ..., $v_k \in V_k$ e todo escalar c.

Se $V_1 = \cdots = V_k = V$, escrevemos também:

$$\text{Mult-lin}_k(V; W) = \text{Mult-lin}_k(V_1, \ldots, V_k; W).$$

Note que $\text{Mult-lin}_1(V; W) = \text{Lin}(V, W)$ e $\text{Mult-lin}_2(V_1, V_2; W) = \text{Bil}(V_1, V_2; W)$.

3. Sejam V_1, ..., V_k, W espaços vetoriais ($k \geq 2$). Dada uma aplicação linear

$$T : V_1 \longrightarrow \text{Mult-lin}_{k-1}(V_2, \ldots, V_k; W),$$

mostre que a aplicação $B : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ definida por:

$$B(v_1, \ldots, v_k) = T(v_1)(v_2, \ldots, v_k),$$

é multi-linear. Mostre que a aplicação:

$$\text{Lin}\big(V_1, \text{Mult-lin}_{k-1}(V_2, \ldots, V_k; W)\big) \ni T \longmapsto B \in \text{Mult-lin}_k(V_1, \ldots, V_k; W),$$

é um isomorfismo, onde B é definida em termos de T como acima.

`Cálculo no` $\mathbb{R}^n$.

Definição. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A k-*ésima diferencial *de f (ou* diferencial de f de ordem k*) num ponto $x \in U$ é (se existir) a aplicação multi-linear $\mathrm{d}^{(k)}f(x) \in \text{Mult-lin}_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ definida recursivamente da seguinte maneira. Se $k = 1$, $\mathrm{d}^{(1)}f(x) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ denota simplesmente a diferencial de f no ponto x (caso f seja diferenciável no ponto x). Supondo a k-ésima diferencial:*

$$\mathrm{d}^{(k)}f : U \ni x \longmapsto \mathrm{d}^{(k)}f(x) \in \text{Mult-lin}_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$$

definida em U, e supondo que a aplicação $\mathrm{d}^{(k)}f$ seja diferenciável num ponto $x \in U$, definimos a $(k+1)$-ésima diferencial de f no ponto x fazendo:

$$\mathrm{d}^{(k+1)}f(x)(v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{(k)}f)(x)(v_1)(v_2, \ldots, v_{k+1}),$$

para todos $v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^m$.

Note que $\mathrm{d}(\mathrm{d}^{(k)}f)(x) \in \text{Lin}\big(\mathbb{R}^m, \text{Mult-lin}_k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)\big)$ e portanto $\mathrm{d}^{(k+1)}f(x)$ é de fato uma aplicação $(k+1)$-linear, pelo resultado do Exercício 3.

4. Sejam $f : U \to I\!R^p$, $\alpha : V \to I\!R^m$ funções duas vezes diferenciáveis definidas em abertos $U \subset I\!R^m$, $V \subset I\!R^n$, com $\alpha(V) \subset U$. Suponha que α seja três vezes diferenciável num ponto $x_0 \in U$ e que f seja três vezes diferenciável no ponto $y_0 = \alpha(x_0)$ (i.e., $\mathrm{d}^{(2)}\alpha$ é diferenciável no ponto x_0 e $\mathrm{d}^{(2)}f$ é diferenciável no ponto y_0). Mostre que $f \circ \alpha$ é três vezes diferenciável no ponto x_0 e que sua terceira diferencial nesse ponto é dada por:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{(3)}(f \circ \alpha)(x_0)(u, v, w) &= \mathrm{d}^{(3)}f(y_0)\big(\mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot u, \mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot v, \mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot w\big)\\ &+ \mathrm{d}^{(2)}f(y_0)\big(\mathrm{d}^{(2)}\alpha(x_0)(u, v), \mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot w\big)\\ &+ \mathrm{d}^{(2)}f(y_0)\big(\mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot v, \mathrm{d}^{(2)}\alpha(x_0)(u, w)\big)\\ &+ \mathrm{d}^{(2)}f(y_0)\big(\mathrm{d}\alpha(x_0) \cdot u, \mathrm{d}^{(2)}\alpha(x_0)(v, w)\big)\\ &+ \mathrm{d}f(y_0) \cdot \mathrm{d}^{(3)}\alpha(x_0)(u, v, w),\end{aligned}$$

para todos $u, v, w \in I\!R^n$.

[*dica*: considere as aplicações:

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_1 : \mathrm{Bil}(I\!R^m; I\!R^p) \times \mathrm{Lin}(I\!R^n, I\!R^m) \times \mathrm{Lin}(I\!R^n, I\!R^m) \longrightarrow \mathrm{Bil}(I\!R^n; I\!R^p),\\ \mathcal{C}_2 : \mathrm{Lin}(I\!R^m, I\!R^p) \times \mathrm{Bil}(I\!R^n; I\!R^m) \longrightarrow \mathrm{Bil}(I\!R^n; I\!R^p),\end{gathered}$$

definidas por:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1(B, T, S)(v, w) &= B(Tv, Sw), \quad B \in \mathrm{Bil}(I\!R^m; I\!R^p),\ T, S \in \mathrm{Lin}(I\!R^n, I\!R^m),\ v, w \in I\!R^n,\\ \mathcal{C}_2(T, B)(v, w) &= T\big(B(v, w)\big), \quad T \in \mathrm{Lin}(I\!R^m, I\!R^p),\ B \in \mathrm{Bil}(I\!R^n; I\!R^m),\ v, w \in I\!R^n.\end{aligned}$$

Segue de um Lema provado no texto que:

$$\mathrm{d}^{(2)}(f \circ \alpha) = \mathcal{C}_1 \circ \big((\mathrm{d}^{(2)}f) \circ \alpha, \mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\alpha\big) + \mathcal{C}_2 \circ \big((\mathrm{d}f) \circ \alpha, \mathrm{d}^{(2)}\alpha\big).$$

Como $\mathcal{C}_1$ é trilinear e $\mathcal{C}_2$ é bilinear, suas diferenciais são dadas por:

$$\begin{gathered}\mathrm{d}\mathcal{C}_1(B, T, S) \cdot (H, K, L) = \mathcal{C}_1(H, T, S) + \mathcal{C}_1(B, K, S) + \mathcal{C}_1(B, T, L),\\ \mathrm{d}\mathcal{C}_2(T, B) \cdot (L, H) = \mathcal{C}_2(L, B) + \mathcal{C}_2(T, H).\end{gathered}$$

Calcule a diferencial de $\mathrm{d}^{(2)}(f \circ \alpha)$ no ponto x_0 usando as identidades acima e a regra da cadeia; aplique o resultado obtido a um vetor $u \in I\!R^n$ e depois a um par $(v, w) \in I\!R^n \times I\!R^n$].

`Representações em coordenadas.`

5. Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, $x \in M$ um ponto e $L : T_xM \to T_xM$ um operador linear. Dada uma carta $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ em M com $x \in U$ então o *operador linear que representa* L *com respeito à carta* φ é o operador linear $\widetilde{L} : I\!R^n \to I\!R^n$ definido por:

$$\widetilde{L} = \mathrm{d}\varphi(x) \circ L \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1}.$$

Sejam $L_1 : T_xM \to T_xM$, $L_2 : T_xM \to T_xM$ operadores lineares e $\varphi : U \to \widetilde{U}$, $\psi : V \to \widetilde{V}$ cartas em M com $x \in U \cap V$. Denote por $\widetilde{L}_1$ o operador linear em $I\!R^n$ que representa L_1 com respeito à carta φ e por $\widetilde{L}_2$ o operador linear em $I\!R^n$ que representa L_2 com respeito à carta ψ. Mostre que $L_1 = L_2$ se e somente se:

$$\widetilde{L}_2 = T \circ \widetilde{L}_1 \circ T^{-1},$$

onde $T : I\!R^n \to I\!R^n$ denota a diferencial da função de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(x)$.

Aula número 17 (15/10)

A aula número 17 cobriu parte do material originalmente destinado à aula número 16.

Aula número 18 (17/10)

A aula número 18 foi destinada à resolução de uma lista de exercícios (como preparação para a primeira prova).

Aula número 19 (22/10)

A aula número 19 foi destinada à realização da primeira prova.

Aula número 20 (24/10)

A aula número 20 foi destinada à resolução das questões da prova.

Aula número 21 (29/10)

(1) **Partições da unidade**.

Até agora, todos os resultados sobre variedades diferenciáveis que apresentamos foram de natureza local e suas demonstrações reduziam-se, através da escolha de sistemas de coordenadas, a um problema de Cálculo no $I\!R^n$. Apresentamos nesta seção a primeira ferramenta para o estudo de propriedades globais de variedades diferenciáveis: as partições da unidade.

O material desta seção depende de alguns pré-requisitos de topologia que serão desenvolvidos na seção 2 e nos exercícios que aparecem no final da aula (veja também os exercícios da aula número 11; também na seção 2 da aula número 11 fizemos uma recordação de algumas noções de topologia). O leitor pode preferir fazer uma leitura preliminar do material da seção 2, de modo a se familiarizar com todos os pré-requisitos de topologia necessários para a compreensão do material desta seção (utilizaremos as noções de família pontualmente finita e localmente finita de subconjuntos de um espaço topológico; utilizaremos também o fato que variedades diferenciáveis são espaços regulares e normais).

Recordamos que se X é um espaço topológico e V é um espaço vetorial então o *suporte* de uma aplicação $f : X \to V$ é definido por:

$$\operatorname{supp} f = \overline{f^{-1}\big(V \setminus \{0\}\big)},$$

i.e., o suporte de f é o fecho do conjunto dos pontos de X onde f não se anula. Intuitivamente, o suporte de f é um subconjunto de X onde f está "concentrada"; de modo mais preciso, se $x \in X$ é um ponto fora do suporte de f então f é nula numa vizinhança de x.

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de M. Uma* partição da unidade de classe C^k subordinada à cobertura $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ *é uma família $(\xi_i)_{i\in I}$ de funções $\xi_i : M \to I\!R$ de classe C^k tais que:*

(a) $\xi_i(M) \subset [0,1]$, *para todo $i \in I$;*

(b) $\operatorname{supp}\xi_i \subset U_i$, *para todo $i \in I$;*

(c) *a família $(\operatorname{supp}\xi_i)_{i\in I}$ é localmente finita em M;*

(d) $\sum_{i\in I} \xi_i(x) = 1$, *para todo $x \in M$.*

A idéia básica por trás da noção de partição da unidade é a de escrever uma função $f : M \to I\!R$ de classe C^k como uma soma de uma família de funções de classe C^k com "suporte pequeno". Mais explicitamente, se $\sum_{i\in I} \xi_i = 1$ é uma partição da unidade de classe C^k subordinada a uma cobertura aberta $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ então, para todo $i \in I$, a função $f_i = f\xi_i$ é de classe C^k e tem suporte contido em U_i; além do mais, $f = \sum_{i\in I} f_i$. A cobertura aberta $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ serve para definir a noção conveniente de "conjunto pequeno" num determinado contexto; mais explicitamente, "suporte pequeno" significa suporte contido em U_i, para algum $i \in I$.

Partições da unidade são utilizadas, por exemplo, para o estudo de integração em variedades. De fato, usando uma partição da unidade apropriada podemos escrever a integral de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ como uma soma de integrais de funções f_i que têm "suporte pequeno"; neste caso, "suporte pequeno" significa suporte contido no domínio de um sistema de coordenadas. A integral de uma função cujo suporte está contido no domínio de um sistema de coordenadas reduz-se essencialmente ao cálculo da integral da representação dessa função no sistema de coordenadas em questão (na verdade, a definição da integral de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ depende da escolha de uma *forma volume* na variedade M; estudaremos esse conceito mais adiante no curso).

Observamos que se $(f_i)_{i \in I}$ é uma família de funções $f_i : M \to \mathbb{R}^p$ e se a família $(\operatorname{supp} f_i)_{i \in I}$ é pontualmente finita então a soma:

$$f = \sum_{i \in I} f_i$$

nos dá uma função $f : M \to \mathbb{R}^p$ bem definida. De fato, para todo $x \in M$ temos que $f_i(x) = 0$ exceto para um número finito de índices $i \in I$ e portanto faz sentido considerar a soma $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x)$. A motivação para a condição (c) que aparece na definição de partição da unidade é dada pelo seguinte:

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $(f_i)_{i \in I}$ uma família de funções $f_i : M \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k. Se a família $(\operatorname{supp} f_i)_{i \in I}$ é localmente finita em M então a função $\sum_{i \in I} f_i$ é de classe C^k.*

Demonstração. Dado $x \in M$ podemos encontrar um aberto $U \subset M$ contendo x tal que $U \cap \operatorname{supp} f_i \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices $i \in I$, digamos, para $i = i_1, \ldots, i_r$. Daí a restrição de $\sum_{i \in I} f_i$ a U é igual à restrição de $\sum_{s=1}^{r} f_{i_s}$ a U, que é uma função de classe C^k (veja Exercício 22). Logo todo ponto de M possui uma vizinhança aberta tal que a restrição de $\sum_{i \in I} f_i$ a tal vizinhança é de classe C^k. ■

Nosso objetivo é provar que a toda cobertura aberta de uma variedade diferenciável podemos subordinar uma partição da unidade. Para isso, precisamos de alguns lemas preparatórios. Começamos mostrando a existência de funções não nulas de classe C^∞ e de suporte pequeno em $\mathbb{R}^n$.

Lema. *Existe uma função $\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\lambda_1(\mathbb{R}) \subset [0,1]$, $\lambda_1(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| \geq 2$ e $\lambda_1(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| \leq 1$.*

Demonstração. Considere a função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Temos que α é de classe C^∞ (veja Exercício 21) e obviamente $\alpha(t) > 0$ para todo $t > 0$. Defina $\alpha_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fazendo:

$$\alpha_1(t) = \alpha\big((1-t)(t-2)\big),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí α_1 é de classe C^∞, $\alpha_1(t) > 0$ se $t \in \,]1,2[$ e $\alpha_1(t) = 0$ para $t \notin \,]1,2[$. A função $\alpha_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(-t) - \alpha_1(t),$$

para todo $t \in I\!R$, é uma função ímpar de classe C^∞ que coincide com $-\alpha_1$ no intervalo $[0,+\infty[$. A função procurada $\lambda_1 : I\!R \to I\!R$ é definida por:

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{t} \alpha_2(s)\,\mathrm{d}s,$$

para todo $t \in I\!R$, onde $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1(s)\,\mathrm{d}s = \int_1^2 \alpha_1(s)\,\mathrm{d}s > 0$. Note que a integral que define λ_1 é sempre finita, já que α_2 é nula fora do intervalo limitado $[-2,2]$.

Verifiquemos que λ_1 satisfaz as propriedades desejadas. Obviamente λ_1 é de classe C^∞ e $\lambda_1' = \frac{1}{k}\alpha_2$. Temos que λ_1 é constante nos intervalos $]-\infty,-2]$, $[-1,1]$ e $[2,+\infty[$, pois α_2 é nula nesses intervalos. Temos também que λ_1 é estritamente crescente no intervalo $[-2,-1]$ (pois α_2 é positiva no interior desse intervalo) e é estritamente decrescente no intervalo $[1,2]$ (pois α_2 é negativa no interior desse intervalo). Obviamente $\lambda_1(t) = 0$ para $t \le -2$, já que $\alpha_2(t) = 0$ para $t \le -2$; também $\lambda_1(t) = 0$ para $t \ge 2$, pois α_2 é uma função ímpar e portanto $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_2(s)\,\mathrm{d}s = 0$. Para completar a demonstração basta verificar agora que $\lambda_1(-1) = 1$. Temos:

$$\lambda_1(-1) = \frac{1}{k}\int_{-2}^{-1} \alpha_2(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}\int_1^2 \alpha_2(-s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}\int_1^2 \alpha_1(s)\,\mathrm{d}s = 1. \blacksquare$$

Corolário. *Existe uma função $\lambda_n : I\!R^n \to I\!R$ de classe C^∞ tal que $\lambda_n(I\!R^n) \subset [0,1]$, $\lambda_n(x) = 0$ para todo $x \in I\!R^n$ com $\|x\| \ge 2$ e $\lambda_n(x) = 1$ para todo $x \in I\!R^n$ com $\|x\| \le 1$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana de $I\!R^n$.*

Demonstração. Basta tomar $\lambda_n(x) = \lambda_1\big(\|x\|\big)$, onde λ_1 é uma função como no enunciado do Lema anterior. Obviamente λ_n é de classe C^∞ em $I\!R^n \setminus \{0\}$; como λ_n é constante numa vizinhança da origem, segue que λ_n é de fato de classe C^∞ em $I\!R^n$. $\blacksquare$

Corolário. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k. Dados um ponto $x \in M$ e um aberto $Z \subset M$ contendo x, existe uma função $\xi : M \to I\!R$ de classe C^k tal que $\xi(M) \subset [0,1]$,* $\mathrm{supp}\,\xi \subset Z$ *e tal que ξ é constante e igual a* 1 *em alguma vizinhança de x.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta em M com $x \in U$. Como $\varphi(U \cap Z)$ é um aberto de $I\!R^n$ contendo $\varphi(x)$, existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}[\varphi(x); r] \subset \varphi(U \cap Z)$, onde $\mathrm{B}[\varphi(x); r]$ denota a bola fechada de centro $\varphi(x)$ e raio r com respeito à norma Euclideana. Considere o difeomorfismo $\alpha : I\!R^n \to I\!R^n$ de classe C^∞ definido por:

$$\alpha(z) = \frac{2}{r}\big(z - \varphi(x)\big),$$

para todo $z \in I\!R^n$. Daí $\varphi_1 = \alpha \circ \varphi : U \to \alpha(\widetilde{U})$ é uma carta em M tal que $\varphi_1(x) = 0$; além do mais, α leva $\mathrm{B}[\varphi(x); r]$ sobre a bola fechada de centro na origem e raio 2 e portanto:

$$\varphi_1(U \cap Z) = \alpha\big(\varphi(U \cap Z)\big) \supset \mathrm{B}[0; 2].$$

Seja λ_n uma função como no enunciado do Corolário anterior. Definimos $\xi : M \to I\!R$ fazendo:

$$\xi(y) = \begin{cases} \lambda_n\big(\varphi_1(y)\big), & y \in U, \\ 0, & y \notin U. \end{cases}$$

Como $\mathrm{B}[0;2] \subset \varphi_1(U \cap Z)$, a bola aberta $\mathrm{B}(0;1)$ de centro na origem e raio 1 é uma vizinhança aberta de $\varphi_1(x) = 0$ contida em $\varphi_1(U \cap Z)$; como $\varphi_1|_{U\cap Z} : U \cap Z \to \varphi_1(U \cap Z)$ é um homeomorfismo entre abertos, segue que $\varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}(0;1)\big)$ é uma vizinhança aberta de x contida em $U \cap Z$. Temos que a função ξ é constante e igual a 1 em $\varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}(0;1)\big)$ e obviamente $\xi(M) \subset [0,1]$. Para completar a demonstração, verificaremos que $\operatorname{supp}\xi \subset Z$ e que ξ é de classe C^k. Temos que $\mathrm{B}[0;2]$ é um subconjunto compacto de $\varphi_1(U \cap Z)$ e portanto $\varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}[0;2]\big)$ é um subconjunto compacto de $U \cap Z$; obviamente, ξ é identicamente nula fora de $\varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}[0;2]\big)$. Como M é Hausdorff, o compacto $\varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}[0;2]\big)$ é fechado (veja item (b) do Exercício 3 da aula número 11) e portanto:

$$\operatorname{supp}\xi \subset \varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}[0;2]\big) \subset U \cap Z \subset Z.$$

Para mostrar que ξ é de classe C^k, observamos que os conjuntos U e $M \setminus \varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}[0;2]\big)$ constituem uma cobertura aberta de M; a restrição de ξ a U é de classe C^k, pois tal restrição coincide com $\lambda_n \circ \varphi_1$. A restrição de ξ a $M \setminus \varphi_1^{-1}\big(\mathrm{B}[0;2]\big)$ também é de classe C^k, pois tal restrição é identicamente nula. ■

O Lema seguinte constitui o passo principal da demonstração da existência de uma partição da unidade subordinada a uma cobertura aberta arbitrária.

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma família $(\eta_j)_{j\in J}$ de aplicações $\eta_j : M \to I\!R$ de classe C^k satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) *$\eta_j(x) \ge 0$, para todo $x \in M$ e todo $j \in J$;*

(b) *para todo $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $\operatorname{supp}\eta_j \subset U_i$;*

(c) *a família $(\operatorname{supp}\eta_j)_{j\in J}$ é localmente finita em M;*

(d) *$\sum_{j\in J} \eta_j(x) > 0$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $M = \bigcup_{n\ge 1} K_n$ uma exaustão por compactos para M, i.e., cada K_n é compacto e $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$, para todo $n \ge 1$ (veja seção 2). Definimos $K_n = \emptyset$ para $n \le 0$. Para todo inteiro n, o conjunto $C_n = K_n \setminus \operatorname{int}(K_{n-1})$ é compacto, sendo igual à interseção do compacto K_n com o fechado $\operatorname{int}(K_{n-1})^{\mathrm{c}}$ (veja Exercício 3). Como M é Hausdorff, cada compacto K_n é fechado (veja item (b) do Exercício 3 da aula número 11). Temos também:

$$M = \bigcup_{n\ge 1} (K_n \setminus K_{n-1}) = \bigcup_{n\ge 1} C_n;$$

de fato, dado $x \in M$, se $n \ge 1$ é o menor inteiro tal que $x \in K_n$ então $x \in K_n \setminus K_{n-1} \subset C_n$. Intuitivamente, os compactos K_n podem ser visualizados como uma seqüência crescente de discos concêntricos cobrindo M e os compactos C_n seriam então os "anéis" fechados localizados entre dois discos consecutivos. Nossa estratégia será a de cobrir cada "anel" C_n

com um número finito de suportes de funções η de classe C^k; além do mais, escolheremos as funções η de modo que seus suportes interceptem apenas um número finito de "anéis" C_m e de modo que esses suportes estejam contidos em abertos U_i da cobertura dada.

Vamos aos detalhes. Seja $n \geq 1$ um inteiro e seja $x \in C_n$. Como $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ é uma cobertura, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Daí o conjunto $\mathrm{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^{\mathrm{c}} \cap U_i$ é uma vizinhança aberta de x e portanto o Corolário anterior nos fornece uma aplicação $\eta_{(n,x)} : M \to I\!\!R$ de classe C^k tal que $\eta_{(n,x)}(M) \subset [0,1]$,

$$\operatorname{supp} \eta_{(n,x)} \subset \mathrm{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^{\mathrm{c}} \cap U_i,$$

e tal que $\eta_{(n,x)}$ é igual a 1 em uma vizinhança aberta $V_{(n,x)}$ de x. Obtemos dessa forma, para cada $n \geq 1$, uma cobertura aberta $C_n \subset \bigcup_{x \in C_n} V_{(n,x)}$ do compacto C_n; essa cobertura possui uma subcobertura finita (veja Exercício 2), i.e., existe um subconjunto finito F_n de C_n tal que:

$$C_n \subset \bigcup_{x \in F_n} V_{(n,x)}.$$

Obtivemos então uma família $(\eta_j)_{j \in J}$ de funções $\eta_j : M \to I\!\!R$ de classe C^k, onde:

$$J = \big\{(n,x) : n \geq 1,\ x \in F_n\big\}.$$

Por construção temos $\eta_j(M) \subset [0,1]$, para todo $j \in J$; além do mais, para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $\operatorname{supp} \eta_j \subset U_i$. As propriedades (a) e (b) que aparecem no enunciado do Lema são portanto satisfeitas.

Vamos mostrar que a família $(\operatorname{supp} \eta_j)_{j \in J}$ é localmente finita em M. Seja $x \in M$ e seja $n \geq 1$ com $x \in K_n \setminus K_{n-1}$. Daí $x \in \mathrm{int}(K_{n+1})$ e $x \notin K_{n-1}$, donde $\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ é uma vizinhança aberta de x. Afirmamos que $\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ intercepta $\operatorname{supp} \eta_j$ apenas para um número finito de índices $j \in J$. Seja então $j \in J$ tal que $\operatorname{supp} \eta_j$ intercepta $\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$; escrevemos $j = (m,y) \in J$, com $m \geq 1$ e $y \in F_m$. Temos que $\operatorname{supp} \eta_j$ está contido em $\mathrm{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^{\mathrm{c}}$ e portanto:

$$\big(\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}\big) \cap \big(\mathrm{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^{\mathrm{c}}\big) = \mathrm{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-1}^{\mathrm{c}} \cap \mathrm{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^{\mathrm{c}} \neq \emptyset.$$

O fato que $K_{n+1} \cap K_{m-2}^{\mathrm{c}} \neq \emptyset$ implica $n+1 > m-2$; similarmente $K_{m+1} \cap K_{n-1}^{\mathrm{c}} \neq \emptyset$ implica $m+1 > n-1$. Logo $n-1 \leq m \leq n+2$. Nós mostramos então que:

$$\big\{j \in J : \big(\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}\big) \cap \operatorname{supp} \eta_j \neq \emptyset\big\} \subset \bigcup_{m=n-1}^{n+2} \{m\} \times F_m.$$

Portanto $\operatorname{supp} \eta_j$ intercepta $\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ apenas para um número finito de índices $j \in J$. Isso completa a demonstração da propriedade (c) que aparece no enunciado do Lema. Finalmente, provamos a propriedade (d). Como cada função η_j é não negativa, é suficiente verificar que para todo $x \in M$ existe $j \in J$ com $\eta_j(x) > 0$. Seja $n \geq 1$ tal que $x \in C_n$. Temos $x \in V_{(n,y)}$ para algum $y \in F_n$; logo $(n,y) = j \in J$ e $\eta_j(x) = 1$. ■

Finalmente, estamos em condições de provar o teorema central desta seção.

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k. A toda cobertura aberta $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ de M podemos subordinar uma partição da unidade de classe C^k.*

Demonstração. Seja $(\eta_j)_{j \in J}$ uma família de aplicações como no enunciado do Lema anterior. Para cada $j \in J$, escolha $i = \sigma(j) \in I$ tal que $\operatorname{supp} \eta_j \subset U_i$. Obtemos então uma aplicação $\sigma : J \to I$. Para cada $i \in I$ definimos uma aplicação $\hat{\xi}_i : M \to \mathbb{R}$ fazendo:

$$\hat{\xi}_i = \sum_{j \in \sigma^{-1}(i)} \eta_j,$$

onde entendemos que $\hat{\xi}_i = 0$ se $\sigma^{-1}(i) = \emptyset$. Como a família $(\operatorname{supp} \eta_j)_{j \in \sigma^{-1}(i)}$ é localmente finita, segue do primeiro Lema da seção que $\hat{\xi}_i$ é (bem definida e) de classe C^k. Note também que $\hat{\xi}_i$ é uma função não negativa, já que cada η_j é não negativa. Para todo $i \in I$ temos:

$$\big\{x \in M : \hat{\xi}_i(x) \neq 0\big\} \subset \bigcup_{j \in \sigma^{-1}(i)} \operatorname{supp} \eta_j.$$

Usando novamente o fato que a família $(\operatorname{supp} \eta_j)_{j \in \sigma^{-1}(i)}$ é localmente finita e levando em conta que a união de uma família localmente finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado (veja seção 2), concluímos que $\bigcup_{j \in \sigma^{-1}(i)} \operatorname{supp} \eta_j$ é um conjunto fechado; logo:

$$\operatorname{supp} \hat{\xi}_i \subset \bigcup_{j \in \sigma^{-1}(i)} \operatorname{supp} \eta_j \subset U_i.$$

Vamos mostrar que a família $(\operatorname{supp} \hat{\xi}_i)_{i \in I}$ é localmente finita. Seja $x \in M$ um ponto. Como a família $(\operatorname{supp} \eta_j)_{j \in J}$ é localmente finita, existe um aberto U em M contendo x que intercepta $\operatorname{supp} \eta_j$ apenas para um número finito de índices $j \in J$. Se $i \in I$ é tal que $U \cap \operatorname{supp} \hat{\xi}_i \neq \emptyset$ então $U \cap \operatorname{supp} \eta_j \neq \emptyset$, para algum $j \in \sigma^{-1}(i)$. Em outras palavras, se U intercepta $\operatorname{supp} \hat{\xi}_i$ então $i = \sigma(j)$, para algum $j \in J$ tal que U intercepta $\operatorname{supp} \eta_j$; em símbolos:

$$\big\{i \in I : U \cap \operatorname{supp} \hat{\xi}_i \neq \emptyset\big\} \subset \sigma\Big(\big\{j \in J : U \cap \operatorname{supp} \eta_j \neq \emptyset\big\}\Big).$$

Isso mostra que $\big\{i \in I : U \cap \operatorname{supp} \hat{\xi}_i \neq \emptyset\big\}$ é um conjunto finito e portanto a família $(\operatorname{supp} \hat{\xi}_i)_{i \in I}$ é localmente finita. Segue então do primeiro Lema da seção que a função:

$$\hat{\xi} = \sum_{i \in I} \hat{\xi}_i$$

é (bem definida e) de classe C^k. Afirmamos que $\hat{\xi}$ é uma função positiva. De fato, como cada função $\hat{\xi}_i$ é não negativa, é suficiente mostrar que para todo $x \in M$ existe $i \in I$ tal que $\hat{\xi}_i(x) > 0$. Mas sabemos que existe $j \in J$ tal que $\eta_j(x) > 0$ e portanto $\hat{\xi}_i(x) > 0$ se $i = \sigma(j)$. Definimos agora:

$$\xi_i = \frac{\hat{\xi}_i}{\hat{\xi}},$$

para todo $i \in I$. Daí $\xi_i : M \to I\!R$ é uma função não negativa de classe C^k para todo $i \in I$ e $\operatorname{supp} \xi_i = \operatorname{supp} \hat{\xi}_i$. Logo a família $(\operatorname{supp} \xi_i)_{i \in I}$ é localmente finita e $\operatorname{supp} \xi_i \subset U_i$ para todo $i \in I$. Obviamente $\sum_{i \in I} \xi_i = 1$ e como cada função ξ_i é não negativa temos $\xi_i(M) \subset [0,1]$, para todo $i \in I$. Logo $\sum_{i \in I} \xi_i = 1$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. ■

Apresentamos agora algumas aplicações interessantes do Teorema anterior.

Recorde que o *Lema de Urisohn* diz que se X é um espaço topológico normal e se $F, G \subset X$ são fechados disjuntos então existe uma função contínua $\xi : X \to [0,1]$ tal que $\xi(x) = 1$ para todo $x \in F$ e $\xi(x) = 0$ para todo $x \in G$. A seguir, provamos uma versão diferenciável do Lema de Urisohn.

Lema. *(Urisohn C^k) Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e sejam $F, G \subset M$ fechados disjuntos. Então existe uma função $\xi : M \to I\!R$ de classe C^k com $\xi(M) \subset [0,1]$, $\xi(x) = 1$ para todo $x \in F$ e $\xi(x) = 0$ para todo $x \in G$.*

Demonstração. Temos que os conjuntos $U_1 = M \setminus F$, $U_2 = M \setminus G$ constituem uma cobertura aberta de M. Existe portanto uma partição da unidade $\xi_1 + \xi_2 = 1$ de classe C^k subordinada a essa cobertura, i.e., $\xi_i(M) \subset [0,1]$ e $\operatorname{supp} \xi_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Daí $\operatorname{supp} \xi_1$ é disjunto de F e $\operatorname{supp} \xi_2$ é disjunto de G. Isso implica que $\xi_2(x) = 0$ para todo $x \in G$ e $\xi_1(x) = 0$ para todo $x \in F$. Mas $\xi_1(x) = 0$ implica $\xi_2(x) = 1$ e portanto a função $\xi = \xi_2$ satisfaz as condições desejadas. ■

Recorde que o *Teorema de Tietze* diz que se X é um espaço topológico normal e $F \subset X$ é um subconjunto fechado então toda aplicação contínua $f : F \to I\!R$ admite uma extensão contínua para o espaço X. A seguir, provamos uma versão diferenciável do Teorema de Tietze.

Lema. *(Tietze C^k) Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k e seja $f : U \to I\!R^p$ uma função de classe C^k definida num aberto $U \subset M$. Então para todo fechado F em M contido em U existe uma função $g : M \to I\!R^p$ de classe C^k tal que $g|_F = f|_F$.*

Demonstração. Como M é normal (veja seção 2), existe um aberto $V \subset M$ tal que $F \subset V$ e $\overline{V} \subset U$ (veja Exercício 1). A partir dos fechados disjuntos F e V^{c} obtemos, pelo Lema de Urisohn C^k, uma função $\xi : M \to I\!R$ de classe C^k tal que $\xi(x) = 1$ para todo $x \in F$ e $\xi(x) = 0$ para todo $x \notin V$. Defina g fazendo $g(x) = f(x)\xi(x)$ para todo $x \in U$ e $g(x) = 0$ para todo $x \in M \setminus U$. Temos que a restrição de g aos abertos U e $\overline{V}^{\mathrm{c}}$ é de classe C^k; de fato, a restrição de g a U coincide com o produto $f(\xi|_U)$ (veja o item (b) do Exercício 22) e a restrição de g a $\overline{V}^{\mathrm{c}}$ é nula. Como $M = U \cup \overline{V}^{\mathrm{c}}$, temos que g é de classe C^k em M. Finalmente, como $\xi|_F \equiv 1$, segue que $g|_F = f|_F$. ■

Corolário. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k ($1 \le k \le \infty$), $x \in M$ um ponto, $c \in I\!R^p$ um vetor e $L : T_xM \to I\!R^p$ uma aplicação linear. Então existe uma aplicação $f : M \to I\!R^p$ de classe C^k tal que $f(x) = c$ e $\mathrm{d}f(x) = L$.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta em M com $x \in U$. Considere a aplicação linear:

$$\widetilde{L} = L \circ \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} : I\!R^n \longrightarrow I\!R^p.$$

Temos que existe uma aplicação $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ tal que $\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) = c$ e $\mathrm{d}\tilde{f}\big(\varphi(x)\big) = \widetilde{L}$; de fato, basta tomar:

$$\tilde{f}(z) = c + \widetilde{L}\big(z - \varphi(x)\big),$$

para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Considere a aplicação $f_0 : U \to \mathbb{R}^p$ definida por $f_0 = \tilde{f} \circ \varphi$. Temos $f_0(x) = c$ e $\mathrm{d}f_0(x) = \widetilde{L} \circ \mathrm{d}\varphi(x) = L$. Para completar a demonstração, basta construir uma função $f : M \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k que coincide com f_0 numa vizinhança de x. Obviamente teremos $f(x) = f_0(x) = c$ e $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f_0(x) = L$. Como M é regular (veja seção 2), o ponto x possui uma vizinhança fechada F contida em U (veja Exercício 2 da aula número 11). O Lema anterior nos dá então uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k que coincide com f_0 em F. ■

O *Teorema de Whitney* diz que se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e de dimensão n então existe uma imersão injetora de classe C^k de M em $\mathbb{R}^{2n}$ e um mergulho de classe C^k de M em $\mathbb{R}^{2n+1}$. A seguir demonstramos uma versão fraca do Teorema de Whitney, válida apenas para variedades compactas e sem a estimativa sobre a dimensão do espaço Euclideano onde mergulhamos a variedade M.

Teorema. *Se M é uma variedade diferenciável compacta de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ então existe $N \in \mathbb{N}$ e um mergulho $f : M \to \mathbb{R}^N$ de classe C^k.*

Demonstração. Para cada $x \in M$, escolhemos uma carta $\varphi_x : U_x \to \widetilde{U}_x \subset \mathbb{R}^n$ em M com $x \in U_x$. Como M é regular (veja seção 2), todo ponto de M possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas (veja Exercício 2 da aula número 11); logo existem abertos V_x, W_x em M tais que:

$$x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x.$$

Pelo Lema de Tietze C^k, existe uma aplicação $\phi_x : M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k que é igual a φ_x no fechado $\overline{V_x}$. Pelo Lema de Urisohn C^k, podemos obter uma função $\xi_x : M \to \mathbb{R}$ de classe C^k que é igual a 1 nos pontos do fechado $\overline{W_x}$ e é igual a zero nos pontos do fechado V_x^{c}. A cobertura aberta $M = \bigcup_{x \in M} W_x$ possui uma subcobertura finita $M = \bigcup_{s=1}^r W_{x_s}$. Definimos uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}^N$ fazendo:

$$f(x) = \big(\phi_{x_1}(x), \ldots, \phi_{x_r}(x), \xi_{x_1}(x), \ldots, \xi_{x_r}(x)\big),$$

para todo $x \in M$, onde $N = rn + r$. Obviamente f é uma aplicação de classe C^k. Vamos mostrar que f é um mergulho. Para todo $x \in M$ e todo $v \in T_xM$ temos:

$$\mathrm{d}f(x) \cdot v = \big(\mathrm{d}\phi_{x_1}(x) \cdot v, \ldots, \mathrm{d}\phi_{x_r}(x) \cdot v, \mathrm{d}\xi_{x_1}(x) \cdot v, \ldots, \mathrm{d}\xi_{x_r}(x) \cdot v\big).$$

Assuma que $\mathrm{d}f(x) \cdot v = 0$ e vamos mostrar que $v = 0$. Seja $s = 1, \ldots, r$ tal que $x \in W_{x_s}$. As aplicações ϕ_{x_s} e φ_{x_s} coincidem no aberto $V_{x_s} \ni x$ e portanto $\mathrm{d}\varphi_{x_s}(x) \cdot v = \mathrm{d}\phi_{x_s}(x) \cdot v = 0$; como φ_{x_s} é um difeomorfismo, temos que $\mathrm{d}\varphi_{x_s}(x)$ é um isomorfismo, donde concluímos que $v = 0$. Isso mostra que f é uma imersão. Como M é compacta, para estabelecer que f é um mergulho é suficiente verificar que f é injetora (veja Exercício 23). Sejam

$x, y \in M$ com $f(x) = f(y)$. Daí $\phi_{x_s}(x) = \phi_{x_s}(y)$ e $\xi_{x_s}(x) = \xi_{x_s}(y)$, para $s = 1, \ldots, r$. Seja $s = 1, \ldots, r$ tal que $x \in W_{x_s}$. Temos $\xi_{x_s}(x) = 1$ e portanto $\xi_{x_s}(y) = 1$. Como ξ_{x_s} é nula no complementar de V_{x_s}, segue que $y \in V_{x_s}$. Mas ϕ_{x_s} coincide com a carta φ_{x_s} nos pontos de V_{x_s} e portanto a restrição de ϕ_{x_s} a V_{x_s} é injetora. As condições $\phi_{x_s}(x) = \phi_{x_s}(y)$ e $x, y \in V_{x_s}$ implicam portanto que $x = y$. ■

(2) **Alguns fatos básicos sobre a topologia de variedades**.

Nesta seção recordamos algumas noções e resultados de topologia e provamos alguns fatos simples sobre a topologia de variedades. Parte da terminologia usada nesta seção foi introduzida nos Exercícios da aula número 11.

Começamos com uma observação bem simples:

Lema. *Toda variedade diferenciável é regular (e portanto é um espaço T3).*

Demonstração. Segue da observação que variedades diferenciáveis são localmente compactas (veja Exercício 8 da aula número 11) e do fato que todo espaço topológico localmente compacto e Hausdorff é regular (veja Exercício 4 da aula número 11). ■

Na verdade, variedades diferenciáveis são espaços normais. Para mostrar isso, precisamos do seguinte:

Lema. *Todo espaço topológico regular que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade é normal.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico regular que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade e sejam $F, G \subset X$ fechados disjuntos. Para todo $x \in F$, temos que o complementar de G é uma vizinhança aberta de x; como X é regular, tal vizinhança aberta de x contém uma vizinhança fechada de x, i.e., existe um aberto $U_x \subset X$ tal que $x \in U_x$ e $\overline{U_x} \cap G = \emptyset$ (veja Exercício 2 da aula número 11). Da cobertura aberta $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$, podemos extrair uma subcobertura enumerável $F \subset \bigcup_{n \geq 1} U_{x_n}$ (veja Exercício 2 no final desta aula, Exercício 7 da aula número 11 e Exercício 3 da aula número 10). Similarmente, podemos para cada $x \in G$ obter um aberto V_x com $x \in V_x$ e $\overline{V_x} \cap F = \emptyset$; da cobertura aberta $G = \bigcup_{x \in G} V_x$, podemos também extrair uma subcobertura enumerável $G = \bigcup_{n \geq 1} V_{x_n}$. Defina agora:

$$A_n = U_{x_n} \setminus \big(\overline{V_{x_1}} \cup \overline{V_{x_2}} \cup \ldots \cup \overline{V_{x_n}}\big), \quad B_n = V_{x_n} \setminus \big(\overline{U_{x_1}} \cup \overline{U_{x_2}} \cup \ldots \cup \overline{U_{x_n}}\big),$$

para todo $n \geq 1$. Daí A_n e B_n são abertos para todo n e portanto $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ e $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ são abertos. Para completar a demonstração, verificaremos que $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Seja $x \in F$. Como $F \subset \bigcup_{n \geq 1} U_{x_n}$, existe n com $x \in U_{x_n}$. Como $x \notin \overline{V_{x_i}}$ para todo i, temos que $x \in A_n$ e portanto $x \in A$. Similarmente, mostra-se que $G \subset B$. Mostremos que $A \cap B = \emptyset$. Para isso, é suficiente verificar que $A_n \cap B_m = \emptyset$, para todos $n, m \geq 1$. Suponha que $n \leq m$. Daí $A_n \subset U_{x_n}$, mas $B_m \cap U_{x_n} = \emptyset$. Similarmente, se $n \geq m$ então $B_m \subset V_{x_m}$, mas $A_n \cap V_{x_m} = \emptyset$. ■

Corolário. *Toda variedade diferenciável é normal (e portanto é um espaço T4).*

Demonstração. De fato, pelo primeiro Lema desta seção, toda variedade diferenciável é regular e, por definição, toda variedade diferenciável satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. ■

Definição. *Um subconjunto S de um espaço topológico X é dito* relativamente compacto *em X se S está contido em algum subconjunto compacto de X.*

`Observação`: se X é Hausdorff então $S \subset X$ é relativamente compacto em X se e somente se $\overline{S}$ é compacto. De fato, se S está contido num compacto $K \subset X$ então K é fechado (veja Exercício 3 da aula número 11) e portanto $\overline{S} \subset K$; daí $\overline{S}$ é um fechado relativamente ao espaço compacto K e logo também é compacto (veja Exercício 3).

`Observação`: se X é um espaço topológico localmente compacto então todo ponto de X pertence a um aberto relativamente compacto em X.

Definição. *Seja X um espaço topológico. Uma* exaustão por compactos *para X é uma seqüência $(K_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos compactos de X tal que $X = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ e tal que K_n está contido no interior de K_{n+1}, para todo $n \geq 1$.*

Lema. *Todo espaço topológico localmente compacto satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade admite uma exaustão por compactos.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico localmente compacto satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade. Podemos cobrir X por abertos relativamente compactos; essa cobertura aberta, possui uma subcobertura enumerável (veja Exercício 7 da aula número 11). Em particular, X pode ser escrito como uma reunião enumerável de subconjuntos compactos, digamos $X = \bigcup_{n\geq 1} L_n$. Construímos agora uma exaustão por compactos $(K_n)_{n\geq 1}$ para X indutivamente. Tome $K_1 = L_1$. Supondo K_n construído, definimos K_{n+1} da seguinte forma. Para todo $x \in K_n$, existe um aberto U_x contendo x que está contido num compacto C_x. A cobertura aberta $K_n \subset \bigcup_{x\in K_n} U_x$ possui uma subcobertura finita $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{x_i}$ (veja Exercício 2). Tome:

$$K_{n+1} = L_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{p} C_{x_i}.$$

Daí K_n está contido no aberto $\bigcup_{i=1}^{p} U_{x_i}$ que está contido em K_{n+1}; logo K_n está contido no interior de K_{n+1}. Além do mais, K_{n+1} é compacto, pois é uma união finita de compactos. Finalmente, nossa construção implica que $L_n \subset K_n$ para todo $n \geq 1$ e portanto:

$$X = \bigcup_{n\geq 1} L_n = \bigcup_{n\geq 1} K_n. \blacksquare$$

`Observação`: um espaço topológico é dito *σ-compacto* se ele pode ser escrito como uma união enumerável de subconjuntos compactos. Na verdade, o argumento da demonstração do Lema acima mostra que todo espaço σ-compacto e localmente compacto admite uma exaustão por compactos. A primeira parte da demonstração do Lema consistiu em verificar que todo espaço topológico localmente compacto satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade é σ-compacto.

Definição. *Sejam X um espaço topológico e $(S_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que a família $(S_i)_{i \in I}$ é* pontualmente finita *se cada $x \in X$ pertence a S_i para no máximo uma quantidade finita de índices $i \in I$, i.e., se para todo $x \in X$ o conjunto:*

$$\big\{ i \in I : x \in S_i \big\}$$

é finito. Dizemos que a família $(S_i)_{i \in I}$ é localmente finita em X *se cada $x \in X$ possui uma vizinhança que intersecta S_i para no máximo um número finito de índices $i \in I$, i.e., se para todo $x \in X$ existe um aberto $U \subset X$ contendo x tal que o conjunto:*

$$\big\{ i \in I : U \cap S_i \neq \emptyset \big\}$$

é finito.

Obviamente, toda família localmente finita é também pontualmente finita.

`Observação`: na verdade, a condição de uma família $(S_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X ser pontualmente finita não depende da topologia de X. Essa condição também não depende do "ambiente", i.e., se $(S_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de Y e se $Y \subset X$ então $(S_i)_{i \in I}$ é uma família pontualmente finita de subconjuntos de X se e somente se $(S_i)_{i \in I}$ for uma família pontualmente finita de subconjuntos de Y. Por outro lado, a condição de uma família $(S_i)_{i \in I}$ ser localmente finita em X depende (obviamente) da topologia de X e também do "ambiente"; mais explicitamente, se Y é um subespaço de um espaço topológico X então uma família $(S_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de Y pode ser localmente finita em Y, mas não ser localmente finita em X (veja os Exemplos a seguir). É fácil ver, no entanto, que se $(S_i)_{i \in I}$ é localmente finita em X então $(S_i)_{i \in I}$ também é localmente finita em Y.

`Exemplo`: seja X um espaço topológico não vazio arbitrário e seja I um conjunto infinito. A família $(S_i)_{i \in I}$ definida por $S_i = X$ para todo $i \in I$ não é nem pontualmente finita nem localmente finita (apesar do fato que o conjunto $\big\{ S_i : i \in I \big\}$ é finito).

`Exemplo`: seja $X = I\!R$ a reta real e considere a família $(S_n)_{n \geq 1}$ definida por:

$$S_n = \Big] \tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n} \Big[,$$

para todo $n \geq 1$. Daí a família $(S_n)_{n \geq 1}$ não é localmente finita em X pois toda vizinhança da origem intersecta todos os conjuntos S_n para n suficientemente grande. No entanto, a família $(S_n)_{n \geq 1}$ é localmente finita em $Y = \left]0, +\infty\right[$; de fato, se $x > 0$ então $\big] \frac{x}{2}, +\infty \big[$ é uma vizinhança aberta de x que intersecta S_n apenas para um número finito de índices n.

Sabemos que a união de uma coleção finita de subconjuntos fechados de um espaço topológico é um subconjunto fechado desse espaço topológico; também, o fecho de uma união finita de subconjuntos de um espaço topológico coincide com a união dos fechos desses subconjuntos. Tais propriedades não são verdadeiras para coleções infinitas de subconjuntos, mas, como mostraremos a seguir, elas são verdadeiras para coleções localmente finitas.

Lema. *Sejam X um espaço topológico e $(S_i)_{i\in I}$ uma família localmente finita em X. Então a família $(\overline{S_i})_{i\in I}$ também é localmente finita em X.*

Demonstração. Basta observar que se $U \subset X$ é um aberto então:

$$\big\{i \in I : U \cap S_i \neq \emptyset\big\} = \big\{i \in I : U \cap \overline{S_i} \neq \emptyset\big\}. \blacksquare$$

Lema. *Sejam X um espaço topológico e $(F_i)_{i\in I}$ uma família localmente finita de subconjuntos fechados de X. Então $\bigcup_{i\in I} F_i$ é fechado em X.*

Demonstração. Seja $x \in X$ com $x \notin \bigcup_{i\in I} F_i$. Como $(F_i)_{i\in I}$ é localmente finita, existe um aberto $U \subset X$ contendo x tal que $U \cap F_i \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices $i \in I$, digamos, $i = i_1, \ldots, i_p$. Daí $U \setminus (F_{i_1} \cup \ldots \cup F_{i_p})$ é uma vizinhança aberta de x disjunta de $\bigcup_{i\in I} F_i$. $\blacksquare$

Corolário. *Sejam X um espaço topológico e $(S_i)_{i\in I}$ uma família localmente finita de subconjuntos de X. Então:*

$$\overline{\bigcup_{i\in I} S_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{S_i}.$$

Demonstração. A inclusão:

$$\bigcup_{i\in I} \overline{S_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} S_i}$$

vale em geral (mesmo sem a hipótese que $(S_i)_{i\in I}$ seja localmente finita). De fato, basta observar que o fecho de $\bigcup_{i\in I} S_i$ é um fechado que contém S_i para todo $i \in I$ e portanto contém $\overline{S_i}$, para todo $i \in I$. Para mostrar a inclusão reversa observamos que, pelos dois Lemas anteriores, o conjunto $\bigcup_{i\in I} \overline{S_i}$ é fechado e contém $\bigcup_{i\in I} S_i$; logo contém também o fecho de $\bigcup_{i\in I} S_i$. $\blacksquare$

Lema. *Seja X um espaço topológico e seja $(S_i)_{i\in I}$ uma família localmente finita de subconjuntos de X. Se $K \subset X$ é compacto então o conjunto:*

$$\big\{i \in I : K \cap S_i \neq \emptyset\big\}$$

é finito.

Demonstração. Para todo $x \in K$ existe um aberto $V_x \subset X$ contendo x tal que o conjunto:

$$I_x = \big\{i \in I : V_x \cap S_i \neq \emptyset\big\}$$

é finito. A cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x\in K} V_x$ possui uma subcobertura finita $K \subset \bigcup_{r=1}^{p} V_{x_r}$ (veja Exercício 2). Daí, se $i \in I$ é tal que $K \cap S_i \neq \emptyset$ então $V_{x_r} \cap S_i \neq \emptyset$ para algum $r = 1, \ldots, p$. Em outras palavras:

$$\big\{i \in I : K \cap S_i \neq \emptyset\big\} \subset I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_p}. \blacksquare$$

Recordamos agora a noção de espaço topológico paracompacto. Em diversos textos, variedades diferenciáveis são definidas como sendo espaços topológicos Hausdorff e paracompactos munidos de um atlas maximal de classe C^k. Veremos no que segue que essa definição é essencialmente equivalente a nossa, a menos do fato que ela permitiria variedades com uma quantidade não enumerável de componentes conexas.

Observamos que a noção de paracompacidade em topologia é intimamente ligada com a noção de partição da unidade (veja Exercício 14).

Recordamos que se X é um conjunto então uma cobertura $X = \bigcup_{j\in J} V_j$ de X é dita um *refinamento* de uma cobertura $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ de X se para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $V_j \subset U_i$.

Definição. *Um espaço topológico X é dito* paracompacto *se toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito. Mais explicitamente, X é paracompacto se dada uma família de abertos $(U_i)_{i\in I}$ em X com $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, existe uma família localmente finita $(V_j)_{j\in J}$ de abertos em X com $X = \bigcup_{j\in J} V_j$ e tal que para todo $j \in J$ existe $i \in I$ com $V_j \subset U_i$.*

A demonstração do resultado a seguir é muito parecida com a demonstração da existência de partições da unidade subordinadas a coberturas abertas arbitrárias de uma variedade diferenciável (veja seção 1). Por esse motivo, apresentamos a demonstração de forma um pouco resumida.

Teorema. *Toda variedade diferenciável é paracompacta.*

Demonstração. Seja M uma variedade diferenciável e seja $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de M. Vamos construir um refinamento aberto localmente finito para $M = \bigcup_{i\in I} U_i$. Seja $(K_n)_{n\ge 1}$ uma exaustão por compactos para M e defina $K_n = \emptyset$ para todo $n \le 0$. Para todo inteiro n, denotamos por C_n o compacto $K_n \setminus \mathrm{int}(K_{n-1})$. Sejam $n \ge 1$ e $x \in C_n$ fixados. Temos que existe $i \in I$ com $x \in U_i$. O conjunto:

$$V_{(n,x)} = \mathrm{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^{\mathrm{c}} \cap U_i$$

é uma vizinhança aberta de x e a cobertura aberta $C_n \subset \bigcup_{x\in C_n} V_{(n,x)}$ possui uma subcobertura finita, i.e., existe um subconjunto finito $F_n \subset C_n$ tal que $C_n \subset \bigcup_{x\in F_n} V_{(n,x)}$. Considere a família $(V_j)_{j\in J}$, onde:

$$J = \big\{(n,x) : n \ge 1,\ x \in F_n\big\}.$$

De $M = \bigcup_{n\ge 1} C_n$ e $C_n \subset \bigcup_{x\in F_n} V_{(n,x)}$, obtemos $M = \bigcup_{j\in J} V_j$. Além do mais, por construção, cada V_j é aberto e para todo $j \in J$ existe $i \in I$ com $V_j \subset U_i$. Para completar a demonstração, basta mostrar que a família $(V_j)_{j\in J}$ é localmente finita. Seja $x \in M$ e seja $n \ge 1$ tal que $x \in K_n \setminus K_{n-1}$. Daí $\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ é uma vizinhança aberta de x. Afirmamos que $\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}$ intercepta V_j apenas para um número finito de índices $j \in J$. De fato, seja $j \in J$ tal que $\big(\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}\big) \cap V_j \ne \emptyset$, digamos $j = (m, y)$, com $m \ge 1$ e $y \in F_m$. Temos $V_j \subset \mathrm{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^{\mathrm{c}}$ e portanto:

$$\mathrm{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-1}^{\mathrm{c}} \cap \mathrm{int}(K_{m+1}) \cap K_{m-2}^{\mathrm{c}} \ne \emptyset,$$

donde $n-1 \leq m \leq n+2$. Concluímos que:

$$\big\{j \in J : V_j \cap \big(\mathrm{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-1}\big) \neq \emptyset\big\} \subset \bigcup_{m=n-1}^{n+2} \{m\} \times F_m.$$

Isso prova que a família $(V_j)_{j\in J}$ é localmente finita e completa a demonstração. ■

`Observação`: na verdade, o argumento apresentado na demonstração do Teorema acima mostra o seguinte resultado: se X é um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff e σ-compacto então X é paracompacto (veja Exercício 7 e a observação que o segue).

Mostramos agora que no caso de espaços conexos Hausdorff com a topologia induzida por um atlas, o segundo axioma da enumerabilidade é equivalente à paracompacidade.

Teorema. *Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas para M. Assuma que M é munido da topologia induzida por $\mathcal{A}$. Se M é Hausdorff, paracompacto e conexo então M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Em particular, o conjunto M munido do atlas maximal que contém $\mathcal{A}$ é uma variedade diferenciável.*

Demonstração. A estratégia da prova é a seguinte: vamos construir indutivamente uma seqüência $(K_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos compactos de M e vamos mostrar que $\bigcup_{n\geq 1} K_n$ é aberto, fechado e não vazio em M. Como M é conexo, seguirá que M é igual à união dos compactos K_n. Cada compacto K_n pode ser coberto por um número finito de domínios de sistemas de coordenadas pertencentes a $\mathcal{A}$ (veja Exercício 2); obteremos então um atlas enumerável para M contido em $\mathcal{A}$ e a demonstração ficará completa (veja Exercício 5 da aula número 5).

Procedemos então com a definição da seqüência $(K_n)_{n\geq 1}$. Como M é localmente compacto, M admite uma cobertura aberta por conjuntos relativamente compactos; por paracompacidade, essa cobertura aberta admite um refinamento aberto localmente finito. Obtemos então uma cobertura aberta $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ localmente finita de M onde cada U_i é relativamente compacto (como M é Hausdorff, isso significa que $\overline{U_i}$ é compacto). Tome K_1 como sendo um subconjunto compacto não vazio arbitrário de M; por exemplo, seja K_1 um conjunto unitário (o caso $M = \emptyset$ obviamente é trivial). Assumindo que o compacto K_n foi definido para um certo $n \geq 1$, definimos K_{n+1} da seguinte forma:

$$K_{n+1} = \bigcup_{i\in I_n} \overline{U_i},$$

onde:

$$I_n = \big\{i \in I : K_n \cap U_i \neq \emptyset\big\}.$$

Como K_n é compacto e $(U_i)_{i\in I}$ é uma família localmente finita, segue que I_n é finito e portanto K_{n+1} é compacto, pois cada $\overline{U_i}$ é compacto. Note que $\bigcup_{i\in I_n} U_i$ é um aberto contido em K_{n+1} que contém K_n e portanto K_n está contido no interior de K_{n+1}. Logo:

$$\bigcup_{n\geq 1} K_n = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{int}(K_{n+1}).$$

Isso mostra que a união $\bigcup_{n\geq 1} K_n$ é aberta. Essa união é certamente não vazia, pois K_1 não é vazio. Vamos então mostrar que $\bigcup_{n\geq 1} K_n$ é fechado. Se $I' = \bigcup_{n\geq 1} I_n$ então:

$$\bigcup_{n\geq 1} K_n = K_1 \cup \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{i\in I_n} \overline{U_i} = K_1 \cup \bigcup_{i\in I'} \overline{U_i}.$$

Como a família $(U_i)_{i\in I'}$ é localmente finita, concluímos que:

$$\bigcup_{n\geq 1} K_n = K_1 \cup \overline{\bigcup_{i\in I'} U_i}$$

é fechado em M. Isso completa a demonstração. ■

`Observação`: na verdade, o argumento apresentado na demonstração do Teorema acima mostra o seguinte resultado: se X é um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff, conexo e paracompacto então X é σ-compacto. Além do mais, se todo ponto de X possui uma vizinhança que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

Corolário. *Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas para M. Assuma que M é munido da topologia induzida por $\mathcal{A}$. Se M é Hausdorff e possui uma quantidade enumerável de componentes conexas então M é paracompacto se e somente se satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.*

Demonstração. Já mostramos que se M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então M é paracompacto (pois nesse caso M torna-se uma variedade diferenciável, munido do atlas maximal que contém $\mathcal{A}$). Reciprocamente, suponha que M é paracompacto. Seja M_0 uma componente conexa de M. Como M_0 é fechada em M (veja Exercício 19), segue que M_0 é paracompacta (veja Exercício 9). Como M_0 é aberta em M (veja Exercícios 15 e 17), o atlas $\mathcal{A}$ induz um atlas $\mathcal{A}_0$ em M_0. Mais explicitamente, se $\mathcal{A}_{\max}$ denota o atlas maximal em M que contém $\mathcal{A}$ então o conjunto dos sistemas de coordenadas pertencentes a $\mathcal{A}_{\max}$ cujos domínios estão contidos em M_0 constitui um atlas $\mathcal{A}_0$ para M_0; além do mais, a topologia induzida por $\mathcal{A}_0$ em M_0 coincide com a topologia induzida por M em M_0 (veja Exemplo na seção 3 da aula número 3). Logo M_0 é Hausdorff (veja Exercício 2 da aula número 10), paracompacto, conexo e possui sua topologia induzida por um atlas. Segue do Teorema anterior que M_0 satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Daí M pode ser coberto por uma coleção enumerável de abertos que satisfazem o segundo axioma da enumerabilidade e portanto também M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (veja Exercício 5 da aula número 5). ■

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Topologia.`

`Observação`: parte da terminologia usada nos exercícios a seguir foi introduzida nos Exercícios da aula número 11.

1. Mostre que as seguintes afirmações sobre um espaço topológico X são equivalentes:
   (a) X é normal;
   (b) dados um fechado $F \subset X$ e um aberto $U \subset X$ com $F \subset U$ então existe um aberto $V \subset X$ com $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

[*dica*: supondo (a), prove (b) usando que os fechados disjuntos F e U^{c} podem ser separados por abertos; supondo (b), prove (a) usando o fato que se F, G são fechados disjuntos em X então F está contido no aberto $U = G^{\mathrm{c}}$].

2. Sejam X um espaço topológico e $K \subset X$ um subconjunto. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) K é um espaço compacto com a topologia induzida de X, i.e., se $(V_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos relativos a K com $K = \bigcup_{i\in I} V_i$ então existe um subconjunto finito $J \subset I$ com $K = \bigcup_{i\in J} V_i$;

(b) se $(U_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos relativos a X com $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ então existe um subconjunto finito $J \subset I$ com $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Similarmente, mostre que as duas condições abaixo também são equivalentes:

(a') K é um espaço de Lindelöf com a topologia induzida de X, i.e., se $(V_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos relativos a K com $K = \bigcup_{i\in I} V_i$ então existe um subconjunto enumerável $J \subset I$ com $K = \bigcup_{i\in J} V_i$;

(b') se $(U_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos relativos a X com $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ então existe um subconjunto enumerável $J \subset I$ com $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

3. Mostre que se X é um espaço topológico compacto e se $F \subset X$ é um subconjunto fechado então F também é compacto.

[*dica*: pelo resultado do Exercício 2, basta mostrar que toda cobertura aberta de F por abertos de X admite uma subcobertura finita. Observe que se $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ é uma cobertura aberta de F por abertos de X então, acrescentando F^{c} à família $(U_i)_{i\in I}$, obtemos uma cobertura aberta de X].

4. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e bijetora, onde X é um espaço topológico compacto e Y é um espaço topológico Hausdorff. Mostre que f é um homeomorfismo.

[*dica*: verifique que f é uma aplicação fechada usando o resultado do Exercício 3 e o resultado do item (b) do Exercício 3 da aula número 11].

5. Mostre que todo espaço topológico compacto é paracompacto.

Definição. *Sejam X um espaço topológico e $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura de X. Um* refinamento estrito *da cobertura $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ é uma cobertura $X = \bigcup_{i\in I} V_i$ de X tal que $V_i \subset U_i$, para todo $i \in I$.*

6. Seja X um espaço topológico paracompacto. Mostre que toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto estrito e localmente finito; mais explicitamente, mostre que para toda cobertura aberta $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ de X existe uma cobertura aberta localmente finita $X = \bigcup_{i\in I} V_i$ de X tal que $V_i \subset U_i$, para todo $i \in I$.

[*dica*: seja $X = \bigcup_{j\in J} W_j$ um refinamento aberto localmente finito de $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Para cada $j \in J$, escolha $i = \sigma(j)$ tal que $W_j \subset U_i$. Obtemos então uma função $\sigma : J \to I$. Defina $V_i = \bigcup_{j\in\sigma^{-1}(i)} W_j$].

7. Um espaço topológico X é dito *superparacompacto* se, dada uma base de abertos $\mathfrak{B}$ de X, existe uma cobertura aberta localmente finita de X formada por elementos da base $\mathfrak{B}$.
   (a) Se X é superparacompacto, mostre que, dada uma base de abertos $\mathfrak{B}$ de X e uma cobertura aberta $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ de X, existe um refinamento aberto localmente finito $X = \bigcup_{j\in J} V_j$ de $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ tal que $V_j \in \mathfrak{B}$, para todo $j \in J$. Conclua que X é paracompacto.

[*dica*: o conjunto $\mathfrak{B}' = \big\{B \in \mathfrak{B} : B \subset U_i, \text{ para algum } i \in I\big\}$ é uma base de abertos de X e existe uma cobertura aberta localmente finita de X formada por elementos de $\mathfrak{B}'$].

   (b) Mostre que se X é localmente compacto, Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então X é superparacompacto.

[*dica*: repita os passos da demonstração de que toda variedade diferenciável é paracompacta, mas em vez de definir $V_{(n,x)} = \mathrm{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^{\mathrm{c}} \cap U_i$, escolha $V_{(n,x)} \in \mathfrak{B}$ com $x \in V_{(n,x)} \subset \mathrm{int}(K_{n+1}) \cap K_{n-2}^{\mathrm{c}} \cap U_i$].

`Observação`: na verdade, sem dificuldade adicional, mostra-se que se um espaço topológico X é localmente compacto, Hausdorff e σ-compacto então X é superparacompacto.

`Observação`: se X é superparacompacto e $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ é uma cobertura aberta, não é verdade em geral que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ admite um refinamento aberto *estrito* e localmente finito formado por elementos de uma dada base $\mathfrak{B}$.

8. Um espaço topológico X é dito *hereditariamente paracompacto* se todo subconjunto de X, munido da topologia induzida, é paracompacto. Mostre que X é hereditariamente paracompacto se e somente se todo subconjunto aberto de X é paracompacto.

[*dica*: seja $S \subset X$ um subconjunto arbitrário e seja $S = \bigcup_{i\in I} V_i$ uma cobertura aberta de S por abertos relativos a S. Para cada $i \in I$, existe um aberto U_i em X tal que $V_i = U_i \cap S$. Daí $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ é uma cobertura aberta do subconjunto aberto $U \subset X$. Usando que U é paracompacto, obtemos um refinamento aberto localmente finito $U = \bigcup_{j\in J} W_j$ para a cobertura $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Conclua que $S = \bigcup_{j\in J}(W_j \cap S)$ é um refinamento aberto localmente finito para $S = \bigcup_{i\in I} V_i$].

9. Seja X um espaço topológico paracompacto e seja $F \subset X$ um subconjunto fechado.
   (a) Se $(U_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos de X com $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, mostre que existe uma família de abertos $(V_i)_{i\in I}$ localmente finita em X tal que $F \subset \bigcup_{i\in I} V_i$ e tal que $V_i \subset U_i$, para todo $i \in I$.

[*dica*: os abertos U_i juntamente com o complementar de F constituem uma cobertura aberta de X. Use o resultado do Exercício 6].

   (b) Mostre que F é paracompacto.

[*dica*: se $F = \bigcup_{i\in I} W_i$ é uma cobertura aberta de F (por abertos relativos a F) então para todo $i \in I$ existe um aberto U_i em X tal que $W_i = U_i \cap F$. Use o resultado do item (a)].

10. Mostre que todo espaço topológico Hausdorff e paracompacto é regular (e portanto é um espaço T3).

[*dica*: sejam X um espaço topológico Hausdorff e paracompacto, $F \subset X$ um subconjunto fechado e $x \in X$ um ponto com $x \notin F$. Como X é Hausdorff, para cada $y \in F$, existe um aberto U_y em X com $y \in U_y$ e $x \notin \overline{U_y}$. Pelo resultado do Exercício 9, existe uma família localmente finita de abertos $(V_y)_{y\in F}$ tal que $F \subset \bigcup_{y\in F} V_y$ e $V_y \subset U_y$ para todo $y \in F$. Note que $x \notin \overline{V_y}$, para todo $y \in F$ e como a família $(V_y)_{y\in F}$ é localmente finita, temos que o fecho da união $\bigcup_{y\in F} V_y$ coincide com $\bigcup_{y\in F} \overline{V_y}$. Conclua que $\bigcup_{y\in F} V_y$ e $\big(\bigcup_{y\in F} \overline{V_y}\big)^{\mathrm{c}}$ são abertos que separam F de x].

11. Mostre que todo espaço topológico Hausdorff e paracompacto é normal (e portanto é um espaço T4).

[*dica*: sejam X um espaço topológico Hausdorff e paracompacto e $F, G \subset X$ subconjuntos fechados e disjuntos de X. Pelo resultado do Exercício 10, X é regular e portanto para cada $y \in F$, existe um aberto U_y em X com $y \in U_y$ e $\overline{U_y} \cap G = \emptyset$. Pelo resultado do Exercício 9, existe uma família localmente finita de abertos $(V_y)_{y\in F}$ tal que $F \subset \bigcup_{y\in F} V_y$ e $V_y \subset U_y$ para todo $y \in F$. Note que $\overline{V_y} \cap G = \emptyset$, para todo $y \in F$ e como a família $(V_y)_{y\in F}$ é localmente finita, temos que o fecho da união $\bigcup_{y\in F} V_y$ coincide com $\bigcup_{y\in F} \overline{V_y}$. Conclua que $\bigcup_{y\in F} V_y$ e $\big(\bigcup_{y\in F} \overline{V_y}\big)^{\mathrm{c}}$ são abertos que separam F de G].

Definição. *Sejam X um espaço topológico e $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de X. Um* encolhimento *de $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ é uma cobertura aberta $X = \bigcup_{i\in I} V_i$ de X tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para todo $i \in I$.*

12. Seja X um espaço topológico. O objetivo deste exercício é mostrar que as seguintes condições são equivalentes:
   (i) X é normal;
   (ii) toda cobertura aberta pontualmente finita de X admite um encolhimento.

   Para mostrar isso, preencha os detalhes dos passos descritos abaixo.

   (a) Provar que (ii)$\Rightarrow$(i) é fácil; assumindo (ii), tome $F, G \subset X$ fechados disjuntos e observe que a cobertura aberta $X = F^{\mathrm{c}} \cup G^{\mathrm{c}}$ possui um encolhimento $X = U \cup V$, i.e., $U, V \subset X$ são abertos e $\overline{U} \subset F^{\mathrm{c}}$, $\overline{V} \subset G^{\mathrm{c}}$. Basta notar então que os abertos $\overline{U}^{\mathrm{c}}$ e $\overline{V}^{\mathrm{c}}$ separam F de G.

(b) Assuma (i) e vamos provar (ii). Seja $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta pontualmente finita de X. Denote por $\mathcal{A}$ o conjunto das famílias $(V_j)_{j\in J}$, $J \subset I$, onde para todo $j \in J$, V_j é aberto em X, $\overline{V}_j \subset U_j$ e:

$$X = \Big(\bigcup_{j\in J} V_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in I\setminus J} U_i\Big). \tag{$*$}$$

Defina uma ordem parcial $\preceq$ em $\mathcal{A}$ fazendo $(V_j)_{j\in J} \preceq (V'_j)_{j\in J'}$ se e somente se $J \subset J'$ e $V_j = V'_j$, para todo $j \in J$. Verifique que toda cadeia em $(\mathcal{A}, \preceq)$ possui uma cota superior.

[*dica*: seja $\mathcal{B} = \big\{(V_j^\lambda)_{j\in J_\lambda} : \lambda \in \Lambda\big\} \subset \mathcal{A}$ uma cadeia, i.e., para todos $\lambda, \mu \in \Lambda$ temos $(V_j^\lambda)_{j\in J_\lambda} \preceq (V_j^\mu)_{j\in J_\mu}$ ou $(V_j^\mu)_{j\in J_\mu} \preceq (V_j^\lambda)_{j\in J_\lambda}$. Tome $J = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$ e, para cada $j \in J$, defina $V_j = V_j^\lambda$, onde $\lambda \in \Lambda$ é escolhido de modo que $j \in J_\lambda$. Verifique que a família $(V_j)_{j\in J}$ é bem definida. Uma vez estabelecido que essa família pertence a $\mathcal{A}$, ficará claro que ela é uma cota superior para a cadeia $\mathcal{B}$. Observamos que se Λ é vazio então a família $(V_j)_{j\in J}$ também é vazia; mas a família vazia pertence a $\mathcal{A}$, já que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Suponha então que Λ não é vazio. A única parte não trivial da demonstração que $(V_j)_{j\in J}$ pertence a $\mathcal{A}$ é a verificação de $(*)$. Seja $x \in X$ e suponha que $x \notin U_i$, para todo $i \in I \setminus J$. Vamos verificar que $x \in V_j$, para algum $j \in J$. Como a família $(U_i)_{i\in I}$ é pontualmente finita, o conjunto:

$$I_0 = \big\{i \in I : x \in U_i\big\}$$

é finito. Temos $I_0 \subset J$. Como $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cadeia de subconjuntos de J e como $\Lambda \neq \emptyset$, temos que o subconjunto finito $I_0 \subset J$ está contido em J_λ, para algum $\lambda \in \Lambda$. Levando em conta que:

$$X = \Big(\bigcup_{j\in J_\lambda} V_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in I\setminus J_\lambda} U_i\Big),$$

conclua que $x \in V_j$, para algum $j \in J_\lambda \subset J$].

(c) Mostre que se $(V_j)_{j\in J}$ é um elemento de $\mathcal{A}$ com $J \neq I$ então $(V_j)_{j\in J}$ não pode ser um elemento maximal de $\mathcal{A}$.

[*dica*: seja $i_0 \in I \setminus J$. Seja $F \subset X$ o complementar do aberto $\big(\bigcup_{j\in J} V_j\big) \cup \big(\bigcup_{i\in I\setminus J'} U_i\big)$, onde $J' = J \cup \{i_0\}$. Como $F^{\mathrm{c}} \cup U_{i_0} = X$, temos $F \subset U_{i_0}$ e pelo resultado do Exercício 1, existe um aberto V_{i_0} com $F \subset V_{i_0}$ e $\overline{V_{i_0}} \subset U_{i_0}$. Verifique que a família $(V_j)_{j\in J'}$ pertence ao conjunto $\mathcal{A}$].

(d) Usando o Lema de Zorn e o resultado dos itens (b) e (c), conclua que existe um elemento $(V_j)_{j\in J}$ em $\mathcal{A}$ tal que $J = I$. Note que $X = \bigcup_{j\in J} V_j$ é um encolhimento de $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.

13. Seja X um espaço topológico Hausdorff e paracompacto. Mostre que toda cobertura aberta de X admite um encolhimento localmente finito, i.e., se $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ é uma cobertura aberta de X então existe uma família localmente finita de abertos $(V_i)_{i\in I}$ em X tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para todo $i \in I$ e tal que $X = \bigcup_{i\in I} V_i$.

[*dica*: pelo resultado do Exercício 6, a cobertura aberta $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ admite um refinamento aberto estrito e localmente finito $X = \bigcup_{i\in I} W_i$. Pelo resultado do Exercício 11, X é normal e portanto, pelo resultado do Exercício 12, a cobertura aberta $X = \bigcup_{i\in I} W_i$ admite um encolhimento $X = \bigcup_{i\in I} V_i$].

Definição. *Sejam X um espaço topológico e $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de X. Uma* partição da unidade subordinada *à cobertura $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ é uma família $(\xi_i)_{i\in I}$ de funções contínuas $\xi_i : X \to [0,1]$ tal que $\operatorname{supp}\xi_i \subset U_i$, para todo $i \in I$, a família $(\operatorname{supp}\xi_i)_{i\in I}$ é localmente finita em X e $\sum_{i\in I} \xi_i(x) = 1$, para todo $x \in X$.*

14. Seja X um espaço topológico Hausdorff. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
    (a) toda cobertura aberta de X admite uma partição da unidade subordinada;
    (b) X é paracompacto.

[*dica*: para mostrar que (a)$\Rightarrow$(b), tome uma cobertura aberta $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ de X e uma partição da unidade $\sum_{i\in I} \xi_i = 1$ subordinada a essa cobertura. Se

$$V_i = \big\{x \in X : \xi_i(x) \neq 0\big\},$$

mostre que $X = \bigcup_{i\in I} V_i$ é um refinamento aberto localmente finito de $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Para mostrar que (b)$\Rightarrow$(a), seja $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de X. Pelo resultado do Exercício 13, essa cobertura aberta admite um encolhimento localmente finito $X = \bigcup_{i\in I} V_i$. Similarmente, a cobertura aberta $X = \bigcup_{i\in I} V_i$ admite um encolhimento localmente finito $X = \bigcup_{i\in I} W_i$. Como X é normal (veja Exercício 11), o Lema de Urisohn nos dá, para cada $i \in I$, uma função contínua $\hat{\xi}_i : X \to [0,1]$ que vale 1 no fechado $\overline{W_i}$ e vale zero no fechado V_i^{c}. Note que $\operatorname{supp}\hat{\xi}_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$, para todo $i \in I$. Tome $\hat{\xi} = \sum_{i\in I} \hat{\xi}_i$ e defina $\xi_i = \hat{\xi}_i/\hat{\xi}$, para todo $i \in I$. Verifique que $\sum_{i\in I} \xi_i = 1$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $X = \bigcup_{i\in I} U_i$].

Definição. *Um espaço topológico X é dito* localmente conexo *se todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças conexas. Mais explicitamente, X é localmente conexo se para todo $x \in X$ e todo aberto $U \subset X$ contendo x existe um subconjunto conexo $V \subset X$ contido em U que contém x em seu interior.*

15. Mostre que se X é um espaço topológico localmente conexo e se $U \subset X$ é um aberto então as componentes conexas de U são abertas em X.

[*dica*: seja C uma componente conexa de U. Dado $x \in C$, se V é uma vizinhança conexa de x contida em U então $V \subset C$].

16. Seja X um espaço topológico localmente conexo. Mostre que todo ponto de X possui um sistema fundamental de vizinhanças *abertas* e conexas, i.e., dado um ponto $x \in X$ e um aberto $U \subset X$ contendo x, existe um *aberto* conexo V em X com $x \in V \subset U$.

[*dica*: pelo resultado do Exercício 15, a componente conexa de U que contém x é um subconjunto aberto e conexo de X].

17. Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas em M. Se M é munido da topologia induzida por $\mathcal{A}$, mostre que M é localmente conexo.

[*dica*: $\mathbb{R}^n$ é localmente conexo e M é localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$].

18. Considere o conjunto:

$$X = \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \bigcup_{n \geq 1} \big(\{\tfrac{1}{n}\} \times \mathbb{R}\big),$$

munido da topologia induzida de $\mathbb{R}^2$. Mostre que X é conexo mas não é localmente conexo.

[*dica*: $U = X \cap \big(\mathbb{R} \times]0, +\infty[\,\big)$ é uma vizinhança do ponto $(0,1)$ em X mas um subconjunto conexo C de X que contenha $(0,1)$ e esteja contido em U estará necessariamente contido na reta $\{0\} \times \mathbb{R}$, que tem interior vazio em X].

19. Seja X um espaço topológico. Mostre que:

(a) se $C \subset X$ é conexo e D é tal que $C \subset D \subset \overline{C}$ então D é conexo.

[*dica*: se A é aberto e fechado em D e $A \neq \emptyset$ então $A \cap C$ é aberto e fechado em C. Como C é denso em D, $A \cap C \neq \emptyset$ e como C é conexo, $A \cap C = C$. Usando novamente o fato que C é denso em D, concluímos que $A = D$, já que A é fechado em D e A contém C].

(b) As componentes conexas de X são fechadas em X.

[*dica*: se C é uma componente conexa de X então o resultado do item (a) implica que $\overline{C}$ é conexo; logo $\overline{C} \subset C$].

`Cálculo I.`

20. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $a \in I$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e derivável em $I \setminus \{a\}$. Suponha que o limite $\lim_{t \to a} f'(t)$ existe. Mostre que f é derivável no ponto a e que $f'(a) = \lim_{t \to a} f'(t)$.

[*dica*: pelo Teorema do Valor Médio $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(c_t)$, para todo $t \in I \setminus \{a\}$, onde c_t é um ponto de I entre t e a].

21. Considere a aplicação $\alpha : I\!R \to I\!R$ definida por $\alpha(t) = e^{-\frac{1}{t}}$, para todo $t > 0$ e $\alpha(t) = 0$ para todo $t \leq 0$.

   (a) Mostre que para todo $k \geq 1$ existem funções polinomiais $P_k, Q_k : I\!R \to I\!R$ tais que $\alpha^{(k)}(t) = \frac{P_k(t)}{Q_k(t)}\alpha(t)$, para todo $t > 0$, onde $\alpha^{(k)}$ denota a k-ésima derivada da função α.

[*dica*: use indução em k].

   (b) Mostre que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ e que $\lim_{t\to 0} \alpha^{(k)}(t) = 0$, para todo $k \geq 1$.

   (c) Mostre que α é uma aplicação de classe C^∞ e que $\alpha^{(k)}(0) = 0$, para todo $k \geq 1$.

[*dica*: use indução em k, o resultado do item (b) e o resultado do Exercício 20].

`Cálculo em variedades.`

22. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k. Considere o espaço vetorial real $\mathfrak{F}(M, I\!R^p)$ de todas as aplicações $f : M \to I\!R^p$, munido das operações usuais, i.e., $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(cf)(x) = cf(x)$, para todos $x \in M$, $c \in I\!R$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M, I\!R^p)$.

   (a) Mostre que o conjunto das aplicações $f : M \to I\!R^p$ de classe C^k é um subespaço vetorial de $\mathfrak{F}(M, I\!R^p)$.

[*dica*: se $f, g : M \to I\!R^p$ são de classe C^k então a aplicação $(f, g) : M \to I\!R^p \times I\!R^p$ é de classe C^k e a função soma $I\!R^p \times I\!R^p \ni (v, w) \mapsto v + w \in I\!R^p$ é de classe C^∞. Além do mais, para todo $c \in I\!R$ a função $I\!R^p \ni v \mapsto cv \in I\!R^p$ é de classe C^∞].

   (b) Definimos um produto no espaço vetorial $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ fazendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todos $f, g \in \mathfrak{F}(M, I\!R)$ e todo $x \in M$. Daí $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ é uma *álgebra comutativa com unidade*. Mostre que o subespaço de $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ formado pelas aplicações de classe C^k é uma *subálgebra* de $\mathfrak{F}(M, I\!R)$, i.e., mostre que o produto de aplicações de classe C^k é de classe C^k.

[*dica*: se $f, g : M \to I\!R$ são de classe C^k então a aplicação $(f, g) : M \to I\!R \times I\!R$ é de classe C^k e a função produto $I\!R \times I\!R \ni (a, b) \mapsto ab \in I\!R$ é de classe C^∞].

23. Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) e $f : M \to N$ uma imersão injetora de classe C^k. Mostre que se M é compacta então f é um mergulho.

[*dica*: use o resultado do Exercício 4].

`Topologia de variedades.`

24. Mostre que toda variedade diferenciável é hereditariamente paracompacta.

[*dica*: use o resultado do Exercício 8 e o fato que toda variedade diferenciável é paracompacta].

25. Mostre que toda variedade diferenciável é superparacompacta.

[*dica*: use o resultado do item (b) do Exercício 7 e o resultado do Exercício 8 da aula número 11].

Aula número 22 (31/10)

A aula número 22 cobriu parte do material originalmente destinado à aula número 21.

Aula número 23 (05/11)

(1) **Identificando vetores tangentes com operadores de derivada direcional**.

Seja M um conjunto e seja $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ o conjunto de todas as aplicações $f : M \to I\!R$. Podemos definir de modo natural em $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ operações de soma, produto e produto por escalar real de modo que $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ torna-se uma álgebra comutativa com unidade (veja Exercícios 2, 3 e as Definições que os precedem). Se M é uma variedade diferenciável de classe C^k então o conjunto $C^k(M)$ de todas as aplicações $f : M \to I\!R$ de classe C^k é uma subálgebra de $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ (veja Exercício 22 da aula número 21) que contém a unidade de $\mathfrak{F}(M, I\!R)$ (i.e., a função constante e igual a 1). Logo $C^k(M)$ é também uma álgebra comutativa com unidade.

`Notação`: se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, Z é um espaço vetorial real de dimensão finita, $f : M \to Z$ é uma função de classe C^k, $x \in M$ é um ponto $v \in T_xM$ é um vetor tangente, denotamos a derivada direcional de f na direção de v por $v(f) \in Z$; em símbolos:

$$v(f) = \mathrm{d}f(x) \cdot v \in Z.$$

Segue do resultado dos itens (a) e (b) do Exercício que:

$$v(f + g) = v(f) + v(g), \quad v(cf) = cv(f),$$

para quaisquer aplicações $f : M \to Z$, $g : M \to Z$ de classe C^k e quaisquer $x \in M$, $v \in T_xM$, $c \in I\!R$. Em particular, a aplicação $\hat{v}$ definida por:

$$\hat{v} : C^k(M) \ni f \longmapsto v(f) \in I\!R$$

é linear, i.e., $\hat{v}$ é um elemento do espaço dual $C^k(M)^*$. Temos também a seguinte identidade, que segue do resultado do item (d) do Exercício :

$$v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g), \qquad (*)$$

para todos $f, g \in C^k(M)$.

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$. Um funcional linear $\lambda \in C^k(M)^*$ é dito* derivativo no ponto $x \in M$ *se para todas $f, g \in C^k(M)$ temos:*

$$\lambda(fg) = \lambda(f)g(x) + f(x)\lambda(g).$$

A identidade $(*)$ nos diz então que, para $v \in T_xM$, o funcional linear $\hat{v} \in C^k(M)^*$ é derivativo no ponto $x \in M$.

Denotamos por $\mathrm{Der}_x\big(C^k(M)\big)$ o conjunto de todos os funcionais lineares derivativos no ponto x em $C^k(M)$. É fácil ver que $\mathrm{Der}_x\big(C^k(M)\big)$ é um subespaço vetorial de $C^k(M)^*$ (veja Exercício). Considere a aplicação:

$$\rho_x : T_xM \ni v \longmapsto \hat{v} \in \mathrm{Der}_x\big(C^k(M)\big) \subset C^k(M)^*.$$

Segue diretamente da linearidade de $\mathrm{d}f(x)$ que ρ_x é uma aplicação linear (veja Exercício). Temos também o seguinte:

Lema. *A aplicação ρ_x é injetora, i.e., se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, $x \in M$ é um ponto e $v, w \in T_xM$ são vetores tangentes tais que $v(f) = v(g)$ para quaisquer aplicações $f : M \to I\!R$, $g : M \to I\!R$ de classe C^k então $v = w$.*

Demonstração. Seja $v \in T_xM$. Basta mostrar que $v(f) = 0$ para toda $f \in C^k(M)$ implica $v = 0$. Segue do Corolário do Lema de Tietze C^k (veja seção 1 da aula número 21) que para todo funcional linear $\alpha \in T_xM^*$ existe uma aplicação $f \in C^k(M)$ tal que $\mathrm{d}f(x) = \alpha$. Logo a condição $v(f) = \mathrm{d}f(x) \cdot v = 0$ para toda $f \in C^k(M)$ implica $\alpha(v) = 0$ para todo $\alpha \in T_xM^*$. Mas isso obviamente implica que $v = 0$. ■

Nosso objetivo agora é provar que quando $k = \infty$ a aplicação ρ_x é também sobrejetora. Para isso, precisamos de alguns lemas preparatórios.

Começamos mostrando que funcionais lineares derivativos são locais.

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e seja $x \in M$ um ponto. Todo funcional linear $\lambda \in \mathrm{Der}_x\big(C^k(M)\big)$ derivativo em x é* local, *i.e., dadas funções $f, g \in C^k(M)$, se f é igual a g em alguma vizinhança de x então $\lambda(f) = \lambda(g)$.*

Demonstração. A função $f - g$ é nula numa vizinhança de x e $\lambda(f - g) = \lambda(f) - \lambda(g)$. É suficiente mostrar então que se $h \in C^k(M)$ é nula numa vizinhança de x então $\lambda(h) = 0$. Seja $U \subset M$ um aberto contendo x onde h é nula. Pelo Lema de Urisohn C^k (veja seção 1 da aula número 21) existe uma função $\xi \in C^k(M)$ tal que $\xi(x) = 1$ e $\xi(y) = 0$ para todo $y \in U^{\mathrm{c}}$. Obviamente $h\xi$ é a função identicamente nula em M e portanto $\lambda(h\xi) = 0$, já que λ é linear. Temos então:

$$0 = \lambda(h\xi) = \lambda(h)\xi(x) + h(x)\lambda(\xi) = \lambda(h). \ ■$$

Recorde que um subconjunto $U \subset I\!R^n$ é dito *estrelado* num ponto $\bar{x} \in U$ se para todo $x \in U$ o segmento de reta com extremos $\bar{x}$ e x está contido em U, i.e., se $(1-t)\bar{x} + tx \in U$, para todo $t \in [0,1]$ e todo $x \in U$. Um subconjunto $U \subset I\!R^n$ é dito *convexo* se U é estrelado em todos os seus pontos, i.e., se todo segmento com extremos em U está contido em U.

No Lema abaixo, se $k = \infty$, convencionamos que também $k - 1 = \infty$.

Lema. *Seja $f : U \to I\!R^p$ uma função de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num subconjunto aberto $U \subset I\!R^n$. Suponha que U é estrelado num ponto $\bar{x} \in U$. Então existem funções $g_i : U \to I\!R^p$, $i = 1, \ldots, n$, de classe C^{k-1}, tais que:*

(a) $f(x) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n g_i(x)\big(x_i - \bar{x}_i\big)$, *para todo* $x \in U$*;*

(b) $g_i(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Fixado $x \in U$, considere a curva $\gamma : [0,1] \to I\!R^n$ definida por:

$$\gamma(t) = f\big((1-t)\bar{x} + tx\big),$$

para todo $t \in [0,1]$. Como U é estrelado em $\bar{x}$, segue que γ é bem definida e de classe C^k. Temos:

$$\gamma'(t) = \mathrm{d}f\big((1-t)\bar{x} + tx\big) \cdot (x - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\big((1-t)\bar{x} + tx\big)(x_i - \bar{x}_i),$$

para todo $t \in [0,1]$. Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$f(x) = \gamma(1) = \gamma(0) + \int_0^1 \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big((1-t)\bar{x} + tx\big)(x_i - \bar{x}_i)\,\mathrm{d}t.$$

Definimos então:

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big((1-t)\bar{x} + tx\big)\,\mathrm{d}t,$$

para $i = 1, \ldots, n$. As propriedades (a) e (b) são obviamente satisfeitas. O fato que as funções g_i são de classe C^{k-1} segue do resultado do Exercício . ■

Mostramos agora que, em abertos de $I\!R^n$, todo funcional linear derivativo é uma derivada direcional.

Lema. *Seja $U \subset I\!R^n$ um aberto e suponha que U seja estrelado num ponto $\bar{x} \in U$. Seja $\lambda \in \mathrm{Der}_{\bar{x}}\big(C^\infty(U)\big)$ um funcional linear derivativo no ponto $\bar{x}$. Então existe $v \in I\!R^n$ tal que:*

$$\lambda(f) = \mathrm{d}f(\bar{x}) \cdot v,$$

para toda $f \in C^\infty(U)$.

Demonstração. Para $i = 1, \ldots, n$, denote por $\pi_i \in C^\infty(U)$ a restrição a U da i-ésima projeção de $I\!R^n$. Definimos $v = (v_1, \ldots, v_n) \in I\!R^n$ fazendo:

$$v_i = \lambda(\pi_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Seja $f \in C^\infty(U)$ e vamos mostrar que $\lambda(f) = \mathrm{d}f(\bar{x}) \cdot v$. Pelo Lema anterior, existem funções $g_i \in C^\infty(U)$ tais que $g_i(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$ e:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - \bar{x}_i),$$

para todo $x \in U$. Denotando por $\mathfrak{c} : U \to I\!R$ a função constante e igual a 1 então a igualdade acima pode ser reescrita como uma igualdade de elementos de $C^\infty(U)$:

$$f = f(\bar{x})\mathfrak{c} + \sum_{i=1}^{n} g_i(\pi_i - \bar{x}_i\mathfrak{c}).$$

Aplicando λ a ambos os lados da igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= f(\bar{x})\lambda(\mathfrak{c}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda\big(g_i(\pi_i - \bar{x}_i\mathfrak{c})\big)\\ &= f(\bar{x})\lambda(\mathfrak{c}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda(g_i)(\pi_i - \bar{x}_i\mathfrak{c})(\bar{x}) + g_i(\bar{x})\big(\lambda(\pi_i) - \bar{x}_i\lambda(\mathfrak{c})\big).\end{aligned}$$

A função $\pi_i - \bar{x}_i\mathfrak{c}$ obviamente anula-se no ponto $\bar{x}$; mostraremos logo a seguir que $\lambda(\mathfrak{c}) = 0$. Admitindo esse fato por um momento, obtemos:

$$\lambda(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\bar{x})\lambda(\pi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})v_i = \mathrm{d}f(\bar{x}) \cdot v.$$

Para completar a demonstração, verificamos que $\lambda(\mathfrak{c}) = 0$. Para isso, basta notar que $\mathfrak{c}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ e portanto:

$$\lambda(\mathfrak{c}) = \lambda(\mathfrak{c})\mathfrak{c}(\bar{x}) + \mathfrak{c}(\bar{x})\lambda(\mathfrak{c}) = 2\lambda(\mathfrak{c}). \blacksquare$$

Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^∞ e seja $x \in M$ um ponto. A aplicação:*

$$\rho_x : T_xM \ni v \longmapsto \hat{v} \in \mathrm{Der}_x\big(C^\infty(M)\big)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Já vimos que ρ_x é uma aplicação linear injetora. Basta mostrar então que ρ_x é sobrejetora. Seja dado $\lambda \in \mathrm{Der}_x\big(C^\infty(M)\big)$ e vamos mostrar que existe $v \in T_xM$ tal que $\lambda = \hat{v}$. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta em M com $x \in U$ e tal que $\widetilde{U}$ é um aberto convexo. Seja $\xi : M \to I\!R$ uma função de classe C^∞ que vale 1 numa vizinhança de x e que tem suporte contido em U (veja Exercício). Se $f : U \to I\!R$ é uma função de classe C^∞ então a função $\bar{f} : M \to I\!R$ definida por:

$$\bar{f}(y) = \begin{cases} f(x)\xi(x), & x \in U,\\ 0, & x \notin U,\end{cases}$$

é de classe C^∞; de fato, os conjuntos U e $(\operatorname{supp}\xi)^{\mathrm{c}}$ constituem uma cobertura aberta de M e a restrição de $\bar{f}$ a ambos esses abertos é de classe C^∞. Definindo $\mathfrak{e}(f) = \bar{f}$ obtemos então uma aplicação:

$$\mathfrak{e} : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(M);$$

é fácil ver que $\mathfrak{e}$ é uma aplicação linear. A aplicação $\mathfrak{e}$ não é um homomorfismo de álgebras, mas se $f, g \in C^\infty(U)$ então as funções $\mathfrak{e}(fg)$ e $\mathfrak{e}(f)\mathfrak{e}(g)$ são iguais numa vizinhança de x (a saber: na vizinhança de x onde ξ vale 1). Pelo resultado do Exercício , a aplicação $\varphi : U \to \widetilde{U}$ induz um homomorfismo de álgebras $\varphi^* : C^\infty(\widetilde{U}) \to C^\infty(U)$ definido por:

$$\varphi^*(\tilde{f}) = \tilde{f} \circ \varphi, \quad \tilde{f} \in C^\infty(\widetilde{U}).$$

Definimos agora um funcional linear $\bar{\lambda} : C^\infty(\widetilde{U}) \to I\!\!R$ fazendo:

$$\bar{\lambda} = \lambda \circ \mathfrak{e} \circ \varphi^*.$$

Afirmamos que $\bar{\lambda} \in C^\infty(\widetilde{U})^*$ é derivativo no ponto $\bar{x} = \varphi(x)$. De fato, sejam $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(\widetilde{U})$ e defina $f = \mathfrak{e}\big(\varphi^*(\tilde{f})\big)$, $g = \mathfrak{e}\big(\varphi^*(\tilde{g})\big)$. As aplicações fg e $\mathfrak{e}\big(\varphi^*(\tilde{f}\tilde{g})\big)$ são iguais numa vizinhança de x e portanto, pelo Lema anterior, temos:

$$\lambda(fg) = \lambda\big[\mathfrak{e}\big(\varphi^*(\tilde{f}\tilde{g})\big)\big] = \bar{\lambda}(\tilde{f}\tilde{g});$$

temos também $\lambda(f) = \bar{\lambda}(\tilde{f})$, $\lambda(g) = \bar{\lambda}(\tilde{g})$ e portanto:

$$\bar{\lambda}(\tilde{f}\tilde{g}) = \lambda(fg) = \lambda(f)g(x) + f(x)\lambda(g) = \bar{\lambda}(\tilde{f})\tilde{g}(\bar{x}) + \tilde{f}(\bar{x})\bar{\lambda}(\tilde{g}).$$

Isso mostra que $\bar{\lambda}$ é derivativo no ponto $\bar{x}$ e portanto existe $\tilde{v} \in I\!\!R^n$ tal que:

$$\bar{\lambda}(\tilde{f}) = \mathrm{d}\tilde{f}(\bar{x}) \cdot \tilde{v},$$

para toda $\tilde{f} \in C^\infty(\widetilde{U})$. Seja $v = \mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot \tilde{v} \in T_xM$. Vamos mostrar que $\lambda = \hat{v}$. De fato, seja $f \in C^\infty(M)$ e defina $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\widetilde{U})$. As funções f e $\mathfrak{e}\big(\varphi^*(\tilde{f})\big)$ coincidem numa vizinhança de x e portanto:

$$\lambda(f) = \lambda\big[\mathfrak{e}\big(\varphi^*(\tilde{f})\big)\big] = \bar{\lambda}(\tilde{f}) = \mathrm{d}\tilde{f}(\bar{x}) \cdot \tilde{v} = \mathrm{d}f(x)\big(\mathrm{d}\varphi(x)^{-1} \cdot \tilde{v}\big) = \mathrm{d}f(x) \cdot v = v(f).$$

Isso completa a demonstração. ■

(2) **Derivações da álgebra das funções e colchetes de Lie**.

`Notação`: se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$, Z é um espaço vetorial real de dimensão finita, $X : M \to TM$ é um campo vetorial e $f : M \to Z$ é uma função de classe C^k então denotamos por $X(f) : M \to Z$ a função definida por:

$$X(f)(x) = \big(X(x)\big)(f) = \mathrm{d}f(x) \cdot X(x),$$

para todo $x \in M$.

É fácil ver que se X é um campo vetorial de classe C^{k-1} então a função $X(f)$ é de classe C^{k-1} (veja Exercício). A seguir, demonstramos uma recíproca para essa afirmação.

Lema. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e $X : M \to TM$ um campo vetorial em M. Se $X(f) \in C^{k-1}(M)$ para toda $f \in C^k(M)$ então X é de classe C^{k-1}.*

Demonstração. Seja $x \in M$ um ponto. Vamos mostrar que a restrição de X a uma vizinhança aberta de x é de classe C^{k-1}. Seja $\varphi : U \to \widetilde{U} \subset I\!R^n$ uma carta em M com $x \in U$. Como M é regular (veja seção 2 da aula número 21), existe um aberto V em M com $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ (veja Exercício 2 da aula número 11). Pelo Lema de Tietze C^k (veja seção 1 da aula número 21), existe uma função $\phi : M \to I\!R^n$ de classe C^k tal que $\phi|_{\overline{V}} = \varphi|_{\overline{V}}$. Para $i = 1, \ldots, n$, denote por $\phi_i : M \to I\!R$ a i-ésima função coordenada de ϕ. Daí $\phi_i \in C^k(M)$ e portanto $X(\phi_i) \in C^{k-1}(M)$. Como as funções φ e ϕ coincidem no aberto V, temos que $\mathrm{d}\phi(y) = \mathrm{d}\varphi(y)$ para todo $y \in V$; logo:

$$\mathrm{d}\varphi(y) \cdot X(y) = \mathrm{d}\phi(y) \cdot X(y) = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathrm{d}\phi_i(y) \cdot X(y)\big)e_i = \sum_{i=1}^{n} \big(X(\phi_i)(y)\big)e_i,$$

para todo $y \in V$, onde $(e_i)_{i=1}^n$ denota a base canônica de $I\!R^n$. Mostramos então que a função $V \ni y \mapsto \mathrm{d}\varphi(y) \cdot X(y)$ é de classe C^{k-1}; mas se $T\varphi$ denota a carta em TM associada a φ temos:

$$T\varphi\big(X(y)\big) = \big(\varphi(y), \mathrm{d}\varphi(y) \cdot X(y)\big),$$

para todo $y \in U$ e portanto $X|_V : V \to TM$ é de classe C^{k-1}. ∎

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \le k \le \infty)$ e denote por $\mathfrak{X}_{k-1}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^{k-1} em M. Temos que o conjunto de todos os campos vetoriais em M possui uma estrutura natural de espaço vetorial real; além do mais, $\mathfrak{X}_{k-1}(M)$ é um subespaço do espaço de todos os campos vetoriais em M (veja Exercício 5 da aula número 15). A cada $X \in \mathfrak{X}_{k-1}(M)$, temos que a aplicação:

$$\widehat{X} : C^k(M) \ni f \longmapsto X(f) \in C^{k-1}(M)$$

é linear; de fato, isso segue facilmente do resultado dos itens (a) e (b) do Exercício . O resultado do item (c) do Exercício implica que aplicação linear $\widehat{X}$ satisfaz também a seguinte identidade:

$$\widehat{X}(fg) = \widehat{X}(f)g + f\widehat{X}(g),$$

para quaisquer $f, g \in C^k(M)$. Temos a seguinte:

Definição. *Seja A uma álgebra. Uma* derivação *de A é uma aplicação linear $T : A \to A$ tal que:*

$$T(xy) = T(x)y + xT(y),$$

para quaisquer $x, y \in A$. Denotamos por $\mathrm{Der}(A)$ *o conjunto de todas as derivações de A.*

Temos que $\mathrm{Der}(A)$ é um subespaço vetorial do espaço $\mathrm{Lin}(A)$ de todas as aplicações lineares $T : A \to A$ (veja Exercício).

Observe que se X é um campo vetorial de classe C^∞ numa variedade diferenciável M de classe C^∞ então a aplicação $\widehat{X}$ é uma derivação da álgebra $C^\infty(M)$.

Se M é uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$, segue facilmente da linearidade da diferencial de funções que a aplicação:

$$\mathfrak{X}_{k-1}(M) \ni X \longmapsto \widehat{X} \in \mathrm{Lin}\big(C^k(M), C^{k-1}(M)\big)$$

é linear, onde $\mathrm{Lin}\big(C^k(M), C^{k-1}(M)\big)$ denota o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $T : C^k(M) \to C^{k-1}(M)$. Em particular, se $k = \infty$, obtemos uma aplicação linear:

$$\rho : \mathfrak{X}_\infty(M) \ni X \longmapsto \widehat{X} \in \mathrm{Der}\big(C^\infty(M)\big) \subset \mathrm{Lin}\big(C^\infty(M)\big).$$

Nosso objetivo é mostrar que a aplicação ρ é um isomorfismo; começamos com o seguinte:

Lema. *Sejam M uma variedade diferenciável de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ e $X : M \to TM$, $Y : M \to TM$ campos vetoriais de classe C^{k-1}. Se $X(f) = Y(f)$ para toda $f \in C^k(M)$ então $X = Y$.*

Demonstração. Seja $x \in M$ e escreva $v = X(x)$, $w = Y(x)$. Temos que:

$$v(f) = X(f)(x) = Y(f)(x) = w(f),$$

para toda $f \in C^k(M)$. Da injetividade da aplicação ρ_x prova num Lema da seção 1 concluímos que $v = w$, i.e., $X(x) = Y(x)$. ■

Corolário. *A aplicação $\rho : \mathfrak{X}_\infty(M) \to \mathrm{Der}\big(C^\infty(M)\big)$ é injetora.* ■

Teorema. *Se M é uma variedade diferenciável de classe C^∞ então a aplicação:*

$$\rho : \mathfrak{X}_\infty(M) \longrightarrow \mathrm{Der}\big(C^\infty(M)\big)$$

é um isomorfismo linear.

Demonstração. Já estabalecemos que ρ é uma aplicação linear injetora. Seja então D uma derivação de $C^\infty(M)$ e mostremos que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\widehat{X} = D$. Para cada $x \in M$, o funcional linear $\lambda_x \in C^\infty(M)^*$ definido por:

$$\lambda_x(f) = D(f)(x) \in \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(M),$$

é derivativo no ponto x. Pelo que foi visto na seção 1, existe um vetor $v_x \in T_xM$ tal que $\widehat{v_x} = \lambda_x$. Definindo $X(x) = v_x$ para todo $x \in M$ obtemos então um campo vetorial X em M tal que $X(f) = D(f)$, para toda $f \in C^\infty(M)$. Pelo que foi provado acima, o fato que $X(f) \in C^\infty(M)$ para toda $f \in C^\infty(M)$ implica que X é de classe C^∞. Logo $X \in \mathfrak{X}_\infty(M)$ e $\widehat{X} = D$. ■

Lema. *Seja A uma álgebra. Se $T : A \to A$, $S : A \to A$ são derivações de A então o comutador $[T, S] = T \circ S - S \circ T$ é uma derivação de A.*

Demonstração. Obviamente $[T, S] : A \to A$ é uma aplicação linear. Dados $x, y \in A$, temos:

$$(T \circ S)(xy) = (T \circ S)(x)y + S(x)T(y) + T(x)S(y) + x(T \circ S)(y),$$
$$(S \circ T)(xy) = (S \circ T)(x)y + T(x)S(y) + S(x)T(y) + x(S \circ T)(y).$$

A conclusão é obtida subtraindo as duas identidades acima. ■

O Lema acima nos diz que o comutador de operadores lineares definidos numa álgebra restringe-se a uma operação binária bem definida no espaço das derivações dessa álgebra; em particular, podemos usar o isomorfismo ρ para transferir o comutador de $\mathrm{Der}\big(C^\infty(M)\big)$ para $\mathfrak{X}_\infty(M)$. Mais precisamente, temos a seguinte:

Definição. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^∞ e sejam $X, Y \in \mathfrak{X}_\infty(M)$ campos vetoriais de classe C^∞ em M. O* colchete de Lie *de X e Y é o única campo vetorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}_\infty(M)$ que corresponde pelo isomorfismo ρ à derivação $[\rho(X), \rho(Y)]$ da álgebra $C^\infty(M)$, ou seja:*

$$\rho\big([X, Y]\big) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X).$$

De modo mais explícito, o campo vetorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}_\infty(M)$ é caracterizado pela seguinte propriedade:

$$[X, Y](f) = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big),$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

Lema. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \le k \le \infty$) e sejam $X : M \to TM$, $Y : M \to TM$ campos vetoriais de classe C^{k-1}. Então existe um única campo vetorial $Z : M \to TM$ tal que:*

$$Z(f) = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big),$$

para toda $f \in C^k(M)$. Além do mais, o campo vetorial Z é de classe C^{k-2}.

Demonstração. Para mostrar a unicidade de Z, observe que se Z_1, Z_2 são campos vetoriais em M satisfazendo a propriedade que aparece no enunciado do Lema então teremos $Z_1(f) = Z_2(f)$ para toda $f \in C^k(M)$. Por um Lema provado acima, isso implica $Z_1 = Z_2$. O fato que o campo vetorial Z é de classe C^{k-2} (assumindo por um momento a sua existência) segue também de um Lema provado acima, levando em conta que $Z(f) \in C^{k-2}(M)$, para toda $f \in C^{k-1}(M)$.

A prova da existência de Z é dividida em três passos.

Passo 1. *O Lema é verdadeiro se M é um aberto de $\mathbb{R}^n$*;

de fato, defina $Z : M \to \mathbb{R}^n$ fazendo:

$$Z(x) = \mathrm{d}Y(x) \cdot X(x) - \mathrm{d}X(x) \cdot Y(x),$$

para todo $x \in M$. Seja $f \in C^k(M)$. Temos (veja Exercício):

$$X\big(Y(f)\big)(x) = \mathrm{d}\big(Y(f)\big)(x) \cdot X(x) = \mathrm{d}^{(2)} f(x)\big(X(x), Y(x)\big) + \mathrm{d}f(x) \cdot \big(\mathrm{d}Y(x) \cdot X(x)\big),$$

para todo $x \in M$. Similarmente:

$$Y\big(X(f)\big)(x) = \mathrm{d}\big(X(f)\big)(x) \cdot Y(x) = \mathrm{d}^{(2)} f(x)\big(Y(x), X(x)\big) + \mathrm{d}f(x) \cdot \big(\mathrm{d}X(x) \cdot Y(x)\big),$$

para todo $x \in M$. Subtraindo as duas identidades acima e levando em conta que $\mathrm{d}^{(2)} f(x)$ é uma aplicação bilinear simétrica, obtemos:

$$X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) = \mathrm{d}f(x) \cdot \big(\mathrm{d}Y(x) \cdot X(x) - \mathrm{d}X(x) \cdot Y(x)\big) = Z(f)(x),$$

para todo $x \in M$. Logo o campo Z satisfaz a propriedade desejada.

Passo 2. *Se M, N são variedades diferenciáveis de classe C^k ($2 \leq k \leq \infty$), $h : M \to N$ é um difeomorfismo de classe C^k e o Lema é verdadeiro para M então o Lema também é verdadeiro para N*;

Passo 3. *Se M é uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \leq k \leq \infty$) e se $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ é uma cobertura aberta de M tal que o Lema é verdadeiro para cada variedade U_i então o Lema é verdadeiro para M*;

para cada $i \in I$, considere as restrições $X_i = X|_{U_i}$, $Y_i = Y|_{U_i} \in \mathfrak{X}_{k-1}(U_i)$. Como o Lema é verdadeiro para a variedade U_i, existe um campo vetorial Z_i em U_i tal que:

$$Z_i(f) = X_i\big(Y_i(f)\big) - Y_i\big(X_i(f)\big),$$

para toda $f \in C^k(U_i)$. Afirmamos que para $i, j \in J$ os campos Z_i e Z_j coincidem em $U_i \cap U_j$.

Passo 3. *O Lema vale em geral*;

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k ($2 \leq k \leq \infty$). Existe uma cobertura aberta $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ de M onde cada U_i é domínio de uma carta $\varphi_i : U_i \to \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$. Daí φ_i é um difeomorfismo de classe C^k e, pelos passos 1 e 2, temos que o Lema é verdadeiro para a variedade U_i. Logo o Lema é verdadeiro para a variedade M, pelo passo 3. ■

Exercícios.

(não é para entregar, mas é bom dar uma olhada e quem tiver problemas me procura).

`Álgebra`.

Definição. *Seja K um corpo. Uma* álgebra sobre K *é um espaço vetorial A sobre K munido de uma operação bilinear $A \times A \ni (x, y) \mapsto xy \in A$; essa operação é chamada a* multiplicação *da álgebra A. Se $x, y \in A$ então dizemos que xy é o* produto *de x por y. Dizemos que a álgebra A é* associativa *se sua multiplicação é associativa, i.e., se $(xy)z = x(yz)$, para todos $x, y, z \in A$. Dizemos que A é uma* álgebra com unidade *se existe $e \in A$ tal que $xe = ex = x$, para todo $x \in A$. Dizemos que A é uma* álgebra comutativa *se A é uma álgebra associativa e se a multiplicação de A é comutativa, i.e., se $xy = yx$, para todos $x, y \in A$.*

Definição. *Sejam K um corpo e A uma álgebra sobre K. Uma* subálgebra *de A é um subespaço vetorial $B \subset A$ tal que $xy \in B$, para todos $x, y \in B$.*

Definição. *Sejam K um corpo e A, A' álgebras sobre K. Uma aplicação $h : A \to A'$ é dita um* homomorfismo de álgebras *de h é linear e se $h(xy) = h(x)h(y)$, para todos $x, y \in A$.*

1. Mostre que se A é uma álgebra com unidade então existe apenas um elemento $e \in A$ tal que $xe = ex = x$, para todo $x \in A$.

[*dica*: se $e, e' \in A$ tem essa propriedade, considere o produto ee'].

2. Mostre que se K é um corpo então K é uma álgebra sobre K.
3. Sejam K um corpo, A uma álgebra sobre K e X um conjunto. Denote por $\mathfrak{F}(X, A)$ o conjuntos de todas as funções $f : X \to A$. Defina em $\mathfrak{F}(X, A)$ as operações:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

para todos $x \in X$, $f, g \in \mathfrak{F}(X, A)$ e $c \in K$. Mostre que:

(a) $\mathfrak{F}(X, A)$ é uma álgebra sobre K;

(b) se A é uma álgebra associativa então $\mathfrak{F}(X, A)$ é uma álgebra associativa;

(c) se A é uma álgebra com unidade então $\mathfrak{F}(X, A)$ é uma álgebra com unidade;

[*dica*: se e é a unidade de A então a função constante e igual a e é a unidade de $\mathfrak{F}(X, A)$].

(d) se A é uma álgebra comutativa então $\mathfrak{F}(X, A)$ é uma álgebra comutativa.

`Cálculo em variedades`.

. Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k.

(a) Se Z é um espaço vetorial real de dimensão finita e se $f : M \to Z$, $g : M \to Z$ são aplicações de classe C^k, mostre que $f + g : M \to Z$ é uma aplicação de classe C^k. Se $k \geq 1$, mostre que:

$$\mathrm{d}(f + g)(x) \cdot v = \mathrm{d}f(x) \cdot v + \mathrm{d}g(x) \cdot v,$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$.

[*dica*: temos $f + g = s \circ (f, g)$, onde $(f, g) : M \to Z \times Z$ é a aplicação cujas coordenadas são f e g e $s : Z \times Z \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 \in Z$ é a aplicação soma. Temos que (f, g) é de classe C^k e, se $k \geq 1$, $\mathrm{d}(f, g)(x) \cdot v = \big(\mathrm{d}f(x) \cdot v, \mathrm{d}g(x) \cdot v\big)$ (veja seção 3 da aula número 7). Note também que a aplicação s é linear e portanto s é de classe C^∞ e $\mathrm{d}s(z_1, z_2) = s$, para todos $z_1, z_2 \in Z$].

(b) Se Z é um espaço vetorial real de dimensão finita, $f : M \to Z$ é uma aplicação de classe C^k e $c \in I\!R$ é um escalar, mostre que $cf : M \to Z$ é uma aplicação de classe C^k. Além do mais, se $k \geq 1$, mostre que:

$$\mathrm{d}(cf)(x) \cdot v = c\big(\mathrm{d}f(x) \cdot v\big),$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$.

[*dica*: note que cf é igual à composta de f com a aplicação linear $Z \ni z \mapsto cz \in Z$].

(c) Se Z_1, Z_2, Z_3 são espaços vetoriais reais de dimensão finita, $B : Z_1 \times Z_2 \to Z_3$ é uma aplicação bilinear e $f : M \to Z_1$, $g : M \to Z_2$ são aplicações de classe C^k, mostre que a aplicação $B \circ (f, g) : M \to Z_3$ é de classe C^k e, se $k \geq 1$, sua diferencial é dada por:

$$\mathrm{d}\big(B \circ (f, g)\big)(x) \cdot v = B\big(\mathrm{d}f(x) \cdot v, g(x)\big) + B\big(f(x), \mathrm{d}g(x) \cdot v\big),$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$.

[*dica*: B é de classe C^∞ e sua diferencial é dada por:

$$\mathrm{d}B(z_1, z_2) \cdot (t_1, t_2) = B(t_1, z_2) + B(z_1, t_2),$$

para todos $z_1, t_1 \in V_1$, $z_2, t_2 \in V_2$].

(d) Se A é uma álgebra real de dimensão finita (por exemplo, se $A = I\!R$ ou $A = \mathbb{C}$) e se $f : M \to A$, $g : M \to A$ são aplicações de classe C^k, mostre que $fg : M \to A$ é uma aplicação de classe C^k. Se $k \geq 1$, mostre que a diferencial de fg é dada por:

$$\mathrm{d}(fg)(x) \cdot v = \big(\mathrm{d}f(x) \cdot v\big)g(x) + f(x)\big(\mathrm{d}g(x) \cdot v\big),$$

para todos $x \in M$, $v \in T_xM$.

[*dica*: use o resultado do item (c)].