1. Topologia da Ordem

Seja X um conjunto totalmente ordenado, i.e., X está munido de uma relação binária $\le$ que é reflexiva, anti-simétrica, transitiva e *total* (i.e., para todos $x, y \in X$, temos $x \le y$ ou $y \le x$). Para $x, y \in X$, escrevemos $x < y$ quando $x \le y$ e $x \ne y$. Escrevemos também $x \ge y$ quando $y \le x$ e $x > y$ quando $y < x$. Dados $a, b \in X$, definimos:

$$\left]a, +\infty\right[= \big\{x \in X : x > a\big\}, \quad \left]-\infty, b\right[= \big\{x \in X : x < b\big\},$$
$$\left]a, b\right[= \left]a, +\infty\right[\cap \left]-\infty, b\right[= \big\{x \in X : a < x \text{ e } x < b\big\}.$$

Escreveremos $\left]a, +\infty\right[^X$, $\left]-\infty, b\right[^X$ e $\left]a, b\right[^X$ quando for necessário explicitar a dependência desses objetos em relação a X. É fácil ver que a seguinte coleção de subconjuntos de X:

$$\big\{ \left]a, b\right[: a, b \in X\big\} \cup \big\{ \left]a, +\infty\right[: a \in X\big\} \cup \big\{ \left]-\infty, b\right[: b \in X\big\} \cup \{X\}$$

é uma cobertura de X fechada por interseções finitas. Ela constitui portanto uma base de uma topologia em X, chamada a *topologia da ordem*.

1.1. **Definição.** Sejam X um conjunto totalmente ordenado e S um subconjunto de X. Um ponto $x \in S$ é dito *interior à direita* em S relativamente a X se x é o maior elemento de X ou se existe $b \in X$ tal que $b > x$ e $\left]x, b\right[\subset S$. Similarmente, dizemos que $x \in S$ é *interior à esquerda* em S relativamente a X se x é o menor elemento de X ou se existe $a \in X$ tal que $a < x$ e $\left]a, x\right[\subset S$.

1.2. **Lema.** *Sejam X um conjunto totalmente ordenado, S um subconjunto de X e $x \in S$. Então x é um ponto interior de S com respeito à topologia da ordem de X se e somente se x é ao mesmo tempo um ponto interior à direita e um ponto interior à esquerda de S relativamente a X.*

Demonstração. Note que x é um ponto interior de S com respeito à topologia da ordem de X se e somente se x pertence a um aberto básico da topologia de ordem de X contido em S. A demonstração do lema é obtida a partir dessa observação por uma análise de casos. □

Se X é um conjunto totalmente ordenado e Y é um subconjunto de X, podemos considerar em Y duas topologias: a topologia da ordem de Y (i.e., a topologia definida a partir da ordem total em Y obtida por restrição da ordem total de X) e a topologia induzida por X (i.e., a topologia induzida em Y pela topologia da ordem de X). Essas topologias em geral não coincidem, como se vê no seguinte exemplo.

1.3. **Exemplo.** Se $X = \mathbb{R}$ é munido da ordem usual, então a topologia da ordem coincide com a topologia Euclideana. Se:

$$Y = \{0\} \cup \big\{1 + \tfrac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\big\}$$

então Y é discreto na topologia induzida por X. Por outro lado, na topologia da ordem de Y, o ponto 0 não é isolado e é limite da seqüência $\big(1 + \frac{1}{n}\big)_{n \ge 1}$.

1.4. **Lema.** *Se X é um conjunto totalmente ordenado e Y é um subconjunto de X então a topologia induzida por X em Y é mais fina que (i.e., contém a) topologia da ordem de Y.*

Demonstração. Basta ver que:

$$]a, +\infty[^Y =]a, +\infty[^X \cap Y, \quad]-\infty, b[^Y =]-\infty, b[^X \cap Y,$$
$$]a, b[^Y =]a, b[^X \cap Y, \quad Y = X \cap Y,$$

para todos $a, b \in Y$, i.e., os abertos básicos da topologia da ordem de Y são interseções de abertos básicos da topologia da ordem de X com Y. $\square$

1.5. **Definição.** Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. Dizemos que um ponto $y \in Y$ é *isolado à direita* em Y relativamente a X se existe $b \in X$ com $b > y$ e $]y, b[\cap Y = \emptyset$. Similarmente, dizemos que $y \in Y$ é *isolado à esquerda* em Y relativamente a X se existe $a \in X$ com $a < y$ e $]a, y[\cap Y = \emptyset$.

1.6. **Definição.** Sejam X um conjunto totalmente ordenado e $x \in X$. Dizemos que x *admite sucessor* em X se o conjunto $]x, +\infty[$ possui mínimo; se existir, esse (automaticamente único) mínimo é chamado o *sucessor* de x em X. Similarmente, dizemos que x *admite antecessor* em X se o conjunto $]-\infty, x[$ possui máximo; se existir, esse (automaticamente único) máximo é chamado o *antecessor* de x em X.

1.7. **Teorema.** *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X. Para que a topologia da ordem de Y coincida com a topologia induzida por X em Y é necessário e suficiente que as duas seguintes condições sejam satisfeitas:*

(a) *dado $y \in Y$, se y é isolado à direita em Y relativamente a X então y é o maior elemento de Y ou y admite sucessor em Y;*
(b) *dado $y \in Y$, se y é isolado à esquerda em Y relativamente a X então y é o menor elemento de Y ou y admite antecessor em Y.*

Demonstração. Suponha que a topologia da ordem de Y coincida com a topologia induzida por X em Y. Mostremos (a). A demonstração de (b) é análoga. Seja $y \in Y$ isolado à direita em Y relativamente a X. Por definição, existe $b \in X$ com $b > y$ e $]y, b[$ disjunto de Y. Como $]-\infty, b[\cap Y$ é aberto em Y com respeito à topologia induzida por X em Y, temos que ele também é aberto na topologia da ordem de Y. Em particular, y é um ponto interior de $]-\infty, b[\cap Y$ com respeito à topologia da ordem de Y; assim, y é também um ponto interior à direita de $]-\infty, b[\cap Y$ relativamente a Y. Isso significa que, ou y é o maior elemento de Y ou existe $b' \in Y$ tal que $b' > y$ e $]y, b'[^Y =]y, b'[\cap Y$ esteja contido em $]-\infty, b[\cap Y$. Assumindo que ocorre a segunda opção, vamos verificar que y admite sucessor em Y. De fato, temos:

$$\big]y, b'\big[\cap Y = \big(\big]y, b'\big[\cap Y\big) \cap \big(]-\infty, b[\cap Y\big) \subset]y, b[\cap Y = \emptyset,$$

o que mostra que b' é o sucessor de y em Y. Suponha agora que (a) e (b) sejam satisfeitas e mostremos que as duas topologias em Y coincidem. Em vista do Lema 1.4, é suficiente mostrar que se U é aberto com respeito à topologia da ordem de X então $U \cap Y$ é aberto com respeito à topologia da ordem de Y. Seja $y \in U \cap Y$. Devemos mostrar que y é ponto interior de $U \cap Y$ com respeito à topologia da ordem de Y. Mostraremos que y é ponto interior à direita de $U \cap Y$ relativamente a Y. A demonstração de que ele é também ponto interior à esquerda é análoga. Se y é o maior elemento de Y, não há o que fazer. Suponha que não seja. Daí y também não é o maior elemento de X. Como y é um ponto interior de U com respeito à topologia da ordem de X, temos também que y é ponto interior à direita de U relativamente a X. Como y não é o maior elemento de X, isso significa que existe $b \in X$, $b > y$ com $]y, b[\subset U$. Há dois casos: se $]y, b[$ corta Y, ou se não corta. No primeiro caso, seja $b' \in \,]y, b[\cap Y$. Daí $b' \in Y$, $b' > y$ e $]y, b'[^Y = \,]y, b'[\cap Y \subset \,]y, b[\cap Y \subset U \cap Y$. No segundo caso, y é isolado à direita em Y relativamente a X. Por (a), já que y não é o maior elemento de Y, temos que y admite sucessor em Y. Seja b' o sucessor de y em Y. Daí $b' \in Y$, $b' > y$ e $]y, b'[^Y = \,]y, b'[\cap Y = \emptyset \subset U \cap Y$. Em todo caso, mostramos que y é um ponto interior à direita de $U \cap Y$ relativamente a Y. $\square$

1.8. **Definição.** Dado um conjunto totalmente ordenado X, dizemos que um subconjunto I de X possui a *propriedade do valor intermediário* relativamente a X se dados $a, b \in I$ então $]a, b[\subset I$.

Note que $]a, b[= \emptyset$ se $a \geq b$, de modo que a condição $]a, b[\subset I$ só é não trivial para $a < b$.

1.9. **Exemplo.** Dado um conjunto totalmente ordenado X, então um *intervalo* de X é um conjunto que é de uma das seguintes formas:

$$
\begin{gathered}
]a, b[\,, \\
[a, b[\overset{\text{def}}{=} \big\{x \in X : a \leq x \text{ e } x < b\big\}, \\
]a, b] \overset{\text{def}}{=} \big\{x \in X : a < x \text{ e } x \leq b\big\}, \\
[a, b] \overset{\text{def}}{=} \big\{x \in X : a \leq x \text{ e } x \leq b\big\}, \\
]a, +\infty[\,, \\
[a, +\infty[\overset{\text{def}}{=} \big\{x \in X : x \geq a\big\}, \\
]{-\infty}, b[\,, \\
]{-\infty}, b] \overset{\text{def}}{=} \big\{x \in X : x \leq b\big\}, \\
]{-\infty}, +\infty[\overset{\text{def}}{=} X,
\end{gathered}
$$

com $a, b \in X$. É fácil ver que todo intervalo possui a propriedade do valor intermediário. A recíproca não é verdadeira: se $X = \mathbb{Q}$, munido da ordem usual, então $I = \big\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\big\}$ possui a propriedade do valor intermediário, mas não é um intervalo.

1.10. **Proposição.** *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e Y um subconjunto de X que possui a propriedade do valor intermediário relativamente a X. (O que ocorre, em particular, se Y for um intervalo de X.) Então a topologia da ordem de Y e a topologia induzida por X em Y coincidem.*

Demonstração. Basta verificar as condições (a) e (b) que aparecem no enunciado do Teorema 1.7. Verificaremos (a); a verificação de (b) é análoga. Seja $y \in Y$ isolado à direita em Y relativamente a X e suponha que y não seja o maior elemento de Y. Vamos verificar que y admite sucessor em Y. Temos que existe $b \in X$, $b > y$, tal que $]y, b[$ é disjunto de Y. Como y não é o maior elemento de Y, existe $b' \in Y$ com $b' > y$. Não pode ser $b' < b$, senão b' estaria em $]y, b[\cap Y$. Logo $b' \geq b$. Mas aí temos $y, b' \in Y$ e $y < b \leq b'$ e, já que Y tem a propriedade do valor intermediário, concluímos que $b \in Y$. Então $b \in Y$, $b > y$ e $]y, b[$ é disjunto de Y, o que mostra que b é o sucessor de y em Y. □

Recorde que se X é um conjunto totalmente ordenado e A é um subconjunto de X então o *supremo* de A (denotado $\sup A$) relativamente a X é (se existir) a menor cota superior de A, i.e., o menor elemento do conjunto:

$$\big\{x \in X : x \geq a, \text{ para todo } a \in A\big\}.$$

Similarmente, o *ínfimo* de A (denotado $\inf A$) relativamente a X é (se existir) a maior cota inferior de A, i.e., o maior elemento do conjunto:

$$\big\{x \in X : x \leq a, \text{ para todo } a \in A\big\}.$$

Temos o seguinte:

1.11. **Lema.** *Sejam X um conjunto totalmente ordenado e A um subconjunto não vazio de X. Se A admite supremo então o seu supremo pertence ao fecho de A com respeito à topologia da ordem de X. Similarmente, se A admite ínfimo então o seu ínfimo pertence ao fecho de A com respeito à topologia da ordem de X.*

Demonstração. Basta observar que todo aberto básico da topologia da ordem que contém $\sup A$ corta A. Similarmente para $\inf A$. □

1.12. **Definição.** Um conjunto totalmente ordenado X é dito *completo* se todo subconjunto não vazio limitado superiormente de X admite supremo e tudo subconjunto não vazio limitado inferiormente de X admite ínfimo.

1.13. *Observação.* É fácil ver que se X é um conjunto totalmente ordenado completo então todo subconjunto de X com a propriedade do valor intermediário é um intervalo.

1.14. **Exemplo.** Se X é bem ordenado (i.e., se todo subconjunto não vazio de X admite mínimo) então X é completo. De fato, todo subconjunto não vazio de X admite mínimo (que é, portanto, igual ao ínfimo) e, dado $A \subset X$ limitado superiormente, então o conjunto das cotas superiores de A é não vazio e portanto admite mínimo (que é, então, o supremo de A).

1.15. **Exemplo.** Se X é um conjunto totalmente ordenado completo e $I \subset X$ possui a propriedade do valor intermediário então I é completo. De fato, seja $A \subset I$ não vazio e limitado superiormente em I, i.e., existe $x \in I$ que é cota superior de A. Então A é não vazio e limitado superiormente em X, donde A possui um supremo $s \in X$ relativamente a X. Como x é cota superior de A, temos $s \le x$. Como A é não vazio, existe $a \in A$ e daí $a \le s$. Temos então $a, x \in I$ e $a \le s \le x$, donde $s \in I$, pela propriedade do valor intermediário. É fácil ver que s é o supremo de A relativamente a I. De modo similar, mostra-se que todo subconjunto não vazio de I limitado inferiormente em I admite ínfimo relativamente a I.

1.16. **Exemplo.** Se X é um conjunto totalmente ordenado completo e F é um subconjunto de X fechado na topologia da ordem então F é completo. De fato, seja $A \subset F$ não vazio e limitado superiormente em F. Então A é limitado superiormente em X e portanto possui um supremo s relativamente a X. Pelo Lema 1.11, s está em F e é fácil ver que s é então o supremo de A relativamente a F. Similarmente, mostra-se que todo subconjunto não vazio de F limitado inferiormente em F admite ínfimo relativamente a F.

1.17. **Proposição.** *Seja X um conjunto totalmente ordenado completo (esse é o caso, por exemplo, se X for bem ordenado). Se $Y \subset X$ é fechado na topologia da ordem de X então a topologia da ordem de Y coincide com a topologia induzida por X em Y.*

Demonstração. Basta verificar as condições (a) e (b) que aparecem no enunciado do Teorema 1.7. Verificaremos (a); a verificação de (b) é análoga. Seja $y \in Y$ isolado à direita em Y relativamente a X e suponha que y não seja o maior elemento de Y. Vamos verificar que y admite sucessor em Y. Temos que existe $b \in X$, $b > y$, tal que $]y, b[$ é disjunto de Y. Como y não é o maior elemento de Y, temos que $]y, +\infty[\cap Y$ é não vazio (e limitado inferiormente em X, por y). Como X é completo, existe $i = \inf\big(]y, +\infty[\cap Y\big)$. Pelo Lema 1.11, i pertence ao fecho de $]y, +\infty[\cap Y$ e portanto $i \in Y$, já que Y é fechado. Mas note que b é uma cota inferior de $]y, +\infty[\cap Y$ e portanto $b \le i$. Vimos que $i \in Y$, $i > y$ (pois $i \ge b$) e não há um elemento em Y maior do que y e menor do que i. Logo i é o sucessor de y em Y. $\square$

1.18. **Corolário.** *Seja X um conjunto totalmente ordenado completo e seja Y um subconjunto de X. Se uma das duas condições abaixo é satisfeita, então a topologia da ordem de Y coincide com a topologia induzida por X em Y:*

(i) *existe um subconjunto I de X com a propriedade do valor intermediário[1] tal que $Y \subset I$ e Y é fechado em I (na topologia da ordem de I ou na topologia induzida por X em I — tais topologias coincidem);*

[1] Já que X é completo, isso é o mesmo que dizer que I é um intervalo de X (Observação 1.13).

(ii) *existe um subconjunto fechado F de X (na topologia da ordem de X) tal que $Y \subset F$ e Y possui a propriedade do valor intermediário relativamente a F.*

Demonstração. Segue das Proposições 1.10 e 1.17 e do Exemplo 1.15. □

Quando X é bem ordenado, é possível dar ainda uma outra caracterização de quais são os subconjuntos Y de X em que a topologia da ordem coincide com a topologia induzida por X.

1.19. **Proposição.** *Sejam X um conjunto bem ordenado e Y um subconjunto de X. Para que a topologia da ordem de Y coincida com a topologia induzida por X em Y é necessário e suficiente que Y seja fechado em X ou que Y admita supremo e que o fecho de Y em X seja igual a $Y \cup \{\sup Y\}$.*

Demonstração. Se Y é fechado em X então as duas topologias em Y coincidem, pela Proposição 1.17. Se Y admite supremo e o fecho de Y é $Y \cup \{\sup Y\}$ então (a menos que $\sup Y \in Y$, caso em que Y é fechado) temos que Y é fechado relativamente ao intervalo $]{-\infty}, \sup Y[$ e portanto as duas topologias em Y coincidem, pelo Corolário 1.18. Suponha agora que Y seja um subconjunto de X para o qual as duas topologias coincidam. Daí Y satisfaz as condições (a) e (b) do enunciado do Teorema 1.7. Para completar a demonstração, é suficiente verificar que se $x \in \overline{Y} \setminus Y$ então x é o supremo de Y. Em primeiro lugar, verifiquemos que x é uma cota superior de Y. Senão, $]x, +\infty[\cap Y$ é não vazio. Seja y o menor elemento de $]x, +\infty[\cap Y$. Daí $y \in Y$, $x < y$ e $]x, y[$ é disjunto de Y, donde y é isolado à esquerda em Y relativamente a X. Como $]{-\infty}, y[$ é uma vizinhança de x, temos que $]{-\infty}, y[$ corta Y e portanto y não é o menor elemento de Y. Temos então que y admite um antecessor y' em Y. Como y é o menor elemento de $]x, +\infty[\cap Y$, temos que $y' \leq x$ e, como $x \notin Y$, temos $y' < x$. Daí $]y', y[$ é uma vizinhança de x que não corta Y, contradizendo o fato de que x está no fecho de Y. Assim, x é uma cota superior de Y. Note agora que se $x' \in X$, $x' < x$ então x' não é uma cota superior de Y; de fato, $]x', +\infty[$ é uma vizinhança de x e portanto corta Y. Logo $x = \sup Y$. □

2. Alguns fatos sobre ordinais

No que segue, denotamos por Ord a classe dos ordinais. Começamos recordando as definições recursivas das operações com ordinais. A *soma* $\alpha + \beta$ de ordinais α, β é definida por recursão em β, como segue:

$$\alpha+0 = \alpha, \quad \alpha+s(\beta) = s(\alpha+\beta), \quad \alpha+\beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma), \text{ para } \beta \text{ ordinal limite,}$$

onde $s(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$ denota o sucessor de β. A *multiplicação* (ou *produto*) $\alpha \cdot \beta$ é definida também por recursão em β:

$$\alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \cdot s(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha \cdot \gamma), \text{ para } \beta \text{ ordinal limite.}$$

Nós escreveremos muitas vezes $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$. A *potenciação* α^β é definida por recursão em β para $\alpha \neq 0$:

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha^{s(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha, \quad \alpha^\beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma, \text{ para } \beta \text{ ordinal limite.}$$

Para $\alpha = 0$ definimos[2] a potenciação fazendo $\alpha^0 = 1$ e $\alpha^\beta = 0$, para $\beta \neq 0$. Note que:

$$\alpha + 1 = \alpha + s(0) = s(\alpha + 0) = s(\alpha),$$

para todo ordinal α. Mostra-se facilmente por indução que:

$$0 + \alpha = \alpha, \quad 0 \cdot \alpha = 0, \quad 1 \cdot \alpha = \alpha, \quad 1^\alpha = 1.$$

Segue daí que:

$$\alpha \cdot 1 = \alpha \cdot s(0) = \alpha \cdot 0 + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$$

e que:

$$\alpha^1 = \alpha^{s(0)} = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

2.1. **Lema.** *Seja* $F : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ *uma função*[3]. *Suponha que:*

$$F(\alpha) \geq \sup_{\beta<\alpha} F(\beta), \tag{2.1}$$

para todo ordinal limite α. *Se* $F(\alpha) \leq F(\alpha+1)$ *(resp., se* $F(\alpha) < F(\alpha+1)$*) para todo ordinal* α *então, dados ordinais* α, β *com* $\alpha \leq \beta$ *(resp., com* $\alpha < \beta$*) vale que* $F(\alpha) \leq F(\beta)$ *(resp., que* $F(\alpha) < F(\beta)$*).*

Demonstração. Mostremos primeiramente a versão do lema com as desigualdades não estritas. Seja α um ordinal e suponha por absurdo que exista um ordinal $\beta \geq \alpha$ tal que $F(\beta) < F(\alpha)$. Seja $\beta \geq \alpha$ o primeiro ordinal com essa propriedade. Obviamente não pode ser $\beta = \alpha$, de modo que $\beta > \alpha$. Se β é um ordinal limite, então $\alpha + 1 < \beta$ e portanto, usando (2.1), obtemos:

$$F(\beta) \geq F(\alpha + 1) \geq F(\alpha),$$

contradizendo $F(\beta) < F(\alpha)$. Se β é um ordinal sucessor, escreva $\beta = \gamma + 1$. Daí $\gamma \geq \alpha$ e portanto, pela minimalidade de β, temos $F(\gamma) \geq F(\alpha)$. Daí:

$$F(\beta) = F(\gamma + 1) \geq F(\gamma) \geq F(\alpha),$$

novamente contradizendo $F(\beta) < F(\alpha)$.

Para mostrar a versão do lema com as desigualdades estritas, sejam α, β ordinais com $\alpha < \beta$. Daí $\alpha + 1 \leq \beta$ e portanto, pelo que já demonstramos, $F(\alpha + 1) \leq F(\beta)$. Daí:

$$F(\alpha) < F(\alpha + 1) \leq F(\beta). \qquad \square$$

[2]Para $\alpha = 0$ é verdade que $\alpha^0 = 1$ e que $\alpha^{s(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$, mas não é verdade que $\alpha^\beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$ para β ordinal limite, pois $\alpha^\beta = 0$ e esse supremo é igual a 1.

[3]Mais precisamente, F não é uma função, mas um *símbolo de função* (possivelmente com parâmetros), introduzido por definição a partir de alguma fórmula, já que o "domínio" de F não é um conjunto.

2.2. **Corolário.** *Dados ordinais α, β e γ, temos:*

$$\beta < \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

Demonstração. Fixe um ordinal α e aplique o Lema 2.1 com $F(\beta) = \alpha + \beta$, tendo em mente que a definição recursiva de soma de ordinais nos dá:

$$F(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} F(\gamma), \quad \text{para } \beta \text{ ordinal limite},$$

e $F(\beta + 1) = F(\beta) + 1 > F(\beta)$, para todo ordinal β. □

2.3. **Corolário.** *Dados ordinais α, β, se $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$ então $\alpha + \beta > 0$.*

Demonstração. Se $\beta > 0$, o Corolário 2.2 nos dá:

$$\beta > 0 \Longrightarrow \alpha + \beta > \alpha + 0 = \alpha \geq 0.$$

Se $\beta = 0$ e $\alpha > 0$ então $\alpha + \beta = \alpha > 0$. □

2.4. **Corolário.** *Dados ordinais α, β e γ, temos:*

$$\beta < \gamma \Longleftrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha + \beta = \alpha + \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma.$$

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 2.2. □

2.5. **Corolário.** *Dados ordinais α, β e γ, temos:*

$$\alpha > 0 \text{ e } \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma.$$

Em particular:

$$\beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha\beta \leq \alpha\gamma.$$

Demonstração. Fixe um ordinal $\alpha > 0$ e aplique o Lema 2.1 com $F(\beta) = \alpha\beta$, tendo em mente que a definição recursiva de produto de ordinais nos dá:

$$F(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} F(\gamma), \quad \text{para } \beta \text{ ordinal limite},$$

e $F(\beta + 1) = F(\beta) + \alpha > F(\beta)$, para todo ordinal β. (A desigualdade $F(\beta) + \alpha > F(\beta)$ pode ser obtida usando o Corolário 2.2 para somar $F(\beta)$ à esquerda dos dois lados de $\alpha > 0$.) A implicação com as desigualdades não estritas vale também com $\alpha = 0$, já que nesse caso $\alpha\beta = \alpha\gamma = 0$. □

2.6. **Corolário.** *Dados ordinais α, β, se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ então $\alpha\beta > 0$.*

Demonstração. Como $\alpha > 0$, o Corolário 2.5 nos dá:

$$\beta > 0 \Longrightarrow \alpha\beta > \alpha \cdot 0 = 0.$$ □

2.7. **Corolário.** *Se α é um ordinal não nulo e β é um ordinal qualquer então α^β é um ordinal não nulo.*

Demonstração. Segue do Corolário 2.6 por indução em β. □

2.8. **Corolário.** *Dados ordinais α, β, γ com $\alpha > 0$ então:*

$$\beta < \gamma \Longleftrightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma, \quad \alpha\beta = \alpha\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma.$$

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 2.5. □

2.9. **Corolário.** *Dados ordinais* α*,* β *e* γ*, temos:*

$$\alpha > 1 \ e \ \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma.$$

Em particular:

$$\alpha > 0 \ e \ \beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha^\beta \leq \alpha^\gamma.$$

Demonstração. Fixe um ordinal $\alpha > 1$ e aplique o Lema 2.1 com $F(\beta) = \alpha^\beta$, tendo em mente que a definição recursiva de potenciação de ordinais nos dá:

$$F(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} F(\gamma), \quad \text{para } \beta \text{ ordinal limite,}$$

e $F(\beta{+}1) = F(\beta)\alpha > F(\beta)$, para todo ordinal β. (Para obter a desigualdade $F(\beta)\alpha > F(\beta)$, use o Corolário 2.5 para multiplicar por $F(\beta)$ à esquerda dos dois lados de $\alpha > 1$, tendo em mente que $F(\beta) > 0$, pelo Corolário 2.7.) A implicação com as desigualdades não estritas vale também com $\alpha = 1$, já que nesse caso $\alpha^\beta = \alpha^\gamma = 1$. □

2.10. **Corolário.** *Dados ordinais* α*,* β*,* γ*, se* $\alpha > 1$ *então:*

$$\beta < \gamma \Longleftrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma, \quad \alpha^\beta = \alpha^\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma.$$

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 2.9. □

2.11. **Lema.** *Se* A *é um conjunto não vazio de ordinais que não possui elemento máximo (equivalentemente, se* $\sup A \notin A$*) então* $\sup A$ *é um ordinal limite.*

Demonstração. Como $\sup A \notin A$, temos que $\alpha < \sup A$, para todo $\alpha \in A$. Daí $\sup A$ não pode ser zero, pois isso implicaria que A é vazio. Além do mais, se $\sup A = \beta + 1$ para algum ordinal β então $\alpha < \beta + 1$ e portanto $\alpha \leq \beta$, para todo $\alpha \in A$. Mas isso implica que $\sup A \leq \beta$ e contradiz o fato que $\sup A = \beta + 1$. □

2.12. **Lema.** *Seja* $F : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ *uma função tal que:*

$$F(\alpha) = \sup_{\beta<\alpha} F(\beta),$$

para todo ordinal limite α *e tal que* $F(\alpha) \leq F(\alpha + 1)$*, para todo ordinal* α*. Se* A *é um conjunto não vazio de ordinais então:*

$$\sup_{\alpha\in A} F(\alpha) = F(\sup A).$$

Demonstração. Para todo $\alpha \in A$ temos $\alpha \leq \sup A$ e segue então do Lema 2.1 que $F(\alpha) \leq F(\sup A)$. Logo:

$$\sup_{\alpha\in A} F(\alpha) \leq F(\sup A).$$

Para mostrar a desigualdade oposta, começamos observando que se A possui máximo então $\sup A \in A$ e portanto:

$$F(\sup A) \leq \sup_{\alpha\in A} F(\alpha).$$

Se A não possui máximo então, pelo Lema 2.11, $\sup A$ é um ordinal limite e portanto:

$$F(\sup A) = \sup_{\beta<\sup A} F(\beta). \tag{2.2}$$

Agora, se $\beta < \sup A$ então existe $\gamma \in A$ com $\gamma > \beta$ e portanto:

$$F(\beta) \leq F(\gamma) \leq \sup_{\alpha\in A} F(\alpha),$$

donde concluímos que:

$$\sup_{\beta<\sup A} F(\beta) \leq \sup_{\alpha\in A} F(\alpha).$$

Dessa última desigualdade e de (2.2) a conclusão segue. □

2.13. **Corolário.** *Dado um ordinal α e um conjunto não vazio de ordinais A então*[4]*:*

$$\sup_{\beta\in A}(\alpha+\beta) = \alpha + \sup A = \alpha + \sup_{\beta\in A}\beta,$$

$$\sup_{\beta\in A}(\alpha\beta) = \alpha\cdot\sup A = \alpha\cdot\sup_{\beta\in A}\beta,$$

e, se $\alpha > 0$ então:

$$\sup_{\beta\in A}\alpha^{\beta} = \alpha^{\sup A} = \alpha^{(\sup_{\beta\in A}\beta)}.$$

Demonstração. Basta aplicar o Lema 2.12 para as funções $F(\beta) = \alpha+\beta$, $F(\beta) = \alpha\beta$ e $F(\beta) = \alpha^{\beta}$. □

2.14. **Lema.** *Dados ordinais α, β e γ então*[5]*:*

(1) $\alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$;
(2) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$;
(3) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
(4) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$;
(5) $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$.

Demonstração. Todos os itens são demonstrados por indução em γ, sendo que no caso em que γ é limite usa-se o Corolário 2.13. (Nos itens 4 e 5 o caso $\alpha = 0$ é tratado separadamente, sem indução, usando os Corolários 2.3 e 2.6.) □

---

[4]Observamos que as igualdades $\sup_{\beta\in A}(\beta+\alpha) = (\sup A)+\alpha$, $\sup_{\beta\in A}(\beta\alpha) = (\sup A)\alpha$ e $\sup_{\beta\in A}(\beta^{\alpha}) = (\sup A)^{\alpha}$ não valem em geral. Tomando $A = \omega$ e $\alpha = 2$ obtemos um contra-exemplo para todas elas. (Em todas o lado esquerdo vale ω e os lados direitos valem $\omega+2$, $\omega\cdot 2$ e ω^2, respectivamente.)

[5]Algumas propriedades das operações com ordinais que parecem a primeira vista razoáveis, não valem. A soma não é comutativa, já que $1+\omega = \omega < \omega+1$ e a multiplicação não é comutativa, já que $2\cdot\omega = \omega < \omega\cdot 2$. A propriedade distributiva não vale quando a soma está no primeiro fator. Por exemplo, $(1+1)\omega = 2\cdot\omega = \omega$ é diferente de $1\cdot\omega+1\cdot\omega = \omega+\omega$. Além do mais, a igualdade $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$ não vale em geral. Por exemplo, $(\omega\cdot 2)^2 = (\omega\cdot 2)(\omega\cdot 2)$ e, usando a associatividade da multiplicação, obtemos $(\omega\cdot 2)^2 = \omega\cdot(2\cdot\omega)\cdot 2 = \omega^2\cdot 2 < \omega^2\cdot 4 = \omega^2\cdot 2^2$.

2.15. **Lema.** *Dados ordinais α, β e γ, se $\alpha \leq \beta$ então*[6]*:*

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma, \quad \alpha\gamma \leq \beta\gamma, \quad \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma.$$

Demonstração. As três desigualdades são demonstradas por indução em γ. Para o caso em que γ é limite, deve-se ter em mente o seguinte fato: se $(\alpha_i)_{i\in I}$ e $(\beta_i)_{i\in I}$ são famílias de ordinais e $\alpha_i \leq \beta_i$, para todo $i \in I$ então $\sup_{i\in I} \alpha_i \leq \sup_{i\in I} \beta_i$. (Na desigualdade $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$ o caso $\alpha = 0$ deve ser tratado separadamente, sem indução.) □

2.16. **Lema.** *Sejam α, β ordinais. Se β é um ordinal sucessor então $\alpha + \beta$ é um ordinal sucessor e se β é um ordinal limite então $\alpha + \beta$ é um ordinal limite.*

Demonstração. Se β é um ordinal sucessor, escrevemos $\beta = \gamma + 1$ e daí $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$. Se β é um ordinal limite, então $\alpha + \beta = \sup_{\gamma<\beta} (\alpha + \gamma)$ e, em vista do Corolário 2.2, esse supremo não é um máximo. Logo o Lema 2.11 nos diz que $\alpha + \beta$ é um ordinal limite. □

2.17. **Lema.** *Dados ordinais não nulos α, β, se um deles for um ordinal limite então $\alpha\beta$ é um ordinal limite. Se ambos forem ordinais sucessores então $\alpha\beta$ é um ordinal sucessor.*

Demonstração. Se β for um ordinal limite então $\alpha\beta = \sup_{\gamma<\beta} (\alpha\gamma)$ e, em vista do Corolário 2.5, esse supremo não é um máximo. Logo o Lema 2.11 nos diz que $\alpha\beta$ é um ordinal limite. Se β é um ordinal sucessor, escrevemos $\beta = \gamma + 1$ e daí $\alpha\beta = \alpha\gamma + \alpha$. Segue do Lema 2.16 que $\alpha\beta$ é limite se α for limite e é sucessor se α for também sucessor. □

2.18. **Lema.** *Dados ordinais α, β, se $\alpha > 1$ e $\beta \geq \omega$ então α^β é um ordinal limite. Se $0 < n < \omega$ então α^n é um ordinal limite se α for um ordinal limite e α^n é um ordinal sucessor se α for um ordinal sucessor. Em particular, α^β é sempre um ordinal limite se $\beta > 0$ e α for um ordinal limite.*

Demonstração. Seja $\alpha > 1$ e suponha por absurdo que exista $\beta \geq \omega$ tal que α^β não seja um ordinal limite. Seja $\beta \geq \omega$ o primeiro ordinal com essa propriedade. Se β for um ordinal limite então $\alpha^\beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$ e, em vista do Corolário 2.9, esse supremo não é um máximo. Segue do Lema 2.11 que α^β é um ordinal limite. Assim, β deve ser um ordinal sucessor, i.e., $\beta = \gamma+1$ com $\gamma \geq \omega$. Mas, pela minimalidade de β, temos que α^γ é um ordinal limite e portanto, em vista do Lema 2.17, $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$ é um ordinal limite. Isso nos dá uma contradição e completa a demonstração de que α^β é um ordinal limite sempre que $\alpha > 1$ e $\beta \geq \omega$. Agora, usando-se o Lema 2.17, mostra-se por indução em n que, para todo $n \in \omega \setminus \{0\}$, α^n é um ordinal limite se α for um ordinal limite e que α^n é um ordinal sucessor se α for um ordinal sucessor. □

[6] Não é possível aqui obter as desigualdades estritas caso $\alpha < \beta$. De fato, note, por exemplo, que $\omega = 0 + \omega = 1 + \omega$, que $\omega = 1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$ e que $\omega = 2^\omega = 3^\omega$.

2.19. **Lema.** *Dados ordinais α, β, temos que $\beta \geq \alpha$ se e somente se existe um ordinal γ tal que $\beta = \alpha + \gamma$. (Em vista do Corolário 2.4, o ordinal γ com essa propriedade é automaticamente único, se existir.)*

Demonstração. Se $\beta = \alpha + \gamma$ então, usando o Corolário 2.2, obtemos:

$$\gamma \geq 0 \Longrightarrow \beta = \alpha + \gamma \geq \alpha + 0 = \alpha.$$

Fixe agora um ordinal α e mostremos que, para todo $\beta \geq \alpha$, existe um ordinal γ tal que $\beta = \alpha + \gamma$. Suponha por absurdo que exista um ordinal $\beta \geq \alpha$ que não seja da forma $\alpha + \gamma$ e seja $\beta \geq \alpha$ o menor ordinal com essa propriedade. Não pode ser $\beta = \alpha$, pois $\alpha = \alpha + 0$. Assim, $\beta > \alpha$. Pela minimalidade de β, para $\delta \in [\alpha, \beta[$, existe um (único) ordinal $f(\delta)$ tal que $\delta = \alpha + f(\delta)$. Se β fosse um ordinal sucessor teríamos $\beta = \delta + 1$, para algum $\delta \in [\alpha, \beta[$. Daí:

$$\beta = \delta + 1 = \big(\alpha + f(\delta)\big) + 1 = \alpha + \big(f(\delta) + 1\big),$$

e logo β seria da forma $\alpha + \gamma$. Assim, β deve ser um ordinal limite. Usando o Corolário 2.13, obtemos:

$$\beta = \sup\,[\alpha, \beta[= \sup_{\delta \in [\alpha, \beta[} \big(\alpha + f(\delta)\big) = \alpha + \sup_{\delta \in [\alpha, \beta[} f(\delta),$$

donde concluímos novamente que β é da forma $\alpha + \gamma$ e obtemos uma contradição. □

2.20. **Lema.** *Dados ordinais α, β, se $\alpha > 1$ então $\alpha^\beta \geq \beta$.*

Demonstração. Usamos indução em β. Para $\beta = 0$, temos $\alpha^0 = 1 > 0$ e para $\beta = 1$ temos $\alpha^1 = \alpha > 1$. Se $\beta \geq 1$ e sabemos que $\alpha^\beta \geq \beta$ então, usando o Lema 2.15 e os Corolários 2.5 e 2.2, obtemos:

$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha \geq \beta\alpha \geq \beta \cdot 2 = \beta + \beta \geq \beta + 1.$$

Finalmente, se β é um ordinal limite e $\alpha^\gamma \geq \gamma$ para todo $\gamma < \beta$ então:

$$\alpha^\beta = \sup_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma \geq \sup_{\gamma < \beta} \gamma = \beta. \qquad \square$$

2.21. **Proposição.** *Se α é um ordinal não nulo então existe um único par de ordinais (β, γ) tal que γ é um ordinal sucessor e $\alpha = \omega^\beta \cdot \gamma$.*

Demonstração. Vamos começar demonstrando a unicidade. Sejam (β, γ), (β', γ') pares de ordinais, com γ, γ' ordinais sucessores e:

$$\omega^\beta \cdot \gamma = \omega^{\beta'} \cdot \gamma'.$$

Digamos que $\beta \leq \beta'$. Pelo Lema 2.19, podemos escrever $\beta' = \beta + \delta$ e portanto:

$$\omega^\beta \cdot \gamma = \omega^{\beta'} \cdot \gamma' = (\omega^\beta \cdot \omega^\delta)\gamma' = \omega^\beta(\omega^\delta \cdot \gamma').$$

O Corolário 2.8 nos dá então $\gamma = \omega^\delta \cdot \gamma'$. Mas se $\delta > 0$ então o Lema 2.18 nos diz que ω^δ é um ordinal limite e aí o Lema 2.17 nos diz que $\omega^\delta \cdot \gamma'$ (e portanto γ) é um ordinal limite. Devemos ter pontanto $\delta = 0$, donde sai que $\beta' = \beta$ e $\gamma' = \gamma$. Vamos agora demonstrar a existência do par (β, γ). Para isso, vamos demonstrar por indução em δ a seguinte afirmação $P(\delta)$: para todo ordinal não nulo $\alpha < \omega^\delta$, existe um par de ordinais (β, γ) tal que γ é um ordinal sucessor e $\alpha = \omega^\beta \cdot \gamma$. (Note que isso é suficiente para terminar a demonstração já que, em vista do Lema 2.20, temos $\alpha \le \omega^\alpha < \omega^{\alpha+1}$.) Se $\delta = 0$ então $\omega^\delta = 1$ e não existe nenhum ordinal não nulo $\alpha < \omega^\delta$, de modo que $P(\delta)$ é vaziamente satisfeita. Se δ é um ordinal limite e $P(\rho)$ vale para todo $\rho < \delta$, temos que $P(\delta)$ vale. De fato, como δ é ordinal limite, temos:

$$\omega^\delta = \sup_{\rho<\delta} \omega^\rho,$$

e daí, se $\alpha < \omega^\delta$ é um ordinal não nulo, concluímos que $\alpha < \omega^\rho$, para algum $\rho < \delta$. Daí, por $P(\rho)$, concluímos que $\alpha = \omega^\beta \cdot \gamma$, para algum par de ordinais (β, γ), com γ um ordinal sucessor. Finalmente, suponha válida $P(\delta)$ e demonstremos $P(\delta+1)$. Seja $\alpha < \omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega$ um ordinal não nulo. Como:

$$\omega^\delta \cdot \omega = \sup_{n<\omega} (\omega^\delta \cdot n),$$

existe $n \in \omega$ tal que $\alpha < \omega^\delta \cdot n$. Seja n o menor elemento de ω com essa propriedade. Não pode ser $n = 0$, então escreva $n = m + 1$, com $m \in \omega$. Daí:

$$\omega^\delta \cdot m \le \alpha < \omega^\delta(m+1) = \omega^\delta \cdot m + \omega^\delta.$$

De $\alpha \ge \omega^\delta \cdot m$ vem (Lema 2.19) que podemos escrever:

$$\alpha = \omega^\delta \cdot m + \alpha_0,$$

e de $\alpha < \omega^\delta \cdot m + \omega^\delta$ vem (Corolário 2.4) que $\alpha_0 < \omega^\delta$. Se $\alpha_0 = 0$ então $\alpha = \omega^\delta \cdot m$ e a demonstração termina (note que, como $\alpha \neq 0$, temos $m \neq 0$ e portanto m é um ordinal sucessor). Se $\alpha_0 \neq 0$, por $P(\delta)$, podemos escrever:

$$\alpha_0 = \omega^\beta \cdot \gamma,$$

com γ um ordinal sucessor. Daí:

$$\alpha = \omega^\delta \cdot m + \omega^\beta \cdot \gamma. \tag{2.3}$$

Como:

$$\omega^\beta = \omega^\beta \cdot 1 \le \omega^\beta \cdot \gamma = \alpha_0 < \omega^\delta,$$

segue (Corolário 2.10) que $\beta < \delta$ e podemos portanto escrever $\delta = \beta + \beta'$ (Lema 2.19). Daí, usando (2.3), obtemos:

$$\alpha = \omega^{\beta+\beta'} \cdot m + \omega^\beta \cdot \gamma = (\omega^\beta \cdot \omega^{\beta'}) \cdot m + \omega^\beta \cdot \gamma = \omega^\beta(\omega^{\beta'} \cdot m + \gamma),$$

sendo que $\omega^{\beta'} \cdot m + \gamma$ é um ordinal sucessor, pelo Lema 2.16. Isso completa a demonstração. □

2.22. **Definição.** Dado um ordinal não nulo α, então o único ordinal β tal que $\alpha = \omega^\beta \cdot \gamma$ para algum ordinal sucessor γ é chamado o *grau* de α e é denotado por $\mathfrak{g}(\alpha)$.

2.23. **Lema.** *Seja α um ordinal não nulo. Então α é um ordinal sucessor se e somente se $\mathfrak{g}(\alpha) = 0$.*

Demonstração. Se α é sucessor então $\alpha = \omega^0 \cdot \alpha$, com α sucessor, donde $\mathfrak{g}(\alpha) = 0$. Reciprocamente, se $\mathfrak{g}(\alpha) = 0$ então $\alpha = \omega^0 \cdot \gamma = \gamma$ para algum ordinal sucessor γ. □

2.24. **Lema.** *Dados um ordinal β e um ordinal não nulo γ então, definindo $\alpha = \omega^\beta \cdot \gamma$, temos que ($\alpha \neq 0$ e):*

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \beta + \mathfrak{g}(\gamma) \geq \beta.$$

Reciprocamente, se α é um ordinal não nulo e β é um ordinal tal que:

$$\mathfrak{g}(\alpha) \geq \beta$$

então existe um ordinal (não nulo) γ tal que $\alpha = \omega^\beta \cdot \gamma$. (Em vista do Corolário 2.8, o ordinal γ com essa propriedade é automaticamente único se existir.) Em outras palavras, os ordinais não nulos de grau maior ou igual a β são precisamente os ordinais da forma $\omega^\beta \cdot \gamma$, com $\gamma \neq 0$.

Demonstração. Se $\alpha = \omega^\beta \cdot \gamma$ com $\gamma \neq 0$ então podemos escrever $\gamma = \omega^\delta \cdot \rho$, com $\delta = \mathfrak{g}(\gamma)$ e ρ um ordinal sucessor. Daí:

$$\alpha = \omega^\beta(\omega^\delta \cdot \rho) = \omega^{\beta+\delta} \cdot \rho,$$

donde, já que ρ é um ordinal sucessor, temos que $\mathfrak{g}(\alpha) = \beta + \delta = \beta + \mathfrak{g}(\gamma)$. Suponha agora que α seja um ordinal não nulo e que β seja um ordinal tal que $\mathfrak{g}(\alpha) \geq \beta$. Podemos escrever então (Lema 2.19) $\mathfrak{g}(\alpha) = \beta + \delta$ e, pela definição de grau, existe um ordinal sucessor ρ tal que:

$$\alpha = \omega^{\beta+\delta} \cdot \rho = \omega^\beta \cdot \gamma,$$

com $\gamma = \omega^\delta \cdot \rho \neq 0$. □

2.25. **Corolário.** *Um ordinal α é um ordinal limite se e somente se $\alpha = \omega\gamma$, para algum (automaticamente único) ordinal não nulo γ.*

Demonstração. Segue do Lema 2.24 e do fato que (para $\alpha \neq 0$) α é limite se e somente se $\mathfrak{g}(\alpha) \geq 1$ (Lema 2.23). □

2.26. **Lema.** *Dado um ordinal α, então o conjunto:*

$$\big\{\beta \in [0, \alpha] : \beta = 0 \text{ ou } \beta \text{ é limite}\big\} \tag{2.4}$$

possui máximo.

Demonstração. O conjunto (2.4) é não vazio, pois 0 pertence a ele. Seja β o supremo de (2.4). Como α é cota superior de (2.4), temos que $\beta \leq \alpha$. Se β não pertencesse a (2.4), o Lema 2.11 nos diria que β é um ordinal limite e portanto β pertenceria a (2.4), nos dando uma contradição. □

2.27. **Corolário.** *Dado um ordinal α, então existe um único par (β, n), tal que $\alpha = \beta + n$, $n < \omega$ e $\beta = 0$ ou β é um ordinal limite.*

Demonstração. Seja β o maior elemento de (2.4). Daí $\beta = 0$ ou β é um ordinal limite e $\beta \leq \alpha$. Como $\beta + \omega$ é um ordinal limite (Lema 2.16) maior do que β, temos que $\beta + \omega > \alpha$, já que β é o maior elemento de (2.4). De $\alpha \geq \beta$ vem (Lema 2.19) que $\alpha = \beta + n$ para algum ordinal n e de $\alpha = \beta + n < \beta + \omega$ vem (Corolário 2.4) que $n < \omega$. Isso demonstra a existência do par (β, n). Sejam agora (β, n), (β', n') pares tais que $n, n' < \omega$, β e β' são nulos ou limites e:

$$\beta + n = \beta' + n'.$$

Digamos que $\beta \leq \beta'$. Daí $\beta' = \beta + \gamma$ e portanto:

$$\beta + n = \beta + (\gamma + n'),$$

donde $n = \gamma + n'$. Daí $\gamma \leq \gamma + n' = n < \omega$, donde $\gamma = 0$ ou γ é um sucessor. Mas γ não pode ser um sucessor, senão $\beta' = \beta + \gamma$ seria sucessor (Lema 2.16). Logo $\gamma = 0$, donde $\beta' = \beta$ e $n' = n$. $\square$

2.28. **Corolário.** *Dado um ordinal α então existe um único par (γ, n) com $n < \omega$ e $\alpha = \omega\gamma + n$.*

Demonstração. Segue dos Corolários 2.27 e 2.25. $\square$

Vimos no Corolário 2.25 que os ordinais limites são precisamente os ordinais da forma $\omega\gamma$, com $\gamma \neq 0$. Por outro lado, enquanto é verdade que $\gamma\omega$ é um ordinal limite para $\gamma \neq 0$ (Lema 2.17), não é verdade que todo ordinal limite é dessa forma. Na verdade, temos a seguinte:

2.29. **Proposição.** *Se γ é um ordinal não nulo então $\gamma\omega = \omega^\alpha$, para algum ordinal sucessor α. (O ordinal α é automaticamente único se existir, em vista do Corolário 2.10.)*

Demonstração. Pelo Lema 2.20, existe um ordinal α tal que $\gamma < \omega^\alpha$ (digamos, $\alpha = \gamma + 1$). Seja α o menor ordinal com essa propriedade. Temos que $\alpha \neq 0$, pois $\gamma \neq 0$. Afirmamos que α não pode ser um ordinal limite. De fato, se fosse, teríamos $\omega^\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \omega^\beta$ e portanto teríamos que $\gamma < \omega^\beta$, para algum $\beta < \alpha$. Assim, α é um ordinal sucessor. Vamos mostrar que $\gamma\omega = \omega^\alpha$. Escreva $\alpha = \beta + 1$. Daí $\omega^\beta \leq \gamma$, pela minimalidade de α. Além do mais, temos:

$$\gamma < \omega^\alpha = \omega^{\beta+1} = \omega^\beta \cdot \omega = \sup_{n<\omega} (\omega^\beta \cdot n),$$

donde existe $n < \omega$ tal que $\gamma < \omega^\beta \cdot n$. Obviamente, $n > 0$. De:

$$\omega^\beta \leq \gamma < \omega^\beta \cdot n,$$

o Lema 2.15 nos dá:

$$\omega^\beta \cdot \omega \leq \gamma\omega \leq (\omega^\beta \cdot n) \cdot \omega = \omega^\beta \cdot (n \cdot \omega) = \omega^\beta \cdot \omega,$$

e daí $\gamma\omega = \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1} = \omega^\alpha$. $\square$

3. Derivadas de Cantor–Bendixson da classe dos ordinais

Se X é um espaço topológico e α é um ordinal, então a *α-ésima derivada de Cantor–Bendixson de X*, denotada por X_α, é definida recursivamente assim: $X_0 = X$, $X_{\alpha+1}$ é o conjunto dos pontos de X_α que não são isolados em X_α e, se α é um ordinal limite, então $X_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta$. Algumas propriedades das derivadas de Cantor–Bendixson são de fácil verificação: todos os X_α são fechados em X; se $\beta \geq \alpha$ então $X_\beta \subset X_\alpha$; existe α tal que $X_\alpha = X_{\alpha+1}$; se $X_\alpha = X_{\alpha+1}$ então $X_\beta = X_\alpha$, para todo $\beta \geq \alpha$. Se α é o menor ordinal tal que $X_\alpha = X_{\alpha+1}$ então X_β é um subconjunto próprio de X_γ para $\gamma < \beta \leq \alpha$ (se X_α é vazio então X é dito *disperso* e α é chamada a *altura* de X). É também de fácil verificação o seguinte:

3.1. **Lema.** *Se X é um espaço topológico e Y é um subespaço de X então $Y_\alpha \subset X_\alpha$, para todo ordinal α. Além do mais, se Y é aberto em X então $Y_\alpha = X_\alpha \cap Y$.* □

Nosso objetivo nesta seção é estudar as derivadas de Cantor–Bendixson Ord_α da classe dos ordinais Ord, munida da topologia da ordem. Do ponto de vista de formalização em ZFC (ou NBG, KM) é problemático levar ao pé-da-letra essa intenção, já que Ord é uma classe própria e portanto não é realmente um espaço topológico[7]. A definição de Ord_α será dada de forma um pouco indireta então, considerando-se segmentos iniciais de Ord.

Como na Definição 1.8, diremos que um conjunto de ordinais I tem *a propriedade do valor intermediário* se dados $\alpha, \beta \in I$ então $]\alpha, \beta[\subset I$. É fácil ver que um conjunto de ordinais I tem a propriedade do valor intermediário se e somente se I é vazio ou existem ordinais α, β com $\alpha < \beta$ e $I = [\alpha, \beta[$. (Se I tem a propriedade do valor intermediário e não é vazio, tome α como sendo o menor elemento de I e β como sendo o menor ordinal que é maior do que todo elemento de I.) Um conjunto de ordinais com a propriedade do valor intermediário será chamado então um *intervalo* de ordinais. Note que todo ordinal é também um intervalo de ordinais; de fato, se θ é um ordinal então $\theta = [0, \theta[$. Todo intervalo de ordinais será considerado como um espaço topológico, munido da topologia da ordem. Em vista da Proposição 1.10, se I, J são intervalos de ordinais e $J \subset I$ então a topologia de J coincide com a topologia induzida por I (já que J tem a propriedade do valor intermediário relativamente a I).

Por um *intervalo aberto* de ordinais nós entenderemos um intervalo de ordinais que é vazio ou cujo elemento mínimo é 0 ou um ordinal sucessor. Note, por exemplo, que um ordinal $\theta = [0, \theta[$ é um intervalo aberto de ordinais.

---

[7]Para considerar um espaço topológico X que seja uma classe própria, teríamos que considerar uma topologia τ à qual certas subclasses próprias de X — o próprio X, por exemplo — pertençam, e isso não é permitido.

3.2. **Lema.** *Se I é um intervalo de ordinais e J é um intervalo aberto de ordinais com $J \subset I$ então J é aberto em I (na topologia da ordem de I).*

Demonstração. Se J é vazio, então J é aberto em I. Senão, $J = [\alpha, \beta[$, com $\alpha < \beta$, sendo $\alpha = 0$ ou α um ordinal sucessor. Seja $\theta = [0, \theta[$ um ordinal que contenha I e tal que $\beta \in \theta$ (de modo que também $\alpha \in \theta$). Se $\alpha = 0$ então (veja início da Seção 1 para notação):

$$J = \left]-\infty, \beta\right[^{\theta},$$

e se α é um ordinal sucessor, digamos $\alpha = \gamma + 1$, então:

$$J = \left]\gamma, \beta\right[^{\theta},$$

i.e., em todo caso J é um aberto básico da topologia da ordem de θ. Mas a topologia da ordem de I coincide com a topologia induzida por θ e portanto J é aberto na topologia da ordem de I. □

A idéia para se definir Ord_α é que, se I é um intervalo aberto de ordinais, então I seria um subconjunto aberto de Ord (fazendo de conta que Ord é um espaço topológico, munido da topologia da ordem) e portanto deveríamos ter $I_\alpha = \mathrm{Ord}_\alpha \cap I$, pelo Lema 3.1. Daí, para decidir se β pertence a Ord_α deveríamos considerar um intervalo aberto de ordinais I tal que $\beta \in I$ e definir que $\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha$ quando $\beta \in I_\alpha$. Podemos, por exemplo, escolher $I = [0, \beta]$. Isso motiva a seguinte:

3.3. **Definição.** Se α é um ordinal, então Ord_α é a classe[8] de ordinais definida assim:

$$\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha \Longleftrightarrow \beta \in [0, \beta]_\alpha, \tag{3.1}$$

ou seja, Ord_α é a classe formada pelos ordinais β que pertencem à α-ésima derivada de Cantor–Bendixson do intervalo $[0, \beta]$. A classe Ord_α é chamada a *α-ésima derivada de Cantor–Bendixson* da classe dos ordinais.

3.4. **Lema.** *Se I é um intervalo aberto de ordinais e α é um ordinal então:*

$$I_\alpha = \mathrm{Ord}_\alpha \cap I.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que se α, β são ordinais com $\beta \in I$ então $\beta \in I_\alpha$ se e somente se $\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha$. Seja $\theta = [0, \theta[$ um ordinal que contenha I (de modo que θ contém $[0, \beta]$ também). Em vista do Lema 3.2, temos que I e $[0, \beta]$ são abertos em θ e portanto, pelo Lema 3.1:

$$I_\alpha = \theta_\alpha \cap I, \quad [0, \beta]_\alpha = \theta_\alpha \cap [0, \beta].$$

[8]Trabalhando em ZFC, não se deve falar em classes, então o que estamos de fato definindo aqui é um símbolo de predicado binário através da fórmula que aparece do lado direito do sinal de equivalência em (3.1). A notação "$\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha$" significa apenas que o par (α, β) satisfaz esse predicado (uma notação como $\mathrm{Ord}_\alpha(\beta)$ ou $\mathrm{Ord}(\alpha, \beta)$, sem o símbolo $\in$, seria mais apropriada). No entanto, continuaremos escrevendo fórmulas em que fazemos de conta que Ord e Ord_α são conjuntos. É muito fácil traduzir essas fórmulas para as versões precisas em que essas classes são vistas como símbolos de predicado.

Daí:

$$\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha \Longleftrightarrow \beta \in [0,\beta]_\alpha \Longleftrightarrow \beta \in \theta_\alpha \Longleftrightarrow \beta \in I_\alpha. \qquad \square$$

3.5. **Lema.** *Temos que* $\mathrm{Ord}_0 = \mathrm{Ord}$ *e* $\mathrm{Ord}_\beta \subset \mathrm{Ord}_\alpha$*, para* $\beta \geq \alpha$*. Se* α *é um ordinal limite então:*

$$\mathrm{Ord}_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathrm{Ord}_\beta.$$

Demonstração. Para todo ordinal γ, temos:

$$\gamma \in \mathrm{Ord}_0 \Longleftrightarrow \gamma \in [0,\gamma]_0 = [0,\gamma],$$

o que mostra que $\mathrm{Ord}_0 = \mathrm{Ord}$. Se $\beta \geq \alpha$ e γ é um ordinal, temos:

$$[0,\gamma]_\beta \subset [0,\gamma]_\alpha,$$

donde:

$$\gamma \in \mathrm{Ord}_\beta \Longleftrightarrow \gamma \in [0,\gamma]_\beta \Longrightarrow \gamma \in [0,\gamma]_\alpha \Longleftrightarrow \gamma \in \mathrm{Ord}_\alpha.$$

Agora, se α é um ordinal limite então:

$$[0,\gamma]_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} [0,\gamma]_\beta,$$

donde $\gamma \in \mathrm{Ord}_\alpha$ se e somente se $\gamma \in \mathrm{Ord}_\beta$, para todo $\beta < \alpha$. $\square$

3.6. **Lema.** *Se* X *é um conjunto bem ordenado e* $S \subset X$ *então todo ponto* $x \in S$ *é interior à direita em* S *relativamente a* X*. (Recorde Definição 1.1).*

Demonstração. Se x não é o maior elemento de X, então o conjunto dos elementos de X maiores do que x possui mínimo, i.e., x admite um sucessor $s(x)$ em X. Daí $s(x) > x$ e $]x, s(x)[\, = \emptyset \subset S$. $\square$

3.7. **Corolário.** *Se* X *é um conjunto bem ordenado munido da topologia da ordem então um ponto* $x \in X$ *é isolado se e somente se* x *é o menor elemento de* X *ou* x *admite antecessor em* X *(equivalentemente,* x *é o menor elemento de* X *ou* x *é o sucessor de um elemento de* X*).*

Demonstração. Temos que $x \in X$ é um ponto isolado se e somente se x é um ponto interior de $\{x\}$. Como (pelo Lema 3.6) x é um ponto interior à direita de $\{x\}$, temos que x é um ponto interior de $\{x\}$ se e somente se for um ponto interior à esquerda de $\{x\}$ (recorde o Lema 1.2). Mas x é um ponto interior à esquerda de $\{x\}$ se e somente se x é o menor elemento de X ou existe $a \in X$, $a < x$, tal que $]a, x[\, \subset \{x\}$. Mas, para $a < x$, temos:

$$]a, x[\, \subset \{x\} \Longleftrightarrow\,]a, x[\, = \emptyset \Longleftrightarrow x \text{ é o sucessor de } a,$$

o que completa a demonstração. $\square$

3.8. **Corolário.** *Dados um ordinal α e dado $\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha$, então $\beta \in \mathrm{Ord}_{\alpha+1}$ se e somente se β não é o menor elemento de Ord_α e β não admite antecessor em Ord_α (equivalentemente, β não é o menor elemento de Ord_α e β não é o sucessor, relativamente a Ord_α, de um elemento de Ord_α).*

Demonstração. Seja $\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha$, de modo que $\beta \in [0,\beta]_\alpha$. Daí $\beta \in \mathrm{Ord}_{\alpha+1}$ se e somente se $\beta \in [0,\beta]_{\alpha+1}$. Por definição, $[0,\beta]_{\alpha+1}$ é o conjunto dos elementos de $[0,\beta]_\alpha$ que não são isolados em $[0,\beta]_\alpha$, sendo $[0,\beta]_\alpha$ munido da topologia induzida de $[0,\beta]$. Mas, como $[0,\beta]_\alpha$ é fechado em $[0,\beta]$, temos que essa topologia coincide com a topologia da ordem de $[0,\beta]_\alpha$ (Proposição 1.17). Pelo Corolário 3.7, β é isolado em $[0,\beta]_\alpha$ com respeito à topologia da ordem se e somente β é o menor elemento de $[0,\beta]_\alpha$ ou β admite antecessor em $[0,\beta]_\alpha$. Como, pelo Lema 3.4, $[0,\beta]_\alpha = \mathrm{Ord}_\alpha \cap [0,\beta]$ temos que β é o menor elemento de $[0,\beta]_\alpha$ se e somente se β é o menor elemento de Ord_α e que β admite antecessor em $[0,\beta]_\alpha$ se e somente se β admite antecessor em Ord_α. Isso completa a demonstração. $\square$

3.9. **Corolário.** *A primeira derivada de Cantor–Bendixson Ord_1 da classe dos ordinais coincide com a classe dos ordinais limites.*

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 3.8, levando em conta que $\mathrm{Ord}_0 = \mathrm{Ord}$ (Lema 3.5). $\square$

3.10. **Corolário.** *Para todo $\alpha \geq 1$, temos que $0 \notin \mathrm{Ord}_\alpha$.*

Demonstração. O Corolário 3.9 nos dá que $0 \notin \mathrm{Ord}_1$ e o Lema 3.5 nos diz que $\mathrm{Ord}_\alpha \subset \mathrm{Ord}_1$ para $\alpha \geq 1$. $\square$

3.11. **Teorema.** *Dados ordinais α, β com $\beta \neq 0$ então:*

$$\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha \Longleftrightarrow \mathfrak{g}(\beta) \geq \alpha. \tag{3.2}$$

Em outras palavras, em vista do fato que $\mathrm{Ord}_0 = \mathrm{Ord}$, do Corolário 3.10 e do Lema 2.24, temos:

$$\mathrm{Ord}_\alpha = \big\{\omega^\alpha \cdot \gamma : \gamma \in \mathrm{Ord}^*\big\}, \tag{3.3}$$

onde $\mathrm{Ord}^* = \mathrm{Ord}$ no caso $\alpha = 0$ e $\mathrm{Ord}^* = \mathrm{Ord} \setminus \{0\}$ no caso $\alpha \neq 0$.

Demonstração. Provemos por indução a afirmação $P(\alpha)$ de que (3.2) vale para todo ordinal $\beta \neq 0$. Se $\alpha = 0$ então ambos os lados de (3.2) valem para todo ordinal $\beta \neq 0$, o que prova $P(0)$. Seja α um ordinal limite e suponha que $P(\delta)$ vale para todo $\delta < \alpha$. Em vista do Lema 3.5, um ordinal β pertence a Ord_α se e somente se $\beta \in \mathrm{Ord}_\delta$, para todo $\delta < \alpha$. Dados $\beta \neq 0$ e $\delta < \alpha$ então $P(\delta)$ nos diz que $\beta \in \mathrm{Ord}_\delta$ se e somente se $\mathfrak{g}(\beta) \geq \delta$. Daí $\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha$ se e somente se $\mathfrak{g}(\beta) \geq \delta$ para todo $\delta < \alpha$, i.e., se e somente se:

$$\mathfrak{g}(\beta) \geq \sup_{\delta<\alpha} \delta = \alpha.$$

Isso prova $P(\alpha)$. Finalmente, assuma $P(\alpha)$ e vamos mostrar $P(\alpha+1)$. Temos então que a igualdade (3.3) vale e, em vista do Corolário 2.8, temos que:

$$\mathrm{Ord}^* \ni \gamma \longmapsto \omega^\alpha \cdot \gamma \in \mathrm{Ord}_\alpha \tag{3.4}$$

é um isomorfismo de classes ordenadas. Seja $\beta \in \mathrm{Ord}_\alpha$, $\beta \neq 0$. Tendo em mente que $\mathrm{Ord}_{\alpha+1} \subset \mathrm{Ord}_\alpha$, para completar a demonstração, é suficiente verificar que:

$$\beta \notin \mathrm{Ord}_{\alpha+1} \Longleftrightarrow \mathfrak{g}(\beta) = \alpha.$$

Escreva $\beta = \omega^\alpha \cdot \gamma$, com $\gamma \in \mathrm{Ord}^*$; como $\beta \neq 0$, temos $\gamma \neq 0$. O Corolário 3.8 nos diz que $\beta \notin \mathrm{Ord}_{\alpha+1}$ se e somente se β é o menor elemento de Ord_α ou β é o sucessor, relativamente a Ord_α, de um elemento de Ord_α. Mas, em vista do isomorfismo (3.4), concluímos que $\beta \notin \mathrm{Ord}_{\alpha+1}$ se e somente se γ é o menor elemento de Ord^* ou γ é o sucessor, relativamente a Ord^*, de um elemento de Ord^*. Como $\gamma \neq 0$, temos que (tanto no caso $\alpha = 0$ como no caso $\alpha \neq 0$), essa condição sobre γ é equivalente à condição de que γ seja um ordinal sucessor. Para completar a demonstração, observe que γ é um ordinal sucessor se e somente se $\mathfrak{g}(\beta) = \alpha$. □

4. A topologia da ordem é hereditariamente normal

Seja X um conjunto totalmente ordenado. Temos que a topologia da ordem em X é Hausdorff. De fato, dados $x, y \in X$, com $x \neq y$, podemos supor sem perda de generalidade que $x < y$. Se existe $z \in X$ com $x < z < y$ então $]-\infty, z[$ e $]z, +\infty[$ são abertos que separam x de y. Por outro lado, se $]x, y[= \emptyset$ (i.e., se y é o sucessor de x em X) então $]-\infty, y[$ e $]x, +\infty[$ são abertos que separam x de y.

Recordamos que um espaço topológico $\mathcal{X}$ é dito *hereditariamente normal* se todo subespaço de $\mathcal{X}$ é normal. Dizemos que dois subconjuntos A, B de um espaço topológico $\mathcal{X}$ são *separados* se $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Temos que $\mathcal{X}$ é hereditariamente normal se e somente se vale a seguinte condição[9]: dados $A, B \subset \mathcal{X}$, se A e B são separados então A e B podem ser separados por abertos (i.e., existem abertos disjuntos U, V em $\mathcal{X}$ tais que $A \subset U$ e $B \subset V$). Nosso objetivo nesta seção é demonstrar o seguinte resultado.

4.1. **Proposição.** *Se X é um conjunto totalmente ordenado, então a topologia da ordem em X é hereditariamente normal.*

No que segue, denotamos por X^* o conjunto totalmente ordenado obtido de X pelo acréscimo de dois pontos novos, $+\infty$, $-\infty$; a ordem em X^* é definida de modo que $+\infty$ seja o maior elemento de X^*, $-\infty$ seja o menor

[9]Se $\mathcal{X}$ é hereditariamente normal e $A, B \subset \mathcal{X}$ são separados, consideramos o subespaço aberto $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$ de X. Temos que $A, B \subset Y$ e A, B têm fechos disjuntos relativamente a Y. Como Y é normal, A e B podem ser separados por abertos de Y, que também são abertos em X. Reciprocamente, suponha que subconjuntos separados de $\mathcal{X}$ possam ser separados por abertos e seja Y um subespaço arbitrário de X. Se A, B são fechados relativamente a Y e disjuntos, então A e B são separados em X e portanto podem ser separados por abertos U, V em X. Daí A, B são separados pelos abertos $U \cap Y$ e $V \cap Y$ de Y.

elemento de X^* e a ordem induzida por X^* em X coincida com a ordem original[10]. A demonstração da Proposição 4.1 será obtida facilmente a partir do seguinte lema.

4.2. **Lema.** *Sejam A, B subconjuntos separados de X. Então existem funções $R : A \to X^*$, $L : B \to X^*$ tais que:*

(i) *$R(a) > a$, para todo $a \in A$ e $L(b) < b$, para todo $b \in B$;*
(ii) *dados $a \in A$, $b \in B$ com $a < b$ então $\left]L(b), R(a)\right[= \emptyset$, i.e., ou $R(a) \le L(b)$ ou $R(a)$ é o sucessor de $L(b)$ em X^*.*

Demonstração. Seja P o subconjunto de $A \times B$ definido por:

$$P = \big\{(a, b) \in A \times B : a < b \text{ e } \left]a, b\right[\cap (A \cup B) = \emptyset\big\}.$$

Temos que P é o gráfico de uma bijeção entre um subconjunto de A e um subconjunto de B, i.e., para todo $a \in A$ existe no máximo um $b \in B$ com $(a, b) \in P$ e para todo $b \in B$ existe no máximo um $a \in A$ com $(a, b) \in P$. De fato, se $a \in A$, $b, b' \in B$, $b \ne b'$ e $(a, b), (a, b') \in P$ então $b \in \left]a, b'\right[\cap (A \cup B)$ se $b < b'$ e $b' \in \left]a, b\right[\cap (A \cup B)$ se $b' < b$. Similarmente, não podemos ter $(a, b), (a', b) \in P$, com $a, a' \in A$ distintos e $b \in B$. Seja:

$$P' = \big\{(a, b) \in P : \left]a, b\right[\ne \emptyset\big\}$$

e considere uma função $\varphi : P' \to X$ que escolhe um elemento $\varphi(a, b)$ de $\left]a, b\right[$, para todo $(a, b) \in P'$.

Dado um elemento $a \in A$, temos que as duas seguintes condições são mutuamente exclusivas:

(1A) existe $a' \in A$ com $a' > a$ e $\left]a, a'\right[\cap B = \emptyset$;
(2A) a está no domínio de P, i.e., existe (um único) $b \in B$ com $(a, b) \in P$.

De fato, se $a' \in A$, $b \in B$ satisfazem $a' > a$, $\left]a, a'\right[\cap B = \emptyset$ e $(a, b) \in P$ então não podemos ter $a' < b$ (senão $a' \in \left]a, b\right[\cap (A \cup B)$), nem $a' = b$ (pois A e B são disjuntos), nem $a' > b$ (senão $b \in \left]a, a'\right[\cap B$). Definimos então a função $R : A \to X^*$ da seguinte forma:

- se $a \in A$ satisfaz (1A), escolhemos $R(a) \in A$ com $R(a) > a$ e $\left]a, R(a)\right[$ disjunto de B.
- Se $a \in A$ satisfaz (2A), seja $b \in B$ com $(a, b) \in P$. Se $(a, b) \in P'$, tomamos $R(a) = \varphi(a, b)$ e se $(a, b) \notin P'$ tomamos $R(a) = b$.
- Se $a \in A$ não satisfaz nem (1A) nem (2A), escolhemos $R(a)$ em $X \cup \{+\infty\}$ tal que $R(a) > a$ e $\left]a, R(a)\right[$ é disjunto de B. (A existência de um tal $R(a)$ segue do fato que a não está no fecho de B.)

É fácil ver que, para todo $a \in A$, $R(a) > a$ e $\left]a, R(a)\right[\cap B = \emptyset$.

---

[10]A introdução do conjunto ordenado X^* é compatível com a notação para intervalos introduzida na Seção 1: por exemplo, se $a \in X$ então, de acordo com a notação da Seção 1, $\left]a, +\infty\right[$ denota o conjunto dos elementos de X maiores do que a, que coincide com o conjunto dos elementos de X^* maiores do que a e menores do que $+\infty$.

Para definir a função L procedemos de forma similar. Em primeiro lugar, para $b \in B$, as condições a seguir são mutuamente exclusivas:

(1B) existe $b' \in B$ com $b' < b$ e $]b', b[\cap A = \emptyset$;
(2B) b está na imagem de P, i.e., existe (um único) $a \in A$ com $(a, b) \in P$.

Definimos então $L : B \to X^*$ da seguinte forma:

- se $b \in B$ satisfaz (1B), escolhemos $L(b) \in B$ com $L(b) < b$ e $]L(b), b[$ disjunto de A.
- Se $b \in B$ satisfaz (2B), seja $a \in A$ com $(a, b) \in P$. Se $(a, b) \in P'$, tomamos $L(b) = \varphi(a, b)$ e se $(a, b) \notin P'$ tomamos $L(b) = a$.
- Se $b \in B$ não satisfaz nem (1B) nem (2B), escolhemos $L(b)$ em $X \cup \{-\infty\}$ tal que $L(b) < b$ e $]L(b), b[$ é disjunto de A. (A existência de um tal $L(b)$ segue do fato que b não está no fecho de A.)

Como antes, temos $L(b) < b$ e $]L(b), b[\cap A = \emptyset$, para todo $b \in B$.

Resta agora provar (ii). Sejam $a \in A$, $b \in B$ com $a < b$. Como $]a, R(a)[$ é disjunto de B, não pode ser $b \in]a, R(a)[$ e portanto $R(a) \leq b$. Similarmente, $a \leq L(b)$. Se a satisfaz a condição (1A) então $R(a) \in A$, de modo que não pode ser $R(a) \in]L(b), b[$. Como $R(a) < b$, temos necessariamente $R(a) \leq L(b)$. Isso completa a demonstração de (ii) no caso em que a satisfaz (1A). Similarmente, se b satisfaz (1B) obtemos $R(a) \leq L(b)$ e completamos a demonstração de (ii). Assuma então que a não satisfaz (1A) e b não satisfaz (1B). O fato que a não satisfaz (1A) implica que $]a, R(a)[$ é disjunto de A: de fato, se existisse $a' \in]a, R(a)[\cap A$, teríamos $a' \in A$, $a' > a$ e $]a, a'[\subset]a, R(a)[$ disjunto de B. Similarmente, o fato que b não satisfaz (1B) implica que $]L(b), b[$ é disjunto de B. Assim, ambos $]a, R(a)[$ e $]L(b), b[$ são disjuntos de $A \cup B$. Se $R(a) \leq L(b)$, a demonstração de (ii) está completa. Supomos então $L(b) < R(a)$. Nesse caso $a \leq L(b) < R(a) \leq b$ e portanto:

$$]a, b[=]a, R(a)[\cup]L(b), b[$$

donde $]a, b[$ é disjunto de $A \cup B$. Daí $(a, b) \in P$ (de modo que a satisfaz (2A) e b satisfaz (2B)). Se fosse $(a, b) \in P'$, teríamos $L(b) = R(a) = \varphi(a, b)$. Temos então que $(a, b) \notin P'$, donde $L(b) = a$, $R(a) = b$ e:

$$]L(b), R(a)[=]a, b[= \emptyset. \qquad \square$$

Demonstração da Proposição 4.1. Sejam A, B subconjuntos separados de X. O Lema 4.2 nos dá funções $R_1 : A \to X^*$, $L_1 : B \to X^*$ com $R_1(a) > a$, para todo $a \in A$, $L_1(b) < b$, para todo $b \in B$ e $]L_1(b), R_1(a)[= \emptyset$, para todos $a \in A$, $b \in B$ com $a < b$. Aplicando o Lema 4.2 com os papéis de A e B trocados, obtemos funções $R_2 : B \to X^*$, $L_2 : A \to X^*$ com $R_2(b) > b$, para todo $b \in B$, $L_2(a) < a$, para todo $a \in A$ e $]L_2(a), R_2(b)[= \emptyset$, para todos $a \in A$, $b \in B$ com $b < a$. Seja $L : A \cup B \to X^*$ a função que estende L_1, L_2 e seja $R : A \cup B \to X^*$ a função que estende R_1, R_2. Daí $L(a) < a < R(a)$, para todo $a \in A$, $L(b) < b < R(b)$, para todo $b \in B$ e $]L(a), R(a)[\cap]L(b), R(b)[=]L(b), R(a)[\cap]L(a), R(b)[= \emptyset$, para todos $a \in A$,

$b \in B$. Temos então que os abertos:

$$U = \bigcup_{a \in A} \left]L(a), R(a)\right[, \quad V = \bigcup_{b \in B} \left]L(b), R(b)\right[,$$

separam A de B. $\square$