SUPERFÍCIES REGULARES

DANIEL V. TAUSK

Uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que pode ser coberto por (uma ou mais) parametrizações regulares. Tais parametrizações fazem o papel de sistemas de coordenadas na superfície. Abaixo apresentamos as definições precisas.

Definição 1. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Uma *parametrização regular* de classe C^r ($1 \le r \le \infty$) para S é uma função $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^r, em que U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) as derivadas parciais $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ são linearmente independentes, para todo $(u, v) \in U$;

(2) $\sigma : U \to \sigma[U]$ é um *homeomorfismo*, isto é, σ é injetora e a aplicação inversa $\sigma^{-1} : \sigma[U] \to \mathbb{R}^2$ é contínua;

(3) a imagem $\sigma[U]$ é um subconjunto de S e $\sigma[U]$ é um aberto relativamente a S (veja Definição 2 a seguir).

Definição 2. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Um subconjunto A de S é dito *aberto relativamente a* S se para todo $p \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(p; r) \cap S$ está contido em A, em que $B(p; r)$ denota a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro p e raio r.

Intuitivamente, A é aberto relativamente a S se para todo $p \in A$ há uma "margem de segurança" dentro de S formada só por pontos de A; em outras palavras, pontos próximos a p *que estão em* S também estão em A. Por exemplo, o intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ não é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, mas é aberto *relativamente a* $[0, 1]$. Note que há pontos tão próximos quanto se queira de 0 que estão fora de $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, mas pontos próximos a 0 *que estão em* $[0, 1]$ também estão em $\left[0, \frac{1}{2}\right[$.

No que segue fazemos uma pequena discussão para motivar a Definição 1. Recorde que no início do curso nós definimos um *sistema de coordenadas* em $\mathbb{R}^n$ como sendo um difeomorfismo Φ entre dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ (esse difeomorfismo é a função que a cada ponto associa as coordenadas do ponto no sistema de coordenadas em questão). A motivação para que sistemas de coordenadas sejam definidos dessa forma é a seguinte: quando consideramos a representação de uma função f num sistema de coordendadas Φ — tal representação nada mais é que a composição $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1}$ — queremos que seja verdade que a função f é diferenciável se, e somente se,

Date: 15 de maio de 2019.

sua representação $\tilde{f}$ o for. Em outras palavras, não queremos que o ato de representar a função num sistema de coordenadas distorça as propriedades de diferenciabilidade da função.

Parametrizações regulares de uma superfície fazem o papel de sistemas de coordenadas nessa superfície. Por exemplo, uma parametrização da superfície da Terra em termos de latitude e longitude nos dá um sistema de coordenadas na superfície da Terra. Espera-se então que haja alguma similaridade entre a noção de sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ e a noção de parametrização regular de uma superfície. Poderíamos então exigir que uma parametrização σ de uma superfície S seja um difeomorfismo? Isso não faria sentido, pois a noção de diferenciabilidade que estudamos no curso é para funções cujo domínio é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. O domínio da aplicação inversa σ^{-1} não é aberto em $\mathbb{R}^3$, então a noção de diferenciabilidade para σ^{-1} não se aplica. No entanto, faz sentido considerar a continuidade da aplicação σ^{-1} e assim podemos exigir que σ seja um homeomorfismo (condição (2)). Embora a imagem de σ não poderia ser um aberto de $\mathbb{R}^3$ (já que uma superfície não vai conter um aberto não vazio), podemos pedir que a imagem de σ seja um aberto *relativo* a S (condição (3)). A condição (1) garante que a superfície tenha um plano tangente bem definido em cada ponto: veremos que as derivadas parciais da parametrização σ formarão justamente uma base desse plano.

Definição 3. Um subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* de classe C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ se S pode ser coberto por imagens de parametrizações regulares de classe C^r para S, isto é, se para todo $p \in S$ existe uma parametrização regular $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^r para S tal que p pertence à imagem de σ.

Exemplo 1. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^r $(1 \leq r \leq \infty)$, em que U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Temos que o *gráfico* de f

$$S = \big\{\big(x, y, f(x, y)\big) : (x, y) \in U\big\}$$

é uma superfície regular de classe C^r. Podemos cobrir S com uma única parametrização $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big),$$

para todo $(x, y) \in U$. Afirmamos que σ é uma parametrização regular. Em primeiro lugar, temos que as derivadas parciais

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = \Big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Big) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \Big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big)$$

são linearmente independentes, para todo $(x, y) \in U$. A função inversa $\sigma^{-1} : S \to \mathbb{R}^2$ é nada mais que a restrição à S da projeção

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \pi(x, y, z) = (x, y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

que é contínua. Finalmente, a imagem $\sigma[U]$ é igual a S e portanto é aberta relativamente a S.

Exemplo 2. Seja $R > 0$ e considere a esfera

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\big\} \tag{1}$$

de centro na origem e raio R. Temos que a função $\sigma : \,]0, 2\pi[\, \times \,]0, \pi[\, \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(\theta, \phi) = (R \cos\theta \operatorname{sen}\phi, R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$

para todo $\theta \in \,]0, 2\pi[$ e todo $\phi \in \,]0, \pi[$ é uma parametrização regular de classe C^∞ para S. De fato, como já calculamos várias vezes, vale que

$$\Big\|\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta, \phi)\Big\| = R^2 \operatorname{sen}\phi$$

e portanto os vetores $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta, \phi)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta, \phi)$ são linearmente independentes para $\phi \in \,]0, \pi[$. A imagem de σ é o complementar em S do meridiano

$$\big\{(x, y, z) \in S : y = 0 \text{ e } x \geq 0\big\} \tag{2}$$

e é aberta relativamente a S. A verificação rigorosa de que a inversa de σ é contínua pode ser feita, por exemplo, usando o Teorema da Função Inversa para verificar que a função $\Psi : \,]0, +\infty[\, \times \,]0, 2\pi[\, \times \,]0, \pi[\, \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Psi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi),$$

para todo $(\rho, \theta, \phi) \in \,]0, +\infty[\, \times \,]0, 2\pi[\, \times \,]0, \pi[$ é um difeomorfismo de classe C^∞; daí notamos que

$$\Psi^{-1}(x, y, z) = \big(R, \sigma^{-1}(x, y, z)\big),$$

para todo (x, y, z) na imagem de σ. Como Ψ^{-1} é contínua, segue que σ^{-1} também é contínua.

Não é possível cobrir a esfera com uma única parametrização regular. Precisamos uma segunda parametrização que cubra os pontos do meridiano (2) que foi excluído. Para isso, podemos considerar uma parametrização similar a σ, por exemplo $\tau : \,]-\pi, \pi[\, \times \,]0, \pi[\, \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\tau(\theta, \phi) = (R \cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\phi, R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi),$$

para todo $\theta \in \,]-\pi, \pi[$ e todo $\phi \in \,]0, \pi[$. A imagem de τ exclui o meridiano

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x \leq 0\big\}$$

que é disjunto de (2). Assim, S é igual à união das imagens de σ e τ. Isso prova que a esfera S é uma superfície regular de classe C^∞.

Como vimos acima, pode ser um tanto trabalhoso mostrar que um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular descrevendo explicitamente as parametrizações. O seguinte teorema é útil.

Teorema 1. *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ *definida num subconjunto aberto* A *de* $\mathbb{R}^3$*. Seja* $c \in \mathbb{R}$ *e considere a superfície de nível*

$$S = \big\{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = c\big\}$$

da função f*. Se o gradiente* $\nabla f(x, y, z)$ *for não nulo para todo* $(x, y, z) \in S$*, então* S *é uma superfície regular de classe* C^r*.*

Demonstração. Seja $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$. Vamos mostrar que existe uma parametrização regular de S cuja imagem contém p. Como $\nabla f(p) \neq 0$, vale que alguma das coordenadas de $\nabla f(p)$ é não nula. Digamos, por exemplo, que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. O Teorema da Função Implícita nos dá então um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ contendo (p_1, p_2), um subconjunto aberto V de $\mathbb{R}$ contendo p_3 e uma função $g : U \to V$ de classe C^r tais que, para todo $(x, y) \in U$ e todo $z \in V$, vale que

$$f(x, y, z) = c \Longleftrightarrow z = g(x, y).$$

Em outras palavras, a interseção de S com $U \times V$ é o gráfico de g. Obtemos então uma parametriação regular $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ para S como no Exemplo 1 fazendo

$$\sigma(x, y) = \big(x, y, g(x, y)\big),$$

para todo $(x, y) \in U$. $\square$

Exemplo 3. A esfera (1) é a superfície de nível R^2 da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Como $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ só é nulo para $(x, y, z) = 0$ e a origem não pertence a S, segue do Teorema 1 que S é uma superfície regular de classe C^∞.

Exemplo 4. O cilindro infinito

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\big\}, \tag{3}$$

com $R > 0$, é uma superfície regular de classe C^∞, já que é a superfície de nível R^2 da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Note que $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ só se anula no eixo z, que não intersecta S.

Observação 1. É verdade em geral que a interseção de uma superfície regular de classe C^r em $\mathbb{R}^3$ com um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ é ainda uma superfície regular de classe C^r em $\mathbb{R}^3$. Assim, por exemplo, o pedaço do cilindro (3) definido por

$$\begin{aligned}&\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=R^2 \text{ e } a<z<b\big\}\\ &\qquad=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=R^2\big\}\cap\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a<z<b\big\}\end{aligned}$$

também é uma superfície regular de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$, para $R>0$ e $a<b$. No entanto, pode-se mostrar que o cilindro

$$\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=R^2 \text{ e } a\le z\le b\big\}$$

"com a beirada" (formada pelos círculos em $z=a$ e $z=b$) não é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 5. Seja $S\subset\mathbb{R}^3$ o toro obtido pela rotação em torno do eixo z do círculo de centro $(R,0,0)$ e raio r no plano xz, em que $0<r<R$. Temos que $(x-R)^2+z^2=r^2$ é uma equação para esse círculo no plano xz e uma equação para o toro é obtida trocando x nessa equação por $\sqrt{x^2+y^2}$ que é a distância do ponto (x,y,z) até o eixo z. Temos então que o toro S é dado por

$$S=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)^2+z^2=r^2\Big\}$$

de modo que S é a superfície de nível r^2 da função

$$f:\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\neq(0,0)\big\}\longrightarrow\mathbb{R}$$

definida por

$$f(x,y,z)=\big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)^2+z^2,$$

para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ com $(x,y)\neq(0,0)$. O gradiente de f é dado por

$$\nabla f(x,y,z)=\left(2\big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},2\big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},2z\right).$$

Esse gradiente só é nulo nos pontos do círculo

$$\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0 \text{ e } x^2+y^2=R^2\big\}$$

que não corta o toro. Logo o toro é uma superfície regular de classe C^∞. Evidentemente, poderíamos também mostrar que o toro (ou o cilindro) é uma superfície regular construindo diretamente as parametrizações regulares em vez de usar o Teorema 1.

Plano tangente

Definição 4. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de classe C^r $(1 \leq r \leq \infty)$. Dado $p \in S$, então o *plano tangente* T_pS a S no ponto p é definido como sendo o conjunto de todos os vetores tangentes $\gamma'(0)$, em que $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma curva derivável com imagem contida em S, $\gamma(0) = p$ e $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo 0.

O plano tangente T_pS deve ser pensado como o conjunto dos *vetores* que são tangentes a S no ponto p e não deve ser confundido com o conjunto dos *pontos* daquele plano tangente a S que normalmente desenhamos e que passa por p. O plano T_pS contém sempre o vetor nulo, pois podemos considerar na definição acima a curva γ que é constante e igual a p. Na verdade, pode-se mostrar que T_pS é sempre um subespaço vetorial de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, se $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ é uma parametrização regular para S com $\sigma(u, v) = p$ para algum $(u, v) \in U$, então mostra-se que as derivadas parciais $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ formam uma base de T_pS. Nas condições do Teorema 1 vale também que T_pS é o plano ortogonal ao gradiente $\nabla f(p)$, para qualquer $p \in S$.

Generalização para dimensão arbitrária

Podemos generalizar facilmente as definições e os resultados anteriores para dimensão arbitrária e definir a noção de superfície de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ (para $0 \leq k \leq n$). A palavra que normalmente se usa nesse contexto é *subvariedade* de $\mathbb{R}^n$ (em inglês, *submanifold*) em vez de superfície.

Definição 5. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma *parametrização regular* de classe C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ e dimensão k $(0 \leq k \leq n)$ para S é uma função $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r, em que U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^k$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) as derivadas parciais $\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(u)$, $\ldots$, $\frac{\partial \sigma}{\partial u_k}(u)$ são linearmente independentes, para todo $u \in U$;
(2) $\sigma : U \to \sigma[U]$ é um homeomorfismo;
(3) a imagem $\sigma[U]$ é um subconjunto de S e $\sigma[U]$ é um aberto relativamente a S.

Dizemos que S é uma *subvariedade* de classe C^r e dimensão k de $\mathbb{R}^n$ se S pode ser coberta por imagens de parametrizações regulares de classe C^r e dimensão k para S, isto é, se para todo $p \in S$ existe uma parametrização regular $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r e dimensão k para S tal que p pertence à imagem de σ.

A generalização do Teorema 1 para esse contexto é a seguinte.

Teorema 2. *Seja $f : A \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma função de classe C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ definida num subconjunto aberto A de $\mathbb{R}^n$, em que $0 \leq k \leq n$. Seja $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ e considere a superfície de nível*

$$S = \big\{p \in A : f(p) = c\big\}$$

da função f. Se os gradientes

$$\nabla f_1(p),\ \ldots,\ \nabla f_{n-k}(p) \tag{4}$$

das funções coordenadas de f forem linearmente independentes para todo $p \in S$, então S é uma subvariedade de classe C^r e dimensão k de $\mathbb{R}^n$.

Note que a igualdade $f(p) = c$ é um sistema com $n - k$ equações. Cada equação "remove" uma dimensão do espaço ambiente $\mathbb{R}^n$: se tivéssemos uma única equação (mais a hipótese de gradiente não nulo), teríamos um conjunto solução com dimensão $n - 1$ (a dimensão de $\mathbb{R}^n$ menos um). Com $n - k$ equações (mais a hipótese de independência linear dos gradientes), temos um conjunto solução S com dimensão $k = n - (n - k)$, como o teorema diz.

A Definição 4 de plano tangente se generaliza diretamente para subvariedades S de dimensão k de $\mathbb{R}^n$ (basta trocar $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}^n$). Nesse contexto, para $p \in S$, chamamos T_pS de *espaço tangente* a S no ponto p. Temos que T_pS é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Além do mais, se $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ é uma parametrização regular para S com $\sigma(u) = p$ para algum $u \in U$, então as derivadas parciais $\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_k}(u)$ formam uma base de T_pS. Nas condições do Teorema 2, os gradientes (4) formam uma base do *complemento ortogonal* de T_pS em $\mathbb{R}^n$.

Observação 2. A condição (1) na Definição 5 nos diz que as colunas da matriz Jacobiana de σ no ponto $u \in U$ são linearmente independentes. Isso é equivalente a dizer que a diferencial $\mathrm{d}\sigma(u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (que é a transformação linear que é representada na base canônica pela matriz Jacobiana) é injetora. De fato, vale que uma transformação linear é injetora se, e somente se, a matriz que a representa possui colunas linearmente independentes[1].

Observação 3. No Teorema 2, a hipótese de que os gradientes (4) sejam linearmente independentes nos diz que as linhas da matriz Jacobiana de f no ponto $p \in S$ são linearmente independentes. Isso é equivalente a dizer que a diferencial $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ é uma transformação linear sobrejetora. De fato, vale que uma transformação linear é sobrejetora se, e somente se, a matriz que a representa possui linhas linearmente independentes[2].

---

[1] Isso segue do seguinte resultado de Álgebra Linear: se V e W são espaços vetoriais e se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V, então uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, os vetores $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ são linearmente independentes. Agora note que tais vetores (representados numa base de W) aparecem justamente nas colunas da matriz que representa T nessas bases.

[2] Isso pode ser mostrado, por exemplo, notando que uma transformação linear é sobrejetora se, e somente se, sua transposta é injetora.