O TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ PARA MEDIDAS

DANIEL V. TAUSK

Ao longo do texto, X denotará sempre um espaço topológico fixado. Além do mais, as seguintes notações serão utilizadas:

- $\operatorname{supp} f$ denota o *suporte* de uma função $f : X \to \mathbb{R}$, i.e., o fecho do conjunto $\big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\}$;
- $C_{\rm c}(X)$ denota o espaço das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ com suporte compacto;
- se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \vee b$ (resp., $a \wedge b$) denota o máximo (resp., o mínimo) entre a e b;
- se f, g são funções a valores reais com o mesmo domínio, denotamos por $f \vee g$ (resp., $f \wedge g$) a função definida por $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ (resp., $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$), para todo x;
- se f, g são funções a valores reais com o mesmo domínio, escrevemos $f \le g$ quando $f(x) \le g(x)$, para todo x;
- se f é uma função a valores reais e se $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos por $[f > a]$ (resp., $[f \ge a]$ ou $[a < f \le b]$) o conjunto $f^{-1}\big(\,]a, +\infty[\,\big)$ (resp., o conjunto $f^{-1}\big([a, +\infty[\,\big)$ ou $f^{-1}\big(\,]a, b]\,\big)$);
- se $(f_n)_{n \ge 1}$ é uma seqüência de funções a valores reais com o mesmo domínio, escrevemos $f_n \nearrow f$ se para todo x a seqüência $\big(f_n(x)\big)_{n \ge 1}$ é crescente e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;
- se A é um subconjunto de X, denotamos por $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ a função característica de A;
- se A é um subconjunto de X, denotamos por $A^{\rm c}$ o complementar de A em X.

1. O Teorema Principal

Nesta seção X denotará sempre um espaço topológico localmente compacto Hausdorff.

1.1. **Definição.** Um funcional linear $\lambda : C_{\rm c}(X) \to \mathbb{R}$ é dito *positivo* se $\lambda(f) \ge 0$ para toda função não negativa $f \in C_{\rm c}(X)$.

No que segue, consideramos um funcional linear positivo $\lambda : C_{\rm c}(X) \to \mathbb{R}$ fixado. Obviamente λ é *monotônico*, i.e., se $f, g \in C_{\rm c}(X)$ e $f \le g$ então $\lambda(f) \le \lambda(g)$.

Date: 16 de abril de 2005.

1.2. **Definição.** Uma *medida de Borel* em X é uma medida μ definida na σ-álgebra de Borel de X. Uma medida de Borel μ em X é dita *regular* quando satisfaz as seguintes condições:

- $\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) : U \supset A \text{ aberto em } X\big\}$, para todo Boreleano A em X;
- $\mu(U) = \sup\big\{\mu(K) : K \subset U \text{ compacto}\big\}$, para todo subconjunto aberto U de X;
- $\mu(K) < +\infty$, para todo subconjunto compacto K de X.

1.3. *Observação.* Se μ é uma medida de Borel regular então:

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(K) : K \subset A \text{ compacto}\big\},$$

para todo Boreleano $A \subset X$ com $\mu(A) < +\infty$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \supset A$ em X tal que $\mu(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$; existe também um compacto $K \subset U$ com $\mu(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\mu(K \setminus A) \le \mu(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$, existe um aberto V em X contendo $K \setminus A$ tal que $\mu(V) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí $K' = K \cap V^{\mathrm{c}}$ é um subconjunto compacto de A e $A \setminus K' \subset (U \setminus K) \cup V$, de modo que $\mu(A \setminus K') < \varepsilon$.

1.4. **Lema.** *Dado um subconjunto compacto $K \subset X$ e um subconjunto fechado $F \subset X$ com $K \cap F = \emptyset$ então existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ com $f|_K \equiv 1$ e $f|_F \equiv 0$.*

Demonstração. Seja $\widehat{X} = X \cup \{\omega\}$ a compactificação de Alexandroff de X, i.e., os subconjuntos abertos de $\widehat{X}$ são os subconjuntos abertos de X e os complementares em $\widehat{X}$ dos subconjuntos compactos de X. Temos que $\widehat{X}$ é compacto e Hausdorff e portanto normal. Como K é compacto e $\widehat{X}$ é Hausdorff, segue que K é fechado em $\widehat{X}$. Se $\overline{F}$ denota o fecho de F em $\widehat{X}$ então $\overline{F} \cap X = F$, já que F é fechado em X. Daí $K \cap \overline{F} = \emptyset$ e uma aplicação do Lema de Urisohn ao espaço normal $\widehat{X}$ nos dá uma função contínua $f : \widehat{X} \to [0,1]$ com $f|_K \equiv 1$ e $f|_{\overline{F}} \equiv 0$. A função desejada é obtida considerando a restrição de f a X. □

1.5. **Corolário.** *Se K é um subconjunto compacto de um aberto $U \subset X$ então existe $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tal que $0 \le f \le 1$, $f|_K \equiv 1$ e $\operatorname{supp} f \subset U$.*

Demonstração. Como X é localmente compacto Hausdorff, existe um aberto relativamente compacto V com $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Pelo Lema 1.4, existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_K \equiv 1$ e $f|_{V^{\mathrm{c}}} \equiv 0$. Daí $\operatorname{supp} f$ é compacto e está contido em U. □

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita *semi-contínua inferiormente* se para todo $x_0 \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$, para todo $x \in V$. Equivalentemente, $f : X \to \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente se o conjunto $[f > a]$ é aberto em X, para todo $a \in \mathbb{R}$. No que segue, denotamos por $\mathcal{S}(X)$ o conjunto das funções $f : X \to [0,+\infty[$ não negativas e semi-contínuas inferiormente. As seguintes propriedades são de fácil verificação:

- se $f, g \in \mathcal{S}(X)$ então $f + g \in \mathcal{S}(X)$;
- se $f \in \mathcal{S}(X)$ e $c \geq 0$ então $cf \in \mathcal{S}(X)$;
- se $\mathfrak{F}$ é um subconjunto não vazio de $\mathcal{S}(X)$ tal que o conjunto

$$\big\{g(x) : g \in \mathfrak{F}\big\} \tag{1.1}$$

é limitado para todo $x \in X$ então a função $f = \sup \mathfrak{F}$ definida por

$$f(x) = \sup_{g \in \mathfrak{F}} g(x), \quad x \in X,$$

está em $\mathcal{S}(X)$.

1.6. **Lema.** *Se* $f \in \mathcal{S}(X)$ *e se* $\mathfrak{F} = \big\{\phi \in C_{\mathrm{c}}(X) : 0 \leq \phi \leq f\big\}$ *então* $f = \sup \mathfrak{F}$.

Demonstração. Dados $x_0 \in X$ e $c \in \,]0, f(x_0)[$, devemos exibir $\phi \in C_{\mathrm{c}}(X)$ com $0 \leq \phi \leq f$ e $\phi(x_0) \geq c$. Seja U uma vizinhança aberta de x_0 tal que $f(x) > c$, para todo $x \in U$. Pelo Corolário 1.5 existe $g \in C_{\mathrm{c}}(X)$ com $0 \leq g \leq 1$, $g(x_0) = 1$ e $\operatorname{supp} g \subset U$. A função ϕ que procuramos é obtida definindo $\phi = cg$. □

Segue da monotonicidade do funcional positivo λ que se $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ é uma função não negativa então:

$$\lambda(f) = \sup\big\{\lambda(\phi) : \phi \in C_{\mathrm{c}}(X),\ 0 \leq \phi \leq f\big\}. \tag{1.2}$$

No que segue, usamos a igualdade (1.2) para definir $\lambda(f) \in [0, +\infty]$ para toda $f \in \mathcal{S}(X)$. Obviamente, se $f, g \in \mathcal{S}(X)$ e $f \leq g$ então $\lambda(f) \leq \lambda(g)$.

Um subconjunto $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{S}(X)$ é dito *dirigido* se dadas $f, g \in \mathfrak{F}$ existe $h \in \mathfrak{F}$ com $h \geq f \vee g$.

1.7. **Lema.** *Dado um subconjunto dirigido não vazio* $\mathfrak{F} \subset \mathcal{S}(X)$ *tal que o conjunto* (1.1) *é limitado para todo* $x \in X$ *e se* $f = \sup \mathfrak{F}$ *então:*

$$\lambda(f) = \sup_{g \in \mathfrak{F}} \lambda(g).$$

Demonstração. Segue da monotonicidade de λ que:

$$\sup_{g \in \mathfrak{F}} \lambda(g) \leq \lambda(f).$$

A prova da desigualdade oposta é dividida em três casos.

Caso 1. *O resultado vale se* $\mathfrak{F} \subset C_{\mathrm{c}}(X)$ *e* $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$.

Dado $\varepsilon > 0$, vamos encontrar $g \in \mathfrak{F}$ com $\lambda(g) \geq \lambda(f) - \varepsilon$. Pelo Corolário 1.5 existe uma função não negativa $f_0 \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tal que $f_0|_{\operatorname{supp} f} \equiv 1$. Escolha $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' \lambda(f_0) \leq \varepsilon$. De $f = \sup \mathfrak{F}$, vem:

$$\bigcap_{g \in \mathfrak{F}} [f - g \geq \varepsilon'] = \emptyset.$$

Como para cada $g \in \mathfrak{F}$ o conjunto $[f - g \geq \varepsilon']$ é compacto, temos que existem $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{F}$ tais que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} [f - g_i \geq \varepsilon'] = \emptyset.$$

Já que $\mathfrak{F}$ é dirigido, existe $g \in \mathfrak{F}$ tal que $g \geq g_1 \vee \cdots \vee g_n$; daí:

$$[f - g \geq \varepsilon'] = \emptyset,$$

ou seja, $f(x) - g(x) < \varepsilon'$, para todo $x \in X$. Como o suporte de $f - g$ está contido no suporte de f, temos $f - g \leq \varepsilon' f_0$ e portanto:

$$\lambda(f) - \lambda(g) = \lambda(f - g) \leq \varepsilon' \lambda(f_0) \leq \varepsilon,$$

provando que $\lambda(g) \geq \lambda(f) - \varepsilon$.

Caso 2. *O resultado vale se $\mathfrak{F} \subset C_{\mathrm{c}}(X)$.*

Seja $\phi \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tal que $0 \leq \phi \leq f$. É suficiente mostrar que $\sup_{g \in \mathfrak{F}} \lambda(g) \geq \lambda(\phi)$. O conjunto:

$$\mathfrak{F}_\phi = \big\{ g \wedge \phi : g \in \mathfrak{F} \big\} \subset C_{\mathrm{c}}(X)$$

é dirigido e $\sup \mathfrak{F}_\phi = \phi$. Pelo caso 1, temos:

$$\sup_{h \in \mathfrak{F}_\phi} \lambda(h) = \lambda(\phi).$$

Como $\lambda(g) \geq \lambda(g \wedge \phi)$, para toda $g \in \mathfrak{F}$, temos:

$$\sup_{g \in \mathfrak{F}} \lambda(g) \geq \sup_{g \in \mathfrak{F}} \lambda(g \wedge \phi) = \sup_{h \in \mathfrak{F}_\phi} \lambda(h) = \lambda(\phi).$$

Caso 3. *O resultado vale em geral.*

Para cada $g \in \mathfrak{F}$, considere o conjunto:

$$\mathfrak{F}_g = \big\{ \phi \in C_{\mathrm{c}}(X) : 0 \leq \phi \leq g \big\}.$$

Segue do Lema 1.6 que $g = \sup \mathfrak{F}_g$. Claramente, o conjunto:

$$\mathfrak{F}' = \bigcup_{g \in \mathfrak{F}} \mathfrak{F}_g$$

é dirigido e $\sup \mathfrak{F}' = \sup \mathfrak{F} = f$. Daí, pelo caso 2, temos:

$$\sup_{\phi \in \mathfrak{F}'} \lambda(\phi) = \lambda(f).$$

A definição de λ nos dá:

$$\lambda(g) = \sup \big\{ \lambda(\phi) : \phi \in \mathfrak{F}_g \big\},$$

para toda $g \in \mathfrak{F}$; daí:

$$\sup_{g \in \mathfrak{F}} \lambda(g) = \sup_{\phi \in \mathfrak{F}'} \lambda(\phi) = \lambda(f). \qquad \square$$

1.8. **Corolário.** *Seja* $(f_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência em* $\mathcal{S}(X)$ *tal que* $f_n \nearrow f$*, com* $f \in \mathcal{S}(X)$*. Então:*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(f_n) = \sup_{n\geq 1} \lambda(f_n) = \lambda(f).$$

Demonstração. Basta aplicar o Lema 1.7 ao conjunto dirigido

$$\mathfrak{F} = \big\{f_n : n \geq 1\big\}. \qquad \square$$

1.9. **Corolário.** *Dadas* $f, g \in \mathfrak{F}(X)$ *e* $c \geq 0$ *então* $\lambda(f+g) = \lambda(f) + \lambda(g)$ *e* $\lambda(cf) = c\lambda(f)$*.*

Demonstração. O conjunto:

$$\mathfrak{F} = \big\{\phi + \psi : \phi, \psi \in C_{\mathrm{c}}(X),\ 0 \leq \phi \leq f,\ 0 \leq \psi \leq g\big\}$$

é dirigido e $\sup \mathfrak{F} = f + g$. Segue do Lema 1.7 que:

$$\begin{aligned}\lambda(f+g) = \sup_{\xi\in\mathfrak{F}} \lambda(\xi) &= \sup\big\{\lambda(\phi) : \phi \in C_{\mathrm{c}}(X),\ 0 \leq \phi \leq f\big\}\\ &\quad + \sup\big\{\lambda(\psi) : \psi \in C_{\mathrm{c}}(X),\ 0 \leq \psi \leq g\big\}\\ &= \lambda(f) + \lambda(g).\end{aligned}$$

A igualdade $\lambda(cf) = c\lambda(f)$ segue observando que:

$$\big\{c\phi : \phi \in C_{\mathrm{c}}(X),\ 0 \leq \phi \leq f\big\} = \big\{\xi \in C_{\mathrm{c}}(X) : 0 \leq \xi \leq cf\big\}. \qquad \square$$

Para todo subconjunto aberto $U \subset X$ temos que a função característica χ_U é semi-contínua inferiormente; podemos então definir $\mu(U) \in [0, +\infty]$ fazendo:

$$\mu(U) = \lambda(\chi_U).$$

Temos o seguinte:

1.10. **Lema.** *A aplicação* μ *tem as seguintes propriedades:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*
(b) *dados abertos* $U, V \subset X$ *então* $\mu(U \cup V) + \mu(U \cap V) = \mu(U) + \mu(V)$ *e em particular* $\mu(U \cup V) \leq \mu(U) + \mu(V)$*;*
(c) μ *é* monótona*, i.e., dados abertos* $U, V \subset X$ *com* $U \subset V$ *então* $\mu(U) \leq \mu(V)$*;*
(d) *se* $(U_n)_{n\geq 1}$ *é uma seqüência de subconjuntos abertos de* X *tal que* $U_n \subset U_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$ *então* $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n)$*.*

Demonstração. O item (a) segue do fato que $\lambda(0) = 0$. O item (b) segue do Corolário 1.9 observando que $\chi_U + \chi_V = \chi_{U\cup V} + \chi_{U\cap V}$. O item (c) segue da monotonicidade de λ. Finalmente, o item (d) segue do Corolário 1.8 observando que $\chi_{U_n} \nearrow \chi_U$, onde $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. $\square$

Definimos agora uma aplicação $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ na coleção $\wp(X)$ de todas as partes de X fazendo:

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(U) : U \supset A \text{ aberto em } X\big\}, \tag{1.3}$$

para todo $A \subset X$. Claramente a monotonicidade de μ implica que μ^* é uma extensão de μ, i.e., $\mu^*(U) = \mu(U)$, para todo aberto $U \subset X$.

1.11. **Lema.** *A aplicação* $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ *é uma medida exterior (veja Definição A.1).*

Demonstração. A igualdade $\mu^*(\emptyset) = 0$ segue do item (a) do Lema 1.10, já que μ^* estende μ. A monotonicidade de μ^* é trivial. Mostremos que μ^* é σ-subaditiva. Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos de X e seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Se $\mu^*(A_n) = +\infty$ para algum $n \geq 1$ então a desigualdade $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ é trivial. Suponha então que $\mu^*(A_n) < +\infty$ para todo $n \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ então para cada $n \geq 1$ existe um aberto $U_n \subset X$ contendo A_n com $\mu(U_n) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Do item (b) do Lema 1.10, obtemos:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{k} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(U_n);$$

tomando o limite quando $k \to \infty$ e usando o item (d) do Lema 1.10 concluímos que:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n).$$

Como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, temos:

$$\mu^*(A) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu^*(A_n) + \tfrac{\varepsilon}{2^n}\big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\Big) + \varepsilon.$$

A conclusão segue tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$. □

1.12. **Lema.** *Dado um subconjunto* $A \subset X$ *e uma aplicação* $f \in \mathcal{S}(X)$ *com* $f \geq \chi_A$ *então* $\lambda(f) \geq \mu^*(A)$.

Demonstração. Dado $a \in \,]0, 1[$ então $A \subset [f > a]$ e portanto:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*\big([f > a]\big).$$

Como $U = [f > a]$ é aberto, temos $\mu^*(U) = \mu(U) = \lambda(\chi_U)$; daí:

$$\mu^*(A) \leq \lambda(\chi_U).$$

Além do mais, $f \geq a\chi_U$ e portanto (veja Corolário 1.9):

$$\lambda(f) \geq \lambda(a\chi_U) = a\lambda(\chi_U) \geq a\mu^*(A).$$

A conclusão é obtida tomando o limite quando $a \to 1$. □

1.13. **Corolário.** *A medida exterior* μ^* *é finita em subconjuntos compactos de* X.

Demonstração. Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto e seja $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ uma função não negativa tal que $f|_K \equiv 1$ (veja Corolário 1.5). Daí $f \geq \chi_K$ e portanto o Lema 1.12 nos dá:

$$+\infty > \lambda(f) \geq \mu^*(K).$$ □

1.14. **Corolário.** *Dados abertos* $U, V \subset X$ *com* $U \subset V$ *então:*

$$\mu(V) \geq \mu(U) + \mu^*(V \cap U^{\mathrm{c}}).$$

Demonstração. Seja dada $\phi \in C_c(X)$ com $0 \leq \phi \leq \chi_U$. Como χ_V é semicontínua inferiormente, ϕ é contínua e $\phi \leq \chi_V$, temos $\chi_V - \phi \in \mathcal{S}(X)$; além do mais (veja Corolário 1.9):

$$\mu(V) = \lambda(\chi_V) = \lambda(\chi_V - \phi) + \lambda(\phi),$$

de modo que:

$$\lambda(\chi_V - \phi) = \mu(V) - \lambda(\phi). \tag{1.4}$$

Tendo em mente que $\chi_V - \phi \geq \chi_V - \chi_U = \chi_{V \cap U^c}$, o Lema 1.12 nos dá:

$$\lambda(\chi_V - \phi) \geq \mu^*(V \cap U^c). \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5), obtemos:

$$\mu(V) \geq \mu^*(V \cap U^c) + \lambda(\phi);$$

portanto:

$$\begin{aligned}\mu(V) &\geq \sup\left\{\mu^*(V \cap U^c) + \lambda(\phi) : \phi \in C_c(X),\ 0 \leq \phi \leq \chi_U\right\} \\ &= \mu^*(V \cap U^c) + \lambda(\chi_U) = \mu^*(V \cap U^c) + \mu(U). \quad \square\end{aligned}$$

1.15. **Lema.** *A σ-álgebra $\mathfrak{M}$ de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis (veja Definição A.2) contém os subconjuntos abertos de X.*

Demonstração. Seja $U \subset X$ um aberto e seja $A \subset X$ um subconjunto arbitrário. Devemos mostrar que:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c).$$

Pela subaditividade de μ^*, é suficiente mostrar a desigualdade:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c).$$

Para isso, nós mostraremos que:

$$\mu(V) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c),$$

para todo aberto $V \subset X$ contendo A. Aplicando o Corolário 1.14 aos abertos V e $U_0 = V \cap U$, obtemos:

$$\mu(V) \geq \mu(U_0) + \mu^*(V \cap U_0^c) = \mu(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c),$$

o que completa a demonstração. $\square$

1.16. **Corolário.** *A σ-álgebra $\mathfrak{M}$ contém os Boreleanos de X.* $\square$

Em vista do Teorema A.3, a medida exterior μ^* restringe-se a uma medida completa em $\mathfrak{M}$; denotaremos essa restrição por μ.

1.17. **Lema.** *Toda função $f \in \mathcal{S}(X)$ é Borel mensurável e $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lambda(f)$.*

Demonstração. Seja dada $f \in \mathcal{S}(X)$. A Borel mensurabilidade de f segue do fato que o conjunto $[f > a]$ é aberto em X, para todo $a \in \mathbb{R}$. Provemos a igualdade $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lambda(f)$. Para cada $n \geq 1$, escrevemos:

$$f_n = n\,\chi_{[f>n]} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\,\chi_{[\frac{k-1}{2^n} < f \leq \frac{k}{2^n}]};$$

essa é simplesmente a maneira padrão de produzir uma seqüência de funções simples $f_n : X \to \mathbb{R}$ não negativas com $f_n \nearrow f$. É fácil ver que:

$$f_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} \chi_{[f > \frac{k}{2^n}]},$$

para todo $n \geq 1$. Como os conjuntos $\big[f > \frac{k}{2^n}\big]$ são abertos, temos (veja também Corolário 1.9):

$$\lambda(f_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} \lambda\big(\chi_{[f > \frac{k}{2^n}]}\big) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} \mu\big(\big[f > \tfrac{k}{2^n}\big]\big) = \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu,$$

para todo $n \geq 1$. Daí, usando o Teorema da Convergência Monotônica e o Corolário 1.8, obtemos:

$$\lambda(f) = \lim_{n \to \infty} \lambda(f_n) = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

1.18. **Corolário.** *Dada $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ então f é μ-integrável e:*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lambda(f).$$

Demonstração. Escreva $f = f^+ - f^-$, com $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = -(f \wedge 0)$, de modo que $f^+, f^- \in \mathcal{S}(X)$; pelo Lema 1.17, temos:

$$\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu = \lambda(f^+), \qquad \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu = \lambda(f^-).$$

Note que $\lambda(f^+)$ e $\lambda(f^-)$ são finitos, já que $f^+, f^- \in C_{\mathrm{c}}(X)$. Daí f é μ-integrável e:

$$\lambda(f) = \lambda(f^+) - \lambda(f^-) = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

1.19. **Lema.** *Para todo aberto $U \subset X$ temos:*

$$\mu(U) = \sup \big\{ \mu(K) : K \subset U \text{ compacto} \big\}.$$

Demonstração. Pela monotonicidade da medida μ é suficiente mostrar que:

$$\mu(U) \leq \sup \big\{ \mu(K) : K \subset U \text{ compacto} \big\}.$$

Seja $\mathfrak{F}$ a coleção de todas as aplicações $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tais que $\operatorname{supp} f \subset U$ e $0 \leq f \leq 1$. Claramente $\mathfrak{F}$ é um subconjunto dirigido de $\mathcal{S}(X)$ e segue do Corolário 1.5 que $\sup \mathfrak{F} = \chi_U$. O Lema 1.7 nos dá então:

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \lambda(f) = \lambda(\chi_U) = \mu(U).$$

Para toda $f \in \mathfrak{F}$ o Lema 1.17 implica que:

$$\lambda(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(\operatorname{supp} f).$$

Daí:

$$\mu(U) = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \lambda(f) \leq \sup \big\{ \mu(K) : K \subset U \text{ compacto} \big\}. \qquad \square$$

Finalmente, temos o seguinte:

1.20. **Teorema** (de representação de Riesz)**.** *Seja X um espaço topológico localmente compacto Hausdorff e seja $\lambda : C_{\mathrm{c}}(X) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. Então existe uma única medida de Borel regular μ em X tal que:*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lambda(f), \tag{1.6}$$

para toda $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$.

Demonstração. Seja μ a medida de Borel obtida pela restrição de μ^* à σ-álgebra de Borel de X (veja Corolário 1.16 e Teorema A.2). A regularidade de μ segue do Corolário 1.13, da igualdade (1.3) e do Lema 1.19; além do mais, a igualdade (1.6) segue do Corolário 1.18. Para completar a demonstração, é suficiente mostrar a unicidade de μ. Seja μ' uma medida regular de Borel em X tal que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu' = \lambda(f)$, para toda $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$. Vamos mostrar que $\mu = \mu'$. Como:

$$\mu(A) = \inf \big\{ \mu(U) : U \supset A \text{ aberto em } X \big\},$$
$$\mu'(A) = \inf \big\{ \mu'(U) : U \supset A \text{ aberto em } X \big\},$$

para todo Boreleano $A \subset X$, é suficiente mostrar que μ e μ' coincidem sobre os subconjuntos abertos de X. Seja $U \subset X$ um aberto e seja $\mathfrak{F} \subset C_{\mathrm{c}}(X)$ o conjunto de todas as aplicações $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tais que $0 \leq f \leq 1$ e $\operatorname{supp} f \subset U$. Nós vamos mostrar que:

$$\mu'(U) = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \lambda(f). \tag{1.7}$$

Uma vez que (1.7) estiver demonstrado, seguirá que $\mu = \mu'$; de fato, (1.7) também vale com μ no lugar de μ' e portanto $\mu(U) = \mu'(U)$ para todo aberto $U \subset X$. Provemos (1.7). Dada $f \in \mathfrak{F}$ então $f \leq \chi_U$, de modo que:

$$\lambda(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu' \leq \mu'(U);$$

isso prova que:

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \lambda(f) \leq \mu'(U).$$

Agora, dado um subconjunto compacto K de U, existe $f \in \mathfrak{F}$ com $f|_K \equiv 1$ (veja Corolário 1.5); daí $f \geq \chi_K$ e:

$$\lambda(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu' \geq \mu'(K).$$

Portanto:

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \lambda(f) \geq \sup \big\{ \mu'(K) : K \subset U \text{ compacto} \big\} = \mu'(U). \qquad \square$$

2. Condições Suficientes para Regularidade

Seja X um espaço topológico. Recorde que um subconjunto de X é dito *de tipo F_σ* se pode ser escrito como uma união enumerável de subconjuntos fechados de X.

2.1. **Proposição.** *Seja X um espaço topológico no qual todo aberto é de tipo F_σ (isso vale, por exemplo, se X é metrizável). Se μ é uma medida de Borel finita em X então:*

$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) : U \supset A \text{ aberto em } X\big\}, \tag{2.1}$$

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(F) : F \subset A \text{ fechado em } X\big\}, \tag{2.2}$$

para todo Boreleano A em X.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todos os Boreleanos $A \subset X$ tais que as igualdades (2.1) e (2.2) são satisfeitas. É suficiente demonstrar que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra que contém os abertos de X. Obviamente a coleção $\mathcal{A}$ é fechada por complementação. Seja $(A_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ e escreva $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dado $\varepsilon > 0$, então para cada $n \ge 1$ existem um aberto U_n em X e um fechado F_n em X tais que $F_n \subset A_n \subset U_n$ e:

$$\mu(U_n) < \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \mu(F_n) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Tomando $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ então $F \subset A \subset U$ e:

$$\mu(U) - \mu(A) = \mu(U \setminus A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon,$$

$$\mu(A) - \mu(F) = \mu(A \setminus F) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus F_n) < \varepsilon.$$

O conjunto U é necessariamente aberto, mas F não é necessariamente fechado. No entanto, temos:

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_1 \cup \cdots \cup F_n) > \mu(A) - \varepsilon;$$

portanto existe $n \ge 1$ tal que $\mu(F_1 \cup \cdots \cup F_n) > \mu(A) - \varepsilon$. Isso prova que $A \in \mathcal{A}$. Para completar a demonstração, é suficiente verificar que $\mathcal{A}$ contém os subconjuntos abertos de X. Seja $A \subset X$ um aberto; a condição (2.1) é trivialmente satisfeita. A condição (2.2) segue do fato que A é de tipo F_σ. Logo $A \in \mathcal{A}$ e a demonstração está completa. □

Recorde que um subconjunto de um espaço topológico é dito *σ-compacto* se for igual a uma união enumerável de subconjuntos compactos.

2.2. **Teorema.** *Seja X um espaço topológico localmente compacto Hausdorff tal que todo aberto de X é σ-compacto. Então toda medida de Borel μ em X que seja finita sobre compactos é regular.*

Demonstração. Se $U \subset X$ é aberto então a igualdade:

$$\mu(U) = \sup\big\{\mu(K) : K \subset U \text{ compacto}\big\}$$

segue diretamente do fato que U é σ-compacto. Resta então mostrar que:

$$\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) : U \supset A \text{ aberto em } X\big\},$$

para todo Boreleano $A \subset X$. Seja dado $\varepsilon > 0$ e seja $(K_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de compactos tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Para cada $n \ge 1$, escreva $A_n = A \cap K_n$, de modo que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Como A_n é relativamente compacto e X é localmente compacto, existe um aberto relativamente compacto $V_n \subset X$ tal que $A_n \subset V_n$. Como $\mu(V_n) < +\infty$ e o espaço topológico V_n satisfaz a hipótese da Proposição 2.1, segue que existe um aberto $U_n \subset V_n$ contendo A_n tal que:

$$\mu(U_n) < \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Tomando $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ então U é um aberto de X que contém A e:

$$\mu(U \setminus A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon. \qquad \square$$

Apêndice A. A Medida Determinada por uma Medida Exterior

A.1. **Definição.** Seja X um conjunto arbitrário. Uma *medida exterior* em X é uma função $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ definida no conjunto $\wp(X)$ de todas as partes de X satisfazendo as seguintes condições:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (*monotonicidade*) dados subconjuntos $A, B \subset X$ com $A \subset B$ então $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$;
- (*σ-subaditividade*) dada uma seqüência $(A_n)_{n\ge1}$ de subconjuntos de X então $\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

A.2. **Definição.** Se μ^* é uma medida exterior num conjunto X então um subconjunto $E \subset X$ é dito *μ^*-mensurável* se para todo subconjunto $A \subset X$ vale a igualdade:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}).$$

Observe que, já que μ^* é subaditiva, um subconjunto $E \subset X$ é μ^*-mensurável se e somente se vale a desigualdade:

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}),$$

para todo $A \subset X$.

A.3. **Teorema.** *Se μ^* é uma medida exterior num conjunto X então a coleção $\mathfrak{M}$ de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra de partes de X e a restrição de μ^* a $\mathfrak{M}$ é uma medida completa.*

Demonstração. O resultado segue das afirmações que serão demonstradas a seguir.

Afirmação 1. *Se* $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ *então* $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.

Dado $A \subset X$, temos:

$$\begin{aligned}\text{(A.1)} \quad \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2) \\ &+ \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2^{\mathrm{c}}) \geq \mu^*\big[A \cap \big(E_1 \cup (E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2)\big)\big] + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big) \\ &= \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big);\end{aligned}$$

isso prova que $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.

Afirmação 2. *Se* $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, $A \subset X$ *e* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ *então:*

$$\text{(A.2)} \qquad \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2).$$

Como $\mu^*(A) \leq \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big)$, segue de (A.1) que:

$$\text{(A.3)} \qquad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2^{\mathrm{c}}).$$

Substituindo A por $A \cap (E_1 \cup E_2)$ em (A.3) obtemos (A.2).

Afirmação 3. *Se* $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ *e* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ *então:*

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2).$$

Basta tomar $A = E_1 \cup E_2$ em (A.2).

Afirmação 4. *Se* $E \in \mathfrak{M}$ *então* $E^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{M}$.

Trivial.

Afirmação 5. *Se* $(E_n)_{n\geq 1}$ *é uma seqüência de conjuntos em* $\mathfrak{M}$ *dois a dois disjuntos então a união* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *está em* $\mathfrak{M}$.

Pela afirmação 1, sabemos que $\bigcup_{n=1}^{k} E_n \in \mathfrak{M}$, para todo $k \geq 1$. Além do mais, se $A \subset X$, a afirmação 2 nos dá:

$$\mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A \cap E_n).$$

Daí:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big),\end{aligned}$$

e portanto a monotonicidade de μ^* nos dá:

$$\text{(A.4)} \qquad \mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big).$$

Fazendo $k \to \infty$ em (A.4) e usando a σ-subaditividade de μ^* obtemos:

$$\begin{aligned}\text{(A.5)} \quad \mu^*(A) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big) \\ &\geq \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big).\end{aligned}$$

Isso prova que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$.

Afirmação 6. *Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em $\mathfrak{M}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$.*

Sejam $E_1' = E_1$ e $E_n' = E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$, para $n \geq 2$. Como

$$E_n' = (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1} \cup E_n^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}},$$

segue das afirmações 1 e 4 que $E_n' \in \mathfrak{M}$, para todo $n \geq 1$. Além do mais, os conjuntos E_n' são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n'$. A conclusão segue da afirmação 5.

Afirmação 7. *Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos em $\mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos e se $A \subset X$ então:*

$$\text{(A.6)} \qquad \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

Como:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big),$$

segue de (A.5) que:

$$\text{(A.7)} \qquad \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big).$$

A conclusão é obtida substituindo A por $A \cap \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)$ em (A.7).

Afirmação 8. *Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos em $\mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos então:*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Basta fazer $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ em (A.6).

Afirmação 9. *Se $E \subset X$ e $\mu^*(E) = 0$ então $E \in \mathfrak{M}$.*

Observe que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}),$$

já que $\mu^*(A \cap E) = 0$. $\square$