O TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ PARA MEDIDAS

DANIEL V. TAUSK

No que segue, X sempre denota um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função, então $\operatorname{supp} f$ denota o *suporte* (relativamente a X) de f, i.e., o fecho (em X) do conjunto $\big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\}$. Denotamos por $C_{\mathrm{c}}(X)$ o espaço vetorial real das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ que tem suporte compacto. Começamos com um lema simples de topologia, que é conseqüência da existência de partições da unidade subordinadas a coberturas abertas finitas de espaços compactos Hausdorff. Denote por $X \cup \{\infty\}$ a compactificação de X com um ponto adicional ∞: os abertos de $X \cup \{\infty\}$ são os abertos de X e os complementares em $X \cup \{\infty\}$ dos compactos de X. Temos que $X \cup \{\infty\}$ é um compacto Hausdorff que contém X como um subespaço aberto.

1. **Lema.** *Sejam K um subconjunto compacto de X e $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ uma cobertura finita de K por abertos de X. Então existem funções $f_i \in C_{\mathrm{c}}(X)$, $i = 1, \ldots, n$, tais que, para todo i, $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$, f_i toma valores em $[0,1]$ e $\sum_{i=1}^n f_i$ é igual a 1 nos pontos de K.*

Demonstração. Seja V o complementar de K em $X \cup \{\infty\}$. Então:

$$X \cup \{\infty\} = V \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$$

é uma cobertura aberta do compacto Hausdorff $X \cup \{\infty\}$, à qual podemos subordinar uma partição da unidade: isto é, existem funções contínuas:

$$\xi : X \cup \{\infty\} \to [0,1], \qquad \xi_i : X \cup \{\infty\} \to [0,1], \quad i = 1, \ldots, n,$$

tais que $\xi + \sum_{i=1}^n \xi_i = 1$, o suporte de ξ_i (relativamente a $X \cup \{\infty\}$) está contido em U_i e o suporte de ξ (relativamente a $X \cup \{\infty\}$) está contido em V. Tome $f_i = \xi_i|_X$. O fato que ∞ não está no suporte de ξ_i (relativamente a $X \cup \{\infty\}$) implica que o suporte de f_i (relativamente a X) é compacto. □

2. **Corolário.** *Se K é um subconjunto compacto de X contido num subconjunto aberto U de X então existe $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tomando valores em $[0,1]$ tal que $f|_K \equiv 1$ e $\operatorname{supp} f \subset U$.*

Demonstração. Basta aplicar o Lema 1 com $n = 1$. □

Date: 21 de fevereiro de 2013.

Um funcional linear $\alpha : C_{\mathrm{c}}(X) \to \mathbb{R}$ é dito *positivo* se $\alpha(f) \geq 0$ sempre que $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ satisfaz $f \geq 0$. Uma medida (σ-aditiva, positiva, não necessariamente finita) μ definida na σ-álgebra de Borel de X será dita *regular* se satisfaz as seguintes condições:

(a) $\mu(A) = \inf\big\{\mu(U) : U \text{ subconjunto aberto de } X,\ A \subset U\big\}$, para todo subconjunto Boreleano A de X;
(b) $\mu(U) = \sup\big\{\mu(K) : K \text{ subconjunto compacto de } X,\ K \subset U\big\}$, para todo subconjunto aberto U de X;
(c) $\mu(K) < +\infty$, para todo subconjunto compacto K de X.

3. *Observação.* Se μ é uma medida regular definida na σ-álgebra de Borel de X então a igualdade:

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(K) : K \text{ subconjunto compacto de } X,\ K \subset A\big\},$$

vale para todo subconjunto Boreleano A de X tal que $\mu(A) < +\infty$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um aberto $U \supset A$ com $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$ e um subconjunto compacto K de U com $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Existe também um aberto V contendo $U \setminus A$ com $\mu(V) < \varepsilon$. Daí $K_1 = K \setminus V$ é um subconjunto compacto de A e:

$$\mu(K_1) = \mu(K) - \mu(K \cap V) > \mu(K) - \varepsilon > \mu(U) - 2\varepsilon \geq \mu(A) - 2\varepsilon.$$

Evidentemente, se μ é uma medida regular definida na σ-álgebra de Borel de X então $f \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ define um funcional positivo em $C_{\mathrm{c}}(X)$. No restante desta seção, vamos demonstrar o seguinte resultado.

4. **Teorema** (de representação de Riesz)**.** *Se α é um funcional linear positivo em $C_{\mathrm{c}}(X)$ então existe uma única medida regular μ definida na σ-álgebra de Borel de X tal que $\alpha(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$, para todo $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$.*

No que segue, α é um funcional linear positivo fixado em $C_{\mathrm{c}}(X)$. Se U é um subconjunto aberto de X, definimos:

$$\mu(U) = \sup\big\{\alpha(f) : f \in C_{\mathrm{c}}(X),\ f[X] \subset [0,1],\ \operatorname{supp} f \subset U\big\} \in [0, +\infty].$$

Obviamente, μ é *monotônica*, i.e., $\mu(U) \leq \mu(V)$ se $U \subset V$ são subconjuntos abertos de X. Além do mais, $\mu(\emptyset) = 0$.

5. **Lema.** *A função μ é* finitamente subaditiva*, i.e.:*

$$\mu(U_1 \cup U_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2),$$

se U_1 e U_2 são subconjuntos abertos de X.

Demonstração. Seja $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ com $f[X] \subset [0,1]$ e $\operatorname{supp} f \subset U_1 \cup U_2$. Pelo Lema 1, existem $g_1, g_2 \in C_{\mathrm{c}}(X)$, tomando valores em $[0,1]$, tais que $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $i = 1, 2$, e $g_1 + g_2 = 1$ em $\operatorname{supp} f$. Daí $f = fg_1 + fg_2$ e:

$$\alpha(f) = \alpha(fg_1) + \alpha(fg_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2),$$

e a conclusão é obtida tomando o supremo com respeito a f. $\square$

6. **Lema.** *Se* $(U_n)_{n\ge1}$ *é uma seqüência crescente de subconjuntos abertos de* X *e* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *então* $\mu(U) = \lim_{n\to+\infty} \mu(U_n)$.

Demonstração. Pela monotonicidade de μ, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(U_n) = \sup_{n\ge1} \mu(U_n) \le \mu(U).$$

Para demonstrar a desigualdade oposta, devemos verificar que se $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$, $f[X] \subset [0,1]$ e $\operatorname{supp} f \subset U$ então $\sup_{n\ge1} \mu(U_n) \ge \alpha(f)$. Mas, como $\operatorname{supp} f$ é compacto, temos $\operatorname{supp} f \subset U_n$ para algum n e daí $\mu(U_n) \ge \alpha(f)$. □

7. **Corolário.** *A função* μ *é* σ*-subaditiva, i.e., se* $(U_n)_{n\ge1}$ *é uma seqüência de subconjuntos abertos de* X *e* $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ *então* $\mu(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n)$.

Demonstração. Definindo $V_n = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ e usando os Lemas 5 e 6, obtemos:

$$\mu(U) = \lim_{n\to+\infty} \mu(V_n) \le \lim_{n\to+\infty} [\mu(U_1) + \cdots + \mu(U_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n). \qquad \square$$

8. **Lema.** *Se* U_1, U_2 *são subconjuntos abertos disjuntos de* X *então:*

$$\mu(U_1 \cup U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Demonstração. Uma desigualdade é dada pelo Lema 5. Para a outra, tomamos $f_i \in C_{\mathrm{c}}(X)$ com $f_i[X] \subset [0,1]$, $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$, $i = 1, 2$, e observamos que $f = f_1 + f_2 \in C_{\mathrm{c}}(X)$ satisfaz $f[X] \subset [0,1]$ e $\operatorname{supp} f \subset U_1 \cup U_2$. Daí:

$$\mu(U_1 \cup U_2) \ge \alpha(f) = \alpha(f_1) + \alpha(f_2),$$

e a conclusão é obtida tomando o supremo com respeito a f_1 e a f_2. □

9. **Lema.** *Se* $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ *é uma função não negativa e* U *é um subconjunto aberto de* X *tal que* $f \ge 1$ *em* U *então* $\mu(U) \le \alpha(f)$.

Demonstração. Se $g \in C_{\mathrm{c}}(X)$, $g[X] \subset [0,1]$ e $\operatorname{supp} g \subset U$ então $g \le f$; segue então da positividade de α que $\alpha(g) \le \alpha(f)$. A conclusão é obtida tomando o supremo com respeito a g. □

10. **Corolário.** *Se* U *é um subconjunto aberto relativamente compacto de* X *então* $\mu(U) < +\infty$.

Demonstração. Como U é relativamente compacto, existe (pelo Corolário 2) uma função $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tal que $f \ge 0$ e $f = 1$ no fecho de U. Daí:

$$\mu(U) \le \alpha(f) < +\infty. \qquad \square$$

Se A é um subconjunto arbitrário de X, definimos:

$$\mu^*(A) = \inf \big\{ \mu(U) : U \text{ subconjunto aberto de } X,\ A \subset U \big\} \in [0, +\infty].$$

Da monotonicidade de μ segue imediatamente que:

$$\mu^*(U) = \mu(U),$$

se U é um subconjunto aberto de X. É também imediato que μ^* é monotônica, i.e., $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ para quaisquer subconjuntos A, B de X com $A \subset B$. Queremos mostrar que μ^* é uma medida exterior em X (Definição 23). Resta mostrar que μ^* é σ-subaditiva.

11. **Lema.** *Seja* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$*, onde* $(A_n)_{n\geq 1}$ *é uma seqüência de subconjuntos de* X*. Então* $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$*.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar para cada $n \geq 1$ um aberto $U_n \supset A_n$ com $\mu(U_n) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Seja $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Daí U é aberto e $A \subset U$. Usando o Corolário 7 obtemos:

$$\mu^*(A) \leq \mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \qquad \square$$

12. **Corolário.** *Vale que* μ^* *é uma medida exterior em* X*.* $\square$

O próximo passo será mostrar que todo subconjunto aberto de X é μ^*-mensurável (Definição 24).

13. **Lema.** *Se* A_1*,* A_2 *são subconjuntos de* X *com fechos disjuntos e se um deles é relativamente compacto então* $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$*.*

Demonstração. Se um subconjunto de X é relativamente compacto, então seu fecho em X coincide com seu fecho no compactificado $X \cup \{\infty\}$. Assim, A_1 e A_2 tem fechos disjuntos em $X \cup \{\infty\}$, que é um espaço normal. Segue que existem abertos disjuntos U_1, U_2 em X com $A_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Se V é um subconjunto aberto de X contendo $A_1 \cup A_2$, usamos o Lema 8 para obter:

$$\mu(V) \geq \mu\big(V \cap (U_1 \cup U_2)\big) = \mu(V \cap U_1) + \mu(V \cap U_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),$$

e tomando o ínfimo com respeito a V obtemos $\mu^*(A_1 \cup A_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. A outra desigualdade segue do Lema 11. $\square$

14. **Lema.** *Se* U *é um subconjunto aberto de* X *então:*

$$\mu(U) = \sup\big\{\mu^*(K) : K \textit{ um subconjunto compacto de } X,\ K \subset U\big\}.$$

Demonstração. Basta mostrar que para toda função $f \in C_c(X)$ tal que $f[X] \subset [0, 1]$ e $\operatorname{supp} f \subset U$ existe um compacto $K \subset U$ com:

$$\mu^*(K) \geq \alpha(f).$$

Como $\operatorname{supp} f$ é um subconjunto compacto de U, usando a compacidade local de X obtemos um aberto relativamente compacto V contendo $\operatorname{supp} f$ tal que $K = \overline{V}$ está contido em U. De $\operatorname{supp} f \subset V$ e de $V \subset K$ vem:

$$\mu^*(K) \geq \mu^*(V) = \mu(V) \geq \alpha(f). \qquad \square$$

15. **Lema.** *Se* U *é um subconjunto aberto de* X *e* V *é um subconjunto aberto de* U *então* $\mu(U) = \mu(V) + \mu^*(U \setminus V)$*.*

Demonstração. Em vista do Lema 11, é suficiente mostrar que:

$$\mu(U) \geq \mu(V) + \mu^*(U \setminus V).$$

Pelo Lema 14, essa desigualdade seguirá se mostrarmos que, para todo subconjunto compacto K de V, vale:

$$\mu(U) \geq \mu^*(K) + \mu^*(U \setminus V).$$

Temos que o fecho de $U \setminus V$ está contido no complementar de V e portanto é disjunto de K; segue do Lema 13 que:

$$\mu(U) = \mu^*(U) \geq \mu^*\big(K \cup (U \setminus V)\big) = \mu^*(K) + \mu^*(U \setminus V). \qquad \square$$

16. **Corolário.** *Se U e V são subconjuntos abertos de X então:*

$$\mu(U) = \mu(U \cap V) + \mu^*(U \setminus V).$$

Demonstração. Basta aplicar o Lema 15 com $U \cap V$ no lugar de V. $\square$

17. **Lema.** *Todo subconjunto aberto de X é μ^*-mensurável.*

Demonstração. Se V é um subconjunto aberto de X e A é um subconjunto arbitrário de X, devemos mostrar que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap V) + \mu^*(A \setminus V),$$

já que a outra desigualdade segue da subaditividade de μ^*. Se U é um subconjunto aberto de X contendo A então, usando o Corolário 16, obtemos:

$$\mu(U) = \mu(U \cap V) + \mu^*(U \setminus V) = \mu^*(U \cap V) + \mu^*(U \setminus V) \geq \mu^*(A \cap V) + \mu^*(A \setminus V).$$

A conclusão é obtida tomando o ínfimo com respeito a U. $\square$

18. **Corolário.** *A restrição de μ^* à σ-álgebra de Borel de X é uma medida (que estende μ).*

Demonstração. Segue do Teorema 25. $\square$

No que segue, denotaremos também por μ a medida obtida pela restrição de μ^* à σ-álgebra de Borel de X.

19. **Lema.** *A medida μ obtida pela restrição de μ^* à σ-álgebra de Borel de X é regular.*

Demonstração. Que a condição (a) na definição de regularidade é satisfeita segue diretamente da definição de μ^*. Do Lema 14 segue que a condição (b) é satisfeita. Finalmente, que a condição (c) é satisfeita segue do Corolário 10, tendo em mente que todo subconjunto compacto de X está contido num aberto relativamente compacto (em vista da compacidade local de X). $\square$

Para completar a demonstração da existência de μ no Teorema 4, resta mostrar que α coincide com o funcional definido por μ. Precisamos antes do seguinte lema.

20. **Lema.** *Seja $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ uma função não negativa. Se $f \geq 1$ nos pontos de um subconjunto compacto K de X então $\mu(K) \leq \alpha(f)$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ e seja $U_\varepsilon = \big\{x \in X : f(x) > 1-\varepsilon\big\}$, de modo que U_ε é um subconjunto aberto de X contendo K. Temos que $\frac{1}{1-\varepsilon} f$ é uma função não negativa que é maior do que 1 nos pontos do subconjunto aberto U_ε. Segue do Lema 9 que:

$$\mu(K) \le \mu(U_\varepsilon) \le \frac{1}{1-\varepsilon}\,\alpha(f),$$

donde $\alpha(f) \ge (1-\varepsilon)\mu(K)$ para todo $\varepsilon \in \left]0,1\right[$. □

21. **Lema.** *Se $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ é uma função não negativa então $\alpha(f) \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. Escreva $K = \operatorname{supp} f$ e seja $c > 0$ com $f[X] \subset [0,c]$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Temos que o intervalo $[0,c]$ pode ser coberto por uma união finita disjunta de intervalos de comprimento menor do que ε; as imagens inversas por $f|_K$ desses intervalos definem uma partição $K = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ de K em Boreleanos A_i tais que $f[A_i] \subset [a_i, b_i]$, com $0 \le a_i < b_i < a_i + \varepsilon$ e $a_i \le c$. O conjunto $\big\{x \in X : f(x) < a_i + \varepsilon\big\}$ é um aberto contendo A_i e, usando a regularidade de μ, obtemos um aberto U_i contendo A_i tal que $f < a_i + \varepsilon$ em U_i e $\mu(U_i) < \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{n}$. O Lema 1 nos dá funções $g_i \in C_{\mathrm{c}}(X)$, $i = 1, \ldots, n$, com $g_i[X] \subset [0,1]$, $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ e $\sum_{i=1}^n g_i = 1$ em K. Daí $f = \sum_{i=1}^n f g_i$ e $f g_i \le (a_i + \varepsilon) g_i$; portanto:

$$\begin{aligned}\alpha(f) &= \sum_{i=1}^n \alpha(f g_i) \le \sum_{i=1}^n (a_i + \varepsilon)\alpha(g_i) \le \sum_{i=1}^n (a_i+\varepsilon)\mu(U_i)\\ &\le \sum_{i=1}^n (a_i+\varepsilon)\big(\mu(A_i) + \tfrac{\varepsilon}{n}\big) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n a_i\Big) + \varepsilon\mu(K) + \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Mas $\frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n a_i \le \varepsilon c$ e $\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i) \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$, donde:

$$\alpha(f) \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon c + \varepsilon\mu(K) + \varepsilon^2,$$

para todo $\varepsilon > 0$. A conclusão segue. □

22. **Lema.** *Se $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ então $\alpha(f) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. Basta mostrar que $\alpha(f) \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu$ para toda função f em $C_{\mathrm{c}}(X)$, já que a desigualdade oposta pode ser obtida trocando f por $-f$. Seja $c > 0$ grande o suficiente de modo que $f \ge -c$. Seja dado $\varepsilon > 0$ e, da regularidade de μ, obtenha U aberto contendo $\operatorname{supp} f$ tal que:

$$\mu(U) < \mu(\operatorname{supp} f) + \varepsilon.$$

Seja $g \in C_{\mathrm{c}}(X)$ com $g[X] \subset [0,1]$, tal que $g = 1$ em $\operatorname{supp} f$ e $\operatorname{supp} g \subset U$ (Corolário 2). Daí $f + cg \ge 0$ e o Lema 21 nos dá:

$$\alpha(f+cg) \le \int_X (f+cg)\,\mathrm{d}\mu.$$

Logo:

$$\alpha(f) \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu + c\Big(\int_X g \,\mathrm{d}\mu - \alpha(g)\Big).$$

Temos $\int_X g \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(U)$ e, do Lema 20, obtemos $\alpha(g) \geq \mu(\operatorname{supp} f)$. Daí:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu - \alpha(g) \leq \mu(U) - \mu(\operatorname{supp} f) < \varepsilon,$$

donde:

$$\alpha(f) \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu + c\varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. A conclusão segue. □

Apêndice A. A Medida Determinada por uma Medida Exterior

23. **Definição.** Seja X um conjunto arbitrário. Uma *medida exterior* em X é uma função $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ definida no conjunto $\wp(X)$ de todas as partes de X satisfazendo as seguintes condições:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (*monotonicidade*) dados subconjuntos $A, B \subset X$ com $A \subset B$ então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- (σ-*subaditividade*) dada uma seqüência $(A_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos de X então $\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$.

24. **Definição.** Se μ^* é uma medida exterior num conjunto X então um subconjunto $E \subset X$ é dito μ^*-*mensurável* se para todo subconjunto $A \subset X$ vale a igualdade:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}).$$

Observe que, já que μ^* é subaditiva, um subconjunto $E \subset X$ é μ^*-mensurável se e somente se vale a desigualdade:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}),$$

para todo $A \subset X$.

25. **Teorema.** *Se μ^* é uma medida exterior num conjunto X então a coleção $\mathfrak{M}$ de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra de partes de X e a restrição de μ^* a $\mathfrak{M}$ é uma medida completa.*

Demonstração. O resultado segue das afirmações que serão demonstradas a seguir.

Afirmação 1. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ então $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.*

Dado $A \subset X$, temos:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2) \\ &\quad + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2^{\mathrm{c}}) \geq \mu^*\big[A \cap \big(E_1 \cup (E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2)\big)\big] + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big) \\ &= \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big);\end{aligned} \tag{A.1}$$

isso prova que $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.

Afirmação 2. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, $A \subset X$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ então:*

$$\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2). \tag{A.2}$$

Como $\mu^*(A) \leq \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big)$, segue de (A.1) que:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2^{\mathrm{c}}). \tag{A.3}$$

Substituindo A por $A \cap (E_1 \cup E_2)$ em (A.3) obtemos (A.2).

Afirmação 3. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ então:*

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2).$$

Basta tomar $A = E_1 \cup E_2$ em (A.2).

Afirmação 4. *Se $E \in \mathfrak{M}$ então $E^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{M}$.*

Trivial.

Afirmação 5. *Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos em $\mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ está em $\mathfrak{M}$.*

Pela afirmação 1, sabemos que $\bigcup_{n=1}^{k} E_n \in \mathfrak{M}$, para todo $k \geq 1$. Além do mais, se $A \subset X$, a afirmação 2 nos dá:

$$\mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A \cap E_n).$$

Daí:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big)\\ &= \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big),\end{aligned}$$

e portanto a monotonicidade de μ^* nos dá:

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big). \tag{A.4}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (A.4) e usando a σ-subaditividade de μ^* obtemos:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big)\\ &\geq \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big).\end{aligned} \tag{A.5}$$

Isso prova que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$.

Afirmação 6. *Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em $\mathfrak{M}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$.*

Sejam $E_1' = E_1$ e $E_n' = E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$, para $n \geq 2$. Como

$$E_n' = (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1} \cup E_n^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}},$$

segue das afirmações 1 e 4 que $E_n' \in \mathfrak{M}$, para todo $n \geq 1$. Além do mais, os conjuntos E_n' são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n'$. A conclusão segue da afirmação 5.

Afirmação 7. *Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos em $\mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos e se $A \subset X$ então:*

$$\mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n). \tag{A.6}$$

Como:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big),$$

segue de (A.5) que:

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big). \tag{A.7}$$

A conclusão é obtida substituindo A por $A \cap \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)$ em (A.7).

Afirmação 8. *Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos em $\mathfrak{M}$ dois a dois disjuntos então:*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Basta fazer $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ em (A.6).

Afirmação 9. *Se $E \subset X$ e $\mu^*(E) = 0$ então $E \in \mathfrak{M}$.*

Observe que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}),$$

já que $\mu^*(A \cap E) = 0$. $\square$