O TEOREMA DE RADON–NIKODYM

DANIEL V. TAUSK

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável não negativa então vimos que:

$$\mu_f(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu, \quad E \in \mathcal{A},$$

define uma medida no espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$. A medida μ_f é também denotada por $\int f \, \mathrm{d}\mu$ e é chamada a *integral indefinida* de f com respeito a μ. Note que se $E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$ então a restrição da medida μ à σ-álgebra $\mathcal{A}|_E$ é identicamente nula e portanto $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$, i.e., $\mu_f(E) = 0$ sempre que $\mu(E) = 0$.

1. **Definição.** Dadas medidas $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definidas na mesma σ-álgebra $\mathcal{A}$ então dizemos que ν é *absolutamente contínua* com respeito a μ e escrevemos $\nu \ll \mu$ se para todo $E \in \mathcal{A}$, temos que $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$.

Temos então que se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável então $\mu_f \ll \mu$.

Exercício 1. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável tal que $\{x\} \in \mathcal{A}$, para todo $x \in X$. Sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ a medida de contagem e $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida não nula tal que $\nu\big(\{x\}\big) = 0$, para todo $x \in X$. (Por exemplo, podemos tomar $X = \mathbb{R}$ e ν igual à medida de Lebesgue.) Mostre que $\nu \ll \mu$, mas que não existe uma função mensurável $f : X \to [0, +\infty]$ tal que $\nu = \mu_f$. (sugestão: se $\nu = \mu_f$ então $\nu\big(\{x\}\big) = \mu_f\big(\{x\}\big) = f(x)$, para todo $x \in X$.)

Exercício 2. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e suponha que μ seja σ-finita. Se $f : X \to [0, +\infty[$ é uma função mensurável não negativa finita, mostre que a medida μ_f também é σ-finita. (sugestão: se $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ com $\mu(X_k) < +\infty$, considere os conjuntos da forma $X_k \cap [f \leq n]$.)

Exercício 3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável não negativa. Dada uma função mensurável $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, mostre que g é quase integrável com respeito a μ_f se e somente se gf é quase integrável com respeito a μ e que, caso essas funções sejam de fato quase integráveis, então:

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu_f = \int_X gf \, \mathrm{d}\mu.$$

Date: 15 de junho de 2011.

(sugestão: considere primeiramente o caso em que g é simples, mensurável e não negativa. Depois, considere o caso em que g é mensurável não negativa e escreva $g_n \nearrow g$, sendo cada g_n simples, mensurável, não negativa. Finalmente, escreva $g = g^+ - g^-$.)

Exercício 4. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Um *bloco infinito* para μ é um conjunto mensurável $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = +\infty$ e tal que qualquer subconjunto mensurável de B tem medida infinita ou nula. A medida μ é dita *livre de blocos* se não possui blocos infinitos. Mostre que toda medida σ-finita é livre de blocos. (sugestão: se $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ com $\mu(X_k) < +\infty$, considere os conjuntos da forma $X_k \cap B$.)

Exercício 5. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dadas funções quase integráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, mostre que se $f = g$ μ-quase sempre então:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu, \tag{1}$$

para todo $E \in \mathcal{A}$. Mostre também que se μ é livre de blocos (o que ocorre, por exemplo, se μ for σ-finita) então vale a recíproca: se (1) vale para todo $E \in \mathcal{A}$ então $f = g$ μ-quase sempre. (sugestão para a recíproca: suponha por absurdo que $[f \ne g]$ tenha medida positiva. Trocando os papéis de f e g, se necessário, podemos supor então que $[f > g]$ tem medida positiva. Escreva esse conjunto como união dos conjuntos:

$$\begin{gathered}
[f > g] \cap [|f| \le n] \cap [|g| \le n], \quad n = 1, 2, \ldots \\
[f = +\infty] \cap [|g| \le n], \quad n = 1, 2, \ldots \\
[|f| \le n] \cap [g = -\infty], \quad n = 1, 2, \ldots \\
[f = +\infty] \cap [g = -\infty].
\end{gathered}$$

Algum desses conjuntos tem medida positiva. Escolha um subconjunto mensurável E desse conjunto de medida positiva que tenha medida positiva e finita. Mostre que $\int_E f \, \mathrm{d}\mu > \int_E g \, \mathrm{d}\mu$. Observe que no caso em que f e g são limitadas em E temos $\int_E f \, \mathrm{d}\mu - \int_E g \, \mathrm{d}\mu = \int_E (f - g) \, \mathrm{d}\mu$.)

2. **Teorema** (Radon–Nikodym)**.** *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e suponha que μ seja σ-finita. Dada uma medida $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ absolutamente contínua com respeito a μ então:*

(a) *se ν é σ-finita então existe uma função mensurável não negativa finita $f : X \to [0, +\infty[$ tal que $\nu = \mu_f$;*
(b) *existe uma função mensurável não negativa $f : X \to [0, +\infty]$ tal que $\nu = \mu_f$.*

A demonstração do Teorema 2 será dada mais adiante.

3. **Definição.** Uma função f como na tese do Teorema 2 é chamada uma *derivada de Radon–Nikodym* de ν com respeito a μ e é denotada por $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Em virtude do resultado do Exercício 5, a derivada de Radon–Nikodym $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ é "quase" única. Mais precisamente: consideramos o conjunto das funções mensuráveis não negativas $f : X \to [0, +\infty]$ munido da relação de equivalência:

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \ \mu\text{-quase sempre}.$$

As possíveis derivadas de Radon–Nikodym $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ constituem precisamente uma classe de equivalência de $\sim$. Poderíamos então definir $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ como sendo a classe de equivalência formada por todas as funções mensuráveis não negativas f tais que $\nu = \mu_f$. É usual, no entanto, confundir uma tal classe de equivalência com algum de seus representantes e tratar a derivada de Radon–Nikodym como se fosse uma função.

Note que, usando a noção de derivada de Radon–Nikodym, o resultado do Exercício 3 nos diz que se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável então:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\nu = \int_X g \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \,\mathrm{d}\mu,$$

sendo que o lado esquerdo da igualdade está bem definido se e somente se o lado direito estiver.

Exercício 6. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas. Suponha que μ seja σ-finita e que $\nu \ll \mu$. Dado $Y \in \mathcal{A}$, denote por μ' a restrição de μ a $\mathcal{A}|_Y$ e por ν' a restrição de ν a $\mathcal{A}|_Y$. Mostre que μ' é σ-finita, que $\nu' \ll \mu'$ e que a derivada de Radon–Nikodym $\frac{\mathrm{d}\nu'}{\mathrm{d}\mu'}$ é igual à restrição de $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ a Y.

Exercício 7. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas tais que $\rho \ll \nu$ e $\nu \ll \mu$. Mostre que $\rho \ll \mu$. Além do mais, se μ e ν são σ-finitas, mostre que:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu},$$

ou, mais precisamente: se f é uma derivada de Radon–Nikodym de ν com respeito a μ e g é uma derivada de Radon–Nikodym de ρ com respeito a ν então fg é uma derivada de Radon–Nikodym de ρ com respeito a μ.

Exercício 8. Assuma que o item (a) do Teorema 2 já tenha sido demonstrado para medidas *finitas* μ, ν e demonstre o item (a) do Teorema 2. (sugestão: mostre que podemos escrever X como uma união disjunta $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ de conjuntos mensuráveis X_n tais que $\mu(X_n) < +\infty$ e $\nu(X_n) < +\infty$. Denote por μ^n, ν^n, respectivamente, a restrição de μ e de ν a $\mathcal{A}|_{X_n}$. Se $f_n : X_n \to [0, +\infty[$ é uma derivada de Radon–Nikodym de ν^n com respeito a μ^n, defina $f : X \to [0, +\infty[$ tal que $f|_{X_n} = f_n$, para todo $n \geq 1$ e mostre que f é uma derivada de Radon–Nikodym de ν com respeito a μ.)

Exercício 9. Assuma que o item (b) do Teorema 2 já tenha sido demonstrado no caso em que a medida μ é *finita* e demonstre o item (b) do Teorema 2.

(sugestão: escreva X como uma união disjunta $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ de conjuntos mensuráveis X_n tais que $\mu(X_n) < +\infty$ e proceda da mesma forma que você o fez no Exercício 8.)

Exercício 10. Assuma que o item (a) do Teorema 2 já tenha sido demonstrado e demonstre o item (b). (sugestão: em vista do resultado do Exercício 9, é suficiente considerar o caso em que a medida μ é finita. Para cada inteiro positivo k, seja (P_k, N_k) uma decomposição de Hahn para a medida com sinal $\nu - k\mu$. Sejam $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k$ e $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Note que $X = P \cup N$ e $P \cap N = \emptyset$. Verifique que se E é um subconjunto mensurável de P então $\nu(E) = +\infty$ se $\mu(E) > 0$. Verifique também que a restrição de ν a $\mathcal{A}|_N$ é σ-finita. Seja $f : N \to [0, +\infty[$ uma derivada de Radon–Nikodym da restrição de ν a $\mathcal{A}|_N$ com respeito à restrição de μ a $\mathcal{A}|_N$. Estenda f para X colocando o valor $+\infty$ em P e verifique que você obteve uma derivada de Radon–Nikodym de ν com respeito a μ.)

4. **Definição.** Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas. Dizemos que μ e ν são *mutuamente singulares* e escrevemos $\mu \perp \nu$ se existem conjuntos mensuráveis $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) = 0$ e $\nu(B) = 0$.

Exercício 11. Mostre que se $\mu \perp \nu$ e $\nu \ll \mu$ então $\nu = 0$.

5. **Teorema** (decomposição de Lebesgue)**.** *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas σ-finitas. Então existe um único par $(\nu_{\rm a}, \nu_{\rm s})$ de medidas definidas em $\mathcal{A}$ tais que $\nu = \nu_{\rm a} + \nu_{\rm s}$, $\nu_{\rm a} \ll \mu$ e $\nu_{\rm s} \perp \mu$.*

Observe que a σ-finitude de ν implica a σ-finitude das medidas $\nu_{\rm a}$ e $\nu_{\rm s}$.

6. **Definição.** O par $(\nu_{\rm a}, \nu_{\rm s})$ cuja existência é garantida pelo Teorema 5 é dito uma *decomposição de Lebesgue* de ν com respeito a μ.

A demonstração do Teorema 5 será dada mais adiante.

Exercício 12. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Sejam $(\nu_{\rm a}, \nu_{\rm s})$, $(\nu'_{\rm a}, \nu'_{\rm s})$ pares de medidas definidas em $\mathcal{A}$ tais que:

$$\nu_{\rm a} + \nu_{\rm s} = \nu'_{\rm a} + \nu'_{\rm s},$$

$\nu_{\rm a} \ll \mu$, $\nu'_{\rm a} \ll \mu$, $\nu_{\rm s} \perp \mu$ e $\nu'_{\rm s} \perp \mu$. Mostre que $\nu_{\rm a} = \nu'_{\rm a}$ e $\nu_{\rm s} = \nu'_{\rm s}$. (sugestão: sejam A, B, A', B' conjuntos mensuráveis tais que $X = A \cup B = A' \cup B'$, $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, $\mu(A) = \mu(A') = 0$ e $\nu_{\rm s}(B) = \nu'_{\rm s}(B') = 0$. Se $A_1 = A \cup A'$ e $B_1 = B \cap B'$ então $X = A_1 \cup B_1$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $\mu(A_1) = 0$ e $\nu_{\rm s}(B_1) = \nu'_{\rm s}(B_1) = 0$. Mostre que $\nu_{\rm a}(E) = \nu'_{\rm a}(E)$ e $\nu_{\rm s}(E) = \nu'_{\rm s}(E)$ para qualquer subconjunto mensurável E de A_1 e para qualquer subconjunto mensurável E de B_1.)

Exercício 13. Suponha que a existência da decomposição de Lebesgue $(\nu_{\rm a}, \nu_{\rm s})$ tenha sido demonstrada quando as medidas μ e ν são finitas e demonstre a existência da decomposição de Lebesgue para medidas σ-finitas. (sugestão:

escreva X como uma união disjunta $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ de conjuntos mensuráveis X_n tais que $\mu(X_n) < +\infty$ e $\nu(X_n) < +\infty$. Sejam μ^n, ν^n, respectivamente, as restrições de μ e ν a $\mathcal{A}|_{X_n}$. Seja $(\nu_{\mathrm{a}}^n, \nu_{\mathrm{s}}^n)$ a decomposição de Lebesgue de ν^n com respeito a μ^n e defina $\nu_{\mathrm{a}} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu_{\mathrm{s}} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ fazendo:

$$\nu_{\mathrm{a}}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{\mathrm{a}}^n(E \cap X_n), \quad \nu_{\mathrm{s}}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{\mathrm{s}}^n(E \cap X_n),$$

para todo $E \in \mathcal{A}$.)

Exercício 14. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas. Seja $\mathfrak{F}$ o conjunto de todas as funções mensuráveis não negativas $f : X \to [0, +\infty]$ tais que:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \nu(E),$$

para todo $E \in \mathcal{A}$.

(a) Mostre que se $f, g \in \mathfrak{F}$ então a função $f \vee g : X \to [0, +\infty]$ definida por:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in X,$$

pertence a $\mathfrak{F}$. (sugestão: dado $E \in \mathcal{A}$, escreva $E = E_1 \cup E_2$, onde:

$$E_1 = E \cap [f \geq g], \quad E_2 = E \cap [f < g].$$

Note que $f \vee g$ coincide com f em E_1 e coincide com g em E_2.)

(b) Seja:

$$c = \sup\Big\{ \int_X f \, \mathrm{d}\mu : f \in \mathfrak{F} \Big\} \in [0, +\infty].$$

(note que a função nula está em $\mathfrak{F}$, de modo que c é o supremo de um conjunto não vazio.) Mostre que existe $f \in \mathfrak{F}$ tal que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = c.$$

(sugestão: seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência em $\mathfrak{F}$ tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = c.$$

Trocando f_n por $f_1 \vee \ldots \vee f_n$ e usando o resultado do item (a), vemos que pode-se supor que a seqüência $(f_n)_{n \geq 1}$ é pontualmente crescente. Seja f tal que $f_n \nearrow f$ e use o Teorema da convergência monotônica.)

(c) Se a medida ν é finita, mostre que podemos encontrar uma função f como no item (b) tomando valores em $[0, +\infty[$. (sugestão: temos $c \leq \nu(X) < +\infty$ e portanto f é finita μ-quase sempre. Troque o valor de f por zero no conjunto de medida nula $[f = +\infty]$.)

Demonstração dos Teoremas 2 e 5. Note que a unicidade da decomposição de Lebesgue já foi demonstrada no Exercício 12. Além do mais, em vista dos resultados dos Exercícios 8, 10 e 13, podemos supor que as medidas μ e ν são finitas. Sejam $\mathfrak{F}$, c e f como no Exercício 14. Como a medida ν é finita, note que $c \le \nu(X)$ é finito e que podemos supor que f é finita. Seja $\mu_f = \int f \, \mathrm{d}\mu$ e para cada inteiro positivo k, considere uma decomposição de Hahn (P_k, N_k) para a medida com sinal $\nu - \mu_f - \frac{1}{k}\mu$. Vamos mostrar que $\mu(P_k) = 0$. Considere a função:

$$\phi_k = f + \tfrac{1}{k}\,\chi_{P_k}.$$

Afirmamos que $\phi_k \in \mathfrak{F}$. De fato, dado $E \in \mathcal{A}$ então:

$$\int_{E\cap P_k} \phi_k \, \mathrm{d}\mu = \mu_f(E\cap P_k) + \tfrac{1}{k}\mu(E\cap P_k) \le \nu(E\cap P_k),$$

já que:

$$\big(\nu - \mu_f - \tfrac{1}{k}\mu\big)(E\cap P_k) \ge 0.$$

Além do mais:

$$\int_{E\cap N_k} \phi_k \, \mathrm{d}\mu = \mu_f(E\cap N_k) \le \nu(E\cap N_k),$$

já que $f \in \mathfrak{F}$. Então:

$$\int_E \phi_k \, \mathrm{d}\mu = \int_{E\cap P_k} \phi_k \, \mathrm{d}\mu + \int_{E\cap N_k} \phi_k \, \mathrm{d}\mu \le \nu(E\cap P_k) + \nu(E\cap N_k) = \nu(E).$$

Já que $\phi_k \in \mathfrak{F}$, temos que:

$$\int_X \phi_k \, \mathrm{d}\mu \le c,$$

ou seja:

$$\mu_f(X) + \tfrac{1}{k}\mu(P_k) = c + \tfrac{1}{k}\mu(P_k) \le c.$$

Como c é finito, concluímos que $\mu(P_k) = 0$. Sejam:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad B = \bigcap_{k=1}^{\infty} N_k.$$

Daí $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Temos $\mu(A) = 0$. Além do mais, como $B \subset N_k$ temos:

$$\nu(B) \le \mu_f(B) + \tfrac{1}{k}\mu(B),$$

para todo inteiro positivo k e portanto $\nu(B) = \mu_f(B)$. Sejam $\nu_{\mathrm{a}} = \mu_f$ e $\nu_{\mathrm{s}} = \nu - \mu_f$. Temos que ν_{a} e ν_{s} são medidas (sem sinal) e $\nu = \nu_{\mathrm{a}} + \nu_{\mathrm{s}}$. Obviamente, $\nu_{\mathrm{a}} \ll \mu$. Como $\mu(A) = 0$ e $\nu_{\mathrm{s}}(B) = 0$, temos que $\mu \perp \nu_{\mathrm{s}}$. Isso completa a demonstração do Teorema 5. Agora, se assumimos que $\nu \ll \mu$ então $(\nu, 0)$ e $(\nu_{\mathrm{a}}, \nu_{\mathrm{s}})$ são ambas decomposições de Lebesgue de ν com respeito a μ e portanto $\nu = \nu_{\mathrm{a}} = \mu_f$, completando a demonstração do Teorema 2. $\square$

Exercício 15. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e suponha que μ seja σ-finita. Mostre que se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos então o conjunto:

$$\big\{ i \in I : \mu(A_i) > 0 \big\}$$

é enumerável. (sugestão: escreva $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, com $\mu(X_k) < +\infty$ e note que:

$$\big\{ i \in I : \mu(A_i) > 0 \big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{ i \in I : \mu(A_i \cap X_k) \geq \tfrac{1}{n} \big\}.$$

Observe que $\mu(A_i \cap X_k) \geq \frac{1}{n}$ para no máximo um número finito de índices $i \in I$.)

Exercício 16. Mostre que o Teorema 5 vale também sem a hipótese de que a medida μ seja σ-finita, i.e., que se μ e ν são medidas e ν é σ-finita então existe um (único) par de medidas $(\nu_{\mathrm{a}}, \nu_{\mathrm{s}})$ tal que $\nu = \nu_{\mathrm{a}} + \nu_{\mathrm{s}}$, $\nu_{\mathrm{a}} \ll \mu$ e $\nu_{\mathrm{s}} \perp \mu$. (sugestão: use o Lema de Zorn para mostrar que existe um elemento maximal dentre os subconjuntos $\mathcal{E}$ de $\mathcal{A}$ que satisfazem as três seguintes condições: (i) os elementos de $\mathcal{E}$ são dois a dois disjuntos, (ii) $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{E}$, (iii) $\nu(E) > 0$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Pelo resultado do Exercício 15, $\mathcal{E}$ é enumerável. Sejam $A = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ e $B = X \setminus A$. Defina:

$$\nu_{\mathrm{a}}(E) = \nu(E \cap B), \quad \nu_{\mathrm{s}}(E) = \nu(E \cap A), \quad E \in \mathcal{A}.$$

Note que $\mu(A) = 0$ e $\nu_{\mathrm{s}}(B) = 0$ e conclua que $\nu_{\mathrm{s}} \perp \mu$. Para mostrar que $\nu_{\mathrm{a}} \ll \mu$, note que se existisse $E \in \mathcal{A}$ com $\mu(E) = 0$ e $\nu(E \cap B) > 0$ então $\mathcal{E} \cup \{E \cap B\}$ seria uma extensão própria de $\mathcal{E}$ satisfazendo (i), (ii) e (iii).)

Exercício 17. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável tal que $\{x\} \in \mathcal{A}$ para todo $x \in X$. Sejam $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ a medida de contagem e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida não nula tal que $\mu\big(\{x\}\big) = 0$ para todo $x \in X$. (Por exemplo, podemos tomar $X = \mathbb{R}$ e μ igual à medida de Lebesgue.) Mostre que não existe um par de medidas $(\nu_{\mathrm{a}}, \nu_{\mathrm{s}})$ tal que $\nu = \nu_{\mathrm{a}} + \nu_{\mathrm{s}}$, $\nu_{\mathrm{a}} \ll \mu$ e $\nu_{\mathrm{s}} \perp \mu$. (sugestão: mostre que $\nu_{\mathrm{s}}\big(\{x\}\big) = 1$ para todo $x \in X$. Se existisse uma partição $A \cup B$ de X com $\mu(A) = 0$ e $\nu_{\mathrm{s}}(B) = 0$ então B seria vazio e A seria igual a X.)