LEMA DE SELEÇÃO DE RADO

DANIEL V. TAUSK

Seja $(F_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos indexada por um conjunto I. Pensamos em F_i como sendo o conjunto das possíveis escolhas que podem ser feitas por um certo "indivíduo" marcado com o índice $i \in I$. Dado um subconjunto J de I, então uma *J-escolha* é um elemento do produto $\prod_{i\in J} F_i$, i.e., uma função ϕ com domínio J que a cada $i \in J$ associa um elemento escolhido $\phi(i) \in F_i$. Considere o conjunto Φ formado por todas as J-escolhas em que J é um subconjunto finito de I:

$$\Phi = \bigcup_{J\in\wp_{\mathrm{fin}}(I)} \prod_{i\in J} F_i, \tag{1}$$

onde $\wp_{\mathrm{fin}}(I)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos finitos[1] de I. Seja Φ_0 um subconjunto de Φ; pensamos em Φ_0 como definindo uma noção de "escolha adequada". O lema de seleção de Rado nos dirá que, sob certas condições, há uma função escolha global $\phi \in \prod_{i\in I} F_i$ tal que $\phi|_J$ é adequada (i.e., pertence a Φ_0) para todo subconjunto finito J de I.

1. **Lema** (de seleção de Rado)**.** *Seja $(F_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos finitos e seja Φ_0 um subconjunto do conjunto Φ definido em* (1)*. Suponha que:*
   (a) *se $\phi \in \Phi_0$ é uma J-escolha e se $K \subset J$ então $\phi|_K \in \Phi_0$;*
   (b) *para todo subconjunto finito J de I, existe uma J-escolha ϕ pertencente a Φ_0.*

Então existe $\phi \in \prod_{i\in I} F_i$ tal que $\phi|_J \in \Phi_0$, para todo subconjunto finito J de I.

Demonstração. Suponha cada F_i munido da topologia discreta e considere o produto $\prod_{i\in I} F_i$ munido da topologia produto. Temos então que cada F_i é compacto e portanto esse produto também é compacto. Para cada subconjunto finito J de I, seja $\mathcal{S}_J$ definido por:

$$\mathcal{S}_J = \Big\{\phi \in \prod_{i\in I} F_i : \phi|_J \in \Phi_0\Big\}.$$

Note que $\mathcal{S}_J$ é a imagem inversa pela aplicação contínua:

$$\prod_{i\in I} F_i \ni \phi \longmapsto \phi|_J \in \prod_{i\in J} F_i$$

Date: 28 de março de 2011.

[1] Evidentemente, $\wp_{\mathrm{fin}}(I)$ inclui o conjunto vazio. Se J é o conjunto vazio então existe uma única J-escolha: a função vazia.

de um subconjunto do espaço discreto $\prod_{i\in J} F_i$. Como todo subconjunto de um espaço discreto é fechado, segue que $\mathcal{S}_J$ é fechado. Além do mais, segue de (b) que $\mathcal{S}_J$ é não vazio, para todo subconjunto finito J de I. Note também que se $J_1, \ldots, J_n$ são subconjuntos finitos de I então segue de (a) que:

$$\mathcal{S}_{J_1\cup\ldots\cup J_n} \subset \mathcal{S}_{J_1} \cap \ldots \cap \mathcal{S}_{J_n}.$$

Assim, $(\mathcal{S}_J)_{J\in\wp_{\mathrm{fin}}(I)}$ é uma família de fechados no espaço compacto $\prod_{i\in I} F_i$ com a propriedade da interseção finita (i.e., a interseção de um número finito de elementos da família é não vazia). Segue então que a interseção $\bigcap_{J\in\wp_{\mathrm{fin}}(I)} \mathcal{S}_J$ é não vazia. Isso conclui a demonstração. □

A hipótese de que os conjuntos F_i sejam finitos é essencial para o lema de seleção de Rado. De fato, considere o seguinte exemplo: suponha que tanto I como os conjuntos F_i, $i \in I$, sejam iguais ao conjunto dos números naturais. Defina Φ_0 como sendo o conjunto das funções ϕ tais que $\phi(i)$ é maior do que o número de elementos do domínio J de ϕ, para todo $i \in J$. Evidentemente, as condições (a) e (b) são satisfeitas, mas não existe uma função ϕ definida em todo o conjunto I tal que $\phi|_J \in \Phi_0$, para todo subconjunto finito J de I.

Uma aplicação: colorimento de grafos

Um *grafo* G consiste de um conjunto $V = V(G)$ (o conjunto de *vértices* do grafo) e de um subconjunto $E = E(G)$ do conjunto:

$$\big\{\{x, y\} : x, y \in V,\ x \neq y\big\}.$$

Os elementos de E são chamados as *arestas* do grafo. Dois vértices $x, y \in V$ são ditos *adjacentes* se $\{x, y\} \in E$. Dado um número natural k, então um *k-colorimento* para G é uma função $\phi : V \to k$ tomando valores no conjunto $k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tal que $\phi(x) \neq \phi(y)$ sempre que os vértices $x, y \in V$ forem adjacentes. Um grafo é dito *k-colorível* se admite um k-colorimento. Um grafo é dito *finito* se seu conjunto de vértices é finito. Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$.

2. **Proposição.** *Um grafo G é k-colorível se e somente se todo subgrafo finito de G é k-colorível.*

Demonstração. Obviamente, a restrição de um k-colorimento é um k-colorimento e portanto todo subgrafo (finito) de um grafo k-colorível é k-colorível. Reciprocamente, suponha que todo subgrafo finito de G seja k-colorível. Para cada subconjunto W de $V(G)$, considere o subgrafo G_W de G cujo conjunto de vértices é W e cujo conjunto de arestas é:

$$E(G) \cap \big\{\{x, y\} : x, y \in W\big\}.$$

Por hipótese, se W é finito então G_W é k-colorível. Seja $I = V(G)$ e para cada $i \in I$ seja $F_i = k$. Seja Φ_0 o conjunto de todas as funções $\phi : W \to k$, onde W é um subconjunto finito de $V(G)$ e ϕ é um k-colorimento de G_W.

Evidentemente, as hipóteses do lema de seleção de Rado são satisfeitas e portanto existe uma função $\phi : V(G) \to k$ tal que $\phi|_W$ é um k-colorimento de G_W, para todo subconjunto finito W de $V(G)$. Daí ϕ é um k-colorimento de G. $\square$

Outra aplicação: classes compactas

Uma coleção de conjuntos $\mathcal{C}$ é dita uma *classe compacta* se para toda seqüência $(C_i)_{i\geq 1}$ em $\mathcal{C}$ tal que $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$ vale que $\bigcap_{i=1}^\infty C_i \neq \emptyset$.

3. **Proposição.** *Seja $\mathcal{C}$ uma classe compacta e seja $\widetilde{\mathcal{C}}$ o conjunto de todas as uniões finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Então $\widetilde{\mathcal{C}}$ é uma classe compacta.*

Demonstração. Seja $(C_i)_{i\geq 1}$ uma seqüência em $\widetilde{\mathcal{C}}$ tal que $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$, para todo $n \geq 1$. Seja I o conjunto dos números inteiros positivos e para cada $i \in I$ seja F_i um subconjunto finito de $\mathcal{C}$ tal que C_i é a união dos elementos de F_i. Seja Φ_0 o conjunto das funções $\phi \in \prod_{i\in J} F_i$ em que J é um subconjunto finito[2] de I e:

$$\bigcap_{i\in J} \phi(i) \neq \emptyset.$$

Evidentemente, a hipótese (a) do lema de seleção de Rado é satisfeita. Para verificar a hipótese (b), seja J um subconjunto finito de I e seja n uma cota superior de J. Seja $x \in \bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$. Para cada $i \in J$, como x está em C_i, existe um elemento $\phi(i)$ de F_i tal que $x \in \phi(i)$. A função $\phi \in \prod_{i\in J} F_i$ assim obtida está em Φ_0. Pelo lema de seleção de Rado, existe uma função $\phi \in \prod_{i\in I} F_i$ tal que:

$$\bigcap_{i=1}^n \phi(i) \neq \emptyset,$$

para todo $n \geq 1$. Como $\phi(i) \in \mathcal{C}$, para todo $i \geq 1$ e como $\mathcal{C}$ é uma classe compacta, segue que:

$$\bigcap_{i=1}^\infty \phi(i) \neq \emptyset.$$

Mas $\bigcap_{i=1}^\infty C_i \supset \bigcap_{i=1}^\infty \phi(i)$, o que completa a demonstração. $\square$

---

[2] Mais precisamente, se J é vazio essa interseção não está definida, mas incluímos em Φ_0 a função vazia.