Gabarito da Prova Substitutiva

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

19/06/2018

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que existe uma sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ de funções simples e integráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Solução. Como f^+ e f^- são mensuráveis e não negativas, existem sequências $(g_n)_{n\geq 1}$ e $(h_n)_{n\geq 1}$ de funções simples, mensuráveis e não negativas tais que:

$$g_n \nearrow f^+ \quad \text{e} \quad h_n \nearrow f^-.$$

Tome $f_n = g_n - h_n$, de modo que f_n é simples e mensurável. Além do mais, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente para f e $|f_n| \leq g_n + h_n \leq f^+ + f^- = |f|$. Daí a sequência de funções mensuráveis $\big(|f_n - f|\big)_{n\geq 1}$ converge pontualmente para zero e $|f_n - f| \leq 2|f|$, sendo $2|f|$ uma função integrável. Segue então do Teorema da Convergência Dominada que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = \int_X 0 \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função bijetora e crescente de classe C^1 e seja $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a medida definida por

$$\mu(B) = \int_B \phi' \, \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, em que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, $\mathfrak{m} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ denota a medida de Lebesgue e ϕ' denota a derivada de ϕ. Considere a medida *push-forward*

$$\nu = \phi_* \mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$$

definida por

$$\nu(B) = \mu\big(\phi^{-1}[B]\big),$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mostre que $\nu = \mathfrak{m}$.

Solução. Note em primeiro lugar que como ϕ é de classe C^1 e crescente, a sua derivada ϕ' é contínua (logo mensurável com respeito à σ-álgebra de Borel) e não negativa, de modo que a medida μ está bem-definida. Além do mais, ϕ é contínua (logo mensurável com respeito à σ-álgebra de Borel), de modo que também a medida ν está bem-definida. Considere a coleção:

$$\mathcal{S} = \big\{ \,]a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a \le b \big\}.$$

Temos que $\mathcal{S}$ é fechada por interseções finitas e que $\mathfrak{m}|_{\mathcal{S}}$ é uma medida finita e, em particular, σ-finita. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$, para mostrar que $\nu = \mathfrak{m}$ é suficiente mostrar que ν e $\mathfrak{m}$ coincidem em $\mathcal{S}$. Com esse propósito, sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$. Temos que existem $a', b' \in \mathbb{R}$ com $\phi(a') = a$ e $\phi(b') = b$, já que ϕ é sobrejetora. Além do mais, como ϕ é uma bijeção crescente, é fácil ver que $a' \le b'$ e:

$$\phi^{-1}\big[\,]a, b]\,\big] = \,]a', b']\,.$$

Daí:

$$\nu\big(\,]a, b]\big) = \mu\big(\,]a', b']\big) = \int_{a'}^{b'} \phi' \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \phi(b') - \phi(a') = b - a = \mathfrak{m}\big(\,]a, b]\big).$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e seja $(\mu_x)_{x\in X}$ uma família de medidas finitas $\mu_x : \mathcal{B} \to [0, +\infty[$. Suponha que para todo $B \in \mathcal{B}$ a função

$$X \ni x \longmapsto \mu_x(B) \in [0, +\infty[$$

seja mensurável. Mostre que para todo $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vale que a função

$$X \ni x \longmapsto \mu_x(C_x) \in [0, +\infty[$$

é mensurável, em que $C_x = \big\{y \in Y : (x, y) \in C\big\}$.

Solução. Note em primeiro lugar que, para todo $x \in X$, a função

$$i_x : Y \ni y \longmapsto (x, y) \in X \times Y$$

é mensurável, já que ambas as suas coordenadas são mensuráveis. Daí, para todo $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, temos que $C_x = i_x^{-1}[C] \in \mathcal{B}$, de modo que a expressão $\mu_x(C_x)$ está bem-definida. Denotamos por $\lambda_C : X \to [0, +\infty[$ a função definida por $\lambda_C(x) = \mu_x(C_x)$, para todo $x \in X$, em que $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Seja:

$$\mathcal{S} = \big\{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \lambda_C \text{ é uma função mensurável}\big\}.$$

Queremos mostrar que $\mathcal{S} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Seja:

$$\mathcal{C} = \big\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\big\}.$$

Note que se $C = A \times B$ com $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, então λ_C é o produto da função característica de A pela função $X \ni x \mapsto \mu_x(B) \in [0, +\infty[$. Como ambas são mensuráveis, segue que λ_C é mensurável e portanto que $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. Do fato que $\mathcal{C}$ é fechada por interseções finitas, segue que a classe σ-aditiva gerada por $\mathcal{C}$ coincide com o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Mas o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$ (que coincide com a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$, já que $X \times Y \in \mathcal{C}$) é $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e portanto para mostrar que $\mathcal{S} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é suficiente mostrar que $\mathcal{S}$ é uma classe σ-aditiva. Com esse propósito, note em primeiro lugar que $\mathcal{S}$ é não vazia, já que contém $\mathcal{C}$. Dados $C, C' \in \mathcal{S}$ disjuntos, temos que

$$\begin{aligned}\lambda_{C\cup C'}(x) = \mu_x\big((C \cup C')_x\big) = \mu_x(C_x \cup C'_x) &= \mu_x(C_x) + \mu_x(C'_x)\\ &= \lambda_C(x) + \lambda_{C'}(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in X$, já que $(C \cup C')_x = C_x \cup C'_x$, sendo essa união disjunta. Como λ_C e $\lambda_{C'}$ são mensuráveis, segue que $\lambda_{C\cup C'} = \lambda_C + \lambda_{C'}$ é mensurável e portanto que $C \cup C' \in \mathcal{S}$. Assim, $\mathcal{S}$ é fechada por uniões finitas disjuntas. Sejam agora $C, C' \in \mathcal{S}$ com $C' \subset C$. Temos que

$$\lambda_{C\setminus C'}(x) = \mu_x\big((C \setminus C')_x\big) = \mu_x(C_x) - \mu_x(C'_x) = \lambda_C(x) - \lambda_{C'}(x),$$

para todo $x \in X$, já que $(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$, $C'_x \subset C_x$ e a medida μ_x é finita. Como λ_C e $\lambda_{C'}$ são mensuráveis, segue que $\lambda_{C\setminus C'} = \lambda_C - \lambda_{C'}$ é mensurável e que $C \setminus C' \in \mathcal{S}$. Logo $\mathcal{S}$ é fechada por diferenças próprias. Para completar a solução, vamos mostrar que $\mathcal{S}$ é fechada por uniões de sequências crescentes.

Seja $(C^n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathcal{S}$ tal que $C^n \nearrow C$. Daí, para todo $x \in X$, temos $C_x^n \nearrow C_x$ e portanto

$$\lambda_C(x) = \mu_x(C_x) = \lim_{n\to+\infty} \mu_x(C_x^n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_{C^n}(x),$$

para todo $x \in X$. Assim $(\lambda_{C^n})_{n\geq 1}$ converge pontualmente para λ_C e como cada λ_{C^n} é mensurável, concluímos que λ_C é mensurável e portanto que $C \in \mathcal{S}$.

Questão 4. Nos itens abaixo, consideramos a reta real $\mathbb{R}$ munida da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e da medida de Lebesgue $\mathfrak{m}:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,+\infty]$ e o plano $\mathbb{R}^2$ munido da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e da medida de Lebesgue $\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}$.

(a) (valor 1,0 ponto) Dado $k\in\mathbb{R}$, mostre que a translação

$$t_k:\mathbb{R}\ni x\longmapsto x+k\in\mathbb{R}$$

preserva medida, i.e.:

$$\mathfrak{m}\big(t_k^{-1}[B]\big)=\mathfrak{m}(B),$$

para todo $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) (valor 1,5 pontos) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função integrável e seja $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que a função

$$g:\mathbb{R}^2\ni(x,y)\longmapsto f\big(x,y+\psi(x)\big)\in\mathbb{R}$$

é integrável e que $\int_{\mathbb{R}^2}g\,\mathrm{d}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{m})=\int_{\mathbb{R}^2}f\,\mathrm{d}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{m})$.

Solução. Temos que a função $\phi=t_k$ é mensurável, já que é contínua. Para resolver o item (a), devemos mostrar que a medida push-forward

$$\phi_*\mathfrak{m}:\mathcal{B}(\mathbb{R})\ni B\longmapsto\mathfrak{m}\big(\phi^{-1}[B]\big)\in[0,+\infty]$$

é igual a $\mathfrak{m}$. Considere a coleção:

$$\mathcal{S}=\big\{\,]a,b]:a,b\in\mathbb{R},\ a\le b\big\}.$$

Temos que $\mathcal{S}$ é fechada por interseções finitas e que $\mathfrak{m}|_{\mathcal{S}}$ é uma medida finita e, em particular, σ-finita. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$, para mostrar que $\phi_*\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$ é suficiente mostrar que $\phi_*\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m}$ coincidem em $\mathcal{S}$. Mas isso segue diretamente do fato que

$$(\phi_*\mathfrak{m})\big(\,]a,b]\big)=\mathfrak{m}\big(\,]a-k,b-k]\big)=(b-k)-(a-k)=b-a=\mathfrak{m}\big(\,]a,b]\big),$$

para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ com $a\le b$. Para o item (b), note primeiro que a função

$$\theta:\mathbb{R}^2\ni(x,y)\longmapsto\big(x,y+\psi(x)\big)\in\mathbb{R}^2$$

é mensurável, já que sua primeira coordenada é π_1 e sua segunda coordenada é $\pi_2+\psi\circ\pi_1$, em que π_1 e π_2 denotam as projeções de $\mathbb{R}^2$. Daí $g=f\circ\theta$ também é mensurável e portanto $|g|$ é mensurável e não negativa. Podemos portanto aplicar o Teorema de Tonelli para $|g|$, obtendo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|g|\,\mathrm{d}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{m})&=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\big|f\big(x,y+\psi(x)\big)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\&=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f_x|\circ t_{\psi(x)}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),\end{aligned}$$

em que $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f_x(y) = f(x, y)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Pelo resultado do item (a) temos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a função $t_{\psi(x)}$ preserva medida e portanto pelo resultado do Exercício 3 da quinta lista temos:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_x| \circ t_{\psi(x)} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{\mathbb{R}} |f_x| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Daí

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g| \, \mathrm{d}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} |f| \, \mathrm{d}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}) < +\infty,$$

em que na segunda igualdade usamos o Teorema de Tonelli para a função $|f|$. Isso mostra que $|g|$ e portanto g é integrável. Podemos agora usar o Teorema de Fubini–Tonelli para g e repetir os passos acima, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} g \, \mathrm{d}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f\big(x, y + \psi(x)\big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_x \circ t_{\psi(x)} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \Big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}). \end{aligned}$$

Questão 5. (valor 2,5 pontos) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to [0, 1]$ uma função integrável. Mostre que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu\big(f^{-1}(1)\big).$$

Solução. Como f é mensurável, temos que f^n é mensurável, para todo n (já que, por exemplo, o produto de funções mensuráveis é mensurável). Dado $x \in X$, temos que $\lim_{n\to+\infty} \big(f(x)\big)^n$ é igual a zero, se $f(x) < 1$ e é igual a 1, se $f(x) = 1$. Daí $(f^n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente para a função característica do conjunto $f^{-1}(1)$. Além do mais, como f toma valores em $[0, 1]$, temos que $0 \leq f^n \leq f$, para todo $n \geq 1$. O fato que a função f é integrável implica então que estão satisfeitas as hipótese do Teorema da Convergência Dominada e portanto:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X \big(f(x)\big)^n \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \chi_{f^{-1}(1)} \, \mathrm{d}\mu = \mu\big(f^{-1}(1)\big).$$

Questão 6. (valor 2,5 pontos) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge em medida para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$. Suponha que exista uma função integrável $\phi : X \to [0, +\infty[$ tal que $|f_n(x)| \leq \phi(x)$ para todo $x \in X$ e todo $n \geq 1$. Mostre que f é integrável e que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Solução. Como f_n é mensurável e $|f_n| \leq \phi$, temos

$$\int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X \phi \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

donde $|f_n|$ e portanto f_n é integrável. Do fato que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para f segue que alguma subsequência de $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente quase sempre para f. Como $|f_n| \leq \phi$ para todo n, segue que $|f(x)| \leq \phi(x)$ para quase todo $x \in X$ e portanto, já que f é mensurável, temos:

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X \phi \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Daí $|f|$ e f são integráveis. Agora suponha por absurdo que a sequência de integrais $\big(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\big)_{n\geq 1}$ não convirja para a integral de f. Nesse caso existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \geq \varepsilon,$$

para uma infinidade de índices n. Existe então uma subsequência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\left| \int_X f_{n_k} \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \geq \varepsilon, \tag{1}$$

para todo $k \geq 1$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para f, temos que a subsequência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ também converge em medida para f, já que

$$\lim_{k\to+\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \eta\}\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}\big) = 0,$$

para todo $\eta > 0$. Do fato que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge em medida para f, segue que existe uma subsequência $(f_{n_{k_i}})_{i\geq 1}$ de $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge pontualmente quase sempre para f. Mas $|f_{n_{k_i}}| \leq \phi$ para todo i e a função ϕ é integrável, donde o Teorema da Convergência Dominada nos dá que:

$$\lim_{i\to+\infty} \int_X f_{n_{k_i}} \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Em particular
$$\left| \int_X f_{n_{k_i}} \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon,$$
para todo i suficientemente grande, o que contradiz o fato que (1) vale para todo $k \geq 1$.