Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

MAP0217 – Cálculo Diferencial

Prof. Daniel Victor Tausk

13/12/2013

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por:

$$f(x, y) = \big(\operatorname{sen}(x + y + x^3 + y^3), e^x y\big),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que existem abertos U e V em $\mathbb{R}^2$ contendo a origem tais que $f[U] = V$, $f|_U$ é injetora e $(f|_U)^{-1} : V \to U$ é de classe C^∞.

Solução. Temos que a função f é de classe C^∞ e que $f(0, 0) = (0, 0)$. A conclusão seguirá então do Teorema da Função Inversa, se verificarmos que $\mathrm{d}f(0, 0)$ é um isomorfismo. A matriz que representa $\mathrm{d}f(0, 0)$ na base canônica, isto é, a matriz Jacobiana de f em $(0, 0)$ é:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde f_1, f_2 denotam as funções coordenadas de f. O determinante dessa matriz é igual a $1 \neq 0$ e portanto $\mathrm{d}f(0, 0)$ é de fato um isomorfismo.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Sejam M um espaço métrico separável e $(U_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos abertos não vazios dois a dois disjuntos de M. Mostre que I é enumerável.

Solução. Seja D um subconjunto enumerável denso de M. Para cada $i \in I$, como U_i é um aberto não vazio, temos que $U_i \cap D \neq \emptyset$; escolha $x_i \in U_i \cap D$. Temos que a função:

$$I \ni i \longmapsto x_i \in D$$

é injetora. De fato, se $i, j \in I$ e $i \neq j$ então $x_i \in U_i$ e $x_j \in U_j$. Como $U_i \cap U_j = \emptyset$, temos que $x_i \neq x_j$. A existência de uma função injetora de I em D e a enumerabilidade de D implicam que I é enumerável.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ o subconjunto aberto de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes invertíveis. Considere a função $F : M_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por:

$$F(A, B) = BAB^{-1}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}),\ B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Determine a diferencial de F. Justifique a sua resposta.

Solução. Dados $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $H, K \in M_n(\mathbb{R})$, temos:

$$\mathrm{d}F(A, B) \cdot (H, K) = \partial_1 F(A, B) \cdot H + \partial_2 F(A, B) \cdot K,$$

onde $\partial_1 F(A, B) = \mathrm{d}G_1(A)$ e $\partial_2 F(A, B) = \mathrm{d}G_2(B)$, sendo que as funções $G_1 : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(R)$ e $G_2 : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ são definidas por:

$$G_1(X) = F(X, B), \quad X \in M_n(\mathbb{R}), \qquad G_2(X) = F(A, X), \quad X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

A função G_1 é linear e portanto:

$$\partial_1 F(A, B) \cdot H = \mathrm{d}G_1(A) \cdot H = G_1(H) = BHB^{-1}.$$

Para calcular a diferencial de G_2, note que $G_2 = \lambda \circ (i, \mathfrak{I})$, onde:

$$i : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

denota a função inclusão, $\mathfrak{I} : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ é definida por:

$$\mathfrak{I}(X) = X^{-1}, \quad X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),$$

$(i, \mathfrak{I}) : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ denota a função cujas funções coordenadas são i e $\mathfrak{I}$ e a função $\lambda : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ é definida por:

$$\lambda(X_1, X_2) = X_1 A X_2, \quad X_1, X_2 \in M_n(\mathbb{R}).$$

A função i é restrição da aplicação identidade (que é linear) a um aberto e portanto:

$$\mathrm{d}i(B) \cdot K = K, \quad B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ K \in M_n(\mathbb{R}).$$

Vimos em aula que a diferencial de $\mathfrak{I}$ é dada por:

$$\mathrm{d}\mathfrak{I}(B) \cdot K = -B^{-1} K B^{-1}, \quad B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ K \in M_n(\mathbb{R}).$$

A aplicação λ é bilinear e portanto:

$$\mathrm{d}\lambda(X_1, X_2) \cdot (V_1, V_2) = \lambda(X_1, V_2) + \lambda(V_1, X_2), \quad X_1, X_2, V_1, V_2 \in M_n(\mathbb{R}).$$

Usando a regra da cadeia e o teorema da diferenciação coordenada por coordenada, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G_2(B) \cdot K &= \mathrm{d}\lambda(B, B^{-1}) \cdot \big(\mathrm{d}i(B) \cdot K, \mathrm{d}\mathfrak{I}(B) \cdot K\big) \\ &= \lambda(B, -B^{-1} K B^{-1}) + \lambda(K, B^{-1}) = -BAB^{-1} K B^{-1} + KAB^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\mathrm{d}F(A, B) \cdot (H, K) = BHB^{-1} - BAB^{-1} K B^{-1} + KAB^{-1}.$$

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Sejam K, M, N espaços métricos; denotamos as métricas de todos eles por d. Seja $f : M \times K \to N$ uma função contínua, onde $M \times K$ é munido de uma métrica produto. Suponha que K seja compacto. Mostre que para todo $x \in M$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todos $x' \in M$, $y, y' \in K$, se $d(x, x') < \delta$ e $d(y, y') < \delta$ então $d\big(f(x, y), f(x', y')\big) < \varepsilon$. (Sugestão: faça por absurdo.)

Solução. Supondo por absurdo que a tese seja falsa, temos que existem $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para todo $\delta > 0$, existem $x' \in M$, $y, y' \in K$ com $d(x, x') < \delta$, $d(y, y') < \delta$, mas $d\big(f(x, y), f(x', y')\big) \geq \varepsilon$. Fixando $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ como esses e, para cada inteiro positivo n, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, obtemos:

$$x'_n \in M, \quad y_n, y'_n \in K$$

tais que:

$$d(x, x'_n) < \frac{1}{n}, \quad d(y_n, y'_n) < \frac{1}{n}$$

e $d\big(f(x, y_n), f(x'_n, y'_n)\big) \geq \varepsilon$. Como K é compacto, a seqüência $(y_n)_{n\geq 1}$ possui uma subseqüência $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge para um ponto $y \in K$. Temos:

$$d(x, x'_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k\to+\infty} 0,$$

donde $(x'_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para x. Além do mais:

$$d(y, y'_{n_k}) \leq d(y, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y'_{n_k}) < d(y, y_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k\to+\infty} 0,$$

donde $(y'_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para y. Assim, usando a continuidade de f, obtemos:

$$\lim_{k\to+\infty} f(x, y_{n_k}) = f(x, y), \quad \lim_{k\to+\infty} f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) = f(x, y),$$

donde:

$$\lim_{k\to+\infty} d\big(f(x, y_{n_k}), f(x'_{n_k}, y'_{n_k})\big) = 0,$$

contradizendo o fato que $d\big(f(x, y_{n_k}), f(x'_{n_k}, y'_{n_k})\big) \geq \varepsilon$, para todo $k \geq 1$.