Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk

08/07/2014

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e sejam V_1 e V_2 subespaços de V. Mostre que os espaços vetoriais $(V_1+V_2)/V_2$ e $V_1/(V_1 \cap V_2)$ são isomorfos.

Solução. Denote por $q : V_1 + V_2 \to (V_1 + V_2)/V_2$ a aplicação quociente e seja $T = q|_{V_1} : V_1 \to (V_1 + V_2)/V_2$ a restrição de q a V_1. Afirmamos que T é sobrejetora. De fato, todo elemento de $(V_1+V_2)/V_2$ é da forma $(v_1+v_2)+V_2$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, e vale que:

$$T(v_1) = q(v_1) = v_1 + V_2 = (v_1 + v_2) + V_2.$$

Temos também:

$$\mathrm{Ker}(T) = \big\{v \in V_1 : q(v) = 0\big\} = \big\{v \in V_1 : v \in V_2\big\} = V_1 \cap V_2.$$

Assim, T é uma transformação linear cujo domínio é V_1, o núcleo é $V_1 \cap V_2$ e a imagem é $(V_1+V_2)/V_2$. Segue então do resultado do Exercício 3 da Quarta Lista que $V_1/(V_1 \cap V_2)$ (isto é, o quociente do domínio de T pelo núcleo de T) é isomorfo a $(V_1 + V_2)/V_2$ (isto é, a imagem de T).

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja W um subespaço de V. Mostre que o espaço dual do espaço quociente V/W é isomorfo ao anulador de W em V.

Solução. Denote por $q : V \to V/W$ a aplicação quociente. Pelo resultado do Exercício 3 da Segunda Lista, temos que o núcleo da aplicação transposta $q^* : (V/W)^* \to V^*$ é o anulador em V/W da imagem de q. Como q é sobrejetora, temos que esse anulador é nulo, isto é, $\mathrm{Ker}(q^*) = \{0\}$. Logo a aplicação q^* é injetora e portanto define um isomorfismo entre seu domínio e sua imagem. A conclusão segue agora usando o resultado do Exercício 5 da Segunda Lista que implica que a imagem de q^* é o anulador de $\mathrm{Ker}(q) = W$ em V.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e seja $T : V \to V$ um operador linear. Assuma que T admita um vetor cíclico e que o polinômio minimal de T seja irredutível. Mostre que todo vetor não nulo de V é um vetor cíclico para T.

Solução 1. Seja $v \in V$ um vetor cíclico para T, isto é, $V = Z(v;T)$. Pelo resultado do Exercício 10 do texto sobre subespaços cíclicos, temos que o T-aniquilador de v coincide com o polinômio minimal $m_T(X)$ de T. A Proposição 7 do texto sobre subespaços cíclicos nos diz que a dimensão de $Z(v;T)$ é igual ao grau do T-aniquilador de v e portanto:

$$\dim(V) = \operatorname{grau}\big(m_T(X)\big). \tag{1}$$

Seja agora $w \in V$ um vetor não nulo e vamos mostrar que $V = Z(w;T)$. Temos que o T-aniquilador de w é um divisor mônico de $m_T(X)$ (Exercício 8 do texto sobre subespaços cíclicos); além do mais, como $w \neq 0$, o T-aniquilador de w não é um polinômio de grau zero (Exercício 9 do texto sobre subespaços cíclicos). Como $m_T(X)$ é mônico irredutível, um divisor mônico de $m_T(X)$ com grau maior do que zero deve ser igual a $m_T(X)$; assim o T-aniquilador de w é $m_T(X)$. Usando novamente a Proposição 7 do texto sobre subespaços cíclicos, obtemos:

$$\dim\big(Z(w;T)\big) = \operatorname{grau}\big(m_T(X)\big). \tag{2}$$

De (1) e (2) segue que $V = Z(w;T)$, isto é, w é um vetor cíclico para T.

Solução 2. Seja $v \in V$ um vetor cíclico para T e seja $w \in V$ um vetor não nulo. Vamos mostrar que w é um vetor cíclico para T. Como $w \in V$ e $V = Z(v;T)$, existe um polinômio $p(X) \in K[X]$ tal que $w = p(T)(v)$. Temos que o polinômio minimal $m_T(X)$ não divide $p(X)$, pois se $m_T(X)|p(X)$, então $p(T) = 0$, contradizendo a hipótese de que $w \neq 0$. Como $m_T(X)$ é irredutível, segue que $\operatorname{mdc}\big(m_T(X), p(X)\big) = 1$ (Exercício 3 do texto sobre decomposição primária). Pelo Teorema de Bezout, existem polinômios $r(X), s(X) \in K[X]$ tais que:

$$r(X)m_T(X) + s(X)p(X) = 1,$$

e portanto:

$$r(T) \circ m_T(T) + s(T) \circ p(T) = s(T) \circ p(T) = \mathrm{I}.$$

Segue daí que:

$$v = \big(s(T) \circ p(T)\big)(v) = s(T)(w) \in Z(w;T).$$

Como $Z(w;T)$ é um subespaço T-invariante contendo v e como $Z(v;T)$ é o menor subespaço T-invariante contendo v, segue que:

$$V = Z(v;T) \subset Z(w;T),$$

isto é, $V = Z(w;T)$ e w é um vetor cíclico para T.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : V \to V$ um operador linear normal. Mostre que existe uma decomposição em soma direta

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$$

do espaço vetorial V tal que valem as seguintes condições:

(a) $\dim(V_i) = 1$ ou $\dim(V_i) = 2$, para todo $i = 1, \ldots, k$;

(b) V_i é T-invariante, para todo $i = 1, \ldots, k$;

(c) para todos $i, j = 1, \ldots, k$ com $i \neq j$, o subespaço V_i é ortogonal ao subespaço V_j, isto é, $\langle x, y \rangle = 0$, para todos $x \in V_i$ e $y \in V_j$.

Solução. Usamos indução na dimensão de V. Se a dimensão de V é nula, isto é, se $V = \{0\}$, basta tomar $k = 0$ e as condições (a), (b) e (c) são vaziamente satisfeitas. Suponha então que a dimensão de V seja positiva e que o resultado seja válido para espaços com dimensão menor do que a de V. Pelo resultado do Exercício 21 do texto sobre subespaços cíclicos, existe um subespaço T-invariante V_1 de V com $\dim(V_1) = 1$ ou $\dim(V_1) = 2$. Como T é normal e V tem dimensão finita, segue do resultado do item (a) do Exercício 9 da Oitava Lista que V_1 é também $T^\dagger$-invariante. Do resultado do Exercício 1 da Sétima Lista obtemos então que $W = (V_1)^\perp$ é T-invariante e $T^\dagger$-invariante; portanto, $T|_W : W \to W$ é também um operador normal. Como $\dim(W) < \dim(V)$, a hipótese de indução nos dá uma decomposição em soma direta $W = \bigoplus_{i=2}^{k} V_i$ satisfazendo (a), (b) e (c). Como $V = V_1 \oplus W$ e V_1 é ortogonal a W, segue facilmente que $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ é uma decomposição em soma direta satisfazendo (a), (b) e (c).