Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk
28/06/2019

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2x, 2xy - 2y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (valor 0,5 ponto) Determine a matriz Jacobiana de f num ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) (valor 1,0 ponto) Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem a algum aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $f[U]$ seja aberto e tal que a função $f|_U : U \to f[U]$ seja um difeomorfismo. Liste explicitamente os pontos de $\mathbb{R}^2$ que *não* estão em A.

(c) (valor 1,0 ponto) Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo o ponto $(0, 1)$ tal que $f[U]$ seja aberto e a função $f|_U : U \to f[U]$ seja um difeomorfismo. Calcule a matriz Jacobiana da função inversa $g = (f|_U)^{-1}$ no ponto $(-1, -2) = f(0, 1)$.

Solução do item (a). Se f_1 e f_2 denotam as funções coordenadas de f, então

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2x - 2, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -2y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 2x - 2,$$

e portanto

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2 & -2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix},$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução do item (b). Como f é de classe C^1, segue do Teorema da Função Inversa que (x, y) pertence a A se, e somente se, a matriz Jacobiana $Jf(x, y)$ é inversível. Portanto $(x, y) \in A$ se, e somente se, o determinante de $Jf(x, y)$ é não nulo. Temos:

$$\begin{aligned} \det\big(Jf(x, y)\big) = (2x - 2)^2 + 4y^2 = 0 &\iff 2x - 2 = 0 \text{ e } y = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ e } y = 0. \end{aligned}$$

Assim, o único ponto de $\mathbb{R}^2$ que não está em A é o ponto $(1, 0)$.

Solução do item (c). Como $g \circ (f|_U)$ é a aplicação identidade de U, o ponto $(0,1)$ está em U e $f(0,1) = (-1,-2)$, a regra da cadeia nos dá que $Jg(-1,-2)Jf(0,1)$ é a matriz identidade, donde segue que $Jg(-1,-2)$ é a matriz inversa de $Jf(0,1)$. Usando o resultado do item (a), obtemos

$$Jf(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

e portanto:

$$Jg(-1,-2) = Jf(0,1)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja D o semi-disco definido por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y \geq 0\}.$$

Cacule a integral dupla:

$$\iint_D x^2 y \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Solução. Usando coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta, \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$
$$r \in \,]0, +\infty[\,, \quad \theta \in \,]0, 2\pi[\,,$$

e o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\iint_D x^2 y \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^\pi \Big(\int_0^1 r^4 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}r \Big) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{5} \int_0^\pi \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Usando a substituição $u = \cos\theta$, $\mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta$, calculamos a última integral acima como segue:

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta = -\int_1^{-1} u^2 \, \mathrm{d}u = \frac{2}{3} \cdot$$

Assim:

$$\iint_D x^2 y \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{2}{15} \cdot$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Considere o pedaço de esfera S definido por

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0 \text{ e } z > 0\big\}$$

e o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, z, 0),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule o fluxo $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A$, em que $\vec{n}$ é a normal unitária para S definida por $\vec{n}(x, y, z) = (x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in S$.

Solução. Consideramos a parametrização injetiva $\sigma : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}^3$ de S definida por

$$\sigma(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

para todo $(\theta, \phi) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Temos

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta, \phi) = (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta, \phi) = (\cos\theta \cos\phi, \operatorname{sen}\theta \cos\phi, -\operatorname{sen}\phi),$$

e portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta, \phi) &= (-\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\phi \cos\phi), \\ &= -\vec{n}\big(\sigma(\theta, \phi)\big) \operatorname{sen}\phi,\end{aligned}$$

para todo $(\theta, \phi) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donde segue que $\vec{n}$ tem o sentido oposto da normal unitária canonicamente associada à parametrização σ, isto é, os vetores $\vec{n}\big(\sigma(\theta, \phi)\big)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta, \phi)$ tem sentidos opostos. Daí:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}\big(\sigma(\theta, \phi)\big) \cdot \Big(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta, \phi)\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\phi\,.$$

Temos

$$\vec{F}\big(\sigma(\theta,\phi)\big) = (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\phi, 0) \qquad \text{e}$$

$$\vec{F}\big(\sigma(\theta,\phi)\big)\cdot\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,\phi)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta,\phi)\Big) = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^3\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi,$$

para todo $(\theta,\phi)\in\big]0,\frac{\pi}{2}\big[\times\big]0,\frac{\pi}{2}\big[$ e portanto

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^3\phi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\phi\\
&= \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^3\phi\,\mathrm{d}\phi\Big)\\
&\quad + \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi\Big)\\
&= \Big(\int_0^1 u\,\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_0^1(1-v^2)\,\mathrm{d}v\Big) + \int_0^1 w^2\,\mathrm{d}w\\
&= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,,
\end{aligned}$$

em que usamos as substituições de variável $u = \operatorname{sen}\theta$, $v = \cos\phi$ e $w = \operatorname{sen}\phi$ para o cálculo das integrais.

Questão 4. Considere o pedaço de parabolóide definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 \text{ e } z > 0\}$$

e o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(x^2 - \operatorname{sen}(y^3 + z^3), y + \cos(x^2 z^2), -xz\big),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (valor 0,5 ponto) Calcule o divergente de $\vec{F}$.

(b) (valor 2,0 pontos) Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A$, em que $\vec{n}$ é a normal unitária para S que aponta para fora de:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}.$$

Solução do item (a). O divergente de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) = 2x + 1 - x = x + 1,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em que F_1, F_2 e F_3 denotam as funções coordenadas de $\vec{F}$.

Solução do item (b). Considere o disco

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z = 0\}.$$

Temos que U é um aberto apropriado para o Teorema de Gauss e que a fronteira de U é a união da superfície regular $S \cup D$ com o círculo

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\}$$

que é imagem de uma curva de classe C^1 e portanto irrelevante para a integral de superfície. Podemos então aplicar o Teorema de Gauss obtendo

$$\iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A + \int_D \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, \mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}_1$ é a normal unitária para o disco D que aponta para fora de U. Temos $\vec{n}_1(x, y, z) = (0, 0, -1)$ e portanto

$$\vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}_1(x, y, z) = xz = 0,$$

para todo $(x, y, z) \in D$; daí:

$$\int_D \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, \mathrm{d}A = 0.$$

Agora calculamos a integral tripla

$$\iiint_U \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \iiint_U (x+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

usando coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = z,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$r\in\,]0,+\infty[\,, \quad \theta\in\,]0,2\pi[\,, \quad z\in\mathbb{R}$$

e o Teorema de Fubini, obtendo:

$$\begin{aligned}\iiint_U \vec{\nabla}\cdot\vec{F} &= \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1-r^2}(r\cos\theta+1)r\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}(r\cos\theta+1)r(1-r^2)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}r\\ &= \Big(\int_0^1 r^2(1-r^2)\,\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\Big) + 2\pi\int_0^1 r(1-r^2)\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\int_0^1(r-r^3)\,\mathrm{d}r = 2\pi\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Assim:

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \iiint_U \vec{\nabla}\cdot\vec{F} - \int_D \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,\mathrm{d}A = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$