Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0206 – Análise Real

MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk

06/07/2012

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em D e $a \in D$ um valor de aderência de $(x_n)_{n\geq 1}$. Mostre que se f é contínua no ponto a então $f(a)$ é um valor de aderência de $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$.

Solução. Como a é um valor de aderência de $(x_n)_{n\geq 1}$, temos que a é limite de uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$. A continuidade de f no ponto a implica então que $\big(f(x_{n_k})\big)_{k\geq 1}$ converge para $f(a)$. Mas $\big(f(x_{n_k})\big)_{k\geq 1}$ é uma subseqüência de $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ e portanto $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ possui uma subseqüência que converge para $f(a)$, ou seja, $f(a)$ é um valor de aderência de $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Sejam $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas. Mostre que a função $f + g$ é uniformemente contínua.

Solução. Seja dado $\varepsilon > 0$. Como f e g são uniformemente contínuas, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, para todos $x, y \in D$, vale que:

$$|x - y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|x - y| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Daí, dados $x, y \in D$, se $|x - y| < \delta$ então:

$$|x - y| < \delta_1 \quad \text{e} \quad |x - y| < \delta_2,$$

de modo que:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e portanto:

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Encontre um exemplo de uma seqüência de números reais $(x_n)_{n\geq 1}$ que não seja convergente, mas tal que:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

(Sugestão: tome $x_n=\sum_{k=1}^n a_k$, para uma escolha apropriada de $(a_k)_{k\geq 1}$.)

Solução. Seja:

$$x_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n\in\mathbb{N}^*,$$

isto é, $(x_n)_{n\geq 1}$ é a seqüência das somas parciais da série harmônica. Como a série harmônica diverge, a seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge. Mas:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Mostre que se $U \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto aberto então ∂U tem interior vazio.

Solução. Suponha por absurdo que exista $x \in \mathrm{int}(\partial U)$. Daí existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \subset \partial U. \tag{1}$$

Em particular, $x \in \partial U$. Portanto $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap U \neq \emptyset$. Mas, sendo U aberto, temos que $\partial U \cap U = \emptyset$ (Exercício 14 da lista 8) e de (1) segue então que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap U = \emptyset$. Chegamos portanto a uma contradição.