Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk

10/07/2014

Questão 1. (valor 3,0 pontos) Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 2 munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Determine uma base ortonormal $\{p_1, p_2, p_3\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ em que p_1 tenha grau zero, p_2 tenha grau 1 e p_3 tenha grau 2.

Solução. Se aplicarmos o método de ortogonalização de Gram–Schmidt ao conjunto de vetores $\{1, x, x^2\}$ e depois normalizarmos os vetores obtidos, obteremos a base ortonormal desejada. Em primeiro lugar, note que:

$$\langle 1, x \rangle = 1(-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0,$$

de modo que, para ortogonalizar o conjunto $\{1, x, x^2\}$, é suficiente substituir o vetor x^2 por:

$$x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x.$$

Temos:

$$\begin{gathered} \langle x^2, 1 \rangle = (-1)^2 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2, \\ \langle 1, 1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3, \\ \langle x^2, x \rangle = (-1)^2(-1) + 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1 = 0, \end{gathered}$$

de modo que:

$$x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Assim $\left\{1, x, x^2 - \frac{2}{3}\right\}$ é uma base ortogonal de $P_2(\mathbb{R})$ em que o primeiro polinômio tem grau zero, o segundo tem grau 1 e o terceiro tem grau 2. Agora calculamos a norma desses vetores. Temos:

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 3,$$

e:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = (-1)(-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2,$$

$$\left\| x^2 - \frac{2}{3} \right\|^2 = \left\langle x^2 - \frac{2}{3}, x^2 - \frac{2}{3} \right\rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Assim, uma base ortonormal de $P_2(\mathbb{R})$ com as propriedades requeridas pelo enunciado é:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x, \quad p_3(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right).$$

Observação. Podemos obter 8 respostas diferentes para essa questão multiplicando alguns dos polinômios p_1, p_2 e p_3 obtidos acima por -1. Essas 8 respostas são todas as respostas possíveis para a questão. De fato, os únicos polinômios de grau zero com norma 1 são p_1 e $-p_1$; além do mais, os únicos polinômios ortogonais a p_1 com norma 1 dentro do espaço vetorial $P_1(\mathbb{R})$ (que tem dimensão 2) são p_2 e $-p_2$. Finalmente, os únicos polinômios ortogonais a p_1 e a p_2 com norma 1 dentro do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ (que tem dimensão 3) são p_3 e $-p_3$.

Questão 2. (valor 3,0 pontos) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Determine os valores de a e b para os quais o operador T é diagonalizável.

Solução. Começamos determinando o polinômio característico de T. Temos:

$$p_T(\lambda) = \det(T - \lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & a \\ b & b-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) - ab = \lambda^2 - (a+b)\lambda$$
$$= \lambda\big(\lambda - (a+b)\big).$$

Assim, os autovalores de T (repetidos de acordo com suas multiplicidades algébricas) são 0 e $a+b$. Note que todas as raízes complexas de p_T são reais, de modo que para decidir se T é diagonalizável é suficiente comparar as multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores de T. Se $a + b \neq 0$, então todos os autovalores de T possuem multiplicidade algébrica igual a 1 e portanto T é diagonalizável. Se $a+b = 0$, então 0 é o único autovalor de T e possui multiplicidade algébrica igual a 2. Nesse caso, T será diagonalizável apenas se o autovalor 0 possuir multiplicidade geométrica igual a 2, isto é, se $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}^2$. Mas isso só é possível se $T = 0$, isto é, se $a = b = 0$.

Concluímos então que T é diagonalizável precisamente quando vale uma das duas seguintes condições:

(i) $a \neq -b$;
(ii) $a = b = 0$.

Questão 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 e sejam $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{C} = \{f_1, f_2\}$ bases de V tais que:

$$f_1 = e_1 + 2e_2, \quad f_2 = -e_1 + e_2.$$

Sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ os operadores lineares tais que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine:

(a) (valor 1,0 ponto) a matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$;
(b) (valor 1,0 ponto) a matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$;
(c) (valor 1,0 ponto) a matriz $[S]_{\mathcal{B}}$;
(d) (valor 1,0 ponto) a matriz $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$.

Solução.

(a) A matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ possui em suas colunas as coordenadas na base $\mathcal{B}$ dos vetores f_1 e f_2. Temos $[f_1]_{\mathcal{B}} = (1, 2)$ e $[f_2]_{\mathcal{B}} = (-1, 1)$. Assim:

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) A matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ é a inversa da matriz $[\mathrm{I}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Assim:

$$[\mathrm{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Temos:

$$[S]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{I}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{C}}[\mathrm{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo as contas, obtemos:

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Temos:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$