Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

05/12/2018

Questão 1. Dado $u > 0$, considere a região R_u do plano definida por

$$R_u = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le u \text{ e } 0 \le y \le \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}\Big\}$$

e denote por S_u o sólido obtido pela rotação de R_u em torno do eixo x. Seja V_u o volume de S_u.

(a) (valor 1,0 ponto) Escreva uma integral cujo resultado seja V_u.

(b) (valor 1,5 pontos) Decida se o limite $\lim_{u\to+\infty} V_u$ é finito ou infinito.

Solução do item (a). Temos

$$V_u = \int_0^u A(x)\,\mathrm{d}x,$$

em que $A(x)$ é a área da interseção de S_u com o plano ortogonal ao eixo x passando pelo ponto $(x, 0)$. Como essa interseção é um disco de raio $\frac{x+\operatorname{sen} x}{x^2+1}$, segue que:

$$A(x) = \pi\Big(\frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}\Big)^2.$$

Logo:

$$V_u = \int_0^u \pi\Big(\frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}\Big)^2\,\mathrm{d}x.$$

Solução do item (b). Temos

$$\lim_{u\to+\infty} V_u = \pi\int_0^{+\infty}\Big(\frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}\Big)^2\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

e portanto esse limite será finito se, e somente se, essa integral imprópria for convergente. Note que o integrando é contínuo em $[0, +\infty[$ e logo não possui singularidades. Vamos comparar o integrando com a função $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\Big(\frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}\Big)^2 \Big/ \frac{1}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x + \operatorname{sen} x)^2}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\big(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\big)^2}{x^4\big(1 + \frac{1}{x^2}\big)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\big(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\big)^2}{\big(1 + \frac{1}{x^2}\big)^2} = 1.$$

Como esse limite é finito e a integral imprópria $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ é (absolutamente) convergente, segue que também a integral imprópria em (1) é (absolutamente) convergente. Logo o limite $\lim_{u\to+\infty} V_u$ é finito.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Calcule o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2}\,,$$

caso ele exista.

Solução. Temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(x\,\frac{1-\cos y}{y^2}\,\frac{y^2}{x^2+y^2}\Big).$$

Como

$$\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^2} = \lim_{y\to0}\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y^2(1+\cos y)} = \lim_{y\to0}\Big(\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y^2}\,\frac{1}{1+\cos y}\Big) = \frac{1}{2}\,,$$

segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(x\,\frac{1-\cos y}{y^2}\Big) = 0.$$

Mas

$$0 \le y^2 \le x^2+y^2 \Longrightarrow 0 \le \frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1,$$

para todo $(x,y)\neq(0,0)$ e portanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(x\,\frac{1-\cos y}{y^2}\,\frac{y^2}{x^2+y^2}\Big) = 0.$$

Observação. Na verdade, a solução acima não está exatamente correta porque não podemos dividir por y^2 quando $y=0$ (podemos supor no cálculo do limite que $(x,y)\neq(0,0)$, mas isso não implica $y\neq0$). Uma solução rigorosa pode ser obtida assim: consideramos a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(y)=\frac{1-\cos y}{y^2}$, se $y\neq0$ e $f(0)=\frac{1}{2}$. Daí $1-\cos y = f(y)y^2$ para todo $y\in\mathbb{R}$ e portanto:

$$\frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2} = xf(y)\frac{y^2}{x^2+y^2}\,,$$

para todo $(x,y)\neq(0,0)$. Os cálculos acima mostram que f é contínua e daí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \big(xf(y)\big) = 0\cdot f(0) = 0.$$

O resto do argumento é igual.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) = f\Big(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s, \int_0^{2t} g(s)\,\mathrm{d}s\Big),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2 \quad \text{e} \quad g(0) = 3,$$

em que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ denotam as derivadas parciais de f na primeira e na segunda variável, respectivamente. Calcule $h'(0)$.

Solução. Considere a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como g é contínua, segue do segundo Teorema Fundamental do Cálculo que G é derivável e que $G' = g$. Temos

$$h(t) = f\big(G(t), G(2t)\big),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como f é diferenciável, podemos usar a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(G(t), G(2t)\big)G'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(G(t), G(2t)\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(2t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(G(t), G(2t)\big)G'(t) + 2\frac{\partial f}{\partial y}\big(G(t), G(2t)\big)G'(2t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(G(t), G(2t)\big)g(t) + 2\frac{\partial f}{\partial y}\big(G(t), G(2t)\big)g(2t), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, como $G(0) = 0$, obtemos:

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)g(0) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)g(0) = 15.$$

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determine os pontos de máximo e mínimo global da restrição de f ao disco fechado:

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\big\}.$$

Solução. Como D é compacto e não vazio e f é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que a restrição de f a D possui pontos de máximo e mínimo global. Vamos encontrar uma lista de candidatos a ponto de máximo ou mínimo global para a restrição de f a D. Como f é diferenciável, sabemos que se um ponto de máximo ou mínimo global da restrição de f a D estiver no interior de D, então ele será um ponto crítico de f (isto é, o gradiente de f será nulo nesse ponto). O gradiente de f é dado por

$$\nabla f(x, y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big) = (4x + 4y, 4x + 10y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0),$$

e portanto o único ponto crítico de f é a origem (que está de fato no interior de D). Para encontrar os candidatos a ponto de máximo ou mínimo global da restrição de f à fronteira de D, usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Temos que a fronteira de D é a curva de nível 5 da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = x^2 + y^2,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como f e g tem domínios abertos, f é diferenciável e g é de classe C^1, estão satisfeitas as hipóteses sob as quais o método dos multiplicadores de Lagrange se aplica. Temos

$$\nabla g(x, y) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\Big) = (2x, 2y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e portanto:

$$\nabla g(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Como $g(0, 0) \neq 5$, vemos que o vínculo $g(x, y) = 5$ não possui pontos críticos. Assim, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de máximo ou mínimo global da restrição de f à fronteira de D, então

$$g(x, y) = 5 \quad \text{e} \quad \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Devemos então encontrar os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 4x + 4y = 2\lambda x, \\ 4x + 10y = 2\lambda y, \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que (2) não possui soluções com $x = 0$ ou $y = 0$. De fato, se $x = 0$, então a segunda equação em (2) implica $y = 0$ e a condição $x = y = 0$ é incompatível com a primeira equação. Similarmente, se $y = 0$, então a terceira equação implica $x = 0$. No que segue, assumimos então $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Sob essas condições, as duas últimas equações em (2) equivalem a:

$$\begin{cases} 2 + 2\,\dfrac{y}{x} = \lambda, \\ 2\,\dfrac{x}{y} + 5 = \lambda. \end{cases} \tag{3}$$

Temos que (3) é satisfeito para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se:

$$2 + 2\,\frac{y}{x} = 2\,\frac{x}{y} + 5. \tag{4}$$

Além do mais, (x, y) satisfaz (4) se, e somente se, $t = \frac{x}{y}$ é solução de:

$$\frac{2}{t} = 2t + 3. \tag{5}$$

Para $t \neq 0$, (5) é equivalente à equação de segundo grau

$$2t^2 + 3t - 2 = 0,$$

cujas raízes são $t = \frac{1}{2}$ e $t = -2$. Assim, (3) é satisfeito para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se:

$$x = -2y \quad \text{ou} \quad y = 2x.$$

Sob $x = -2y$, a primeira equação de (2) tem as soluções

$$(-2, 1) \quad \text{e} \quad (2, -1),$$

e sob $y = 2x$ a primeira equação de (2) tem as soluções:

$$(1, 2) \quad \text{e} \quad (-1, -2).$$

Em resumo, todo ponto de máximo ou mínimo global da restrição de f a D pertence à lista:

$$(0, 0), \quad (-2, 1), \quad (2, -1), \quad (1, 2), \quad (-1, -2).$$

Temos

$$f(0, 0) = 0, \quad f(-2, 1) = f(2, -1) = 5 \quad \text{e} \quad f(1, 2) = f(-1, -2) = 30.$$

Logo $(0, 0)$ é o único ponto de mínimo global da restrição de f a D e $(1, 2)$ e $(-1, -2)$ são os únicos pontos de máximo global da restrição de f a D.