Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

28/06/2013

Questão 1. (valor 1,0 ponto) Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}.$$

Solução. Como $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$, a regra de L'Hospital nos dá:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

A questão também pode ser resolvida sem a regra de L'Hospital. Para isso, observe que:

$$1 + \ln x = \ln e + \ln x = \ln(ex) \geq \ln(x+1),$$

desde que $ex \geq x+1$, isto é, desde que $x \geq \frac{1}{e-1}$. Assim:

$$\ln x \leq \ln(x+1) \leq 1 + \ln x \Longrightarrow 1 \leq \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln x} + 1,$$

para todo $x > \max\left\{\frac{1}{e-1}, 1\right\}$. Como:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln x} + 1\right) = 1,$$

segue do Teorema do Confronto que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1.$$

Questão 2. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2},$$

para todo $x \in D$, onde $D = \big\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \neq 0\big\}$.

(a) (valor 1,0 ponto) Estude o sinal de f'.

(b) (valor 1,0 ponto) Estude o sinal de f''.

(c) (valor 1,0 ponto) Esboce o gráfico de f, levando em conta crescimento/decrescimento, concavidade, interseção com os eixos coordenados e assíntotas horizontais e verticais.

Solução.

(a) Temos:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1,$$

donde o domínio de f é:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}.$$

A derivada de f é dada por:

$$f'(x) = -\frac{2x - 1}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x - 2)^2},$$

para todo $x \in D$. Assim, para todo $x \in D$, temos:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < \frac{1}{2}, \quad f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

(b) A derivada segunda de f é dada por:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2 - x - 2)^2 - 2(1 - 2x)(x^2 - x - 2)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^4} \\ &= \frac{-2(x^2 - x - 2) + 2(2x - 1)^2}{(x^2 - x - 2)^3} \\ &= \frac{2(3x^2 - 3x + 3)}{(x^2 - x - 2)^3} = \frac{6(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x - 2)^3}. \end{aligned}$$

Temos:

$$x^2 - x + 1 = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que $f''(x)$ e $x^2 - x - 2$ possuem o mesmo sinal, para todo $x \in D$. Assim:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2, \quad f''(x) < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 2.$$

(c) Em vista do resultado do item (a), temos que f é estritamente crescente nos intervalos:

$$\left]-\infty,-1\right[,\quad \left]-1,\tfrac{1}{2}\right],$$

e é estritamente decrescente nos intervalos:

$$\left[\tfrac{1}{2},2\right[,\quad \left]2,+\infty\right[.$$

Em vista do resultado do item (b), temos que f é côncava para cima nos intervalos:

$$\left]-\infty,-1\right[,\quad \left]2,+\infty\right[,$$

e é côncava para baixo no intervalo $]-1,2[$. Temos:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty,$$

já que f é negativa em $]-1,2[$ e positiva fora de $[-1,2]$. Assim, as retas $x=-1$ e $x=2$ são assíntotas verticais ao gráfico de f. Temos também:

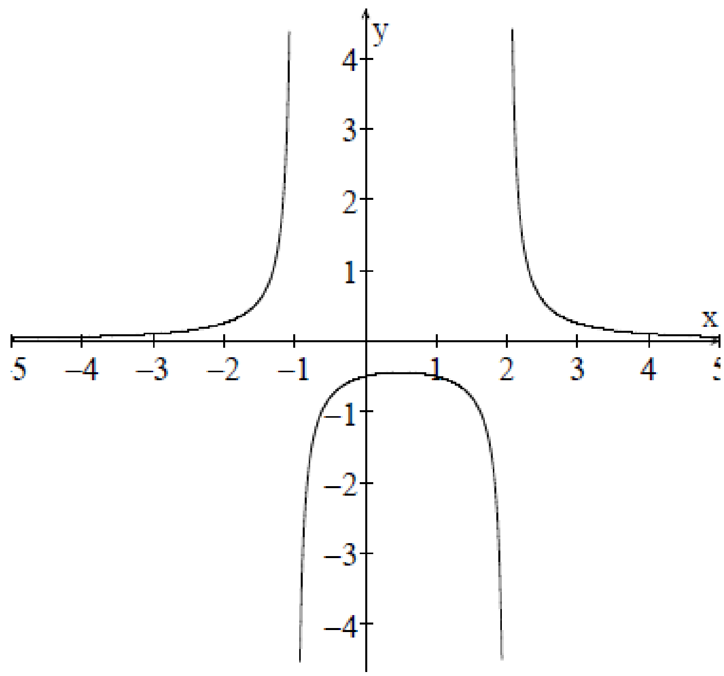
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=0,$$

e, similarmente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,$$

donde o eixo x é uma assíntota horizontal ao gráfico de f. Como $f(x)\neq0$ para todo $x\in D$, temos que o gráfico de f não intersecta o eixo x e intersecta o eixo y no ponto $\big(0,f(0)\big)=\big(0,-\frac{1}{2}\big)$.

O esboço do gráfico de f fica assim:



Questão 3. (valor 2,0 pontos cada item) Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\displaystyle\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+4x+6} \, \mathrm{d}x$.

Solução.

(a) Usando integração por partes com:

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = \cos x,$$

obtemos:

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x.$$

Usando novamente integração por partes com:

$$f_1(x) = e^x, \quad g_1'(x) = \operatorname{sen} x,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x &= f_1(x)g_1(x) - \int f_1'(x)g_1(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x) \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo:

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x,$$

e portanto:

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x).$$

(b) Temos:

$$\int \frac{4x+3}{x^2+4x+6} \, \mathrm{d}x = 2 \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} \, \mathrm{d}x - 5 \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}.$$

A primeira integral é calculada usando a substituição $y = x^2+4x+6$:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| = \ln|x^2+4x+6|.$$

Para calcular a segunda integral, começamos completando quadrados:

$$x^2+4x+6 = (x+2)^2 + 2,$$

e usamos a substituição $x = \sqrt{2}\,z - 2$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} = \int \frac{\sqrt{2}}{2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\Big).$$

Logo:

$$\int \frac{4x+3}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x^2+4x+6) - \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\Big),$$

já que $x^2+4x+6 = (x+2)^2+2 > 0$, para todo x.

Questão 4. Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{1+x},$$

para todo $x \geq -1$. Denote por p_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno da origem.

(a) (valor 1,5 ponto) Determine p_2 e mostre que:

$$p_2(x) \leq f(x) \leq p_2(x) + \frac{x^3}{16},$$

para todo $x \geq 0$.

(b) (valor 1,5 ponto) Mostre que:

$$1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \leq 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} + \frac{1}{160}.$$

Solução.

(a) Temos:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}\,(1+x)^{-\frac{5}{2}},$$

para todo $x > -1$. Daí:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4},$$

e portanto:

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Usando o resto de Lagrange para a fórmula de Taylor, obtemos, para todo $x > 0$:

$$f(x) = p_2(x) + r(x),$$

com:

$$r(x) = f'''(c)\,\frac{x^3}{3!} = \frac{1}{16}\,(1+c)^{-\frac{5}{2}}\,x^3,$$

onde $0 < c < x$. Assim:

$$0 < r(x) < \frac{x^3}{16},$$

e portanto:

$$p_2(x) < f(x) < p_2(x) + \frac{x^3}{16},$$

para todo $x > 0$. Para $x = 0$ as duas desigualdades viram igualdades e portanto:

$$p_2(x) \leq f(x) \leq p_2(x) + \frac{x^3}{16},$$

para todo $x \geq 0$.

(b) Vimos no item (a) que:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16},$$

para todo $x \geq 0$. Trocando x por x^3 obtemos que:

$$1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} \leq \sqrt{1+x^3} \leq 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16},$$

para todo $x \geq 0$. Integrando no intervalo $[0,1]$ obtemos:

$$\int_0^1 \Big(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8}\Big)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \Big(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Mas:

$$\int_0^1 \Big(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8}\Big)\,\mathrm{d}x = x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56}\,\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56},$$

e:

$$\int_0^1 \Big(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16}\Big)\,\mathrm{d}x = x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \frac{x^{10}}{160}\,\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} + \frac{1}{160}.$$

Assim:

$$1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \leq 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{56} + \frac{1}{160}.$$