# Gabarito da Prova de Recuperação

**MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V**
**MAP0217 – Cálculo Diferencial**

Prof. Daniel Victor Tausk

05/02/2014

**Questão 1.** (valor 2,5 pontos) Sejam $U$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^1$. Dado $c \in \mathbb{R}^n$, mostre que se $x \in U$ é um ponto de acumulação de $f^{-1}(c)$ então $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ não é um isomorfismo.

**Solução.** Supondo por absurdo que $\mathrm{d}f(x)$ seja um isomorfismo, o Teorema da Função Inversa nos dá uma vizinhança aberta $V$ de $x$ em $U$ tal que $f|_V : V \to f[V]$ é um difeomorfismo. Em particular, $f|_V$ é injetora, donde segue que $V \cap f^{-1}(c)$ tem no máximo um ponto. No entanto, como $x$ é um ponto de acumulação de $f^{-1}(c)$, temos que $V \cap f^{-1}(c)$ é infinito, o que nos dá uma contradição.

**Questão 2.** (valor 2,5 pontos) Denote por $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial dos operadores lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e por $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ o subconjunto aberto de $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ formado pelos isomorfismos de $\mathbb{R}^n$. Seja $U$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ e sejam $\phi : U \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ e $v : U \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis. Considere a função $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$f(x) = \phi(x)^{-1}\big(v(x)\big), \quad x \in U.$$

Dados $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^m$, determine uma expressão para $\mathrm{d}f(x) \cdot h$ em termos de $\phi(x)$, $v(x)$, $\mathrm{d}\phi(x) \cdot h$ e $\mathrm{d}v(x) \cdot h$.

**Solução.** Seja $\mathfrak{I} : \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ a aplicação definida por:

$$\mathfrak{I}(T) = T^{-1}, \quad T \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Vimos em aula que $\mathfrak{I}$ é diferenciável e que sua diferencial é dada por:

$$\mathrm{d}\mathfrak{I}(T) \cdot H = -T^{-1} \circ H \circ T^{-1}, \quad T \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n),\ H \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n).$$

Seja $\mathcal{E} : \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a aplicação definida por:

$$\mathcal{E}(T, u) = T(u), \quad T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n),\ u \in \mathbb{R}^n.$$

Temos que $\mathcal{E}$ é bilinear; assim, $\mathcal{E}$ é diferenciável e sua diferencial é dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{E}(T, u) \cdot (H, z) = \mathcal{E}(T, z) + \mathcal{E}(H, u) = T(z) + H(u),& \\ T, H \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n),\ u, z \in \mathbb{R}^n.& \end{aligned}$$

Mas $f = \mathcal{E} \circ (\mathfrak{I} \circ \phi, v)$, onde $(\mathfrak{I} \circ \phi, v) : U \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ é a aplicação cujas funções coordenadas são $\mathfrak{I} \circ \phi$ e $v$. Usando a regra da cadeia e o teorema a respeito de diferenciação coordenada por coordenada, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x) \cdot h &= \mathrm{d}\mathcal{E}\big((\mathfrak{I} \circ \phi)(x), v(x)\big) \cdot \big(\mathrm{d}(\mathfrak{I} \circ \phi)(x) \cdot h, \mathrm{d}v(x) \cdot h\big) \\ &= \mathrm{d}\mathcal{E}\big(\phi(x)^{-1}, v(x)\big) \cdot \big[\mathrm{d}\mathfrak{I}\big(\phi(x)\big) \cdot \big(\mathrm{d}\phi(x) \cdot h\big), \mathrm{d}v(x) \cdot h\big] \\ &= \mathrm{d}\mathcal{E}\big(\phi(x)^{-1}, v(x)\big) \cdot \big[-\phi(x)^{-1} \circ \big(\mathrm{d}\phi(x) \cdot h\big) \circ \phi(x)^{-1}, \mathrm{d}v(x) \cdot h\big] \\ &= \phi(x)^{-1}\big(\mathrm{d}v(x) \cdot h\big) - \big[\phi(x)^{-1} \circ \big(\mathrm{d}\phi(x) \cdot h\big) \circ \phi(x)^{-1}\big]\big(v(x)\big), \end{aligned}$$

para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$.

**Questão 3.** (valor 2,5 pontos) Seja $(M, d)$ um espaço métrico conexo com mais de um ponto. Mostre que existe uma função injetora $f : [0, 1] \to M$.

**Solução.** Sejam $x, y \in M$ pontos distintos e seja $r = d(x, y) > 0$. Afirmamos que para todo $s \in [0, r]$ existe um ponto $z_s \in M$ tal que $d(z_s, x) = s$. De fato, para $s = 0$ temos que $z_s = x$ satisfaz essa condição. Se $0 < s \leq r$, então a bola aberta $\mathrm{B}(x, s)$ é um subconjunto aberto não vazio de $M$ e $\mathrm{B}(x, s) \neq M$, já que $y \notin \mathrm{B}(x, s)$. Como $M$ é conexo, $\mathrm{B}(x, s)$ não pode ser fechada e em particular $\mathrm{B}(x, s)$ é diferente da bola fechada $\mathrm{B}[x, s]$. Logo existe $z_s \in \mathrm{B}[x, s] \setminus \mathrm{B}(x, s)$ e daí $d(z_s, x) = s$. Definimos a função $f : [0, 1] \to M$ fazendo:

$$f(t) = z_{tr}, \quad t \in [0, 1].$$

Para ver que $f$ é injetora, note que, dados $t_1, t_2 \in [0, 1]$ com $f(t_1) = f(t_2)$, temos:

$$z_{t_1 r} = z_{t_2 r} \Longrightarrow d(z_{t_1 r}, x) = d(z_{t_2 r}, x) \Longrightarrow t_1 r = t_2 r \Longrightarrow t_1 = t_2.$$

**Questão 4.** (valor 2,5 pontos) Seja $E$ o espaço vetorial real formado por todas as seqüências $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reais, munido das operações usuais. Seja $E_0$ o subespaço de $E$ formado pelas seqüências *quase nulas*, isto é, seqüências $(x_n)_{n\geq 1}$ tais que $x_n \neq 0$ no máximo para um número finito de índices $n$. Considere $E_0$ munido da norma:

$$\big\|(x_n)_{n\geq 1}\big\| = \sup_{n\geq 1} |x_n|, \quad (x_n)_{n\geq 1} \in E_0.$$

Mostre que $E_0$ não é completo.

**Solução.** Considere a seqüência $(x^k)_{k\geq 1}$ em $E_0$ onde, para cada $k \geq 1$, $x^k = (x^k_n)_{n\geq 1} \in E_0$ é definido por:

$$x^k_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } n \leq k, \\ 0, & \text{se } n > k. \end{cases}$$

Afirmamos que $(x^k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy. De fato, se $l > k \geq k_0$ então:

$$x^l_n - x^k_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } k+1 \leq n \leq l, \\ 0, & \text{se } n \leq k \text{ ou } n > l. \end{cases}$$

Assim:

$$\|x^l - x^k\| = \sup_{n\geq 1} |x^l_n - x^k_n| = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k_0+1};$$

portanto, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $k_0 \geq 1$ com $\frac{1}{k_0+1} < \varepsilon$, obtemos $\|x^l - x^k\| < \varepsilon$ para $l > k \geq k_0$. Isso mostra que a seqüência $(x^k)_{k\geq 1}$ é de Cauchy.

Vamos mostrar agora que a seqüência $(x^k)_{k\geq 1}$ não converge em $E_0$. Para cada $n \geq 1$, denote por $\pi_n : E_0 \to \mathbb{R}$ a $n$-ésima projeção definida por:

$$\pi_n(y) = y_n, \quad y = (y_m)_{m\geq 1} \in E_0.$$

Obviamente $\pi_n$ é linear. Temos que $\pi_n$ é contínua, já que:

$$|\pi_n(y)| = |y_n| \leq \sup_{m\geq 1} |y_m| = \|y\|, \quad y = (y_m)_{m\geq 1} \in E_0.$$

Se a seqüência $(x^k)_{k\geq 1}$ convergisse para algum $y \in E_0$ então, pela continuidade de $\pi_n$, teríamos:

$$\lim_{k\to+\infty} x^k_n = \lim_{k\to+\infty} \pi_n(x^k) = \pi_n(y) = y_n,$$

para todo $n \geq 1$. Mas, fixado $n \geq 1$, temos $x^k_n = \frac{1}{n}$ para todo $k \geq n$ e portanto:

$$y_n = \lim_{k\to+\infty} x^k_n = \frac{1}{n}.$$

Assim $y_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, contradizendo o fato que $y \in E_0$.