Gabarito da Prova de Recuperação

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk

29/07/2014

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja W um subespaço de V. Mostre que os espaços vetoriais W^* e V^*/W^{o} são isomorfos.

Solução. Considere a aplicação inclusão $i : W \to V$. Obviamente i é linear. Seja $T = i^* : V^* \to W^*$ a transposta da aplicação i. Temos que T é linear, sendo a transposta de uma aplicação linear. Pelo resultado do Exercício 3 da Segunda Lista, o núcleo de $T = i^*$ é o anulador em V da imagem de i, isto é

$$\mathrm{Ker}(T) = \big(\mathrm{Im}(i)\big)^{\mathrm{o}} = W^{\mathrm{o}}.$$

Além do mais, pelo resultado do Exercício 5 da Segunda Lista, a imagem de $T = i^*$ é o anulador em W do núcleo de i; como $\mathrm{Ker}(i) = \{0\}$, temos que esse anulador é todo o espaço W^*, isto é, T é sobrejetora. Segue agora do resultado do Exercício 3 da Quarta Lista que V^*/W^{o} (isto é, o quociente do domínio de T pelo núcleo de T) é isomorfo a W^* (isto é, a imagem de T).

Observação. A aplicação $T : V^* \to W^*$ considerada na solução acima é simplesmente a aplicação definida por:

$$T(\alpha) = \alpha|_W,$$

para todo $\alpha \in V^*$. Para resolver a questão, não é necessário observar que $T = i^*$. De fato, é fácil ver que T é linear e é óbvio que o núcleo de T é W^{o}. A sobrejetividade de T é conseqüência do fato que toda transformação linear definida no subespaço W de V admite uma extensão linear para todo o espaço V. Esse fato pode ser mostrado facilmente usando uma base de V que contenha uma base de W, notando que uma transformação linear fica unicamente determinada pelo seu valor nos vetores de uma base do domínio.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T : V \to V$ um operador linear que admite um vetor cíclico. Mostre que se $S : V \to V$ é um operador linear que comuta com T (isto é, $S \circ T = T \circ S$), então existe um polinômio $p(X) \in K[X]$ tal que $S = p(T)$.

Solução. Seja $v \in V$ um vetor cíclico para T, isto é, $V = Z(v;T)$. Como $S(v)$ está em $V = Z(v;T)$, temos que existe um polinômio $p(X) \in K[X]$ tal que $S(v) = p(T)(v)$. Afirmamos que $S = p(T)$. Para mostrar isso, seja $w \in V$ e vamos verificar que S e $p(T)$ têm o mesmo valor em w. Temos que existe $q(X) \in K[X]$ com $w = q(T)(v)$. Como S comuta com T, segue que S comuta com $q(T)$ (Exercício 5 da Oitava Lista) e portanto:

$$\begin{aligned} S(w) = S\big(q(T)(v)\big) = q(T)\big(S(v)\big) = q(T)\big(p(T)(v)\big) &= p(T)\big(q(T)(v)\big) \\ &= p(T)(w). \end{aligned}$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ operadores lineares diagonalizáveis. Suponha que T e S comutam (isto é, $S \circ T = T \circ S$). Mostre que T e S são *simultaneamente diagonalizáveis*, isto é, que existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são ambas diagonais.

Solução. Como T é diagonalizável, temos:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, \tag{1}$$

onde $\Lambda \subset K$ denota o conjunto dos autovalores de T e $V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I})$ denota o autoespaço de T correspondente ao autovalor $\lambda \in \Lambda$. Como S comuta com T, temos que S comuta com $T - \lambda \mathrm{I}$ e portanto $V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I})$ é um subespaço S-invariante, para todo $\lambda \in \Lambda$. Do fato que S é diagonalizável, segue que $S|_{V_\lambda} : V_\lambda \to V_\lambda$ também é diagonalizável (Exercício 12 do texto sobre decomposição primária) e portanto existe uma base $\mathcal{B}_\lambda$ de V_λ formada por autovetores de $S|_{V_\lambda}$. Mas autovetores de $S|_{V_\lambda}$ também são autovetores de S e portanto os elementos de $\mathcal{B}_\lambda$ são autovetores de S; os elementos de $\mathcal{B}_\lambda$ também são autovetores de T, já que pertencem a V_λ. De (1) e do fato que $\mathcal{B}_\lambda$ é uma base de V_λ para todo $\lambda \in \Lambda$, segue que concatenando as bases $\mathcal{B}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, obtemos uma base $\mathcal{B}$ de V (item (b) do Exercício 3 da Quinta Lista). Mas os elementos de $\mathcal{B}$ são autovetores de S e de T, e daí segue que as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[S]_{\mathcal{B}}$ são ambas diagonais.

Questão 4. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um operador linear $T : V \to V$ é dito *positivo* se for auto-adjunto e se $\langle T(x), x \rangle \geq 0$, para todo $x \in V$. Suponha que V tenha dimensão finita e seja $T : V \to V$ um operador linear positivo. Mostre que:

(a) (valor 1,0 ponto) existe um operador auto-adjunto $S : V \to V$ tal que $S^2 = T$;

(b) (valor 1,5 pontos) existe em *único* operador positivo $S : V \to V$ tal que $S^2 = T$.

Solução.

(a) Como T é auto-adjunto, existe uma base ortonormal $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V tal que cada e_j é um autovetor de T associado a um autovalor $\lambda_j \in \mathbb{R}$. A matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são λ_j, $j = 1, \ldots, n$. Note que:

$$\langle T(e_j), e_j \rangle = \langle \lambda_j e_j, e_j \rangle = \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

e como T é positivo, segue que $\lambda_j \geq 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Seja $S : V \to V$ o operador linear tal que $[S]_{\mathcal{B}}$ é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são as raízes quadradas $\sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Como a base $\mathcal{B}$ é ortonormal e a matriz $[S]_{\mathcal{B}}$ é auto-adjunta (já que é real e simétrica), temos que o operador S é auto-adjunto. Além do mais, como $\big([S]_{\mathcal{B}}\big)^2 = [T]_{\mathcal{B}}$, temos que $S^2 = T$.

(b) Em primeiro lugar, notamos que o operador S construído na solução do item (a) é positivo. De fato, temos que S é auto-adjunto e para todo $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in V$, vale que:

$$\begin{aligned}\langle S(x), x \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^n x_j \sqrt{\lambda_j}\, e_j, \sum_{k=1}^n x_k e_k \Big\rangle &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_j}\, x_j\, \overline{x_k}\, \langle e_j, e_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j}\, |x_j|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Resta agora mostrar a unicidade de S. Seja então $S' : V \to V$ um operador positivo tal que $(S')^2 = T$ e vamos mostrar que $S' = S$. Como T é diagonalizável, temos:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, \tag{2}$$

onde $\Lambda \subset [0, +\infty[$ denota o conjunto dos autovalores de T e, para cada $\lambda \in \Lambda$, $V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I})$ denota o autoespaço de T correspondente ao autovalor λ. Nós vamos mostrar agora que $S'|_{V_\lambda} = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}$, para todo $\lambda \in \Lambda$; o mesmo argumento (com S no lugar de S') mostrará que $S|_{V_\lambda} = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Daí $S|_{V_\lambda} = S'|_{V_\lambda}$, para todo $\lambda \in \Lambda$, e seguirá de (2) que $S = S'$, completando a solução do item (b). Seja então $\lambda \in \Lambda$ e mostremos que $S'|_{V_\lambda} = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}$. De $(S')^2 = T$ segue que S' comuta com T; daí S' comuta com $T - \lambda\mathrm{I}$ e portanto $V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\mathrm{I})$ é um subespaço S'-invariante. O operador $S'|_{V_\lambda} : V_\lambda \to V_\lambda$ é auto-adjunto e portanto existe uma base ortonormal $\mathcal{C}$ de V_λ tal que a matriz $[S'|_{V_\lambda}]_{\mathcal{C}}$ é diagonal. Usando a positividade de S' e argumentando como na solução do item (a), vemos que os elementos da diagonal principal de $[S'|_{V_\lambda}]_{\mathcal{C}}$ são não negativos. Como $(S')^2 = T$, vale que $(S'|_{V_\lambda})^2 = T|_{V_\lambda} = \lambda\mathrm{I}$. Assim, $[S'|_{V_\lambda}]_{\mathcal{C}}$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são não negativos com quadrados iguais a λ, isto é, $[S'|_{V_\lambda}]_{\mathcal{C}}$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais a $\sqrt{\lambda}$. Segue então que $S'|_{V_\lambda} = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}$.