Gabarito da Prova de Recuperação

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk

23/07/2012

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ seqüências de números reais. Se $a \in \mathbb{R}$ é um valor de aderência de $(x_n)_{n\geq 1}$ e se $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $(y_n)_{n\geq 1}$, mostre que $a + L$ é um valor de aderência de $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$.

Solução. Como a é um valor de aderência de $(x_n)_{n\geq 1}$, existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge para a. Como $(y_n)_{n\geq 1}$ converge para L, também $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para L, sendo uma subseqüência de $(y_n)_{n\geq 1}$. Daí $(x_{n_k} + y_{n_k})_{k\geq 1}$ é uma subseqüência de $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ que converge para $a + L$. Concluímos então que $a + L$ é um valor de aderência de $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja $D \subset \mathbb{R}$ e sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ funções Lipschitzianas. Mostre que a função $f + g$ é Lipschitziana.

Solução. Como f é Lipschitziana, existe $k_1 \geq 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k_1 |x - y|,$$

para todos $x, y \in D$. Como g é Lipschitziana, existe $k_2 \geq 0$ tal que:

$$|g(x) - g(y)| \leq k_2 |x - y|,$$

para todos $x, y \in D$. Daí:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq k_1|x - y| + k_2|x - y| \\ &= (k_1 + k_2)|x - y|, \end{aligned}$$

para todos $x, y \in D$. Isso prova que $k_1 + k_2$ é uma constante de Lipschitz para $f + g$.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que o conjunto:

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

é fechado.

Solução 1. Basta mostrar que se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em $f^{-1}(0)$ que converge para algum $L \in \mathbb{R}$ então $L \in f^{-1}(0)$. Mas de $x_n \to L$ e da continuidade de f no ponto L vem $f(x_n) \to f(L)$. Como $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, concluímos que $f(L) = 0$, ou seja, $L \in f^{-1}(0)$.

Solução 2. Como f é uma função contínua com domínio aberto, o resultado do Exercício 4 da lista 10 nos diz que $f^{-1}(A)$ é aberto, para qualquer aberto $A \subset \mathbb{R}$. Daí, se $S \subset \mathbb{R}$ é fechado, então S^{c} é aberto e portanto $f^{-1}(S^{\mathrm{c}})$ é aberto. Mas $f^{-1}(S^{\mathrm{c}}) = f^{-1}(S)^{\mathrm{c}}$, donde $f^{-1}(S)$ é fechado. Em particular, como $S = \{0\}$ é fechado, temos que $f^{-1}(S) = f^{-1}(0)$ é fechado.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto denso que possui interior vazio. Mostre que $\partial D = \mathbb{R}$.

Solução 1. Devemos mostrar que qualquer $x \in \mathbb{R}$ está em ∂D. Seja $x \in \mathbb{R}$ e seja $\varepsilon > 0$. Devemos verificar que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ tem pontos de D e pontos de D^c. Como D é denso, x é aderente a D, donde $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ tem pontos de D. Finalmente, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ tem que ter pontos de D^c, senão $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ estaria contido em D, o que implicaria que $x \in \operatorname{int}(D) = \emptyset$.

Solução 2. Pelo resultado do Exercício 13 da lista 8, temos que:

$$\mathbb{R} = \operatorname{int}(D) \cup \operatorname{int}(D^c) \cup \partial D.$$

Por hipótese, $\operatorname{int}(D) = \emptyset$. Mas $\operatorname{int}(D^c)$ é o complementar de $\overline{D} = \mathbb{R}$, logo também $\operatorname{int}(D^c) = \emptyset$. Assim $\partial D = \mathbb{R}$.