Gabarito da Prova de Recuperação

MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk

31/07/2014

Questão 1. (valor 3,0 pontos) Considere o produto interno em $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3,$$

para todos $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ em $\mathbb{R}^3$. Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que seja ortogonal com respeito a esse produto interno.

Solução. Basta aplicar o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt a uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$, por exemplo, à base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$. A base ortogonal $\{e_1', e_2', e_3'\}$ obtida através desse processo é:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1'\rangle}{\langle e_1', e_1'\rangle}\, e_1', \quad e_3' = e_3 - \frac{\langle e_3, e_1'\rangle}{\langle e_1', e_1'\rangle}\, e_1' - \frac{\langle e_3, e_2'\rangle}{\langle e_2', e_2'\rangle}\, e_2'.$$

Temos:

$$\langle e_2, e_1'\rangle = \langle (0,1,0), (1,0,0)\rangle = 1, \quad \langle e_1', e_1'\rangle = \langle (1,0,0), (1,0,0)\rangle = 1,$$

donde:

$$e_2' = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0).$$

Além do mais:

$$\langle e_3, e_1'\rangle = \langle (0,0,1), (1,0,0)\rangle = 0, \quad \langle e_3, e_2'\rangle = \langle (0,0,1), (-1,1,0)\rangle = 0,$$

donde $e_3' = e_3$. Assim, uma base de $\mathbb{R}^3$ que é ortogonal com respeito ao produto interno dado é:

$$\big\{(1,0,0), (-1,1,0), (0,0,1)\big\}.$$

Questão 2. (valor 3,0 pontos) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de a e b para os quais o operador T é diagonalizável.

Solução. Começamos determinando o polinômio característico de T. Temos:

$$p_T(\lambda) = \det(T - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(a-\lambda).$$

Assim, os autovalores de T (repetidos de acordo com suas multiplicidades algébricas) são 1, 1 e a. Note que todas as raízes complexas de p_T são reais, de modo que para decidir se T é diagonalizável é suficiente comparar as multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores de T. Suponha que $a \neq 1$. Nesse caso, os autovalores de T são 1 e a, sendo que 1 tem multiplicidade algébrica igual a 2 e a tem multiplicidade algébrica igual a 1. Portanto T é diagonalizável se e somente se a multiplicidade geométrica do autovalor 1 (isto é, a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$) for igual a 2. Temos:

$$[T - \mathrm{I}]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a-1 \end{pmatrix}.$$

Como $a \neq 1$, temos que $[T - \mathrm{I}]_{\text{can}}$ tem exatamente uma linha não nula e portanto seu posto é igual a 1. Temos:

$$\begin{aligned} 3 = \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T - \mathrm{I})\big) &= \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) + \mathrm{posto}(T - \mathrm{I}) \\ &= \dim\big(\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})\big) + 1, \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$ tem dimensão igual a 2 e T é diagonalizável. Suponha agora que $a = 1$. Nesse caso, 1 é o único autovalor de T e tem multiplicidade algébrica igual a 3. Portanto T será diagonalizável se e somente se $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$ tiver dimensão igual a 3, isto é, se e somente se $T = \mathrm{I}$. Assim, para $a = 1$, temos que T é diagonalizável se e somente se $b = 0$.

Resumindo a análise de casos acima, temos que T é diagonalizável se e somente se $a \neq 1$ ou $b = 0$.

Questão 3. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{1 + x^2, 1 - x, 1 + x\}$$

do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 2. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (valor 2,0 pontos) Determine a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.
(b) (valor 1,0 ponto) Determine uma base para o núcleo de T.
(c) (valor 1,0 ponto) Determine uma base para a imagem de T.

Solução.

(a) Por definição, as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{CB}}$ são $[T(1+x^2)]_{\mathcal{B}}$, $[T(1-x)]_{\mathcal{B}}$ e $[T(1+x)]_{\mathcal{B}}$. Assim:

$$T(1+x^2) = (1, -1, 3)_{\mathcal{B}} = 1 - x + 3x^2,$$
$$T(1-x) = (-1, 0, -1)_{\mathcal{B}} = -1 - x^2,$$
$$T(1+x) = (2, 1, 0)_{\mathcal{B}} = 2 + x.$$

Usando a linearidade de T, obtemos:

$$T(1) = \frac{1}{2}\big(T(1-x) + T(1+x)\big) = \frac{1}{2}(-1 - x^2 + 2 + x) = \frac{1}{2}(1 + x - x^2),$$

$$T(x) = T(1+x) - T(1) = 2 + x - \frac{1}{2}(1 + x - x^2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2,$$

e:

$$T(x^2) = T(1+x^2) - T(1) = 1 - x + 3x^2 - \frac{1}{2}(1 + x - x^2)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}x^2.$$

Assim, as colunas de $[T]_{\mathcal{B}}$ são:

$$[T(1)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, 1, -1), \quad [T(x)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(3, 1, 1), \quad [T(x^2)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, -3, 7).$$

Portanto:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) O núcleo de T é formado pelos polinômios $a+bx+cx^2 \in P_2(\mathbb{R})$ tais que $T(a+bx+cx^2)=0$. Como $[a+bx+cx^2]_{\mathcal{B}} = (a,b,c)$, temos:

$$[T(a+bx+cx^2)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

e portanto $a+bx+cx^2$ está no núcleo de T se e somente se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Utilizando escalonamento para resolver o sistema, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff a+3b+c=0 \text{ e } b+2c=0.$$

A solução geral do sistema é obtida então deixando a variável c livre e fazendo $b=-2c$ e $a=-3b-c=5c$. Assim:

$$\mathrm{Ker}(T) = \big\{5c-2cx+cx^2 : c \in \mathbb{R}\big\} = [5-2x+x^2],$$

e portanto uma base para $\mathrm{Ker}(T)$ é $\{5-2x+x^2\}$.

(c) Temos:

$$3 = \dim\big(P_2(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1 + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big),$$

donde a imagem de T tem dimensão igual a 2. Assim, quaisquer dois elementos linearmente independentes de $\mathrm{Im}(T)$ formam uma base de $\mathrm{Im}(T)$. Portanto, uma base para $\mathrm{Im}(T)$ é:

$$\big\{T(1+x^2), T(1-x)\big\} = \big\{1-x+3x^2, -1-x^2\big\}.$$