Gabarito da Prova de Recuperação

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

13/02/2019

Questão 1. (valor 1,5 pontos) Considere a região R do plano definida por:

$$R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq \tfrac{1}{x}\big\}.$$

Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo y.

Solução. Para cada $x \in [1, 3]$, a superfície obtida pela rotação do segmento de reta

$$\big\{(x, y) : 0 \leq y \leq \tfrac{1}{x}\big\}$$

em torno do eixo y é um cilindro circular reto cujo raio da base é x e a altura é $\frac{1}{x}$. Se $A(x)$ denota a área lateral desse cilindro, então:

$$A(x) = 2\pi x \frac{1}{x} = 2\pi.$$

O sólido cujo volume queremos determinar é igual à união desses cilindros com x percorrendo o intervalo $[1, 3]$; pelo método das cascas cilíndricas, o volume do sólido é dado então por:

$$\int_1^3 A(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 2\pi\,\mathrm{d}x = 4\pi.$$

Questão 2. (valor 1,5 pontos) Determine se a integral imprópria abaixo é convergente ou divergente:

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Solução. Como $\cos x \neq 1$ para todo $x \in \,]0,1]$, temos que o integrando é uma função contínua no intervalo $]0,1]$ e portanto a única possível singularidade do integrando é a origem. Vamos usar o critério de comparação por limites para comparar o integrando com a função $f : \,]0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, para todo $x \in \,]0,1]$. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\sqrt{x}}{1-\cos x}\bigg/\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}(1+\cos x)\right) = 2.\end{aligned}$$

Como a integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ é (absolutamente) convergente e o limite acima existe e é finito, segue que a integral $\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$ também é (absolutamente) convergente.

Questão 3. (valor 2,0 pontos) Considere a superfície S em $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz^2 = 1\big\}.$$

Encontre uma equação geral para o plano tangente a S no ponto $(1, 1, 1)$. Recorde que uma *equação geral* para um plano é uma equação da forma $ax + by + cz = d$.

Solução. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = xyz^2,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Como f é uma função de classe C^1 e S é uma superfície de nível de f, vale que o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ de f num ponto $(x, y, z) \in S$, se for não nulo[1], será um vetor normal ao plano tangente a S no ponto (x, y, z). Temos

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\Big)\\ &= (yz^2, xz^2, 2xyz),\end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e em particular:

$$\nabla f(1, 1, 1) = (1, 1, 2).$$

Assim, o plano tangente a S no ponto $(1, 1, 1)$ é o plano que passa por $(1, 1, 1)$ e que possui $(1, 1, 2)$ como um vetor normal. Portanto, um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence a esse plano se, e somente se, o vetor $(x, y, z) - (1, 1, 1)$ for ortogonal a $(1, 1, 2)$, isto é, se e somente se:

$$\big((x, y, z) - (1, 1, 1)\big) \cdot (1, 1, 2) = x - 1 + y - 1 + 2(z - 1) = 0.$$

Segue que uma equação geral para o plano tangente a S no ponto $(1, 1, 1)$ é:

$$x + y + 2z = 4.$$

[1] O fato de f ser de classe C^1 e do gradiente de f ser não nulo num ponto garante que a superfície de nível de f que contém esse ponto, intersectada com uma bola aberta centrada nesse ponto, é de fato uma superfície com um plano tangente bem-definido, num sentido que pode ser tornado preciso (mas que está fora do escopo desse curso).

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = -2,$$

em que $\frac{\partial}{\partial x}$ denota a derivação com respeito à primeira variável e $\frac{\partial}{\partial y}$ denota a derivação com respeito à segunda variável. Calcule $g'(0)$ e $g''(0)$.

Solução. Como f é diferenciável, a regra da cadeia nos dá:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sen} t \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\cos t, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como as derivadas parciais de f também são diferenciáveis, podemos usar novamente a regra da cadeia (e a regra do produto) para obter:

$$\begin{aligned} g''(t) = &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\Big)\operatorname{sen} t - \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sen} t \\ &+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\Big)\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t \\ = &-\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sen} t\Big)\operatorname{sen} t \\ &- \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\cos t + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos t, \operatorname{sen} t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sen} t\Big)\cos t - \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t \\ = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos t, \operatorname{sen} t)\operatorname{sen}^2 t - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t\cos t \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos t, \operatorname{sen} t)\cos^2 t - \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \operatorname{sen} t)\cos t - \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t, \end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos também o fato que as derivadas parciais mistas de f são iguais, já que f é de classe C^2.

Usando as igualdades obtidas acima com $t = 0$ concluímos que

$$g'(0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\operatorname{sen} 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\cos 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2$$

e:

$$\begin{aligned} g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)\operatorname{sen}^2 0 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)\operatorname{sen} 0 \cos 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\cos^2 0 \\ &- \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cos 0 - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\operatorname{sen} 0 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -2 - 1 = -3. \end{aligned}$$

Questão 5. (valor 2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y, z) = x + y + 8z,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determine os pontos de máximo e mínimo global da restrição de f ao conjunto:

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 18\big\}.$$

Você pode usar sem justificar que S é compacto e não vazio.

Solução. Como S é compacto e não vazio e f é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que a restrição de f a S possui pontos de máximo e mínimo global. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar uma lista de candidatos a máximo ou mínimo da restrição de f a S. Temos que S é a superfície de nível 18 da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Note que como f e g tem domínios abertos, f é diferenciável e g é de classe C^1, estão satisfeitas as hipóteses necessárias para aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange. Os gradientes de f e g são dados por

$$\nabla f(x, y, z) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\Big) = (1, 1, 8) \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y, z) &= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\Big) \\ &= (4x^3, 4y^3, 4z^3), \end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Temos que o gradiente de g só se anula na origem; como a origem não pertence a S, segue que o vínculo $g(x, y, z) = 18$ não possui pontos críticos. Portanto, todo ponto (x, y, z) de máximo ou mínimo da restrição de f a S satisfaz as condições

$$g(x, y, z) = 18 \quad \text{e} \quad \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Devemos então determinar os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 18, \\ 1 = 4\lambda x^3, \\ 1 = 4\lambda y^3, \\ 8 = 4\lambda z^3, \end{cases} \tag{1}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que as três últimas equações em (1) só podem ser satisfeitas se $\lambda \neq 0$ e portanto (1) é equivalente a:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 18, \\ \dfrac{1}{4\lambda} = x^3, \\ \dfrac{1}{4\lambda} = y^3, \\ \dfrac{1}{4\lambda} = \dfrac{1}{8}z^3. \end{cases} \tag{2}$$

As três últimas equações de (2) são satisfeitas para algum $\lambda \neq 0$ se, e somente se:

$$x^3 = y^3 = \frac{1}{8}z^3 \neq 0. \tag{3}$$

Temos que (3) é equivalente a $x = y = \frac{z}{2} \neq 0$ e substitutindo essa condição na primeira equação de (2) obtemos $18x^4 = 18$, ou seja, $x = \pm 1$. Assim, os possíveis ponto de máximo ou mínimo global da restrição de f a S são:

$$(1, 1, 2) \quad \text{e} \quad (-1, -1, -2).$$

Como $f(1, 1, 2) = 18$ e $f(-1, -1, -2) = -18$, segue que $(-1, -1, -2)$ é o único ponto de mínimo global da restrição de f a S e que $(1, 1, 2)$ é o único ponto de máximo global da restrição de f a S.

Adendo. Vamos justificar rigorosamente que S é compacto e não vazio. Para ver que S é não vazio notamos, por exemplo, que o ponto $(0, 0, \sqrt[4]{18})$ está em S (ou que os candidatos $(1, 1, 2)$ e $(-1, -1, -2)$ que encontramos no final da resolução acima estão em S). O fato que S é fechado segue, por exemplo, de um teorema que diz que uma superfície de nível de uma função contínua com domínio fechado é um conjunto fechado. Para ver que S é limitado, notamos que

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in S &\Longrightarrow x^4 \leq 18, \quad y^4 \leq 18 \quad \text{e} \quad z^4 \leq 18 \\ &\Longrightarrow x^2 \leq \sqrt{18}, \quad y^2 \leq \sqrt{18} \quad \text{e} \quad z^2 \leq \sqrt{18} \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\sqrt{18}, \end{aligned}$$

o que implica que S está contido na bola de centro na origem cujo quadrado do raio é $3\sqrt{18}$.