Gabarito da Prova de Recuperação

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk
26/07/2013

Questão 1. (valor 2,0 pontos) Calcule o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

Solução. Como $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$, a regra de L'Hospital nos dá:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Como $\lim_{x\to 0}(\sec^2 x - 1) = 0$ e $\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$, podemos aplicar novamente a regra de L'Hospital obtendo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec x \operatorname{tg} x \sec x}{6x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{3x} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^3 x} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Assim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Questão 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{e^x}{x},$$

para todo $x \neq 0$.

(a) (valor 1,0 ponto) Estude o sinal de f'.

(b) (valor 1,0 ponto) Estude o sinal de f''.

(c) (valor 1,0 ponto) Esboce o gráfico de f, levando em conta crescimento/decrescimento, concavidade, interseção com os eixos coordenados e assíntotas horizontais e verticais.

Solução.

(a) A derivada de f é dada por:

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1),$$

para todo $x \neq 0$. Assim, para todo $x \neq 0$, temos:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1, \quad f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 1.$$

(b) Temos:

$$f'(x) = e^x\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\Big),$$

e portanto a derivada segunda de f é dada por:

$$f''(x) = e^x\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\Big) + e^x\Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\Big) = \frac{e^x}{x^3}(x^2 - 2x + 2).$$

Temos:

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que $f''(x)$ e x possuem o mesmo sinal, para todo $x \neq 0$. Assim:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0, \quad f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 0.$$

(c) Em vista do resultado do item (a), temos que f é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$ e é estritamente decrescente nos intervalos:

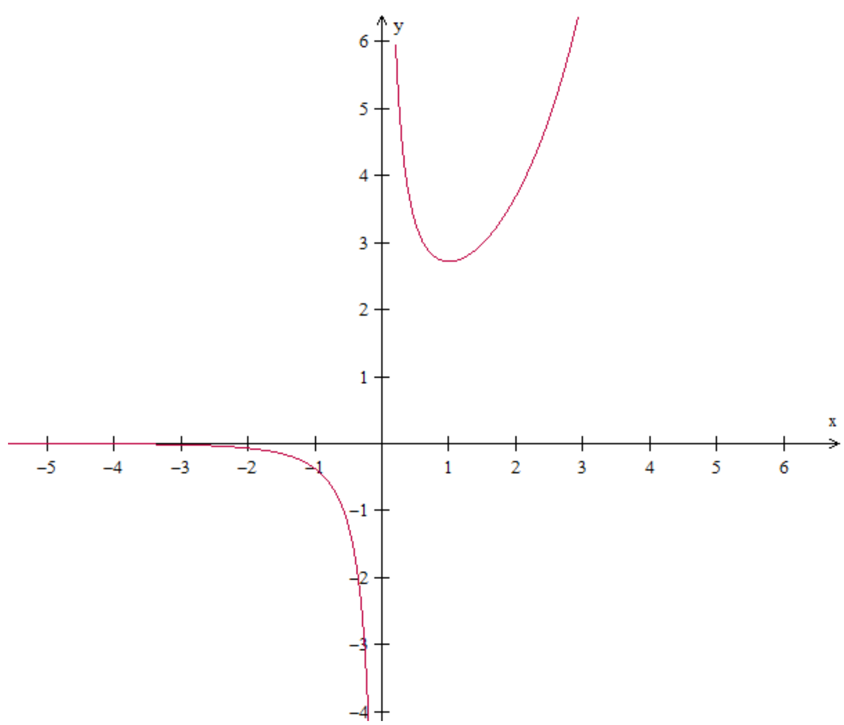
$$]-\infty, 0[\,, \quad]0, 1]\,.$$

Em vista do resultado do item (b), temos que f é côncava para cima no intervalo $]0, +\infty[$ e é côncava para baixo no intervalo $]-\infty, 0[$. Temos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Assim o eixo y é uma assíntota vertical ao gráfico de f e o eixo x é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$. O gráfico de f não intersecta nenhum dos eixos coordenados.

O esboço do gráfico de f fica assim:



Questão 3. (valor 2,0 pontos cada item) Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Solução.

(a) Temos:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,.$$

Na primeira integral usamos a substituição $y = x^2+2x+3$, obtendo:

$$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x^2+2x+3}.$$

Para calcular a segunda integral, começamos completando quadrados:

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2,$$

e usamos a substituição $x = \sqrt{2}\operatorname{tg}\theta - 1$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+2}} &= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta}{\sqrt{2\operatorname{tg}^2\theta+2}}\,\mathrm{d}\theta = \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|.\end{aligned}$$

Mas:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x+1}{\sqrt{2}}, \quad \sec\theta = \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta+1} = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}\,.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x &= \sqrt{x^2+2x+3} - \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}{\sqrt{2}}\right| \\ &= \sqrt{x^2+2x+3} - \ln\left|\sqrt{x^2+2x+3}+x+1\right| + \ln\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Podemos eliminar a constante $\ln\sqrt{2}$, obtendo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+2x+3} - \ln\left|\sqrt{x^2+2x+3}+x+1\right|.$$

Observe também que:

$$\sqrt{x^2+2x+3}+x+1 = \sqrt{(x+1)^2+2}+x+1 > |x+1| + (x+1) \geq 0,$$

e portanto o valor absoluto dentro do logarítmo é redundante.

(b) Usando integração por partes com $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g'(x) = x$, obtemos:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Mas:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = x - \operatorname{arctg} x.$$

Assim:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

Questão 4. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \ln(\cos x), \quad x \in D,$$

onde $D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x > 0\}$. Denote por p_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno da origem.

(a) (valor 1,0 ponto) Determine p_2.

(b) (valor 1,0 ponto) Mostre que:

$$p_2(x) - \frac{2}{3}\,x^3 < f(x) < p_2(x),$$

para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Solução.

(a) Temos:

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad f''(x) = -\sec^2 x,$$

donde $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -1$. Assim:

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2}.$$

(b) Note que o intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ está contido em D. Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Temos:

$$f(x) = p_2(x) + r(x),$$

onde:

$$r(x) = f'''(c)\frac{x^3}{3!},$$

com $0 < c < x \leq \frac{\pi}{4}$. Temos:

$$f'''(c) = -2\sec c \operatorname{tg} c \sec c = -2 \operatorname{tg} c \sec^2 c = -2\,\frac{\operatorname{sen} c}{\cos^3 c}.$$

De $0 < c < \frac{\pi}{4}$ vem:

$$0 < \operatorname{sen} c < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos c < 1,$$

e portanto:

$$1 < \frac{1}{\cos c} < \sqrt{2} \Longrightarrow 1 < \frac{1}{\cos^3 c} < (\sqrt{2})^3 \Longrightarrow 0 < \frac{\operatorname{sen} c}{\cos^3 c} < 2$$

$$\Longrightarrow -4 < f'''(c) < 0 \Longrightarrow -\frac{4}{6}\,x^3 < r(x) < 0.$$

Isso prova que:

$$p_2(x) - \frac{2}{3}\,x^3 < f(x) < p_2(x).$$