Gabarito da Terceira Prova

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V
MAP0217 – Cálculo Diferencial

Prof. Daniel Victor Tausk
02/12/2013

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Sejam $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ o subconjunto aberto de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes invertíveis. Considere a função $F : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por:

$$F(A) = A^{\mathrm{t}} A^{-1}, \quad A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),$$

onde A^{t} denota a transposta da matriz A. Determine a diferencial de F. Justifique a sua resposta.

Solução. Temos $F = \mathfrak{m} \circ (\tau, \mathfrak{I})$, onde as aplicações:

$$\mathfrak{m} : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}),$$
$$\tau : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{I} : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}),$$

são definidas por:

$$\mathfrak{m}(A, B) = AB, \quad A, B \in M_n(\mathbb{R}),$$
$$\tau(A) = A^{\mathrm{t}}, \quad \mathfrak{I}(A) = A^{-1}, \qquad A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),$$

e $(\tau, \mathfrak{I}) : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ é a aplicação cujas funções coordenadas são τ e $\mathfrak{I}$. A aplicação $\mathfrak{m}$ é bilinear e portanto:

$$\mathrm{d}\mathfrak{m}(A, B) \cdot (H, K) = \mathfrak{m}(A, K) + \mathfrak{m}(H, B) = AK + HB,$$

para todos $A, B, H, K \in M_n(\mathbb{R})$. A aplicação τ é (a restrição a um aberto de) uma aplicação linear e portanto:

$$\mathrm{d}\tau(A) \cdot H = H^{\mathrm{t}},$$

para todos $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $H \in M_n(\mathbb{R})$. Como vimos em aula, a diferencial de $\mathfrak{I}$ é dada por:

$$\mathrm{d}\mathfrak{I}(A) \cdot H = -A^{-1} H A^{-1},$$

para todos $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $H \in M_n(\mathbb{R})$. Usando a regra da cadeia e o teorema da diferenciação coordenada por coordenada, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(A) \cdot H = \mathrm{d}\mathfrak{m}\big(\tau(A), \mathfrak{I}(A)\big) \cdot \big(\mathrm{d}\tau(A) \cdot H, \mathrm{d}\mathfrak{I}(A) \cdot H\big) \\ = -A^{\mathrm{t}} A^{-1} H A^{-1} + H^{\mathrm{t}} A^{-1}, \end{aligned}$$

para quaisquer $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $H \in M_n(\mathbb{R})$.

Questão 2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \big(e^{y_1+y_2} + x_1(y_1^2 + y_2^2), \operatorname{sen}(y_1 + 2y_2) + x_1 + x_2\big),$$

para todos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) (valor 1,0 ponto) Determine a matriz que representa a transformação linear $\partial_y f(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na base canônica.

(b) (valor 1,5 pontos) Mostre que existem vizinhanças abertas U_1 e U_2 da origem em $\mathbb{R}^2$ e uma função $\psi : U_1 \to U_2$ de classe C^∞ tais que, para todos $x \in U_1$, $y \in U_2$, vale que:

$$f(x,y) = (1,0) \Longleftrightarrow y = \psi(x).$$

Determine a matriz Jacobiana de ψ no ponto 0.

Solução.

(a) Temos, por definição, $\partial_y f(0,0) = \mathrm{d}g(0)$, onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por:

$$g(y) = f(0,y) = \big(e^{y_1+y_2}, \operatorname{sen}(y_1 + 2y_2)\big),$$

para todo $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. A matriz que representa $\partial_y f(0,0)$ na base canônica é então a matriz Jacobiana de g na origem, dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(0,0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(0,0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(0,0) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) O determinante de $\partial_y f(0,0)$ é igual a $1 \neq 0$ e portanto a aplicação linear $\partial_y f(0,0)$ é um isomorfismo. Além do mais, a aplicação f é de classe C^∞ e $f(0,0) = (1,0)$. Segue do Teorema da Função Implícita que existem vizinhanças abertas U_1, U_2 da origem em $\mathbb{R}^2$ e uma aplicação $\psi : U_1 \to U_2$ de classe C^∞ tais que, para todos $x \in U_1$, $y \in U_2$, temos $f(x,y) = (1,0)$ se e somente se $y = \psi(x)$. Temos que $\psi(0) = 0$ e que $\mathrm{d}\psi(0) = -[\partial_y f(0,0)]^{-1}[\partial_x f(0,0)]$. Além do mais, $\partial_x f(0,0) = \mathrm{d}h(0)$, onde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por:

$$h(x) = f(x,0) = (1, x_1 + x_2),$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Assim, a matriz que representa $\partial_x f(0,0)$ na base canônica é a matriz Jacobiana de h no ponto 0, dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(0,0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a matriz Jacobiana de ψ no ponto 0 é igual a:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam fixadas normas arbitrárias em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, ambas denotadas por $\|\cdot\|$. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num subconjunto aberto *conexo* U de $\mathbb{R}^m$. Assuma que existam $c \geq 0$ e $\alpha > 1$ tais que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|^\alpha,$$

para todos $x, y \in U$. Mostre que f é constante.

Solução. Em vista da conexidade de U e do resultado do Exercício 4 da Décima-Segunda Lista, é suficiente mostrar que $\mathrm{d}f(x) = 0$, para todo $x \in U$. Seja $x \in U$ fixado. Devemos mostrar que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} = 0.$$

Por hipótese:

$$\left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|} \right\| = \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq \frac{c\,\|h\|^\alpha}{\|h\|} = c\,\|h\|^{\alpha - 1};$$

mas $\lim_{h \to 0} \|h\|^{\alpha - 1} = 0$, já que $\alpha - 1 > 0$. A conclusão segue.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num subconjunto aberto *convexo* U de $\mathbb{R}^n$. Assuma que exista $c < 1$ tal que $\|\mathrm{d}\phi(x)\| \le c$, para todo $x \in U$, onde $\|\mathrm{d}\phi(x)\|$ denota a norma de operadores de $\mathrm{d}\phi(x)$ associada a uma norma arbitrária fixada em $\mathbb{R}^n$. Mostre que a função $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$f(x) = x + \phi(x), \quad x \in U,$$

é um difeomorfismo de classe C^k sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Solução. Vejamos em primeiro lugar que $\mathrm{d}f(x)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in U$. Seja então dado $x \in U$. Temos:

$$\mathrm{d}f(x) \cdot h = h + \mathrm{d}\phi(x) \cdot h,$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$, já que a aplicação identidade é linear. Note que:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}f(x) \cdot h\| = \|h + \mathrm{d}\phi(x) \cdot h\| \ge \|h\| - \|\mathrm{d}\phi(x) \cdot h\| \ge \|h\| - \|\mathrm{d}\phi(x)\|\|h\| \\ \ge \|h\| - c\|h\| = (1 - c)\|h\|. \end{aligned}$$

Como $1 - c > 0$, de $\mathrm{d}f(x) \cdot h = 0$ segue $h = 0$, o que mostra que o núcleo de $\mathrm{d}f(x)$ é nulo. Assim $\mathrm{d}f(x)$ é uma transformação linear injetora de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e é portanto um isomorfismo[1]. Como f é de classe C^k, o Teorema da Função Inversa nos dá então que f é um difeomorfismo local de classe C^k. Para concluir agora que f é um difeomorfismo de classe C^k sobre um aberto, resta mostrar que f é injetora. Em vista da convexidade de U e do resultado do item (b) do Exercício 1 da Décima-Segunda Lista, temos que ϕ é Lipschitziana com constante $c < 1$, isto é, ϕ é uma contração. Assim, segue do Lema da Perturbação da Identidade que f é injetora. Mais diretamente: se $x, y \in U$ e $f(x) = f(y)$ então $x - y = \phi(y) - \phi(x)$ e:

$$\|x - y\| = \|\phi(y) - \phi(x)\| \le c\|x - y\| \Longrightarrow 0 \le (1 - c)\|x - y\| \le 0;$$

como $1 - c > 0$, vem $\|x - y\| = 0$ e $x = y$.

[1] Alternativamente: vimos em aula que se $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear com $\|H\| < 1$ então $\mathrm{Id} - H$ é um isomorfismo e $(\mathrm{Id} - H)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} H^i$.