Gabarito da Terceira Prova

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk

24/06/2014

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja K um corpo e sejam $p(X), q(X) \in K[X]$ polinômios tais que $\mathrm{mdc}\big(p(X), q(X)\big) = 1$. Mostre que se $f(X) \in K[X]$ é tal que $p(X)|f(X)$ e $q(X)|f(X)$, então $p(X)q(X)|f(X)$.

Solução. Como $p(X)|f(X)$, temos que $f(X) = p(X)g(X)$, para algum $g(X) \in K[X]$. Daí $q(X)|p(X)g(X)$ e, como $\mathrm{mdc}\big(p(X), q(X)\big) = 1$, segue da Proposição 1 do texto sobre decomposição primária que $q(X)|g(X)$. Daí $g(X) = q(X)h(X)$, para algum $h(X) \in K[X]$, donde:

$$f(X) = p(X)q(X)h(X),$$

isto é, $p(X)q(X)|f(X)$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que T satisfaça a condição:

$$T^4 - 3\,T^3 + 2\,T^2 = 0$$

e que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^2)$. Mostre que T é diagonalizável.

Solução. Tomando $p(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 \in \mathbb{R}[X]$, temos que $p(T) = 0$. O polinômio $p(X)$ pode ser fatorado da seguinte forma:

$$p(X) = X^2(X-1)(X-2),$$

sendo:

$$\mathrm{mdc}(X^2, X-1) = \mathrm{mdc}(X^2, X-2) = \mathrm{mdc}(X-1, X-2) = 1.$$

Segue da Proposição 9 do texto sobre decomposição primária que V é soma direta dos espaços $\mathrm{Ker}(T^2)$, $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{I})$ e $\mathrm{Ker}(T-2\mathrm{I})$. Como $\mathrm{Ker}(T^2)$ é igual a $\mathrm{Ker}(T)$, temos na verdade que V é soma direta de $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{I})$ e $\mathrm{Ker}(T-2\mathrm{I})$. Assim, unindo uma base de $\mathrm{Ker}(T)$ com uma base de $\mathrm{Ker}(T-\mathrm{I})$ e uma base de $\mathrm{Ker}(T-2\mathrm{I})$, obtemos uma base de V formada por autovetores de T. Isso mostra que T é diagonalizável.

Observação. Se trocarmos $\mathbb{R}$ por um corpo K qualquer, então o mesmo argumento mostra que T é diagonalizável, desde que $2 \neq 0$ em K. Se $2 = 0$ em K, então o polinômio $p(X)$ se fatora como $p(X) = X^3(X-1)$, sendo $\mathrm{mdc}(X^3, X-1) = 1$. Nesse caso, concluímos que:

$$V = \mathrm{Ker}(T^3) \oplus \mathrm{Ker}(T-\mathrm{I});$$

de $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^2)$, segue que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^3)$ (Exercício 13 do texto sobre decomposição primária), de modo que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T-\mathrm{I})$ e concluímos também que T é diagonalizável.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam K um corpo, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K e $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se T é um isomorfismo, então existe um polinômio $p(X) \in K[X]$ tal que $T^{-1} = p(T)$.

Solução. Como T é um isomorfismo, segue do resultado do Exercício 19 do texto sobre decomposição primária que o polinômio $X \in K[X]$ não é um divisor do polinômio minimal $m_T(X)$. (Na verdade, é fácil ver isso diretamente: se fosse $m_T(X) = Xq(X)$, então teríamos $Tq(T) = 0$; como T é um isomorfismo, seguiria que $q(T) = 0$, contradizendo a minimalidade de $m_T(X)$.) Daí $\operatorname{mdc}\big(X, m_T(X)\big) = 1$ e do Teorema de Bezout segue que existem polinômios $p(X), q(X) \in K[X]$ tais que:

$$p(X)X + q(X)m_T(X) = 1.$$

Avaliando ambos os lados em T, obtemos:

$$p(T)T = \mathrm{I},$$

já que $m_T(T) = 0$. Daí $T^{-1} = p(T)$.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Sejam K um corpo, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K e $T : V \to V$ um operador linear. Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que os polinômios T-aniquiladores $p_1(X) = \mathrm{Ann}(v_1;T)$ e $p_2(X) = \mathrm{Ann}(v_2;T)$ satisfaçam:

$$\mathrm{mdc}\big(p_1(X), p_2(X)\big) = 1.$$

Mostre que:

$$Z(v_1 + v_2; T) = Z(v_1; T) + Z(v_2; T).$$

Solução. Como $Z(v_1;T)$ e $Z(v_2;T)$ são T-invariantes, segue facilmente que também $Z(v_1;T) + Z(v_2;T)$ é T-invariante. Além do mais, como $v_1 + v_2$ está em $Z(v_1;T) + Z(v_2;T)$ e como $Z(v_1 + v_2;T)$ é o menor subespaço T-invariante contendo $v_1 + v_2$, temos:

$$Z(v_1 + v_2; T) \subset Z(v_1; T) + Z(v_2; T).$$

Para mostrar a outra inclusão, é suficiente verificar que v_1 e v_2 estão em $Z(v_1 + v_2;T)$; de fato, uma vez verificado isso, teremos que $Z(v_1;T)$ e $Z(v_2;T)$ estão contidos em $Z(v_1 + v_2;T)$ (já que $Z(v_i;T)$ é o menor subespaço T-invariante contendo v_i, $i = 1, 2$) e portanto que $Z(v_1;T) + Z(v_2;T)$ está contido em $Z(v_1 + v_2;T)$. Como $\mathrm{mdc}\big(p_1(X), p_2(X)\big) = 1$, segue do Teorema de Bezout que existem $q_1(X), q_2(X) \in K[X]$ tais que:

$$q_1(X)p_1(X) + q_2(X)p_2(X) = 1.$$

Avaliando ambos os lados em T e depois em v_1, obtemos:

$$\big(q_2(T) \circ p_2(T)\big)(v_1) = v_1,$$

já que $p_1(T)(v_1) = 0$. Mas $p_2(T)(v_2) = 0$ e portanto:

$$(q_2p_2)(T)(v_1 + v_2) = \big(q_2(T) \circ p_2(T)\big)(v_1 + v_2) = \big(q_2(T) \circ p_2(T)\big)(v_1) = v_1,$$

donde segue que $v_1 \in Z(v_1 + v_2;T)$. Daí também $v_2 = (v_1 + v_2) - v_1$ está em $Z(v_1 + v_2;T)$.