Gabarito da Terceira Prova

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk
19/06/2019

Questão 1. Considere o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (z + 2xy, y, x),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (valor 1,5 pontos) Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

em que $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ é a curva parametrizada definida por

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3),$$

para todo $t \in [0, 1]$.

(b) (valor 1,0 ponto) O campo $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.

Solução do item (a). Temos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

em que

$$\vec{F}\big(\gamma(t)\big) = \vec{F}(t, t^2, t^3) = (3t^3, t^2, t), \quad \gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2) \qquad \text{e}$$

$$\vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) = 3t^3 + 2t^3 + 3t^3 = 8t^3,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Daí:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 8t^3\,\mathrm{d}t = \frac{8}{4}t^4\Big|_0^1 = 2.$$

Solução do item (b). Se F_1, F_2 e F_3 denotam as funções coordenadas de $\vec{F}$, então

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = 0,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se $x \neq 0$, temos que $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z)$ e portanto a matriz Jacobiana de $\vec{F}$ no ponto (x, y, z) não é simétrica. Logo $\vec{F}$ não é conservativo.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja γ a curva parametrizada em $\mathbb{R}^2$ obtida pela concatenação de uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(0,1)$ e termina no ponto $(0,0)$, com uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(0,0)$ e termina no ponto $(1,0)$, com uma parametrização do arco de círculo

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\ x\geq 0 \text{ e } y\geq 0\big\}$$

no sentido do ponto $(1,0)$ para o ponto $(0,1)$. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

em que $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é o campo vetorial definido por

$$\vec{F}(x,y) = (y^2+e^x, x-\operatorname{sen} y),$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Solução. Temos que

$$U = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x>0 \text{ e } y>0\big\}$$

é um aberto apropriado para o Teorema de Green e γ é uma curva fechada simples que parametriza a fronteira de U no sentido positivo em relação a U. Assim, o Teorema de Green nos diz que

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \iint_U \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

em que P e Q são as funções coordenadas de $\vec{F}$. Temos

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1-2y,$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Usamos agora coordenadas polares

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\operatorname{sen}\theta,\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$
$$r\in\,]0,+\infty[\,,\quad \theta\in\,]0,2\pi[\,,$$

e o Teorema de Fubini para o cálculo da integral dupla sobre U, como segue:

$$\begin{aligned}\iint_U (1-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \text{área}(U) - 2\int_0^1\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi}{4} - 2\Big(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\Big) = \frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\cdot\end{aligned}$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\cdot$$

Questão 3. Considere a superfície parametrizada $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(x, y) = (x, y, x^2 - y^2),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Seja γ uma parametrização da fronteira do quadrado $[0, 1]\times[0, 1]$ que dá uma única volta no quadrado e tal que o segmento ligando os vértices $(0, 0)$ e $(1, 0)$ é percorrido no sentido do ponto $(0, 0)$ para o ponto $(1, 0)$. Seja $\mu = \sigma \circ \gamma$ a curva parametrizada em $\mathbb{R}^3$ dada pela composição de σ com γ e seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vetorial definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(z^2 + e^{(y^2)}, x^2 + 2xye^{(y^2)}, y^2 + 2ze^{(z^2)}\big),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (valor 1,0 ponto) Calcule o rotacional de $\vec{F}$.

(b) (valor 1,5 pontos) Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha $\int_\mu \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Solução do item (a). Temos que o rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big),$$

em que F_1, F_2 e F_3 denotam as funções coordenadas de $\vec{F}$; portanto

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})(x, y, z) = \big(2y, 2z, 2x + 2ye^{(y^2)} - 2ye^{(y^2)}\big) = (2y, 2z, 2x),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solução do item (b). Como o aberto $U =]0, 1[\times]0, 1[$ é apropriado para o Teorema de Green e γ é uma curva fechada simples que parametriza a fronteira de U no sentido positivo em relação a U, temos que o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha $\int_\mu \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ é igual ao fluxo

$$\int_{\sigma|_U} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A \tag{1}$$

do rotacional de $\vec{F}$ sobre a superfície parametrizada $\sigma|_U$, em que $\vec{n}$ é a normal unitária canonicamente associada à parametrização σ, isto é, a normal unitária $\vec{n}$ tal que $\vec{n}(x, y)$ possui o mesmo sentido que o produto vetorial $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y)$, para todo $(x, y) \in U$.

O fluxo (1) é dado por

$$\int_{\sigma|_U} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A = \iint_U (\vec{\nabla} \wedge \vec{F})\big(\sigma(x,y)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

em que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) = (1,0,2x), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = (0,1,-2y),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = (-2x, 2y, 1),$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})\big(\sigma(x,y)\big) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{F})(x,y,x^2-y^2) = (2y, 2x^2-2y^2, 2x) \qquad \text{e}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})\big(\sigma(x,y)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y)\Big) = -4xy + 4x^2y - 4y^3 + 2x,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Assim, usando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma|_U} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 (-4xy + 4x^2y - 4y^3 + 2x)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \Big(-2y + \frac{4}{3}y - 4y^3 + 1\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= -1 + \frac{2}{3} - 1 + 1 = -\frac{1}{3}\cdot\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_\mu \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\sigma|_U} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A = -\frac{1}{3}\cdot$$

Questão 4. Considere a superfície cilíndrica S dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 < z < 2\}$$

e seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vetorial definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(x^3 + \operatorname{sen}(yz),\, y^3 + e^{(x^2+z^2)},\, z^2\big),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (valor 0,5 ponto) Calcule o divergente de $\vec{F}$.

(b) (valor 2,0 pontos) Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}$ é a normal unitária para a superfície S que aponta para fora da região cilíndrica:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } 0 < z < 2\}.$$

Solução do item (a). O divergente de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, em que F_1, F_2 e F_3 denotam as funções coordenadas de $\vec{F}$.

Solução do item (b). Considere os discos

$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z = 0\} \quad \text{e}$$
$$D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z = 2\}.$$

Temos que a região cilíndrica C é um aberto apropriado para o Teorema de Gauss e que a fronteira de C é a união da superfície regular $S \cup D_1 \cup D_2$ com os círculos

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\} \quad \text{e}$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 2\}$$

que são imagens de curvas de classe C^1 e portanto irrelevantes para a integral de superfície. Podemos então aplicar o Teorema de Gauss obtendo

$$\iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}A + \int_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \,\mathrm{d}A + \int_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \,\mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são as normais unitárias para os discos D_1 e D_2, respectivamente, que apontam para fora de C. Temos $\vec{n}_1(x,y,z) = (0,0,-1)$ e portanto

$$\vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{n}_1(x,y,z) = -z^2 = 0,$$

para todo $(x,y,z) \in D_1$; daí:

$$\int_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \,\mathrm{d}A = 0.$$

Similarmente, temos $\vec{n}_2(x,y,z) = (0,0,1)$ e portanto

$$\vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{n}_2(x,y,z) = z^2 = 2^2 = 4,$$

para todo $(x,y,z) \in D_2$; daí:

$$\int_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, \mathrm{d}A = \int_{D_2} 4 \, \mathrm{d}A = 4 \, \text{área}(D_2) = 4\pi.$$

Agora calculamos a integral tripla

$$\iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iiint_C (3x^2 + 3y^2 + 2z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

usando coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$r \in \,]0, +\infty[\,, \quad \theta \in \,]0, 2\pi[\,, \quad z \in \mathbb{R}$$

e o Teorema de Fubini, obtendo:

$$\begin{aligned}
\iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^2 (3r^2 + 2z) r \, \mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}\theta \Big) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (6r^2 + 4) r \, \mathrm{d}\theta \Big) \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 (6r^3 + 4r) \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \Big(\frac{6}{4} + 2 \Big) = 7\pi.
\end{aligned}$$

Assim:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{F} - \int_{D_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, \mathrm{d}A - \int_{D_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, \mathrm{d}A = 7\pi - 0 - 4\pi = 3\pi.$$