Gabarito da Terceira Prova

MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk

03/07/2014

Questão 1. (valor 3,0 pontos) Considere o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$ dos polinômios com coeficientes reais munido do produto interno:

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x, \quad p, q \in P(\mathbb{R}).$$

Determine a projeção ortogonal de $p(x) = x^3$ sobre o subespaço de $P(\mathbb{R})$ gerado por 1, x e x^2.

Solução. Começamos utilizando o método de Gram–Schmidt para ortogonalizar o conjunto de vetores $\{1, x, x^2\}$. Note que:

$$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0,$$

isto é, os vetores 1 e x já são ortogonais. Assim, para ortogonalizar o conjunto $\{1, x, x^2\}$, é suficiente substituir x^2 por:

$$x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\,1 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\,x.$$

Temos:

$$\langle x^2, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0, \quad \langle x^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \quad \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2,$$

de modo que:

$$x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\,1 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\,x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Assim $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ é uma base ortogonal do espaço $[1, x, x^2]$. A projeção ortogonal de x^3 em $[1, x, x^2]$ é portanto dada por:

$$\frac{\langle x^3, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\,1 + \frac{\langle x^3, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\,x + \frac{\langle x^3, x^2 - \frac{1}{3}\rangle}{\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\rangle}\Big(x^2 - \frac{1}{3}\Big).$$

Calculamos:

$$\langle x^3, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0, \quad \langle x^3, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5},$$

$$\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \quad \big\langle x^3, x^2 - \tfrac{1}{3}\big\rangle = \int_{-1}^{1} \big(x^5 - \tfrac{1}{3}x^3\big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Assim, a projeção ortogonal de x^3 em $[1, x, x^2]$ é $\frac{3}{5}x$.

Questão 2. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) (valor 2,0 pontos) Determine uma matriz invertível $P \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

(b) (valor 2,0 pontos) Calcule $2^{-1000}A^{1000}$.

Solução.

(a) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$, onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal é da forma $P = [\,\mathrm{I}\,]_{\mathcal{B},\text{can}}$, onde $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. De fato, temos:

$$P^{-1}AP = [\,\mathrm{I}\,]_{\text{can},\mathcal{B}}\,[T]_{\text{can}}\,[\,\mathrm{I}\,]_{\mathcal{B},\text{can}} = [T]_{\mathcal{B}},$$

sendo que $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal se e somente se $\mathcal{B}$ é formada por autovetores de T. O polinômio característico de T é:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda+2),$$

e portanto os autovalores de T são 0 e -2. O autoespaço correspondente ao autovalor 0 é o núcleo de T, isto é, o espaço solução do sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Assim, o autoespaço correspondente ao autovalor 0 é gerado pelo vetor $(1,1)$. O autoespaço correspondente ao autovalor -2 é o núcleo de $T + 2\mathrm{I}$, isto é, o espaço solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Assim, o autoespaço correspondente ao autovalor -2 é gerado pelo vetor $(1,-1)$. Portanto, uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T é:

$$\mathcal{B} = \big\{(1,1), (1,-1)\big\},$$

de modo que uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal é:

$$P = [\,\mathrm{I}\,]_{\mathcal{B},\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Além do mais:

$$P^{-1}AP = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Temos:

$$P^{-1}A^{1000}P = (P^{-1}AP)^{1000} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix} = 2^{1000} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que:

$$2^{-1000}A^{1000} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Mas:

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e fazendo os cálculos obtemos:

$$2^{-1000}A^{1000} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questão 3. (valor 3,0 pontos) Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de a para os quais o operador T é diagonalizável.

Solução. O polinômio característico de T é:

$$\det(T - \lambda \mathrm{I}) = (1 - \lambda)(a - \lambda)(2 - \lambda),$$

e portanto os autovalores de T (repetidos de acordo com suas multiplicidades algébricas) são 1, a e 2. Note, em particular, que todas as raízes complexas do polinômio característico de T são reais, de modo que para decidir se T é diagonalizável é suficiente comparar multiplicidades algébricas e geométricas. Se a é diferente de 1 e de 2, então todos os autovalores de T possuem multiplicidade algébrica igual a 1 e portanto T é diagonalizável. Suponha que $a = 1$ e vamos determinar a multiplicidade geométrica do autovalor 1. Temos que o autoespaço $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$ correspondente ao autovalor 1 é o espaço solução do sistema:

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0, \\ x + 0y + 0z = 0, \\ 0x + 0y + z = 0, \end{cases}$$

ou seja, esse autoespaço é gerado pelo vetor $(0, 1, 0)$. Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor 1 é igual a 1 e a sua multiplicidade algébrica é igual a 2, de modo que T não é diagonalizável. Suponha agora que $a = 2$ e vamos determinar a multiplicidade geométrica do autovalor 2. O autoespaço $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I})$ correspondente ao autovalor 2 é o espaço solução do sistema:

$$\begin{cases} -x + 0y + 0z = 0, \\ x + 0y + 0z = 0, \\ 0x + 0y + 0z = 0, \end{cases}$$

e portanto esse autoespaço é gerado pelos vetores linearmente independentes $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Assim, a multiplicidade geométrica e algébrica do autovalor 2 são ambas iguais a 2. Obviamente, a multiplicidade algébrica do autovalor 1 é igual a 1 e portanto a mesma é igual a sua multiplicidade geométrica. Asim, T é diagonalizável.

Em vista da análise de casos acima, concluímos que T é diagonalizável se e somente se $a \neq 1$.