Gabarito da Terceira Prova

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

28/11/2018

Questão 1. (valor 2,0 pontos) Considere a superfície S em $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 y + z^3 x + y^3 z = 1\big\}.$$

Encontre uma equação geral para o plano tangente a S no ponto $(1, 0, 1)$. Recorde que uma *equação geral* para um plano é uma equação da forma $ax + by + cz = d$.

Solução. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^3 y + z^3 x + y^3 z,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Como f é uma função de classe C^1 e S é uma superfície de nível de f, vale que o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ de f num ponto $(x, y, z) \in S$, se for não nulo[1], é um vetor normal ao plano tangente a S no ponto (x, y, z). Temos

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\Big)\\ &= (3x^2 y + z^3, 3y^2 z + x^3, 3z^2 x + y^3),\end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e em particular:

$$\nabla f(1, 0, 1) = (1, 1, 3).$$

Assim, o plano tangente a S no ponto $(1, 0, 1)$ é o plano que passa por $(1, 0, 1)$ e que possui $(1, 1, 3)$ como um vetor normal. Portanto, um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence a esse plano se, e somente se, o vetor $(x, y, z) - (1, 0, 1)$ for ortogonal a $(1, 1, 3)$, isto é, se e somente se:

$$\big((x, y, z) - (1, 0, 1)\big) \cdot (1, 1, 3) = x - 1 + y + 3(z - 1) = 0.$$

Segue que uma equação geral para o plano tangente a S no ponto $(1, 0, 1)$ é:

$$x + y + 3z = 4.$$

[1] O fato de f ser de classe C^1 e do gradiente de f ser não nulo num ponto garante que a superfície de nível de f que contém esse ponto, intersectada com uma bola aberta centrada nesse ponto, é de fato uma superfície com um plano tangente bem-definido, num sentido que pode ser tornado preciso (mas que está fora do escopo desse curso).

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(t^2, t^3),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) (valor 1,0 ponto) Obtenha uma expressão para $g'(t)$ em função das derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (t^2, t^3).

(b) (valor 2,0 pontos) Obtenha uma expressão para $g''(t)$ em função das derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f no ponto (t^2, t^3).

Solução do item (a). Como f é diferenciável, podemos usar a regra da cadeia para obter:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^3 \\ &= 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3). \end{aligned}$$

Solução do item (b). Como as derivadas parciais de f são diferenciáveis, usamos a regra da cadeia, a regra do produto e o resultado do item (a) para obter:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\Big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)\Big) \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3)\Big) + 6t\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)\Big) \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 2t\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t^2, t^3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^3\Big) \\ &\quad + 6t\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) + 3t^2\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t^2, t^3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2, t^3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^3\Big) \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 2t\Big(2t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t^2, t^3)\Big) \\ &\quad + 6t\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) + 3t^2\Big(2t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2, t^3)\Big). \end{aligned}$$

Como f é de classe C^2, o Teorema de Schwarz nos dá $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ e portanto:

$$\begin{aligned} g''(t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 6t\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3) \\ + 12t^3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t^2, t^3) + 9t^4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2, t^3). \end{aligned}$$

Questão 3. (valor 3,0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = 3x + y,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determine os pontos de máximo e mínimo global da restrição de f ao conjunto C definido por:

$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 + 2xy = 5\big\}.$$

Você pode usar sem justificar que C é compacto e não vazio.

Solução. Como C é compacto e não vazio e f é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que a restrição de f a C possui pontos de máximo e mínimo global. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar uma lista de candidatos a máximo ou mínimo da restrição de f a C. Temos que C é a curva de nível 5 da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Note que como f e g tem domínios abertos, f é diferenciável e g é de classe C^1, estão satisfeitas as hipóteses necessárias para aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange. Os gradientes de f e g são dados por

$$\nabla f(x, y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big) = (3, 1) \quad \text{e}$$

$$\nabla g(x, y) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\Big) = (4x + 2y, 2y + 2x),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Note que

$$\nabla g(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

e que $g(0, 0) \neq 5$, donde segue que o vínculo $g(x, y) = 5$ não possui pontos críticos. Portanto, todo ponto (x, y) de máximo ou mínimo da restrição de f a C satisfaz as condições

$$g(x, y) = 5 \quad \text{e} \quad \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Devemos então determinar os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 2xy = 5, \\ 3 = \lambda(4x + 2y), \\ 1 = \lambda(2y + 2x), \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. As duas últimas equações em (1) são equivalentes a $\lambda \neq 0$ e:

$$(2) \qquad \begin{cases} 4x + 2y = \frac{3}{\lambda}, \\ 6x + 6y = \frac{3}{\lambda}. \end{cases}$$

Note que (2) é satisfeito para algum $\lambda \neq 0$ se, e somente se:

$$6x + 6y = 4x + 2y \neq 0.$$

Como

$$6x + 6y = 4x + 2y \neq 0 \Longleftrightarrow x = -2y \neq 0,$$

obtemos que (1) é satisfeito para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 2xy = 5, \\ x = -2y. \end{cases}$$

Substituindo $x = -2y$ na primeira equação obtemos $y^2 = 1$ e portanto as soluções desse sistema são $(x, y) = (-2, 1)$ e $(x, y) = (2, -1)$. Como $f(-2, 1) = -5$ e $f(2, -1) = 5$, concluímos que $(-2, 1)$ é ó único ponto de mínimo global da restrição de f a C e que $(2, -1)$ é o único ponto de máximo global da restrição de f a C.

Adendo. Vamos justificar rigorosamente que C é compacto e não vazio. Para ver que C é não vazio notamos, por exemplo, que o ponto $(0, \sqrt{5})$ está em C (ou que os candidatos $(2, -1)$ e $(-2, 1)$ que encontramos no final da resolução acima estão em C). O fato que C é fechado segue, por exemplo, de um teorema que diz que uma curva de nível de uma função contínua com domínio fechado é um conjunto fechado. Para ver que C é limitado, notamos primeiro que:

$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (x + y)^2 = 5\big\}.$$

Daí, se $(x, y) \in C$, então $x^2 \leq 5$ e $(x+y)^2 \leq 5$, donde $|x| \leq \sqrt{5}$ e $|x+y| \leq \sqrt{5}$. Mas

$$|y| = |(x + y) + (-x)| \leq |x + y| + |x|,$$

donde segue que $|y| \leq 2\sqrt{5}$, para todo $(x, y) \in C$. Portanto C é limitado, já que está contido no retângulo $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\,] \times [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\,]$. Na verdade, usando uma rotação de eixos coordenados é possível mostrar que C é uma elipse.

Questão 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^3,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (valor 1,0 ponto) Determine os pontos críticos de f.

(b) (valor 1,0 ponto) Classifique cada um dos pontos críticos de f como mínimo local estrito, máximo local estrito ou ponto de sela.

Solução do item (a). Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + x,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Os pontos críticos de f são portanto as soluções do sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0, \\ 3y^2 + x = 0. \end{cases}$$

A segunda equação é equivalente a $x = -3y^2$ e, sob essa condição, a primeira equação equivale a $27y^4 + y = 0$. Temos:

$$27y^4 + y = 0 \iff y = 0 \text{ ou } 27y^3 = -1 \iff y = 0 \text{ ou } y = -\frac{1}{3},$$

donde segue que os pontos críticos de f são:

$$(0,0) \quad \text{e} \quad \Big(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\Big).$$

Solução do item (b). Temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$

e portanto a matriz Hessiana de f num ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é:

$$\begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$ a matriz Hessiana fica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

o determinante dessa matriz é igual a -1 (negativo) e portanto $(0,0)$ é um ponto de sela. Para $(x,y) = \big(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\big)$ a matriz Hessiana fica

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é igual a 3 (positivo) e os elementos na diagonal principal são negativos, donde segue que $\big(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\big)$ é um ponto de máximo local estrito.