Gabarito da Terceira Prova

(segunda versão)

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

03/12/2018

Questão 1. (valor 2,0 pontos) Considere a curva C em $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 z + y^2 z^2 + x = 3 \text{ e } xyz = 1\big\}.$$

Encontre uma equação paramétrica para a reta tangente a C no ponto $(1,1,1)$. Recorde que uma *equação paramétrica* para uma reta tem a forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\lambda, \\ y = y_0 + b\lambda, \\ z = z_0 + c\lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solução. Considere as funções $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y,z) = x^4 z + y^2 z^2 + x \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = xyz,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como f e g são funções de classe C^1 e a curva C é igual à interseção de uma superfície de nível de f com uma superfície de nível de g, vale que os gradientes $\nabla f(x,y,z)$ e $\nabla g(x,y,z)$ num ponto $(x,y,z) \in C$, se forem linearmente independentes[1], serão ortogonais à reta tangente a C no ponto (x,y,z). Temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Big) \\ &= (4x^3 z + 1, 2yz^2, x^4 + 2y^2 z) \qquad \text{e} \\ \nabla g(x,y,z) &= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\Big) \\ &= (yz, xz, xy), \end{aligned}$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e em particular:

$$\nabla f(1,1,1) = (5,2,3) \quad \text{e} \quad \nabla g(1,1,1) = (1,1,1).$$

[1] O fato de f e g serem de classe C^1 e dos gradientes de f e de g num ponto serem linearmente independentes garante que a interseção das superfícies de nível de f e de g que contém esse ponto, intersectadas com uma bola aberta centrada nesse ponto, é de fato uma curva com uma reta tangente bem-definida.

Assim, a reta tangente a C no ponto $(1,1,1)$ é a reta que passa pelo ponto $(1,1,1)$ e tem como um vetor diretor o produto vetorial:

$$\nabla f(1,1,1) \wedge \nabla g(1,1,1) = (-1,-2,3).$$

Uma possível equação paramétrica para essa reta é:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 1 - 2\lambda, \\ z = 1 + 3\lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t, s) = f(ts, t^2 + s^2),$$

para todo $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (valor 1,5 pontos) Obtenha uma expressão para $\frac{\partial g}{\partial t}(t, s)$ e $\frac{\partial g}{\partial s}(t, s)$ em função das derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto $(ts, t^2 + s^2)$.

(b) (valor 1,5 pontos) Obtenha uma expressão para $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(t, s)$ em função das derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f no ponto $(ts, t^2 + s^2)$.

Solução do item (a). Como f é diferenciável, podemos usar a regra da cadeia para obter:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2 + s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ts) + \frac{\partial f}{\partial y}(ts, t^2 + s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 + s^2) \\ &= s\frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2 + s^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(ts, t^2 + s^2) \qquad \text{e} \\ \frac{\partial g}{\partial s}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2 + s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(ts) + \frac{\partial f}{\partial y}(ts, t^2 + s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(t^2 + s^2) \\ &= t\frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2 + s^2) + 2s\frac{\partial f}{\partial y}(ts, t^2 + s^2).\end{aligned}$$

Solução do item (b). Como as derivadas parciais de f são diferenciáveis, usamos a regra da cadeia, a regra do produto e o resultado do item (a) para obter:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(t,s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t\frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2+s^2) + 2s\frac{\partial f}{\partial y}(ts, t^2+s^2)\Big) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2+s^2) + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2+s^2)\Big) \\
&+ 2s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(ts, t^2+s^2)\Big) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2+s^2) + t\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(ts, t^2+s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ts) \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(ts, t^2+s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2+s^2)\Big) \\
&+ 2s\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ts, t^2+s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ts) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(ts, t^2+s^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2+s^2)\Big) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2+s^2) + t\Big(s\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(ts, t^2+s^2) + 2t\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(ts, t^2+s^2)\Big) \\
&+ 2s\Big(s\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ts, t^2+s^2) + 2t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(ts, t^2+s^2)\Big).
\end{aligned}
$$

Como f é de classe C^2, o Teorema de Schwarz nos dá $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e portanto:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(t,s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(ts, t^2+s^2) + ts\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(ts, t^2+s^2) \\
&\quad + 2(t^2+s^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ts, t^2+s^2) + 4ts\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(ts, t^2+s^2).
\end{aligned}
$$

Questão 3. (valor 3,0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y, z) = 3x + 3y + z,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determine os pontos de máximo e mínimo global da restrição de f ao conjunto S definido por:

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 2yz = 5\big\}.$$

Você pode usar sem justificar que S é compacto e não vazio.

Solução. Como S é compacto e não vazio e f é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que a restrição de f a S possui pontos de máximo e mínimo global. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar uma lista de candidatos a máximo ou mínimo da restrição de f a S. Temos que S é a superfície de nível 5 da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 2yz,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Note que como f e g tem domínios abertos, f é diferenciável e g é de classe C^1, estão satisfeitas as hipóteses necessárias para aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange. Os gradientes de f e g são dados por

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\Big) = (3, 3, 1) \quad \text{e} \\ \nabla g(x, y, z) &= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\Big) \\ &= (6x + 4y + 2z, 4y + 4x + 2z, 2z + 2x + 2y),\end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. O determinante da matriz de coeficientes do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 6x + 4y + 2z = 0, \\ 4x + 4y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

é igual a $8 \neq 0$ e portanto o sistema só possui a solução trivial. Assim

$$\nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

e como $g(0, 0, 0) \neq 5$, segue que o vínculo $g(x, y, z) = 5$ não possui pontos críticos. Portanto, todo ponto (x, y, z) de máximo ou mínimo da restrição de f a S satisfaz as condições

$$g(x, y, z) = 5 \quad \text{e} \quad \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Devemos então determinar os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 2yz = 5, \\ 3 = \lambda(6x + 4y + 2z), \\ 3 = \lambda(4y + 4x + 2z), \\ 1 = \lambda(2z + 2x + 2y), \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. As três últimas equações em (1) são equivalentes a $\lambda \neq 0$ e:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} 6x + 4y + 2z = \frac{3}{\lambda}, \\ 4x + 4y + 2z = \frac{3}{\lambda}, \\ 6x + 6y + 6z = \frac{3}{\lambda}. \end{cases}$$

Temos que (2) é satisfeito para algum $\lambda \neq 0$ se, e somente se:

$$\text{(3)} \qquad 6x + 4y + 2z = 4x + 4y + 2z = 6x + 6y + 6z \neq 0.$$

Mas (3) é equivalente a $x = 0$ e $y = -2z \neq 0$. Assim, (1) é satisfeito para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 2yz = 5, \\ x = 0, \\ y = -2z. \end{cases}$$

Substituindo $x = 0$ e $y = -2z$ na primeira equação obtemos $5z^2 = 5$ e portanto $z = 1$ ou $z = -1$. Assim, os possíveis ponto de máximo ou mínimo global da restrição de f a S são:

$$(0, -2, 1) \quad \text{e} \quad (0, 2, -1).$$

Como $f(0, -2, 1) = -5$ e $f(0, 2, -1) = 5$, segue que $(0, -2, 1)$ é o único ponto de mínimo global da restrição de f a S e que $(0, 2, -1)$ é o único ponto de máximo global da restrição de f a S.

Adendo. Vamos justificar rigorosamente que S é compacto e não vazio. Para ver que S é não vazio notamos, por exemplo, que o ponto $(0, 0, \sqrt{5})$ está em S (ou que os candidatos $(0, -2, 1)$ e $(0, 2, -1)$ que encontramos no final da resolução acima estão em S). O fato que S é fechado segue, por exemplo, de um teorema que diz que uma superfície de nível de uma função contínua com domínio fechado é um conjunto fechado. Para ver que S é limitado, notamos primeiro que:

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (x + y)^2 + (x + y + z)^2 = 5\big\}.$$

Daí, se $(x, y, z) \in S$, então $x^2 \leq 5$, $(x + y)^2 \leq 5$ e $(x + y + z)^2 \leq 5$, donde $|x| \leq \sqrt{5}$, $|x + y| \leq \sqrt{5}$ e $|x + y + z| \leq \sqrt{5}$. Mas

$$|y| = |(x + y) + (-x)| \leq |x + y| + |x| \qquad \text{e}$$
$$|z| = |(x + y + z) + (-x - y)| \leq |x + y + z| + |x + y|,$$

donde segue que $|y| \leq 2\sqrt{5}$ e $|z| \leq 2\sqrt{5}$, para todo $(x, y, z) \in S$. Portanto S é limitado, já que está contido no paralelepípedo:

$$[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\,] \times [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\,] \times [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\,].$$

Na verdade, usando uma rotação de eixos coordenados é possível mostrar que S é um elipsóide.

Questão 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (valor 1,0 ponto) Determine os pontos críticos de f.

(b) (valor 1,0 ponto) Classifique cada um dos pontos críticos de f como mínimo local estrito, máximo local estrito ou ponto de sela.

Solução do item (a). Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 + 4x = 4x(x^2 + y^2 + 1) \qquad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x^2y - 4y = 4y(y^2 + x^2 - 1),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Os pontos críticos de f são portanto as soluções do sistema:

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 + 1) = 0, \\ 4y(y^2 + x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a $x = 0$ e, sob essa condição, a segunda equação equivale a $y(y^2 - 1) = 0$. Assim, os pontos críticos de f são:

$$(0,0), \quad (0,1) \quad \text{e} \quad (0,-1).$$

Solução do item (b). Temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 4y^2 + 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 + 4x^2 - 4 \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8xy$$

e portanto a matriz Hessiana de f num ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é:

$$\begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 + 4 & 8xy \\ 8xy & 12y^2 + 4x^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Para $(x,y) = (0,0)$ a matriz Hessiana fica

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix};$$

o determinante dessa matriz é igual a -16 (negativo) e portanto $(0,0)$ é um ponto de sela. Para $(x,y) = (0,1)$ e para $(x,y) = (0,-1)$ a matriz Hessiana fica

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é igual a 64 (positivo) e os elementos na diagonal principal são positivos, donde segue que $(0,1)$ e $(0,-1)$ são pontos de mínimo local estrito.