Gabarito da Terceira Prova

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

24/06/2013

Questão 1. (valor 1,0 ponto cada item) Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x+7)\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Solução.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x+7)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x+7)$.

(b) Fazendo a substituição $x = y^2$, com $y \geq 0$, obtemos:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int e^y(2y)\,\mathrm{d}y = 2\int e^y y\,\mathrm{d}y.$$

Usando agora integração por partes com $f(y) = y$, $g'(y) = e^y$, obtemos:

$$\int e^y y\,\mathrm{d}y = f(y)g(y) - \int f'(y)g(y)\,\mathrm{d}y = ye^y - \int e^y\,\mathrm{d}y = ye^y - e^y.$$

Logo:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^y(y-1) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1).$$

Questão 2. (valor 2,0 pontos cada item) Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 6x + 16}}$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x$.

Solução.

(a) Completando quadrados, obtemos:

$$x^2 - 6x + 16 = (x-3)^2 + 7.$$

Fazendo a substituição $x = 3 + \sqrt{7}\,\mathrm{tg}\,\theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, obtemos:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 6x + 16}} = \int \frac{\sqrt{7}\sec^2\theta}{\sqrt{7(\mathrm{tg}^2\,\theta + 1)}}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

já que $\mathrm{tg}^2\,\theta + 1 = \sec^2\theta$. Sabemos que:

$$\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|.$$

Temos:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{x-3}{\sqrt{7}}, \quad \sec\theta = \sqrt{\mathrm{tg}^2\,\theta + 1} = \sqrt{\frac{(x-3)^2 + 7}{7}} = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 16}}{\sqrt{7}}.$$

Assim:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 6x + 16}} = \ln\left|\frac{x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 16}}{\sqrt{7}}\right|.$$

Na verdade, o valor absoluto é redundante, já que:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 16} = \sqrt{(x-3)^2 + 7} > |x - 3| \geq -(x-3)$$
$$\implies x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 16} > 0.$$

(b) Fazendo a divisão de polinômios, obtemos:

$$x^5 = x(x^4 - 1) + x,$$

donde:

$$\frac{x^5}{x^4 - 1} = x + \frac{x}{x^4 - 1}.$$

O polinômio $x^4 - 1$ fatora-se como:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Pelo Teorema de Decomposição em Frações Parciais, podemos escrever:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Daí:

$$\begin{aligned} x &= A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1) \\ &= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D). \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A-B+D=0, \\ A+B-C=1, \\ A-B-D=0. \end{cases}$$

De $(A-B)+D=0$ e $(A-B)-D=0$ vem $A=B$ e $D=0$. Assim $2A+C=0$ e $2A-C=1$, donde $4A=1$ e $C=-2A$. A solução do sistema é, portanto:

$$A = B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = 0.$$

Concluímos que:

$$\frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}.$$

Como:

$$\int \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1),$$

obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|. \end{aligned}$$

Questão 3. (valor 1,0 ponto) Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = x^3 - x^2, \quad g(x) = 2x^3 - x^2 - x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Determine a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g.

Solução. Temos:

$$g(x) - f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $g(x) < f(x)$ para $x < -1$, $g(x) > f(x)$ para $-1 < x < 0$, $g(x) < f(x)$ para $0 < x < 1$ e $g(x) > f(x)$ para $x > 1$. A região delimitada pelos gráficos de f e g é:

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0 \text{ e } f(x) \le y \le g(x)\big\} \\ \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } g(x) \le y \le f(x)\big\}$$

e sua área é dada por:

$$\int_{-1}^{0} \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{-1}^{0} + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big)\Big|_{0}^{1} \\ = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Questão 4. (valor 1,0 ponto) Determine a solução geral da equação diferencial ordinária:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+y}.$$

Solução. Temos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x} e^{y},$$

e portanto:

$$\int e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int e^{x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow -e^{-y} = e^{x} + c.$$

Assim (trocando c por $-c$) concluímos que a solução geral é:

$$y = -\ln(c - e^{x}).$$

Note que para $c > 0$ o domínio dessa solução é o intervalo $]-\infty, \ln c[$ e que para $c \leq 0$ o domínio é vazio, ou seja, apenas valores positivos de c produzem uma solução.

Questão 5. (valor 2,0 pontos) Calcule o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{-\operatorname{sen} x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Solução. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \int_{-\operatorname{sen} x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\, \mathrm{d}t,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos:

$$f(x) = G(\operatorname{sen} x) - G(-\operatorname{sen} x),$$

onde G é definida por:

$$G(y) = \int_0^y e^{t^2}\, \mathrm{d}t,$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$G'(y) = e^{y^2},$$

e portanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(\operatorname{sen} x) \cos x - G'(-\operatorname{sen} x)(-\cos x) \\ &= \big(G'(\operatorname{sen} x) + G'(-\operatorname{sen} x)\big) \cos x = 2e^{\operatorname{sen}^2 x} \cos x. \end{aligned}$$

Como $f(0) = 0$, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{-\operatorname{sen} x}^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\, \mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2.$$