Gabarito da Segunda Prova

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

12/06/2018

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja (M, d) um espaço métrico totalmente limitado (i.e., para todo $\varepsilon > 0$, vale que M pode ser coberto por um número finito de subconjuntos de diâmetro menor do que ε). Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e suponha M munido da sua σ-álgebra de Borel. Mostre que se $f : X \to M$ é uma função mensurável, então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma função simples e mensurável $g : X \to M$ tal que $d\big(f(x), g(x)\big) < \varepsilon$, para todo $x \in M$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, escreva $M = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, com cada S_i não vazio e com diâmetro menor do que ε. Para cada $i = 1, \ldots, k$, escolha $p_i \in S_i$ e seja B_i a bola aberta de centro p_i e raio ε. Temos $S_i \subset B_i$ e portanto $M = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Defina $B'_i = B_i \setminus \bigcup_{j<i} B_j$, para $i = 1, \ldots, k$. Como cada B_i é um aberto de M, temos que cada B'_i é um Boreleano de M e, além do mais, $M = \bigcup_{i=1}^{k} B'_i$, sendo essa união disjunta. Tomando $X_i = f^{-1}[B'_i]$, segue da mensurabilidade de f que $X_i \in \mathcal{A}$. Além do mais, $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, sendo essa união disjunta. Existe então uma única função $g : X \to M$ tal que $g|_{X_i}$ é constante e igual a p_i. A função g é obviamente simples e é mensurável, já que a restrição de g a cada X_i é mensurável e cada $X_i \in \mathcal{A}$. Finalmente, dado $x \in X$, temos $x \in X_i$ para algum i e daí $d\big(f(x), g(x)\big) = d\big(f(x), p_i\big) < \varepsilon$, já que $f(x) \in B'_i \subset B_i$.

Definição. Sejam X um conjunto, $\big((Y_i, \mathcal{A}_i)\big)_{i \in I}$ uma família de espaços mensuráveis e $(f_i)_{i \in I}$ uma família de funções $f_i : X \to Y_i$. A *σ-álgebra induzida* em X pela família $(f_i)_{i \in I}$ é a σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X gerada por

$$\bigcup_{i \in I} \big\{ f_i^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}_i \big\}.$$

Temos que $\mathcal{A}$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X tal que a função $f_i : (X, \mathcal{A}) \to (Y_i, \mathcal{A}_i)$ é mensurável, para todo $i \in I$. Além do mais, se X está munido de $\mathcal{A}$ e se g é uma função definida num espaço mensurável tomando valores em X, então g será mensurável se, e somente se, $f_i \circ g$ for mensurável, para todo $i \in I$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Sejam X, Y, Z_1, Z_2 conjuntos e $f : X \to Y$, $g_1 : Y \to Z_1$ e $g_2 : Y \to Z_2$ funções. Suponha Z_i munido de uma σ-álgebra $\mathcal{A}_i$ de subconjuntos de Z_i, $i = 1, 2$. Denote por $\mathcal{A}$ a σ-álgebra induzida em Y pela família $(g_i)_{i=1,2}$, por $\mathcal{B}$ a σ-álgebra induzida em X pela família $(g_i \circ f)_{i=1,2}$ e por $\mathcal{B}'$ a σ-álgebra induzida em X por $f : X \to (Y, \mathcal{A})$. Mostre que $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Solução. Como $f : (X, \mathcal{B}') \to (Y, \mathcal{A})$ é mensurável e $g_i : (Y, \mathcal{A}) \to (Z_i, \mathcal{A}_i)$ são mensuráveis, segue que $g_i \circ f : (X, \mathcal{B}') \to (Z_i, \mathcal{A}_i)$ é mensurável, para $i = 1, 2$. Como $\mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X que torna $g_i \circ f$ mensurável para $i = 1, 2$, segue que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Agora, como a função $g_i \circ f : (X, \mathcal{B}) \to (Z_i, \mathcal{A}_i)$ é mensurável para $i = 1, 2$ e como $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra induzida em Y pela família $(g_i)_{i=1,2}$, segue que $f : (X, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{A})$ é mensurável. Mas $\mathcal{B}'$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X que torna f mensurável e portanto $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty[$ uma medida finita definida na σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ e seja $f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ uma função mensurável. Suponha que f seja contínua na origem e limitada. Mostre que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x}{n}\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) = f(0)\mu(\mathbb{R}).$$

Solução. Para cada $n \geq 1$, considere a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = f\big(\frac{x}{n}\big)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que $f_n : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ é mensurável, já que f_n é composição de f com a função contínua

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{x}{n} \in \mathbb{R},$$

ambas mensuráveis com respeito à σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} f\Big(\frac{x}{n}\Big) = f(0),$$

já que $\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$ e f é contínua na origem. Assim, a sequência $(f_n)_{n \geq 1}$ converge pontualmente para a função constante e igual a $f(0)$. Como f é limitada, existe $c \in [0, +\infty[$ tal que $|f(x)| \leq c$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto $|f_n(x)| \leq c$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \geq 1$. Notando também que

$$\int_{\mathbb{R}} c \,\mathrm{d}\mu = c\mu(\mathbb{R}) < +\infty,$$

vemos que estão satisfeitas as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada e portanto:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x}{n}\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f(0) \,\mathrm{d}\mu = f(0)\mu(\mathbb{R}).$$

Questão 4. Sejam dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e uma função mensurável $f : (X, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. Denote por

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\}$$

o gráfico de f.

(a) (valor 1,5 pontos) Mostre que $\mathrm{gr}(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) (valor 1,0 ponto) Se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida σ-finita e $\mathfrak{m} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ denota a medida de Lebesgue, mostre que $(\mu \times \mathfrak{m})\big(\mathrm{gr}(f)\big) = 0$.

Solução. Se π_1 e π_2 denotam as projeções do produto cartesiano $X \times \mathbb{R}$, então $\mathrm{gr}(f) = \varphi^{-1}(0)$, em que $\varphi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $\varphi = f \circ \pi_1 - \pi_2$. Como as funções

$$\pi_1 : \big(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \longrightarrow (X, \mathcal{A}), \quad f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \quad \text{e}$$
$$\pi_2 : \big(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$$

são mensuráveis, segue que $\varphi : \big(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ é mensurável e portanto que $\mathrm{gr}(f) = \varphi^{-1}(0) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Isso completa a solução do item (a). Para o item (b), usando o fato que $C = \mathrm{gr}(f)$ está em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e que as medidas μ e $\mathfrak{m}$ são σ-finitas, obtemos como consequência da aplicação do Teorema de Tonelli para a função característica de C que

$$(\mu \times \mathfrak{m})(C) = \int_X \mathfrak{m}(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

em que $C_x = \big\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in C\big\} = \{f(x)\}$. Como $\mathfrak{m}(C_x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a conclusão segue.

Questão 5. (valor 2,5 pontos) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida tais que as medidas μ e ν sejam σ-finitas. Sejam dadas funções integráveis $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ e considere a função $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x)g(y)$, para todo $(x, y) \in X \times Y$. Mostre que h é integrável e que:

$$\int_{X\times Y} h \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \Big(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\Big)\Big(\int_Y g \,\mathrm{d}\nu\Big).$$

Solução. Se π_1 e π_2 denotam as projeções do produto cartesiano $X \times Y$, então h é o produto das funções $f \circ \pi_1$ e $g \circ \pi_2$, donde segue que a função $h : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ é mensurável. Como as medidas μ e ν são σ-finitas e a função $|h|$ é mensurável e não negativa, o Teorema de Tonelli nos dá:

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} |h| \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \int_X \Big(\int_Y |f(x)g(y)| \,\mathrm{d}\nu(y)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \Big(|f(x)| \int_Y |g(y)| \,\mathrm{d}\nu(y)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \Big(\int_X |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\Big(\int_Y |g(y)| \,\mathrm{d}\nu(y)\Big),
\end{aligned}$$

em que na segunda igualdade colocamos a constante $|f(x)|$ para fora da integral com respeito a y e na terceira igualdade colocamos a constante $\int_Y |g(y)| \,\mathrm{d}\nu(y)$ para fora da integral com respeito a x. Como f e g são integráveis, temos que $\big(\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu\big)\big(\int_Y |g| \,\mathrm{d}\nu\big) < +\infty$, donde segue que $|h|$ e portanto h é integrável. O fato que h é integrável nos permite agora usar o Teorema de Fubini–Tonelli para a função h. Repetindo os cálculos acima com h no lugar de $|h|$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} h \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \int_X \Big(\int_Y f(x)g(y) \,\mathrm{d}\nu(y)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \Big(f(x) \int_Y g(y) \,\mathrm{d}\nu(y)\Big) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \Big(\int_X f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\Big(\int_Y g(y) \,\mathrm{d}\nu(y)\Big),
\end{aligned}$$

concluindo a solução.

Questão 6. (valor 2,5 pontos) Sejam dados um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e uma sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$. Mostre que se $(f_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ e se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua, então $(\varphi \circ f_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para $\varphi \circ f$.

Solução. Note em primeiro lugar que a função φ é contínua e portanto mensurável com respeito à σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$; assim, as funções $\varphi \circ f_n$ e $\varphi \circ f$ são mensuráveis. Seja dado $\varepsilon > 0$. Devemos mostrar que:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\Big(\big\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Da continuidade uniforme de φ, obtemos $\delta > 0$ tal que $|t - s| < \delta$ implica $|\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$. Daí

$$\big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \delta\big\} \subset \big\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| < \varepsilon\big\}$$

e passando aos complementares obtemos:

$$\big\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\big\} \subset \big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\big\}.$$

Escrevendo

$$A_n = \big\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\big\} \quad \text{e}$$
$$B_n = \big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\big\}$$

concluímos que $\mu(A_n) \leq \mu(B_n)$ e, como $(f_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para f, vale que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0$. Daí $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$, como queríamos demonstrar.