Gabarito da Segunda Prova

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V
MAP0217 – Cálculo Diferencial

Prof. Daniel Victor Tausk
21/10/2013

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Sejam (M, d) um espaço métrico compacto, $(F_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de subconjuntos fechados de M e U um subconjunto aberto de M. Mostre que se $\bigcap_{i \in I} F_i \subset U$ então existe um subconjunto finito não vazio J de I tal que $\bigcap_{i \in J} F_i \subset U$.

Solução. Para cada $i \in I$, seja $U_i = M \setminus F_i$. Temos que U_i é um subconjunto aberto de M. Além do mais, dado $x \in M$, se $x \notin U$, então $x \notin \bigcap_{i \in I} F_i$ e portanto $x \notin F_i$, isto é, $x \in U_i$, para algum $i \in I$. Isso mostra que $M = U \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ é uma cobertura aberta de M. Pela compacidade de M, essa cobertura possui uma subcobertura finita, isto é, existe um subconjunto finito J de I (que pode ser escolhido não vazio) de modo que:

$$M = U \cup \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Daí, se $x \in \bigcap_{i \in J} F_i$, temos $x \notin \bigcup_{i \in J} U_i$ e portanto $x \in U$. Logo $\bigcap_{i \in J} F_i \subset U$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja $n \geq 2$ um inteiro e considere $\mathbb{R}^n$ munido da norma Euclideana:

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que a esfera:

$$S = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\big\}$$

é conexa.

Solução 1. Seja:

$$B = \big\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : \|y\| \leq 1\big\}$$

a bola fechada unitária de centro na origem de $\mathbb{R}^{n-1}$ munido da sua norma Euclideana. Temos que B é conexa, já que é um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado (e é, portanto, conexo por caminhos). As funções $f_+ : B \to \mathbb{R}^n$, $f_- : B \to \mathbb{R}^n$ definidas por:

$$f_+(y) = \big(y, \sqrt{1 - \|y\|^2}\,\big), \quad f_-(y) = \big(y, -\sqrt{1 - \|y\|^2}\,\big), \quad y \in B,$$

são contínuas, onde identificamos $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Temos:

$$S = f_+[B] \cup f_-[B].$$

Os conjuntos $f_+[B]$ e $f_-[B]$ são conexos, sendo imagens contínuas de um conjunto conexo. Além do mais:

$$f_+[B] \cap f_-[B] = \big\{(y, 0) : y \in \mathbb{R}^{n-1},\ \|y\| = 1\big\} \neq \emptyset.$$

Segue então que S é conexo, já que é a união de dois conexos com ponto comum.

Solução 2. Vamos mostrar que se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado com $\dim(V) \geq 2$ então a esfera:

$$S = \big\{x \in V : \|x\| = 1\big\}$$

é conexa. Temos que a função $r : V \setminus \{0\} \to S$ definida por:

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad x \in V \setminus \{0\},$$

é contínua e sobrejetora. Basta então mostrar que $V \setminus \{0\}$ é conexo. Para isso, vamos mostrar que $V \setminus \{0\}$ é conexo por caminhos. Dados $x, y \in V \setminus \{0\}$, se x e y são linearmente independentes, então o segmento de reta:

$$[x, y] = \big\{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\big\}$$

está contido em $V \setminus \{0\}$ e portanto a aplicação $\gamma : [0,1] \to V \setminus \{0\}$ definida por:

$$\gamma(t) = (1-t)x + ty, \quad t \in [0,1],$$

é uma curva contínua em $V \setminus \{0\}$ ligando x a y. Se x e y são linearmente dependentes, então $\{x, y\}$ gera um subespaço de V de dimensão 1; como $\dim(V) \geq 2$, existe $z \in V$ fora do subespaço gerado por $\{x, y\}$. Daí x e z são linearmente independentes e z e y são linearmente independentes. Pelo que vimos acima, existe nesse caso uma curva contínua em $V \setminus \{0\}$ ligando x a z e uma curva contínua em $V \setminus \{0\}$ ligando z a y. A concatenação dessas curvas contínuas (veja Exercício 5 da Sétima Lista) é uma curva contínua em $V \setminus \{0\}$ ligando x a y.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Dizemos que $x \in M$ é um *ponto de condensação* de A se para toda vizinhança V de x em M vale que $V \cap A$ é não enumerável. Mostre que se M é separável e A é não enumerável então A possui um ponto de condensação.

Solução. Suponha por absurdo que A não possua um ponto de condensação. Daí todo $x \in M$ possui uma vizinhança V_x tal que $V_x \cap A$ é enumerável. Trocando V_x pelo seu interior, podemos supor que V_x é aberta. Daí $M = \bigcup_{x \in M} V_x$ é uma cobertura aberta de M. Como M é um espaço métrico separável, temos que ele satisfaz a propriedade de Lindelöf e portanto essa cobertura aberta possui uma subcobertura enumerável. Assim, existe um subconjunto enumerável E de M tal que $M = \bigcup_{x \in E} V_x$. Temos:

$$A = \bigcup_{x \in E} (A \cap V_x),$$

e portanto A é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Isso contradiz a hipótese de que A não é enumerável.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado de dimensão finita. Mostre que V é completo.

Solução. Seja $T : \mathbb{R}^n \to V$ um isomorfismo linear e defina uma norma $\|\cdot\|_T$ em $\mathbb{R}^n$ fazendo:

$$\|x\|_T = \|T(x)\|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Temos que T é uma isometria de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_T)$ sobre $(V, \|\cdot\|)$; assim, para mostrar que $(V, \|\cdot\|)$ é completo, basta mostrar que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_T)$ é completo (já que, obviamente, se dois espaços métricos são isométricos e um deles é completo então o outro também é completo). Temos os seguintes fatos:

(i) $\mathbb{R}^n$ é completo, munido, por exemplo, da norma $\|\cdot\|_\infty$ (segue do resultado do Exercício 8 da Sétima Lista e do fato, mostrado em aula, que $\mathbb{R}$ munido da métrica usual é completo);

(ii) quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são Lipschitz (e portanto, uniformemente) equivalentes (demonstrado em aula);

(iii) se duas métricas num conjunto são uniformemente equivalentes e se uma delas é completa então a outra também é (resultado do item (b) do Exercício 7 da Sétima Lista).

Segue então que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_T)$ é completo.