Gabarito da Segunda Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

18/10/2011

Questão 1. Denote por $\pi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, as projeções e seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^2$.

(a) (valor 1,0 ponto) Mostre que se $\mathcal{A}$ contém $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ então as projeções $\pi_i : (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ são mensuráveis.

(b) (valor 1,5 pontos) Reciprocamente, mostre que se as projeções

$$\pi_i : (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$$

são mensuráveis então $\mathcal{A}$ contém $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Solução. Como as projeções são contínuas então elas são Borel mensuráveis, i.e., se B é um Boreleano de $\mathbb{R}$ então $\pi_i^{-1}(B)$ é um Boreleano de $\mathbb{R}^2$. Temos então que, se $\mathcal{A}$ contém $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, então $\pi_i^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para qualquer Boreleano B de $\mathbb{R}$. Isso completa a resolução do item (a). Suponha agora que $\mathcal{A}$ seja uma σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^2$ que torna as projeções $\pi_i : (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ mensuráveis. Segue que se I_1, I_2 são abertos de $\mathbb{R}$ então:

$$I_1 \times I_2 = \pi_1^{-1}(I_1) \cap \pi_2^{-1}(I_2)$$

está em $\mathcal{A}$. Como todo aberto de $\mathbb{R}^2$ é uma união enumerável de produtos do tipo $I_1 \times I_2$, com I_1, I_2 abertos de $\mathbb{R}$, vemos que todo aberto de $\mathbb{R}^2$ está em $\mathcal{A}$. Logo $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{A}$, já que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ é a σ-álgebra gerada pelos abertos de $\mathbb{R}^2$. (**Solução alternativa para o item (b):** a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\big)$ é mensurável, já que suas coordenadas — ou seja, as projeções $\pi_i : (\mathbb{R}^2, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ — são mensuráveis. Mas isso significa que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{A}$.)

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente (i.e., $f(x) \leq f(y)$ sempre que $x \leq y$). Mostre que f é Borel mensurável (i.e., mensurável se seu domínio e contra-domínio estiverem munidos da σ-álgebra de Borel).

Solução. É suficiente mostrar que se $c \in \mathbb{R}$ então o conjunto:

$$B = \big\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq c\big\}$$

é um Boreleano de $\mathbb{R}$. Como f é crescente, temos que se $x \in B$ então $\left]-\infty, x\right] \subset B$. Se B não for limitado superiormente então $B = \mathbb{R}$ e portanto B é um Boreleano de $\mathbb{R}$. Também se B for vazio então B é um Boreleano de $\mathbb{R}$. Suponha então que B seja não vazio e limitado superiormente, de modo que B possui um supremo $s = \sup B \in \mathbb{R}$. Daí, para todo $y \in \left]-\infty, s\right[$ existe $x \in B$ com $y < x$ e portanto $y \in B$. Assim:

$$\left]-\infty, s\right[\subset B \subset \left]-\infty, s\right],$$

donde $B = \left]-\infty, s\right[$ ou $B = \left]-\infty, s\right]$. Em qualquer caso, B é um Boreleano de $\mathbb{R}$.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas. Mostre que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu,$$

para qualquer função mensurável não negativa $f : X \to [0, +\infty]$.

Solução. Começamos mostrando que o resultado vale se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples, mensurável, não negativa. Nesse caso escrevemos:

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i},$$

com $c_i \in [0, +\infty]$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$. Daí:

$$\begin{aligned} \int_X f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\mu + \nu)(A_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i \nu(A_i) \\ = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X f \, \mathrm{d}\nu. \end{aligned}$$

Agora, se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável não negativa arbitrária, escrevemos $f_n \nearrow f$, com cada $f_n : X \to [0, +\infty]$ uma função simples, mensurável e não negativa. Daí:

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_n \, \mathrm{d}\nu,$$

para todo $n \geq 1$. Tomando o limite quando $n \to +\infty$ e usando o teorema da convergência monotônica o resultado é obtido.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Denote por $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ a σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}$ e por $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a medida de Lebesgue. Dado um subconjunto (não necessariamente mensurável) A de $\mathbb{R}$ cujo complementar em $\mathbb{R}$ tenha medida interior nula, mostre que existe uma medida $\mu : \mathcal{M}(\mathbb{R})|_A \to [0, +\infty]$ tal que:

$$\mu(E \cap A) = \mathfrak{m}(E),$$

para todo $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, onde $\mathcal{M}(\mathbb{R})|_A = \big\{E \cap A : E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})\big\}$.

Solução. Todo elemento de $\mathcal{M}(\mathbb{R})|_A$ é da forma $E \cap A$, com $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Definimos então uma função $\mu : \mathcal{M}(\mathbb{R})|_A \to [0, +\infty]$ fazendo:

$$\mu(E \cap A) = \mathfrak{m}(E),$$

para todo $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Para verificar que μ está de fato bem definida, devemos checar que se $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $E_1 \cap A = E_2 \cap A$ então:

$$\mathfrak{m}(E_1) = \mathfrak{m}(E_2).$$

De $E_1 \cap A = E_2 \cap A$ segue que $E_1 \setminus E_2$ e $E_2 \setminus E_1$ estão contidos no complementar de A. Como o complementar de A tem medida interior nula e como $E_1 \setminus E_2$, $E_2 \setminus E_1$ são mensuráveis, segue que:

$$\mathfrak{m}(E_1 \setminus E_2) = \mathfrak{m}(E_2 \setminus E_1) = 0.$$

Daí:

$$\mathfrak{m}(E_1) = \mathfrak{m}(E_1 \cap E_2) + \mathfrak{m}(E_1 \setminus E_2) = \mathfrak{m}(E_1 \cap E_2),$$

e:

$$\mathfrak{m}(E_2) = \mathfrak{m}(E_1 \cap E_2) + \mathfrak{m}(E_2 \setminus E_1) = \mathfrak{m}(E_1 \cap E_2),$$

donde $\mathfrak{m}(E_1) = \mathfrak{m}(E_1 \cap E_2) = \mathfrak{m}(E_2)$. Verifiquemos agora que μ é uma medida. Temos:

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap A) = \mathfrak{m}(\emptyset) = 0.$$

Agora, se $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{M}(\mathbb{R})|_A$ de conjuntos dois a dois disjuntos, escrevemos $A_n = E_n \cap A$, com $E_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, para todo $n \geq 1$. Para cada $n \geq 1$, seja:

$$F_n = E_n \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\Big).$$

(A união $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ é vazia se $n = 1$.) Temos:

$$F_n \cap A = (E_n \cap A) \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} (E_i \cap A)\Big) = A_n \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) = A_n,$$

já que A_i é disjunto de A_n para $i < n$. Usando o fato que $F_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ para todo $n \geq 1$ e que os conjuntos F_n são dois a dois disjuntos, obtemos:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \cap A\Big) = \mathfrak{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(F_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Questão 5. (valor 2,5 pontos) Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis, Y um conjunto, $\phi : X \to Y$ e $f : X \times Y \to X'$ funções. Assuma que para todo $y \in Y$ a função:

$$f_y : X \ni x \longmapsto f(x, y) \in X'$$

seja mensurável, que a função ϕ tenha imagem enumerável e que $\phi^{-1}(y) \in \mathcal{A}$, para todo $y \in Y$. Mostre que a função:

$$g : X \ni x \longmapsto f\big(x, \phi(x)\big) \in X'$$

é mensurável.

Solução. Como $\phi^{-1}(y) \in \mathcal{A}$ para todo $y \in \mathrm{Im}(\phi)$, $\mathrm{Im}(\phi)$ é enumerável e

$$X = \bigcup_{y \in \mathrm{Im}(\phi)} \phi^{-1}(y),$$

vemos que para mostrar que g é mensurável é suficiente mostrar que a restrição de g a $\phi^{-1}(y)$ é mensurável, para todo $y \in \mathrm{Im}(\phi)$. Mas, dado $y \in \mathrm{Im}(\phi)$, temos que a restrição de g a $\phi^{-1}(y)$ é igual à restrição de f_y a $\phi^{-1}(y)$ e portanto é mensurável, já que f_y é mensurável.

Questão 6. Seja X um conjunto não enumerável munido da σ-álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X formada pelos subconjuntos enumeráveis e pelos subconjuntos coenumeráveis de X. (Um subconjunto de X é *coenumerável* se seu complementar em X for enumerável.) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável.

(a) (valor 1,5 pontos) Mostre que para todo inteiro positivo n existe um subconjunto I_n de $\mathbb{R}$, com diâmetro menor do que $\frac{1}{n}$, tal que $f^{-1}(I_n)$ é coenumerável.

(b) (valor 1,0 ponto) Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(c)$ é coenumerável.

Solução. Seja $n \geq 1$ e seja $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_n^k$ uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}$ por intervalos I_n^k de diâmetro menor do que $\frac{1}{n}$. Temos:

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(I_n^k).$$

Como X não é enumerável, temos que $f^{-1}(I_n^k)$ é não enumerável, para algum $k \geq 1$. Como $f^{-1}(I_n^k) \in \mathcal{A}$, temos que $f^{-1}(I_n^k)$ é coenumerável. Tome então $I_n = I_n^k$. Isso completa a resolução do item (a). Seja:

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Como, para todo $n \geq 1$, I_n tem diâmetro menor do que $\frac{1}{n}$, temos que I tem no máximo um ponto. Note que:

$$f^{-1}(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n);$$

assim:

$$X \setminus f^{-1}(I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(X \setminus f^{-1}(I_n)\big).$$

Como $X \setminus f^{-1}(I_n)$ é enumerável para todo $n \geq 1$, temos que $X \setminus f^{-1}(I)$ é enumerável, i.e., $f^{-1}(I)$ é coenumerável. Em particular, $f^{-1}(I)$ não é vazio e I não é vazio. Daí $I = \{c\}$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e $f^{-1}(c)$ é coenumerável.