Gabarito da Segunda Prova

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk
06/05/2014

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ e sejam $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ produtos internos em V. Mostre que se:

$$\langle v, v\rangle_1 = \langle v, v\rangle_2$$

para todo $v \in V$, então os produtos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ são iguais.

Solução 1. Dados v e v' em V, temos:

$$\langle v + v', v + v'\rangle_1 = \langle v + v', v + v'\rangle_2,$$

donde:

$$\langle v, v\rangle_1 + \langle v, v'\rangle_1 + \langle v', v\rangle_1 + \langle v', v'\rangle_1 = \langle v, v\rangle_2 + \langle v, v'\rangle_2 + \langle v', v\rangle_2 + \langle v', v'\rangle_2.$$

Como $\langle v, v\rangle_1 = \langle v, v\rangle_2$ e $\langle v', v'\rangle_1 = \langle v', v'\rangle_2$, obtemos:

$$\langle v, v'\rangle_1 + \langle v', v\rangle_1 = \langle v, v'\rangle_2 + \langle v', v\rangle_2. \tag{1}$$

Daí:

$$\langle v, v'\rangle_1 + \overline{\langle v, v'\rangle_1} = \langle v, v'\rangle_2 + \overline{\langle v, v'\rangle_2},$$

o que nos dá:

$$\Re\big(\langle v, v'\rangle_1\big) = \Re\big(\langle v, v'\rangle_2\big), \tag{2}$$

onde $\Re(z)$ denota a parte real de um número complexo z. Se $K = \mathbb{R}$, a conclusão segue de (2). Suponha que $K = \mathbb{C}$. Como (2) vale para quaisquer $v, v' \in V$, podemos substituir v por iv em (2), obtendo:

$$\Re\big(\langle iv, v'\rangle_1\big) = \Re\big(\langle iv, v'\rangle_2\big),$$

ou seja:

$$\Re\big(i\langle v, v'\rangle_1\big) = \Re\big(i\langle v, v'\rangle_2\big).$$

Para um número complexo z, temos $\Re(iz) = -\Im(z)$, onde $\Im(z)$ denota a parte imaginária de z. Assim:

$$\Im\big(\langle v, v'\rangle_1\big) = \Im\big(\langle v, v'\rangle_2\big). \tag{3}$$

A conclusão segue de (2) e (3).

Solução 2. Basta notar que a afirmação que aparece no enunciado da questão é o caso particular do resultado do Exercício 10 da Sexta Lista em que $V = W$, T é igual à aplicação identidade de V, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V = \langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_W = \langle\cdot,\cdot\rangle_2$.

Observação. No caso $K = \mathbb{C}$, é possível demonstrar a tese da questão sem usar que os produtos internos satisfazem a propriedade:

$$\langle v, v' \rangle = \overline{\langle v', v \rangle}, \quad v, v' \in V,$$

isto é, é suficiente assumir que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ são sesquilineares. De fato, trocando v por iv na igualdade (1), obtemos:

$$\langle iv, v' \rangle_1 + \langle v', iv \rangle_1 = \langle iv, v' \rangle_2 + \langle v', iv \rangle_2,$$

donde segue que:

$$i\langle v, v' \rangle_1 - i\langle v', v \rangle_1 = i\langle v, v' \rangle_2 - i\langle v', v \rangle_2$$

e:

$$\langle v, v' \rangle_1 - \langle v', v \rangle_1 = \langle v, v' \rangle_2 - \langle v', v \rangle_2. \tag{4}$$

Somando (1) com (4) obtemos a conclusão desejada.

Questão 2. Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre um corpo K e considere o produto cartesiano $V = V_1 \times V_2$ munido de estrutura de espaço vetorial sobre K da maneira usual. Dada uma transformação linear $T : V_1 \to V_2$, então o *gráfico* de T:

$$\mathrm{gr}(T) = \big\{\big(x, T(x)\big) : x \in V_1\big\}$$

é um subespaço de V.

(a) (valor 1,0 ponto) Mostre que para qualquer transformação linear $T : V_1 \to V_2$ vale que:

$$V = \mathrm{gr}(T) \oplus \big(\{0\} \times V_2\big).$$

(b) (valor 1,5 pontos) Mostre que se W é um subespaço de V tal que:

$$V = W \oplus \big(\{0\} \times V_2\big)$$

então $W = \mathrm{gr}(T)$ para alguma transformação linear $T : V_1 \to V_2$.

Solução.

(a) Dado $(x, y) \in \mathrm{gr}(T) \cap \big(\{0\} \times V_2\big)$, temos $y = T(x)$ e $x = 0$. Logo $y = T(0) = 0$. Isso mostra que $\mathrm{gr}(T) \cap \big(\{0\} \times V_2\big) = \{0\}$. Agora, dado $(x, y) \in V = V_1 \times V_2$, vale que:

$$(x, y) = \big(x, T(x)\big) + \big(0, y - T(x)\big),$$

sendo $\big(x, T(x)\big) \in \mathrm{gr}(T)$ e $\big(0, y - T(x)\big) \in \{0\} \times V_2$. Portanto:

$$V = \mathrm{gr}(T) + \big(\{0\} \times V_2\big).$$

(b) Denote por $\pi_1 : V \to V_1$, $\pi_2 : V \to V_2$ as projeções do produto cartesiano $V = V_1 \times V_2$ e por $P : V \to W$, $Q : V \to \{0\} \times V_2$ as projeções correspondentes à decomposição $V = W \oplus \big(\{0\} \times V_2\big)$. Dado $x \in V_1$, temos:

$$(x, 0) = P(x, 0) + Q(x, 0).$$

Como a primeira coordenada de $Q(x, 0)$ é nula, segue que a primeira coordenada de $P(x, 0)$ é igual a x. Assim:

$$P(x, 0) = \big(x, T(x)\big), \tag{5}$$

onde T é definida por $T(x) = \pi_2\big(P(x, 0)\big)$. A função $T : V_1 \to V_2$ é linear, sendo igual à composição das aplicações lineares

$$V_1 \ni x \longmapsto (x, 0) \in V,$$

P e π_2. Além do mais, como $P(x, 0) \in W$, segue de (5) que $\big(x, T(x)\big) \in W$ para todo $x \in V_1$, isto é, $\mathrm{gr}(T) \subset W$. Agora, dado $(x, y) \in W \subset V_1 \times V_2$, temos $\big(x, T(x)\big) \in \mathrm{gr}(T) \subset W$ e portanto:

$$(x, y) - \big(x, T(x)\big) = \big(0, y - T(x)\big) \in W \cap \big(\{0\} \times V_2\big) = \{0\},$$

donde segue que $y - T(x) = 0$ e $(x, y) \in \mathrm{gr}(T)$. Logo $W = \mathrm{gr}(T)$.

Solução alternativa para o item (b). Usando a mesma notação que na primeira solução, temos que $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \{0\} \times V_2$. Como $V = \big(\{0\} \times V_2\big) \oplus W$, segue do resultado do item (c) do Exercício 1 da Quarta Lista que

$$\pi_1|_W : W \longrightarrow \mathrm{Im}(\pi_1) = V_1$$

é um isomorfismo. Considere a aplicação linear $T : V_1 \to V_2$ definida por $T = (\pi_2|_W) \circ (\pi_1|_W)^{-1}$. Vamos mostrar que $W = \mathrm{gr}(T)$. Dado $x \in V_1$, seja $w = (\pi_1|_W)^{-1}(x) \in W$. Temos $\pi_1(w) = x$ e

$$\pi_2(w) = \big((\pi_2|_W) \circ (\pi_1|_W)^{-1}\big)(x) = T(x),$$

donde $w = \big(x, T(x)\big)$. Segue que $\big(x, T(x)\big) \in W$, mostrando que $\mathrm{gr}(T) \subset W$. Para mostrar a outra inclusão, seja dado $(x, y) \in W \subset V_1 \times V_2$. Temos $\pi_1(x, y) = x$ e portanto $(\pi_1|_W)^{-1}(x) = (x, y)$. Daí $T(x) = \pi_2(x, y) = y$. Isso mostra que (x, y) pertence a $\mathrm{gr}(T)$ e completa a demonstração.

Questão 3. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munidos de produtos internos. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear.

(a) (valor 1,0 ponto) Assuma que a aplicação linear T admita uma aplicação adjunta $T^\dagger : W \to V$. Mostre que $\mathrm{Ker}(T^\dagger) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^\perp$.

(b) (valor 1,5 pontos) Assuma que os espaços V e W tenham dimensão finita. Mostre que $\mathrm{Im}(T^\dagger) = \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\perp$.

Solução.

(a) Denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ os produtos internos de V e W, respectivamente. Dado $y \in W$, temos que $y \in \mathrm{Ker}(T^\dagger)$ se e somente se $T^\dagger(y) = 0$. Mas $T^\dagger(y) = 0$ é equivalente a $\langle T^\dagger(y), x\rangle_V = 0$, para todo $x \in V$. Como $\langle T^\dagger(y), x\rangle_V = \langle y, T(x)\rangle_W$, concluímos que $y \in \mathrm{Ker}(T^\dagger)$ se e somente se $\langle y, T(x)\rangle_W = 0$, para todo $x \in V$, isto é, se e somente se y pertence a $\big(\mathrm{Im}(T)\big)^\perp$.

(b) Dado $x \in \mathrm{Im}(T^\dagger)$, temos $x = T^\dagger(y)$, para algum $y \in W$. Daí, para todo $x' \in \mathrm{Ker}(T)$, vale que:

$$\langle x, x'\rangle_V = \langle T^\dagger(y), x'\rangle_V = \langle y, T(x')\rangle_W = 0,$$

já que $T(x') = 0$. Isso mostra que $x \in \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\perp$. Assim:

$$\mathrm{Im}(T^\dagger) \subset \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\perp. \tag{6}$$

Vamos calcular as dimensões de $\mathrm{Im}(T^\dagger)$ e de $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\perp$. Em primeiro lugar, como V tem dimensão finita, temos:

$$V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\perp,$$

e portanto:

$$\dim(V) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\Big[\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\perp\Big]; \tag{7}$$

mas T é uma aplicação linear com domínio V e daí:

$$\dim(V) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big). \tag{8}$$

De (7) e (8) vem:

$$\dim\Big[\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^\perp\Big] = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big). \tag{9}$$

Como $T^\dagger$ é uma aplicação linear com domínio W, temos:

$$\dim(W) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T^\dagger)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T^\dagger)\big),$$

e usando o item (a) vem:

$$\dim(W) = \dim\Big[\big(\mathrm{Im}(T)\big)^\perp\Big] + \dim\big(\mathrm{Im}(T^\dagger)\big). \tag{10}$$

Do fato que W tem dimensão finita segue que:

$$W = \mathrm{Im}(T) \oplus \big(\mathrm{Im}(T)\big)^\perp,$$

e portanto:

$$\dim(W) = \dim\big[\big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp}\big] + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big). \tag{11}$$

De (10) e (11) vem:

$$\dim\big(\mathrm{Im}(T^{\dagger})\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big). \tag{12}$$

A conclusão segue de (6), (9) e (12).

Observação. Quando V e W têm dimensão finita, ambos os itens da questão são conseqüência simples da comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd} W^* \arrow[r, "T^*"] & V^* \\ W \arrow[u, "R^W"] \arrow[r, "T^{\dagger}"'] & V \arrow[u, "R^V"'] \end{tikzcd}$$

das igualdades (veja Exercícios 3 e 5 da Segunda Lista):

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\mathrm{o}}, \quad \mathrm{Im}(T^*) = \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\mathrm{o}},$$

e do fato que as aplicações de Riesz R^V e R^W são isomorfismos que relacionam complementos ortogonais com anuladores.

Solução alternativa para o item (b). O item (b) pode ser resolvido assumindo apenas que a aplicação adjunta $T^{\dagger}$ exista e que a imagem de T tenha dimensão finita. A existência de $T^{\dagger}$ é garantida quando V tem dimensão finita e a finitude da dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ é garantida quando ou o espaço V ou o espaço W tiver dimensão finita.

Como na primeira solução, a inclusão abaixo é demonstrada sem usar qualquer hipótese sobre finitude de dimensão:

$$\mathrm{Im}(T^{\dagger}) \subset \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}. \tag{13}$$

De $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp} \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, segue que a restrição de T a $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}$ é uma transformação linear injetora tomando valores em $\mathrm{Im}(T)$; daí:

$$\dim\big[\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\perp}\big] \le \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) < +\infty. \tag{14}$$

O fato que $\mathrm{Im}(T)$ tem dimensão finita garante que:

$$W = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\perp} \oplus \mathrm{Im}(T),$$

e do item (a) vem:

$$W = \mathrm{Ker}(T^{\dagger}) \oplus \mathrm{Im}(T).$$

O resultado do item (c) do Exercício 1 da Quarta Lista nos dá então que a restrição de $T^{\dagger}$ a $\mathrm{Im}(T)$ é um isomorfismo sobre $\mathrm{Im}(T^{\dagger})$; portanto:

$$\dim\big(\mathrm{Im}(T^{\dagger})\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big). \tag{15}$$

A conclusão segue de (13), (14) e (15).

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Sejam W um subespaço de V e Z um subespaço de W. Mostre que o espaço vetorial quociente:

$$\frac{V/Z}{W/Z}$$

é isomorfo a V/W.

Solução. Vamos mostrar que existe uma aplicação linear sobrejetora:

$$T : V/Z \longrightarrow V/W$$

tal que $\mathrm{Ker}(T) = W/Z$. Uma vez mostrada a existência de T, a conclusão seguirá do resultado do Exercício 3 da Quarta Lista. Definimos T fazendo:

$$T(v + Z) = v + W,$$

para todo $v \in V$. A aplicação T está bem definida, pois se $v' \in V$ é tal que $v' + Z = v + Z$, então $v' - v \in Z \subset W$, de modo que $v' + W = v + W$. Além do mais, a aplicação T é linear, já que:

$$\begin{aligned} T\big((v_1 + Z) + (v_2 + Z)\big) &= T\big((v_1 + v_2) + Z\big) \\ &= (v_1 + v_2) + W = (v_1 + W) + (v_2 + W) \\ &= T(v_1 + Z) + T(v_2 + Z), \end{aligned}$$

para todos $v_1, v_2 \in V$ e:

$$T\big(\lambda(v + Z)\big) = T(\lambda v + Z) = \lambda v + W = \lambda(v + W) = \lambda T(v + Z),$$

para todos $v \in V$ e $\lambda \in K$. Para mostrar que a aplicação T é sobrejetora, note que todo elemento de V/W é da forma $v + W$, com $v \in V$, e daí $v + W = T(v + Z)$. Finalmente, dado $v \in V$, temos que $v + Z \in \mathrm{Ker}(T)$ se e somente se $T(v + Z) = v + W = 0$, isto é, se e somente se $v \in W$. Assim:

$$\mathrm{Ker}(T) = \big\{v + Z : v \in W\big\} = W/Z.$$

Observação. Denote por $q : V \to V/W$ e $q' : V \to V/Z$ as aplicações quocientes. Temos $\mathrm{Ker}(q) = W$ e $\mathrm{Ker}(q') = Z$. Como $\mathrm{Ker}(q)$ contém $\mathrm{Ker}(q')$ e como q' é sobrejetora, o resultado do item (a) do Exercício 4 da Segunda Lista nos diz que existe uma única aplicação linear $T : V/Z \to V/W$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "q'"'] \arrow[dr, "q"] & \\ V/Z \arrow[r, "T"'] & V/W \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, tal que $T \circ q' = q$. Em outras palavras, temos que para todo $v \in V$ vale que:

$$T\big(q'(v)\big) = q(v),$$

isto é:

$$T(v + Z) = v + W,$$

para todo $v \in V$. Assim, vemos que usando o resultado do item (a) do Exercício 4 da Segunda Lista obtemos a aplicação linear T necessária para a solução da questão mais diretamente.